# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ (ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА)

## 1.1. Скалярное поле

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если с каждой точкой $P(x,y,z)$ некоторой пространственной области $G$ связана скалярная величина, то говорят, что **в области $G$ задано скалярное поле**: $u = f(x,y,z)$, где $f(x,y,z)$ – скалярная функция, называемая **функцией поля**.

Примеры скалярных полей: поле температур, давления, плотности, концентраций, электрического потенциала. Рассмотрим подробнее последний пример.

Пусть речь идет о точечном заряде $q$. Потенциал электростатического поля заряда $q$, помещенного в начало координат, задается в каждой точке пространства $M(x,y,z)$ с радиус-вектором $\vec{r}(x,y,z)$, за исключением начала координат, функцией поля вида:

$$u = \frac{q}{r} = \frac{q}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Заметим, что если $\left|\vec{r}\right| = \mathrm{const}$, $x^2+y^2+z^2 = const$ – уравнение сферы. Следовательно, в точках, принадлежащих сфере, потенциал электростатического поля сохраняет свое значение, или $u = const$.

Ограничимся рассмотрением так называемых стационарных полей, т. е. полей, не зависящих от времени.

## 1.2. Поверхности и линии уровня

В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагаем функцию $u = f(x,y,z)$ однозначной и непрерывно-дифференцируемой.

Рассмотрим точки области, в которой функция $u = f(x,y,z)$ принимает постоянные значения: $f(x,y,z) = c$ $(c = const)$. Это уравнение можно рассматривать как уравнение некоторой поверхности в пространстве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Геометрические места точек $P(x,y,z)$, где скалярное поле принимает одно и то же значение $f(x,y,z) = c$, называются **поверхностями уровня** или эквипотенциальными поверхностями.

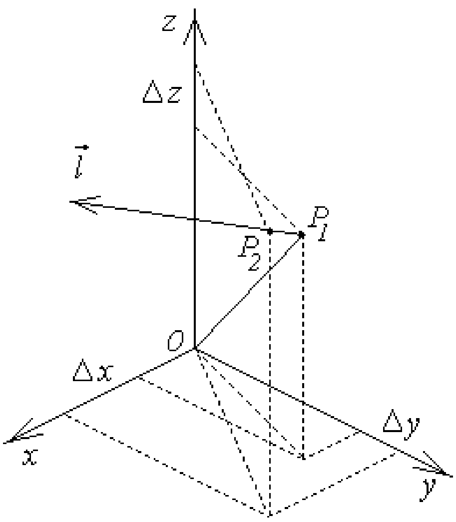
В ранее рассмотренном примере поля точечного заряда поверхности уровня – концентрические сферы различного радиуса.

В силу однозначности функции $u = f(x,y,z)$ поверхности уровня, соответствующие различным значениям $c$, не пересекаются между собой.

Скалярное поле называется **плоским**, если при подходящем выборе системы координат функция поля зависит только от двух переменных. Множество точек плоскости $P(x,y)$, для которых $f(x,y)=c$, называется **линией уровня** плоского скалярного поля.

### 1.3. Производная по направлению

Пусть в пространственной области $G$ задано скалярное поле: $u=u(x,y,z)=u(P)$. Рассмотрим точку $P_1(x,y,z)$ и исходящий из нее вектор $\vec{l}=\{l_x;l_y;l_z\}$. Найдем, как изменяется поле в направлении вектора $\vec{l}$. Сместимся из точки $P_1(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ в точку $P_2(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$. Обозначим через $\Delta\rho$ длину вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$: $\Delta\rho=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$, тогда $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. При этом функция поля получит приращение




$$\Delta u=u(P_2)-u(P_1)=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)=$$
$$=du+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\theta(\Delta\rho),$$

где $\theta(\Delta\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка по $\Delta\rho$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0$ при $\Delta x,\Delta y,\ \Delta z\to 0$, а величина $\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}=V_{cp}$ – средняя скорость изменения скалярной функции $u(P)$ в направлении вектора $\vec{l}$.

$$\frac{\Delta u}{\Delta\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta\rho}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta\rho}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta\rho}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta\rho\to 0$, что соответствует стремлению $P_2\to P_1$:

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$. Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2}\parallel\vec{l}$, то их направляющие косинусы равны. Поскольку $\vec{l}=l_x\vec{i}+l_y\vec{j}+l_z\vec{k}$, то

$\cos\alpha=\dfrac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos\beta=\dfrac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{l_z}{|\vec{l}|}$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Производной функции $u$ в точке $P(x,y,z)$ (обозначение $\frac{\partial u}{\partial l}$) по направлению вектора $\vec{l}$ называется предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$ (если он существует), равный $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

Производная по направлению $\vec{l}$, $\frac{\partial u}{\partial l}$, определяет скорость изменения скалярного поля в направлении вектора $\vec{l}$, в частности, если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, поле возрастает, если $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, поле убывает.

