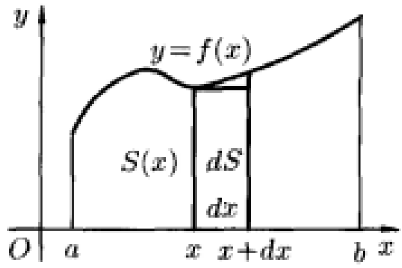
Геометрические приложения определенного интеграла.

1. Вычисление площади плоской фигуры

Ранее было показано, что при помощи определенного интеграла может быть вычислена площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком неотрицаельной на $[a;b]$ функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$



Следует заметить, что в случае неположительной на $[a;b]$ функции $y = f(x)$ интеграл будет отрицательным, и, следовательно,

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

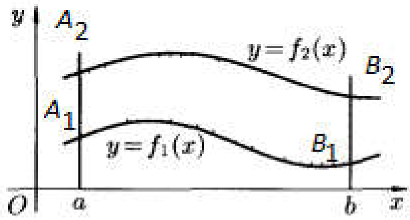
Формулы (1) и (2) можно объединить в одну

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (3)$$

Обобщим полученную формулу на случай произвольной плоской фигуры, расположенной на плоскости *Oxy*.

1. Прямоугольные координаты.

Предположим, что плоская фигура ограничена сверху графиком функции $y = f_2(x)$, снизу графиком функции $y = f_1(x)$, слева и справа прямыми *x=a* и *x=b* соответственно. Можем сказать, что площадь рассматриваемой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b.



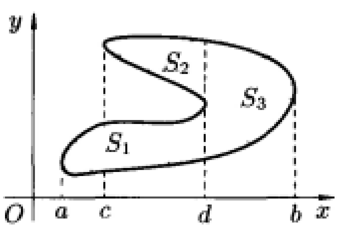
Применяя к вычислению этих площадей (1) и используя свойства определенного интеграла, получим:

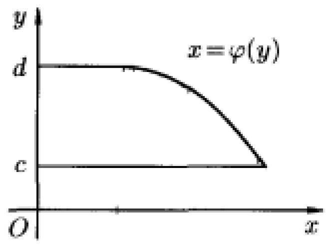
$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx. \qquad (4)$$

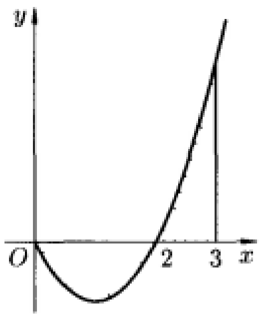
Если плоская фигура имеет более сложную форму, то ее площадь можно вычислить, разбивая на простые составные части применяя к каждой из них формулу (4).

В случае, если границы криволинейной трапеции удобнее описать уравнением $x = \varphi(y)$, то для вычисления ее площади следует составить ортогональную проекцию на ось *Oy*, и формула для вычисления площади примет вид:

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$







Пример 1: найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x$ и осью *Ox*. Описанная фигура имеет вид, представленный на рисунке. Поскольку часть фигурв расположена ниже оси Ох, а часть выше, то формула для вычисления площади имеет вид:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 = 2\frac{2}{3}.$$

2. Прямоугольные координаты, параметрическое задание.

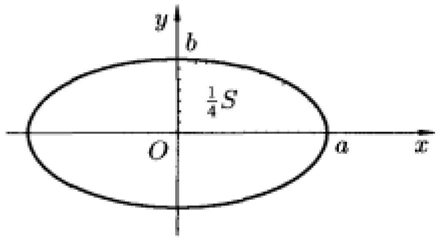
Предположим, что кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \text{где } t\epsilon[\alpha;\beta].$$

Тогда, используя формулу замены переменной в определенном интеграле, получим

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \tag{5}$$

Пример 2: вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.



Заметим, что наиболее удобным для интегрирования является параметрическое задание эллипса

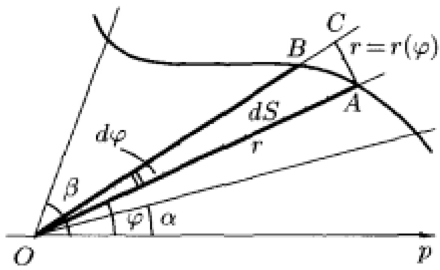
$$\begin{cases} x = a\text{cos}t, \\ y = b\text{sin}t, \end{cases} \text{где } t\epsilon[0;2\pi].$$

В силу симметрии эллипса, фигура также будет симметрична относительно корорджинатных осей. Поэтому удобно вычислить площадь ¼ частиэллипса в пределах $t\epsilon\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и умножить получившийся результат на 4.

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\text{sin}t(b\text{cos}t)'dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{sin}^2 t dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\text{cos}2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

3. Полярные координаты.

Кривая, ограничивающая плоскуюфигуру, может быть задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, а также лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. В этом случае правилнее вести речь о площади криволинейного сектора.



