

5. Ряды Фурье

5.1. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле

При изучении периодических процессов, то есть процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются, целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Функциональный ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (5.1)$$

называется **тригонометрическим рядом**.

Действительные числа $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ называются **коэффициентами** тригонометрического ряда.

Запишем формулы, которые в дальнейшем понадобятся.

Пусть m и n являются целыми положительными числами, тогда имеют место следующие формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0, & (n \neq 0), \\ \left. x \right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0); \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ при любом } n; \quad (5.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n); \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx = 0; \quad (5.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n). \end{cases} \quad (5.6)$$

Формулы (5.2)–(5.6) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

обладают **свойством ортогональности**: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π , равен нулю.

Формулы (5.2)–(5.6) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$.

Пусть функция $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π . Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.7)$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π , то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π . В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (можно взять отрезок $[0; 2\pi]$). Предположим, что ряд (5.7) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Найдем коэффициенты a_n и b_n , проинтегрировав обе части равенства (5.7) в пределах от $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0.\end{aligned}$$

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \quad (5.8)$$

Умножим обе части равенства (5.7) на $\cos mx$ и проинтегрируем полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \right).\end{aligned}$$

Пусть $m = n$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi.$$

Получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

Аналогично, умножив, равенство (5.7) на $\sin mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π , найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

Тригонометрический ряд (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.8)–(5.10), называется **рядом Фурье** функции $f(x)$.

Числа $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$, определяемые по формулам (5.8)–(5.10), называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$.

Для функции $f(x)$ интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ записывают:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

Рассмотрим условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой функцию $f(x)$.

Функции, которые имеют период $T = 2\pi$ называют **2π -периодическими** функциями.

Теорема Дирихле

Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Условия 1 и 2 Теоремы Дирихле называются **условиями Дирихле**.

Итак, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет место разложение (5.7):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.8)–(5.10). Равенство (5.7) может нарушаться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0; 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (5.7), где коэффициенты определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, то есть теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.1).

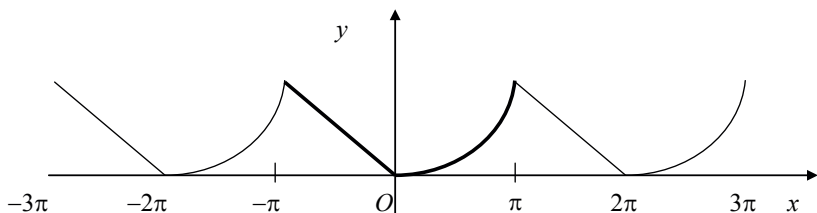


Рис. 5.1

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx = \frac{5}{6} \pi; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3}, \\
b_n &= \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^3}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^3} \sin(2n-1)x \right).$$

5.2. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье

Если разлагаемая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция $f(x)$ является четной (или нечетной), то вычисление коэффициентов Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ четная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (5.11)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Пусть функция $f(x)$ нечетная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (5.13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Ряды (5.11) и (5.13) называются **неполными** тригонометрическими рядами, или рядами **по косинусам** и **по синусам** соответственно.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.2).

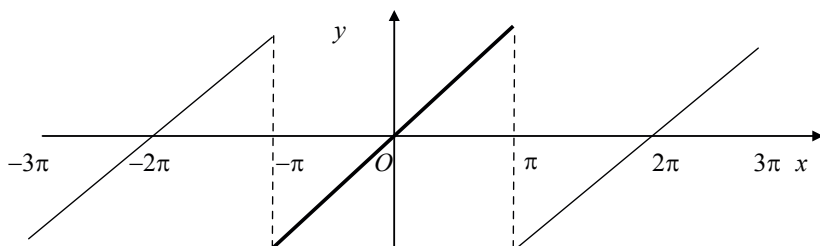


Рис. 5.2

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi; \pi)$ функция $f(x) = x$ нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Вычислим коэффициенты b_n по формуле (5.14)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n},$$

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

В интервале $(-\pi; \pi)$ это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, то есть в данном случае в всех внутренних точках интервала $(-\pi; \pi)$. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках же разрыва, которыми являются точки $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-0} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.

Из полученного разложения при $x = \frac{\pi}{2}$ можно получить интересную сумму

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.3).

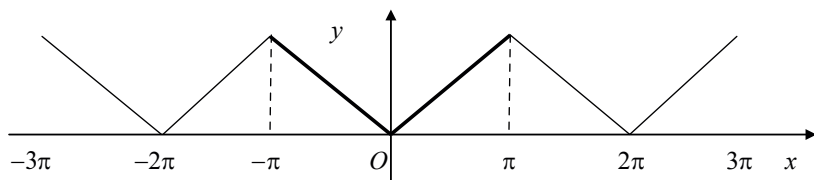


Рис. 5.3

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi; \pi)$ функция $f(x) = |x|$ четная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только постоянную составляющую и косинусы, а при синусах все коэффициенты $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Вычислим коэффициенты a_n по формулам (5.12)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).$$

Если n — четное число, то $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2k} = 0$, а если n — нечетное число, то $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$.

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos x}{1^2} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos 5x}{5^2} - \dots,$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Так как функция $f(x)=|x|$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то полученный ряд сходится к $|x|$ при всех значениях x из этого отрезка, а вне этого отрезка — к периодическому продолжению этой функции.

