4. Приложения степенных рядов

4.1. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Приближенное вычисление значения функции в точке.

Пример. Вычислить $\cos 10^{\circ}$ с точностью до 0,0001.

Решение

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^{\circ} = 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2!} + \frac{(0{,}17453)^4}{4!} + \ldots.$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0{,}17453)^4}{4!} < 0{,}0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2| < |u_3| < 0{,}0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^{\circ} \approx 1 - 0{,}01523;$$

$$\cos 10^{\circ} \approx 0{,}9848.$$

4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^{0{,}25} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение e^x вместо x выражение $-x^2$, получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx=\int_0^{0,25}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=x\Big|_0^{0,25}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,25}+\frac{x^5}{10}\Bigg|_0^{0,25}-\frac{x^7}{42}\Bigg|_0^{0,25}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}+\ldots.$$

Так как

$$\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}<0,001,$$

то

$$\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{192}=0,245.$$

4.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Рассмотрим на примерах два метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения,

$$y' = x^2 + y,\ \ y(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

Решение

Решение будем искать в виде ряда:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots.$$

Продифференцируем последнее равенство по x

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots.$$

Подставим $y(x), y'(x)$ в данное по условию уравнение и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots = x^2 + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots,$$

$$x^0 : c_1 = c_0,$$

$$x^1 : 2c_2 = c_1,$$

$$x^2 : 3c_3 = c_2 + 1,$$

$$x^3 : 4c_4 = c_3,\ \ldots\ .$$

Определяем коэффициенты:

$$c_0 = y(0) = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{2},\ c_4 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.$$

Метод последовательного дифференцирования

Метод последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1,\ y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

Решение

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Вычислим значения производных $y'(0),\ y''(0),\ y'''(0),\ \ldots$:

$$y'(x) = x^2 y^2 - 1,\ y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy',\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(yy')' =$$

$$= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'',\ y'''(0) = 2,\ \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \ldots.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 10^{-4}.

Ответ. 0,9511.

2. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[4]{630}$ с точностью до 10^{-4}.

Ответ. 5,0100.

3. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int\limits_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

Ответ. 0,2483 с точностью до 10^{-4}.

4. Взяв шесть членов разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

Ответ. 0,747 с точностью до 10^{-3}.

5. Найти первые четыре члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2 \qquad y(0) = 2.$$

Ответ. $y(x) = 2 + 4x + \frac{19}{2}x^2 + \frac{56}{3}x^3 + \ldots$.

6. Найти первые три члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' = xy' - y + e^x \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Ответ. $y(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \ldots$