ПРИМЕР. Найдите производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $P$ (1,1,1) в направлении вектора $\vec{\ell} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, если $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение:

$$u'_x\big|_P = 2x\big|_P = 2,\ u'_y\big|_P = 2y\big|_P = 2,\ u'_z\big|_P = 2z\big|_P = 2;\ \left|\vec{\ell}\right| = \sqrt{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\gamma \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$\frac{\partial u}{\partial \ell} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, следовательно, скалярное поле возрастает.

### 1.4. Градиент скалярного поля

Пусть задано скалярное поле $u(x,y,z)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Градиентом скалярного поля** $u$ в точке $P(x,y,z)$ называется вектор, обозначаемый символом $grad\, u$ и определяемый равенством

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Введем символический вектор “набла”, или оператор Гамильтона

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Этот символ $\vec{\nabla}$ используется для записи операций векторного анализа в сокращенной и удобной для расчётов форме. Выражение вида $\vec{\nabla} u(x,y,z)$ понимается как результат действия оператора на соответствующую функцию.

Тогда

$$\vec{\nabla} u(x,y,z) = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = u'_x\vec{i} + u'_y\vec{j} + u'_z\vec{k},$$

$$grad\, u = \vec{\nabla} u\,.$$

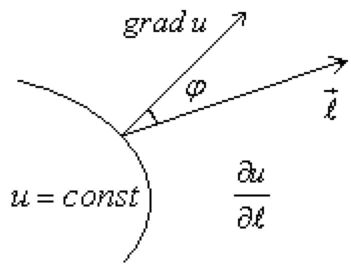
Более детально использование вектора-оператора “набла” для записи и выполнения различных дифференциальных операций будет обсуждаться ниже.

### *1.4.1. Связь производной по направлению с градиентом*

Ранее было получено выражение для производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Введем $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор (орт) в направлении $\vec{l}$. Выражение для производной по направлению может быть записано в виде




$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\vec{\nabla} u \cdot \vec{l_0}) = \left|\vec{\nabla} u\right| \cdot \left|\vec{l_0}\right| \cdot \cos\varphi = \left|grad\, u\right| \cdot \cos\varphi,$$

где $\varphi$ – угол между единичным вектором $\vec{l}_0$ данного направления $\vec{l}$ и вектором градиента $grad\, u$, т. е. производная по направлению вектора $\vec{l}$ в точке $P(x,y,z)$ равна проекции градиента на данное направление.

Если $grad\, u = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$. Если $grad\, u \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial l} < \left|grad\, u\right|$ для всех векторов $\vec{l}$, за исключением вектора $\vec{l}$, направленного в сторону $grad\, u$.

### *1.4.2. Свойства градиента*

Пусть заданы производная поля по направлению и градиент поля:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,;$$

$$\vec{\nabla} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \qquad \left|\vec{\nabla} u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,.$$

1. Максимальное значение производной по направлению равно модулю градиента: $\frac{\partial u}{\partial l} = \left|gradu\right| \cdot \cos\varphi$; $\varphi \to 0; \cos\varphi \to 1 \Rightarrow \max\frac{\partial u}{\partial l} = \left|grad\, u\right|$.
2. Вектор $\vec{\nabla} u$ направлен в сторону возрастания поля.
3. Вектор $\vec{\nabla} u$ всегда нормален к поверхности (линии) уровня поля (эквипотенциальной поверхности).

**Доказательство:**

Пусть $u = u(x, y, z)$ скалярное поле и $u(x, y, z) = c$ – уравнение поверхности уровня. Выберем произвольную точку поверхности $P \in \{u(x, y, z) = c\}$, которую обозначим $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, и проведём касательную плоскость в точке $P$ к поверхности, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0\,;$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x-\bar{x})+\dfrac{\partial F}{\partial y}(y-\bar{y})+\dfrac{\partial F}{\partial z}(z-\bar{z})=0$ – уравнение касательной плоскости;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x-\bar{x})+\frac{\partial u}{\partial y}(y-\bar{y})+\frac{\partial u}{\partial z}(z-\bar{z})=0\,.$$

Тогда вектор нормали касательной плоскости имеет вид:

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\},\qquad \vec{n}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\vec{\nabla}u\,.$$

Свойства 1–3 дают **инвариантное** (не зависящее от системы координат) определение градиента, т. е. утверждают, что независимо от системы координат $\vec{\nabla}u$ указывает величину и направление наибольшего возрастания скалярного поля в точке: $|grad\,u| = max\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

Дифференциальные свойства градиента:

- Если скалярное поле есть сумма двух полей,
  $f=(x,y,z)=u(x,y,z)+v(x,y,z)$, то $\vec{\nabla}f=\vec{\nabla}(u+v)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v$.
- $\vec{\nabla}(u\cdot v)=(\vec{\nabla}u)v+u(\vec{\nabla}v)$.
- $\vec{\nabla}c\cdot u=c\vec{\nabla}u$.
- $\vec{\nabla}f(u)=f'_u\cdot\vec{\nabla}u$ – градиент сложной функции.
- $\vec{\nabla}f(u,v)=f'_u\cdot\vec{\nabla}u+f'_v\cdot\vec{\nabla}v$.