Согласно школьному курсу геометрии, площадь кругового сектора с раствором $\Delta\varphi$ равна

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi.$$

Если рассматриваемый криволинейный сектор разбить на частичные круговые секторы путем разбиения кривой на частичные дуги и последующей заменой дуги кривой на дугу окружности радиуса $r_i = r(\varphi_i)$, то при составлении сумм площадей круговых секторов придем к интегральной сумме

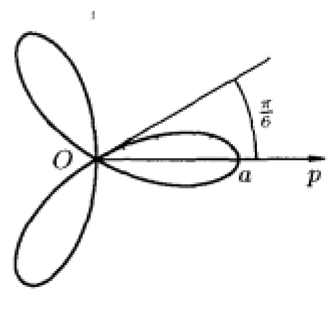
$$S \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i.$$

Откуда, пелреходя к пределу последовательности интегральных сумм, получаем формулу площади

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \tag{6}$$

Пример 3:вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = a\text{cos}3\varphi$.

Прежде всего следует построить плоскую фигуру а ПДСК. Для этого совмести полярную ось с осью Ox, а полюс с началом координат в ПДСК. При этом очевидно, что кривая существует не при всех значениях аргумента, а также, что кривая имеет три оси симметрии. Поэтому можем вычислить площадь половины одного лепестка, и полученный результат умножить на 6.



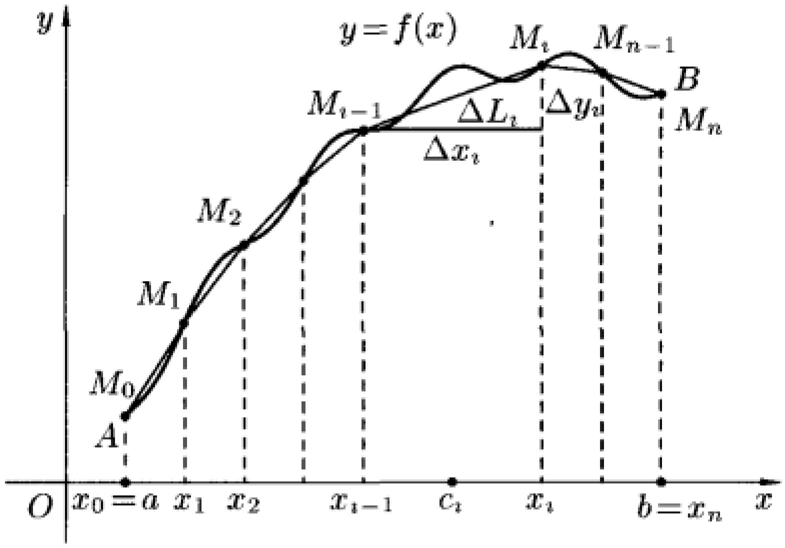
$$S = 6 * \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\text{cos}6\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}sin6\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

2. Длина дуги плоской кривой

1. Прямоугольные декартовы координаты

Пусть в прямоугольных декартовых координатах плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$ при $a \le x \le b$. Поставим задачу вычислить длину дуги AB.



Для этого протзвольными точками M_1, M_2, …, M_{n-1} дугу AB разобьем на частичные дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$ и каждую из частичных дуг заменим отрезком M_1M_2. Тогда вместо дуги получим ломаную с вершинами в точках M_0, M_1, M_2, …, M_{n-1}, M_n, длина которой при ближено описывает длину кривой AB, причем точность приближения будет тем выше, чем больше число разбиений n.

Длина каждого звена $M_{i-1}M_i$ ломаной может быть определена по теореме Пифагора:

$$\Delta l_i = \sqrt{{\Delta x_i}^2 + {\Delta y_i}^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\Delta x_i. \tag{7}$$

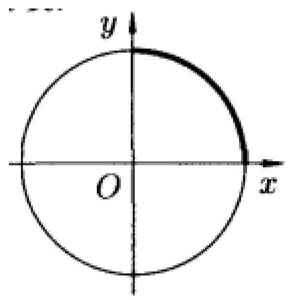
Следовательно длина всей ломаной будет представлять собой интегральную сумму для функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y')^2}\Delta x_i.$$

Тогда длина кривой AB

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y')^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \tag{8}$$

Пример 4: Найти длину окружности радиуса R.



Расположим окружность в ПДСК, совместив ее центр с началом координат. Окружность будет симметрична относительно координатных осей, поэтому мы можем вычислить длину четверти окружности, расположенной в первом квадранте, и полученный результат умножить на 4. Уравнение четверти окружности запришем в виде

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, при $0 \le x \le R$.

Воспользуемся формулой (8), предварительно просчитав производную:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Тогда

$$L = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4\, R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R.$$

2. Плоская кривая задана параметрически

уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $t\epsilon[\alpha;\beta]$, и функции $x(t)$, $y(t)$ - непрерывно дифференцируемы, то длина кривой AB

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (9)$$

Пример 5. Решим пример 4, взяв в качестве уравнения окружности параметрические уравнения $\begin{cases} x = Rcost, \\ y = Rsint, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-Rsint)^2 + (Rcost)^2}\,dx = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos^2x + sin^2x}\,dx = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = 4Rx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R.$$

3. Плоская кривая в полярных координатах задана уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi\epsilon[\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая на $[\alpha;\beta]$ функция.

