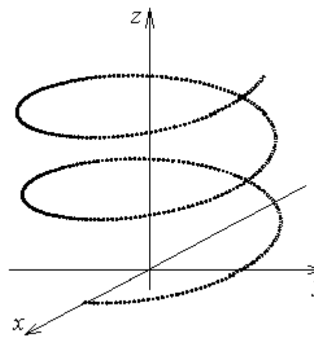
Перейдем к параметрическим уравнениям окружности: $\begin{cases} x = c_1 \cos t, \\ y = c_1 \sin t. \end{cases}$.

2) $\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{b}$, $bdy = xdz$, $bc_1 \cos t dt = c_1 \cos t dz$, $dz = bdt$. Общее решение системы (семейство векторных линий):

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t, \\ y = c_1 \sin t, \\ z = bt + c_2. \end{cases}$$

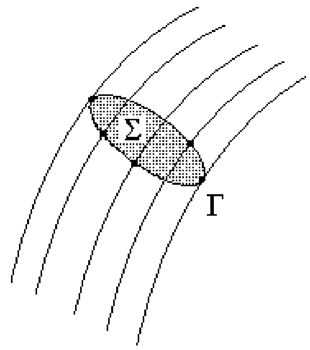


Найдем уравнение векторной линии, проходящей через точку $P(1,0,0)$:

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

– уравнение винтовой линии.

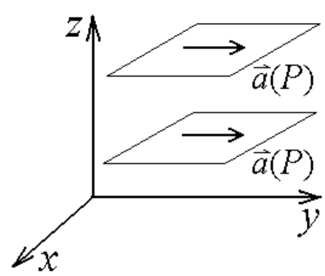
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в векторном поле $\vec{a}$ расположена произвольная площадка Σ, ограниченная замкнутым контуром Γ. Проведём через границу этой площадки векторные линии. Образуемая при этом фигура называется **векторной трубкой** (при этом векторные линии, проходящие через Σ, целиком лежат внутри векторной трубки).



1.5.2. Плоское векторное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное поле называется плоским, если все вектора лежат в параллельных плоскостях.
Уравнение векторных линий (для случая, когда векторы поля параллельны координатной плоскости Oxy)

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{0}.$$



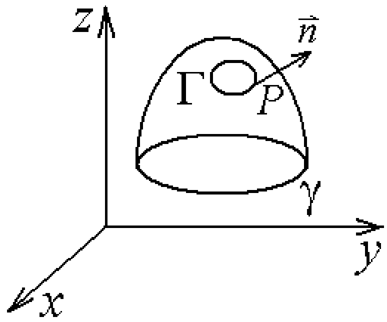
В плоском поле векторные линии есть плоские кривые вида $y = \varphi(x)$ или $f(x, y) = 0$.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Односторонние и двусторонние поверхности

Рассмотрим гладкую и незамкнутую поверхность $\sum$, ограниченную кусочно-гладким контуром γ. Это означает, что для уравнения поверхности существуют непрерывные частные производные по всем переменным. В точке P

проведём нормаль $\vec{n}$ к поверхности. Через точку *P* проведем замкнутый кусочно-гладкий контур *Г*, не имеющий общих точек с границей γ.



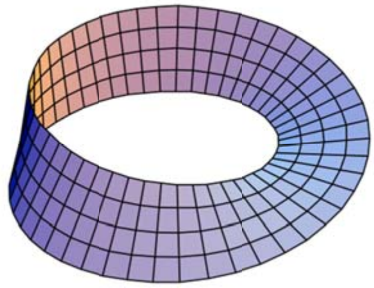
При обходе контура возможны две ситуации:

а) нормаль к поверхности $\vec{n}$ при возвращении в точку *P* сохранит свое направление;

б) при непрерывном движении вдоль замкнутого контура *Г*, непрерывно меняясь по направлению, нормаль изменит направление на противоположное при возвращении в исходную точку.

В случае а) поверхность называется двусторонней, в случае б) – односторонней. Совокупность точек поверхности с определенным направлением нормали $\vec{n}$ называется стороной поверхности.

Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса.



2.2. Площадь поверхности

Пусть S – ограниченная гладкая поверхность. Разобьем ее на участки ΔS_i, ($i = 1,...,n$), с помощью сети кривых. Выберем в каждом участке ΔS_i точку P_i. Проведем в точке P_i касательную плоскость к поверхности S и спроектируем ΔS_i на касательную плоскость. На проекции получим плоскую фигуру с площадью $\Delta S_i'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Площадью поверхности S называется предел суммы площадей $\Delta S_i'$ ($i = 1,...,n$) при условии, что $n \to \infty$, а ранг разбиения $r_n = \max\left(\operatorname{diam} \Delta S_i\right)$ стремится к нулю: $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ r_n \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i'$. Поверхность, имеющая площадь, называется **квадрируемой**.