ПРИМЕР. Найдите наибольшую крутизну подъёма поверхности $u = x^y$ в точке $P$ (2,2,4).

Решение: $|grad\,u| = max\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

$$\vec{\nabla}u=u'_x\vec{i}+u'_y\vec{j}+u'_z\vec{k}=yx^{y-1}\vec{i}+x^y\ln x\,\vec{j}+0\vec{k}\,,$$

$$\left|\vec{\nabla}u\right|_P=\sqrt{(yx^{y-1})^2+(x^y\ln x)^2}\,\Big|_P=\sqrt{(2\cdot 2)^2+(4\ln 2)^2}=4\sqrt{1+\ln^2 2}\,.$$

ПРИМЕР. Найдите нормаль к поверхности $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $P(1,1,1)$.

Решение: По свойству 3 $\vec{n} \parallel \vec{\nabla} u$, $grad\, u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

$$\vec{\nabla} u\Big|_P = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\Big|_P = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \{2,2,2\} \Rightarrow \overrightarrow{n_0} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

ПРИМЕР. Найдите градиент модуля разности радиус-векторов

$$u(x,y,z) = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

где $\vec{r} = \{x,y,z\}$ и $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – радиус-векторы точек $P(x,y,z)$ и $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ($P_0$ рассматривается как фиксированная точка).

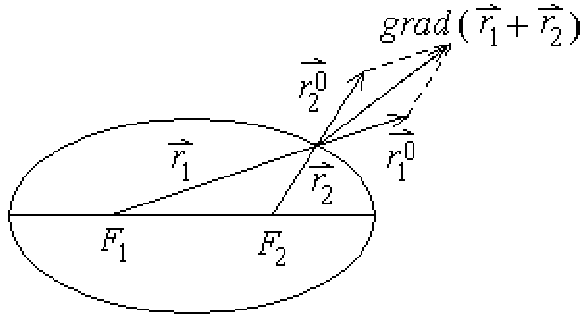
Решение:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \frac{\{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

– единичный вектор направления вектора $P_0 P$.

Используя этот результат, рассмотрим двумерный случай и выведем известное оптическое свойство эллипса: свет от источника, помещенного в один из фокусов эллипса, концентрируется во втором фокусе.

Введем скалярную функцию $u(P) = r_1 + r_2$, где $r_1$, $r_2$ – расстояния от точки плоскости $P$ до фиксированных точек плоскости $F_1$, $F_2$; ее линиями уровня являются эллипсы. Из рассмотренного примера

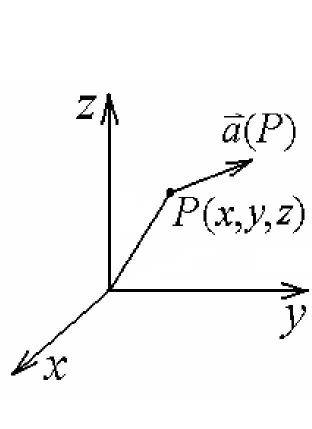



$$grad\, u = grad(r_1 + r_2) = \overrightarrow{r_1^0} + \overrightarrow{r_2^0},$$

т. е. градиент равен диагонали ромба, построенного на ортах радиус-векторов, проведенных к точке $P$ из фокусов $F_1$ и $F_2$. Так как диагональ ромба является и биссектрисой, то нормаль к эллипсу в какой-либо точке делит пополам угол между ее фокальными радиусами. Используя известный закон оптики: угол падения равен углу отражения, получаем физическую интерпретацию: луч света, вышедший из одного фокуса, попадает в другой фокус.

### 1.5. Векторное поле

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если с каждой точкой $P(x;y;z)$ пространственной области $G$ связана векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x,y,z)$, то говорят, что в области $G$ задано векторное поле.

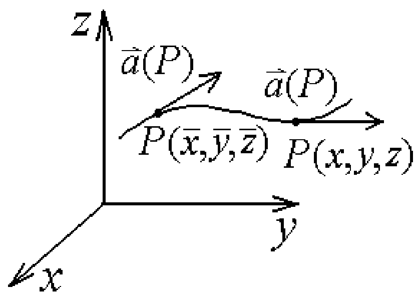



Векторное поле определяется тремя скалярными характеристиками – координатами вектора $\vec{a}$,

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, или $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $a_x = a_x(x,y,z)$, $a_y = a_y(x,y,z)$, $a_z = a_z(x,y,z)$ – проекции векторного поля на оси координат или компоненты вектор-функции. Будем считать, что они непрерывны и дифференцируемы по всем переменным.