Формулы преобразования декартовых координат в полярные

$$\begin{cases} x = rcos\varphi, \\ y = rsin\varphi \end{cases}$$

Можно рассматривать как параметрическое задание кривой отностительноа параметра φ:

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)cos\varphi, \\ y(\varphi) = r(\varphi)sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда можем использовать формулу (9) для вычисления длины дуги:

$$L_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'cos\varphi - rsin\varphi)^2 + (r'sin\varphi + rcos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r)^2 + (r')^2}\,d\varphi. \qquad (10)$$

Пример 5: Вычислить длину дуги кардиоиды $r = a(1 + cos\varphi)$.

Очевидно, что каодиоида симметрична относительно полярной ося, поэтому посчитаем длину ее половины при $\varphi\epsilon[0;\pi]$ и умножим на 2.

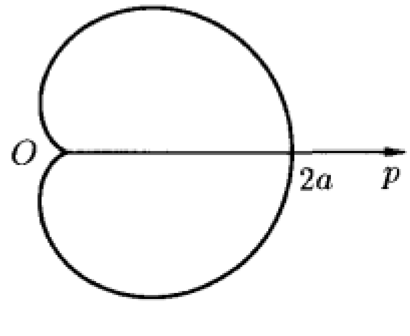
$$L_{AB} = \int_0^{\pi}\sqrt{(a(1 + cos\varphi))^2 + \left(\left(a(1 + cos\varphi)\right)'\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi}\sqrt{(1 + cos\varphi)^2 + (-sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi}\sqrt{1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi + sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

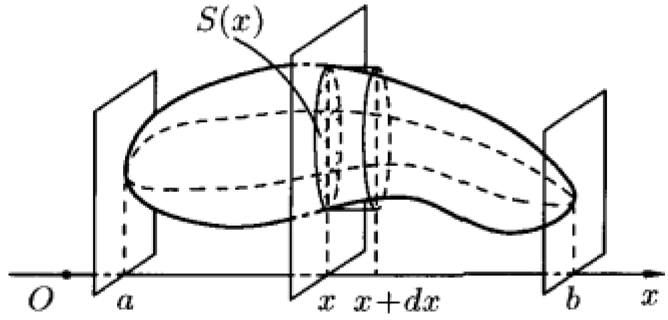
$$= a\int_0^{\pi}\sqrt{2 + 2cos\varphi}\,d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$$

$$== 2a\int_0^{\pi}cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4asin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$



3. *Вычисление объемов тел.*

1. По заданным площадям поперечных сечений.

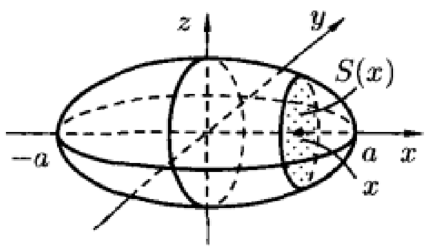


Требуется найти объем некоторого тела, для которого при всех $a \le x \le b$ известны величины $S(x)$ сечений плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Будем считать функцию $S(x)$ непрерывной и нерперывно дифференцируемой при $a \le x \le b$. Рассечем подобными плоскосиями тело на частичные области, и каждую из такиз областей заменим цилиндрическим телом с высотой Δx и основанием площадью $S(x)$. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что интегральная сумма для функции $S(x)$ по отрезку $[a; b]$ дает приближенное значение объема тела. А точное значение объема определяется определенным интегралом

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{11}$$

Пример Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

❍ Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее $(-a \leqslant x \leqslant a)$, получим эллипс



$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} = 1.$$

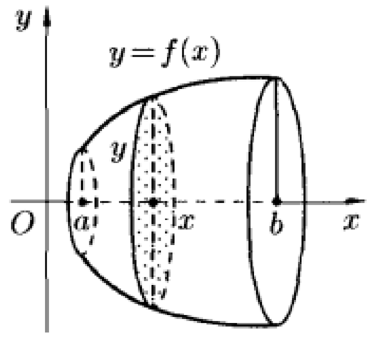
Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле имеем

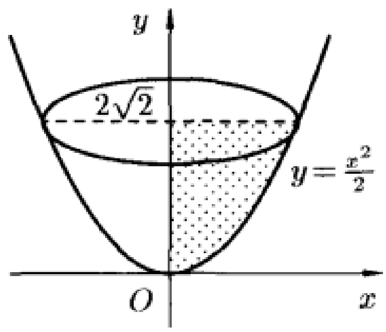
$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$ ●

2. Объем тела вращения.

Прусть вокруг оси Ох вращается криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком неотрицательной на $[a; b]$ функции $y = f(x)$. Слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ соответственно. При пересечении этого тела вращения плоскостью $x = x_i$, перпендикулярой оси Ox, в сечении получается круг раiиуса $f(x_i)$, площадь которого равна $S(x_i) = \pi f^2(x_i)$. Тогда, согласно (11),

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{12}$$





Пример Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy

❍ Решение: По формуле находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$ ●