Пусть поверхность задается явным уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, и однозначно проектируется в плоскую область Σ_{xy} на координатной плоскости Oxy. Возможны две ориентации нормали $\vec{n}$ к поверхности S, как вектора, ортогонального к касательной плоскости. Ее компоненты: $\vec{n}_{\pm} = \pm\left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$, направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ равны:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\right) = \cos\alpha = \pm\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right)=\cos\beta=\pm\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)=\cos\gamma=\mp\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Выбор знака перед радикалом определяет сторону поверхности S; верхние знаки соответствуют тупому, нижние – острому углу нормали $\vec{n}$ с осью Oz.

Спроектируем элементы $\Delta S_i'$ на касательной плоскости на координатную плоскость Oxy; площадь проекции

$$\Delta\sigma_i=\Delta S_i'\cdot\left|\cos\gamma\right|=\frac{\Delta S_i'}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$\Delta S_i'=\frac{\Delta\sigma_i}{\left|\cos\gamma\right|}=\Delta\sigma_i\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

и предел, фигурирующий в определении площади поверхности S, представляет собой двойной интеграл по области Σ_{xy}

$$S=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}\frac{dx\,dy}{\left|\cos\gamma\right|}=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Если уравнение поверхности S дано в виде $x=x(y,z)$ или $y=y(x,z)$, то площадь может быть представлена как

$$S=\iint\limits_{\Sigma_{yz}}\frac{dy\,dz}{\left|\cos\alpha\right|}=\iint\limits_{\Sigma_{yz}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz$$

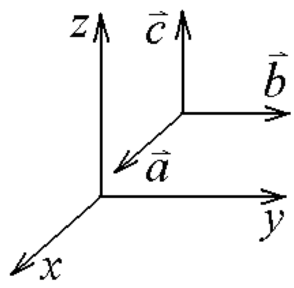
или

$$S=\iint\limits_{\Sigma_{xz}}\frac{dy\,dz}{\left|\cos\beta\right|}=\iint\limits_{\Sigma_{xz}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz,$$

где Σ_{yz} и Σ_{xz} – проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz.

2.3. Система координат и ориентация поверхности

Введем систему координат в пространственной области G. Система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует правую тройку, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, видимый из конца вектора $\vec{c}$, совершается против часовой стрелки; в противном случае тройка называется левой. В дальнейшем будем работать с правой системой координат.



В случае незамкнутой поверхности сторону можно определить, задавая направление обхода контура.

Выберем определенную сторону незамкнутой двусторонней поверхности, ограниченной замкнутым контуром *Г,* и зададим на нем направление обхода.

Проведём нормаль к выбранной стороне поверхности и рассмотрим, каким видится обход контура *Г* в заданном направлении. Если при наблюдении из конца восставленной нормали обход в заданном направлении представляется совершающимся против часовой стрелки, то поверхность называется положительно ориентированной (иначе – "положительная сторона поверхности", "положительная нормаль"). Если при наблюдении из конца восставленной нормали обход в заданном направлении представляется совершающимся по часовой стрелке, то поверхность называется отрицательно ориентированной (иначе – "отрицательная сторона поверхности", "отрицательная нормаль").

Таким образом, для незамкнутой поверхности ориентация поверхности связывается с выбором направления обхода границы.

Для замкнутой поверхности считается, что **внешняя сторона поверхности ориентирована положительно, а внутренняя – отрицательно.**

2.4. Поверхностный интеграл 1-го рода

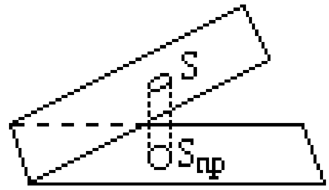
Поверхностный интеграл первого рода – обобщение понятия двойного интеграла по плоской области D. Пусть в трехмерной области G заданы поверхность Σ и функция $f(P) = f(x, y, z)$. Как при вычислении площади поверхности, разобьем поверхность на участки $\Delta\sigma_i$ (площадь которых также обозначим через $\Delta\sigma_i$), на каждом участке выберем произвольную точку P_i, вычислим значение функции $f(P_i)$ и составим интегральную сумму из произведений $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$.