*1.5.1. Векторные линии*

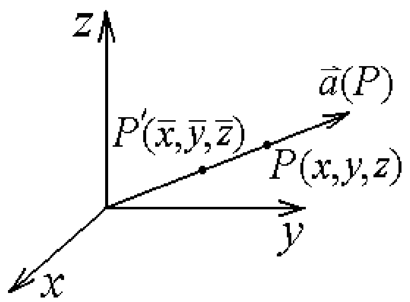
Векторное поле можно изобразить графически, указав положение вектора $\vec{a}$ в некоторых точках.




**ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторной линией поля** $\vec{a} = \vec{a}(P)$ в области $G$ называется кривая, в каждой точке которой вектор $\vec{a}$ направлен по касательной к этой кривой.

Найдём уравнения векторных линий.

Предположим, что векторные линии есть прямые, тогда их уравнения:




$$\frac{x-\bar{x}}{a_x} = \frac{y-\bar{y}}{a_y} = \frac{z-\bar{z}}{a_z}, \; \frac{\Delta x}{a_x} = \frac{\Delta y}{a_y} = \frac{\Delta z}{a_z}.$$

Так как любую кривую можно на бесконечно малом участке величины $\overrightarrow{dr} = (dx, dy, dz)$ заменить отрезком касательной, а направление касательной совпадает с направлением $\vec{a}$, то уравнения векторной линии имеют вид:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

На самом деле речь идет о системе дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y}{a_x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_z}{a_x}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{a_z}{a_y}.$$

Общее решение этой системы: $\begin{cases} \phi_1(x,y,z) = C_1; \\ \phi_2(x,y,z) = C_2 \end{cases}$ определяет двухпараметрическое семейство линий и дает совокупность всех векторных линий поля.

ПРИМЕР. Поле задано вектором: $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$. Найдите векторную линию поля, проходящую через точку $P(1,0,0)$.

Решение:

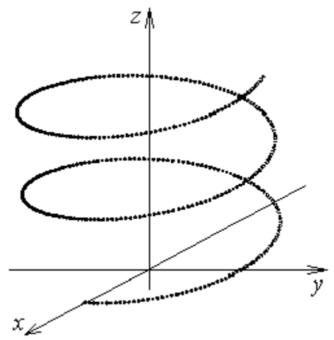
Уравнение векторных линий $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{b}$.

1) $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x}$, $xdx = -ydy$, $xdx + ydy = 0$, $x^2 + y^2 = c_1^2$ – уравнение окружности.

Перейдем к параметрическим уравнениям окружности: $\begin{cases} x = c_1 \cos t, \\ y = c_1 \sin t. \end{cases}$.

2) $\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{b}$, $bdy = xdz$, $bc_1 \cos t dt = c_1 \cos t dz$, $dz = bdt$. Общее решение системы (семейство векторных линий):

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t, \\ y = c_1 \sin t, \\ z = bt + c_2. \end{cases}$$

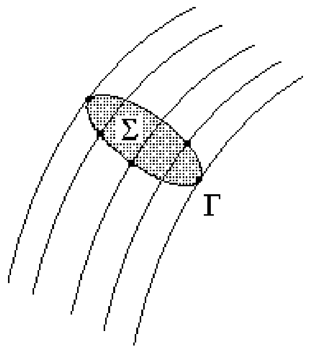



Найдем уравнение векторной линии, проходящей через точку $P(1,0,0)$:

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

– уравнение винтовой линии.

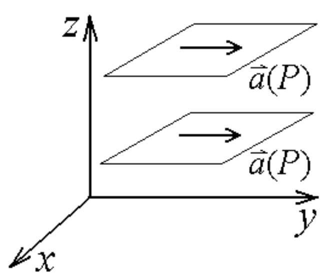
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть в векторном поле $\vec{a}$ расположена произвольная площадка $\Sigma$, ограниченная замкнутым контуром $\Gamma$. Проведём через границу этой площадки векторные линии. Образуемая при этом фигура называется **векторной трубкой** (при этом векторные линии, проходящие через $\Sigma$, целиком лежат внутри векторной трубки).




*1.5.2. Плоское векторное поле*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Векторное поле называется плоским, если все вектора лежат в параллельных плоскостях.
Уравнение векторных линий (для случая, когда векторы поля параллельны координатной плоскости $Oxy$)

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{0}.$$




В плоском поле векторные линии есть плоские кривые вида $y = \varphi(x)$ или $f(x, y) = 0$.