Из полученного ряда можно получить интересную сумму. Пусть $x=0$, тогда

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

умножая обе части этого равенства на $\frac{\pi}{4}$, получим

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

5.3. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ ($f(x+2l)=f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделаем подстановку $x = \frac{l}{\pi}t$. Преобразуем функцию $f(x)$ в функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right), \quad (5.15)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.17)$$

Ряд (5.15) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (5.16), (5.17), называется **рядом Фурье** для **функции** $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

Замечание

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ четная, то ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l}, \quad (5.18)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5.19)$$

если функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad (5.20)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.4).

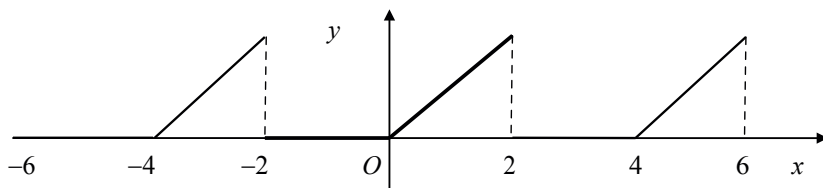


Рис. 5.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты a_n вычислим по формуле (5.16)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 x \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Вычислим отдельно a_0 .

$$a_0 = 1.$$

Коэффициенты b_n вычислим по формуле (5.17)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 x \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения коэффициентов a_0 , a_n , b_n в ряд (5.15), учитывая, что $l = 2$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi n x}{2}}{2}.$$

Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть функция $f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x . Но, непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a; b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a; b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b - a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leq x \leq l$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a; b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0; l]$. (Это частный случай: нача-

ло координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a; b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0; l]$, где $l = |b - a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l; 0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l; l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд функции $f(x)$ при $x \in [0; l]$.

Разложение в ряд косинусов функции, заданной на отрезке $[0; l]$

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно оси ординат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$. Тогда получится график четной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0; l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд косинусов по формуле (5.18).

Разложение в ряд синусов функции, заданной на отрезке $[0; l]$

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится нечетная функция с перио-

дом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно начала координат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$ и добавим точки с координатами nl (где n — любое целое число). Тогда получится график нечетной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0; l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении нечетных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд синусов по формуле (5.20).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; l]$ имеет одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва I рода функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равно одному и тому же числу:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Замечание

Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0; l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0; \pi]$. Такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (5.11), (5.13)).

Пример. Разложить в ряд Фурье по синусам следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4h}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -\frac{4h}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right), & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}l, \\ \frac{4h}{l} (x - l), & \frac{3}{4}l \leq x \leq l. \end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ (рис. 5.5).

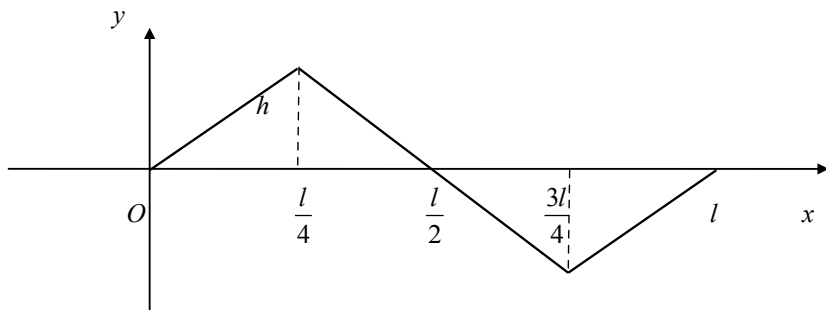


Рис. 5.5

Функция данного вида встречается в теории свободных колебаний конечной струны.

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-l; 0]$ нечетным образом. Коэффициенты a_0, a_n будут равны нулю. Коэффициенты b_n определим по формуле (5.21):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left(\int_0^{l/4} \frac{4h}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{l/4}^{3l/4} -\frac{4h}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{3l/4}^l \frac{4h}{l} (x - l) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= -\frac{32h}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n}{4}. \end{aligned}$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.20), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{32h}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n}{4} \sin \frac{\pi n x}{l} = \\ &= -\frac{32h}{\pi^2} \left(\frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2} - \frac{\sin \frac{6\pi x}{l}}{6^2} + \frac{\sin \frac{10\pi x}{l}}{10^2} - \frac{\sin \frac{14\pi x}{l}}{14^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам следующую функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < \pi.$$

Решение

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi; 0]$ четным образом (рис. 5.6).

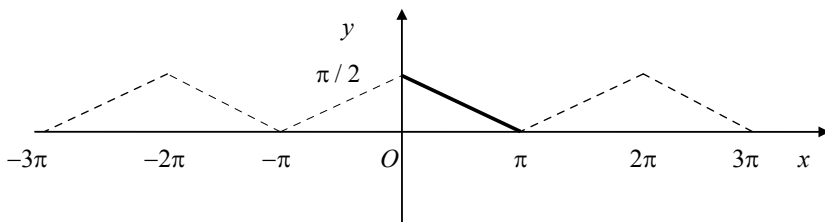


Рис. 5.6

Так как функцию требуется разложить в ряд по косинусам, то коэффициенты b_n равны нулю. Коэффициенты a_0, a_n определим по формулам (5.12):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2} (1 - \cos \pi n).$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.11), получим

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right),$$

$$\text{где } 0 < x < \pi \left(S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}, S(\pm\pi) = \frac{0+0}{2} = 0 \right).$$