Предел интегральной суммы называется поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по поверхности Σ.

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{r_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i .$$

2.4.1. Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода

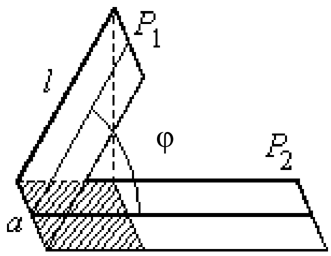
Вычислим $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$. Пусть $f(x,y,z)\ge 0$, а поверхность Σ задана уравнением $z=z(x,y)$.



Лемма. Площадь проекции плоского участка одной плоскости P_1 на другую плоскость P_2 равна площади самого участка, умноженной на модуль косинуса двугранного угла между плоскостями: $S_{\text{пр}} = S\cdot|\cos\varphi|$.

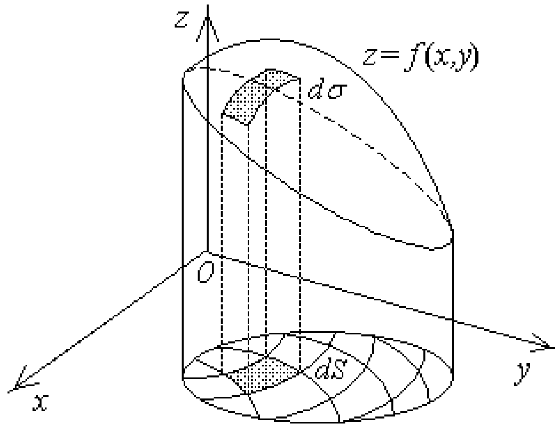
Доказательство:

$S = l\cdot a$. $S_{\text{пр}} = a\cdot l\cdot|\cos\varphi| = S|\cos\varphi|$ (поскольку $S_{\text{пр}}\ge 0$, косинус берется по модулю).



Пусть требуется вычислить поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности Σ. Область D является проекцией поверхности Σ на плоскость xOy. Через точку $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ проведем касательную плоскость. Ее уравнение:

$$z-\bar{z} = \frac{\partial z}{\partial x}(x-\bar{x}) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-\bar{y}).$$



Выберем часть поверхности $d\sigma$ и спроектируем ее на касательную плоскость. Обозначим проекцию $d\tilde{\sigma}$. Будем считать $d\sigma \sim d\tilde{\sigma}$. Обозначим через $\vec{n}$ нормаль к касательной плоскости: $\vec{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$.

Обозначим через $\vec{k} = \{0,0,1\}$ нормаль к xOy; угол между касательной плоскостью и плоскостью Oxy равен углу γ между векторами $\vec{n}$ и $\vec{k}$.

Найдем связь между dS (проекцией $d\tilde{\sigma}$ на плоскость xOy) и $d\tilde{\sigma}$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{k})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\quad |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

в пределе при $r_n\to 0$, $d\sigma = d\tilde{\sigma}$, $dS = d\sigma\cdot|\cos\gamma|$, $d\sigma = \frac{dS}{|\cos\gamma|}$;

$$d\sigma = dS\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy;$$

$$\iint_{\Sigma} f\left(x,y,z\right)d\sigma=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{\left|\cos(\gamma)\right|}=$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Так записывается поверхностный интеграл, если поверхность Σ задана уравнением $z=z\left(x,y\right)$.

Если поверхность Σ задана уравнением $y=y\left(x,z\right)$, то

$$\iint_{\Sigma} f\left(x,y,z\right)d\sigma=\iint_{D_{xz}} f\left(x,y\left(x,z\right),z\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz\,.$$

Аналогично, если поверхность Σ задана уравнением $x=x\left(y,z\right)$, то

$$\iint_{\Sigma} f\left(x,y,z\right)d\sigma=\iint_{D_{yz}} f\left(x\left(y,z\right),y,z\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz\,,$$

где D_{xz},D_{yz} – проекции Σ на плоскости Oxz, Oyz.

2.5. Поверхностный интеграл 2-го рода

Рассмотрим ориентированную поверхность Σ. Спроектируем элемент поверхности $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость Oxy. Составим интегральную сумму произведений значений функции в произвольной точке $P_i\in\Delta\sigma_i$ на ΔS_i – величину площади проекции элемента $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость Oxy:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta S_i\ .$$

Конечный предел этой интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения к нулю называется поверхностным интегралом 2-го рода от функции $f(x\ ,y\ ,z)$ по определенной стороне поверхности и обозначается:

$$I_{xy}=\pm\iint_{\Sigma} f(P)dxdy=\pm\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy\,.$$

Знак (+) соответствует положительной (внешней), а (–) отрицательной (внутренней) сторонам поверхности.

Если на данной поверхности заданы другие функции $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, то проектирование на другие координатные плоскости дает интегралы:

$$I_{yz}=\pm\iint_{\Sigma} f_1(x,y,z)dydz\,,\ I_{xz}=\pm\iint_{\Sigma} f_2(x,y,z)dxdz\,.$$

Соединение этих интегралов дает общее выражение для поверхностного интеграла 2-го рода:

$$I = \pm \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy + f_1(x,y,z)dydz + f_2(x,y,z)dxdz.$$

Между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода существует следующая связь:

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = \pm \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy,$$

причем при интегрировании по положительной стороне поверхности:

$$\cos\gamma > 0;\ \cos\gamma d\sigma = +dxdy,$$

а по отрицательной:

$$\cos\gamma < 0; \cos\gamma d\sigma = -dxdy.$$

Поверхностные интегралы 2-го рода обладают всеми свойствами двойных интегралов.

Поверхностный интеграл 2-го рода может быть также записан в более компактном виде. Пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, где $a_x = a_x(x,y,z)$, $a_y = a_y(x,y,z)$, $a_z = a_z(x,y,z)$ – векторное поле. Составим для координат этого вектора поверхностный интеграл 2-го рода.

$$I = \iint_{\Sigma} a_x(x,y,z)dydz + a_y(x,y,z)dxdz + a_z(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(a_x(x,y,z)\cos\alpha + a_y(x,y,z)\cos\beta + a_z(x,y,z)\cos\gamma \right) d\sigma.$$

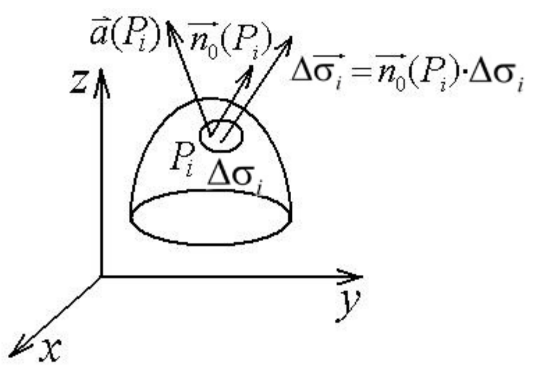
Так как $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\vec{n}_0$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности S, то $I = \iint_{\Sigma} \left(\vec{a}(x,y,z) \cdot \vec{n}_0 \right) d\sigma$.

Вводя $\overrightarrow{d\sigma} = \vec{n}_0 \cdot d\sigma$ – векторный элемент площади, направленный по нормали $\vec{n}_0$ и имеющий длину $d\sigma$, получаем $I = \iint_{\Sigma} \left(\vec{a}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{d\sigma} \right)$.

3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

3.1. Определение потока векторного поля

Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P)$ – непрерывное векторное поле, а Σ – ориентированная кусочно-гладкая поверхность. Разобьем поверхность на n частей $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, каждая из которых имеет площадь $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$, и выберем точку P_i на каждом из участков Σ_i. В точке P_i построим единичный вектор нормали $\vec{n}_0(P_i)$ к поверхности Σ_i.



Составим вектор $\overrightarrow{\Delta\sigma_i} = \overrightarrow{n_0}(P_i)\cdot\Delta\sigma_i$ с длиной $\Delta\sigma_i$, направленный по нормали $\overrightarrow{n_0}(P_i)$. Вычислим скалярное произведение $\left(\vec{a}(P_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}_i\right)$, просуммируем по всем участкам $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(P_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}_i\right)$ и рассмотрим предел суммы при $\max\left(\Delta\sigma_i\right)\to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения поверхности Σ на участки Σ_i и от выбора точки P_i, то он называется потоком векторного поля $\vec{a} = \vec{a}\left(P\right)$ через поверхность Σ.

$$\mathit{\Pi} = \iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma}\vec{a}\cdot d\vec{\sigma} = \lim_{\max(\Delta\sigma)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(P_i)\cdot\Delta\vec{\sigma}\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Используя введенное ранее понятие поверхностного интеграла 2-го рода, можно определить поток вектора $\vec{a}$ через поверхность Σ как поверхностный интеграл второго рода от вектора $\vec{a}$ по поверхности Σ.

Поток вектора $\vec{a}$ – скалярная характеристика векторного поля.

3.2. Свойства потока

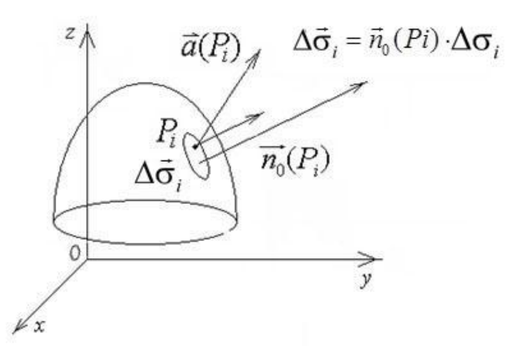
1. Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности Σ:
$$\iint\limits_{\Sigma^+}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}) = -\iint\limits_{\Sigma^-}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}).$$
2. Свойство аддитивности по отношению к области интегрирования. Если поверхность Σ можно разбить на несколько частей $\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ ...,\ \Sigma_n$, то поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность Σ равен сумме потоков поля $\vec{a}$ через поверхности $\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ ...,\ \Sigma_n$:
$$\mathit{\Pi} = \sum_{i}^{n}\mathit{\Pi}_i = \sum_{i}^{n}\iint\limits_{\Sigma_i}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}).$$
3. Свойство линейности
$$\iint\limits_{\Sigma}\left((\alpha\vec{a} + \beta\vec{a})\cdot d\vec{\sigma}\right) = \alpha\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}) + \beta\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}),$$
где α и β – некоторые постоянные.

3.3. Вычисление потока

Представим векторный дифференциальный элемент поверхности в виде $d\vec{\sigma} = \vec{n}_0 d\sigma$, тогда

$$\left(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{n}_0 d\sigma\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma}(\text{Пр}_{\vec{n}_0}\vec{a})\,d\sigma.$$



Таким образом, по данной формуле поток сводится к интегралу 1-го рода по поверхности Σ от скалярного произведения вектора $\vec{a}(P)$ на нормаль $\overrightarrow{n_0}(P)$ к этой поверхности Σ (иначе: от проекции поля $\vec{a}(P)$ на нормаль к поверхности $\overrightarrow{n_0}(P)$).

3.3.1. Проектирование на одну координатную плоскость

Пусть поверхность Σ задана явно уравнением $z = f(x, y)$ и однозначно проектируется в область D_{xy} на координатной плоскости Oxy.

Тогда $\vec{n} = \left\{ f'_x, f'_y, -1 \right\}$,

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \left\{ \frac{f'_x}{\sqrt{\left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}}; \frac{f'_y}{\sqrt{\left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}}; -\frac{1}{\sqrt{\left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}} \right\}$$

и поток вектора $\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z)$ через эту поверхность равен

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0)\, d\sigma = \iint_{D} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \iint_{D} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) \sqrt{\left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}\; dxdy =$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \Big(a_x\big(x, y, f(x, y)\big) \cdot f'_x + a_y\big(x, y, f(x, y)\big) \cdot f'_y - a_z\big(x, y, f(x, y)\big) \Big)\, dxdy,$$

т. е. вычисление потока сводится к вычислению двойного интеграла. Знак зависит от направления положительной нормали к поверхности (нормали к положительной стороне поверхности).

Аналогичные формулы получаются при проектировании на другие координатные плоскости для поверхностей вида $x = f(y, z)$ и $y = f(x, z)$.

3.3.2. Проектирование на три координатные плоскости

Пусть поверхность Σ задана (неявно) уравнением $F(x, y, z) = 0$;

$$\vec{n} = \left\{ F'_x, F'_y, F'_z \right\},\ |\vec{n}| = \sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2},$$

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \left\{ \frac{F_x}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}; \frac{F_y}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}; \frac{F_z}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}} \right\}.$$

Пусть α,β,γ – углы, которые образует нормаль с осями координат. Тогда орт $\overrightarrow{n_0}$ имеет координаты: $\vec{n}_0(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Так как $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, то

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma$$

и

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma}a_x\cos\alpha d\sigma+\iint\limits_{\Sigma}a_y\cos\beta d\sigma+\iint\limits_{\Sigma}a_z\cos\gamma d\sigma.$$

Рассмотрим отдельные слагаемые: $\iint\limits_{\Sigma}a_z\cos\gamma d\sigma$. Если поверхность Σ описывается уравнением $z=z(x,y)$, а поле $\vec{a}(P)$ в поверхностном интеграле берётся в точке $P\in\Sigma$, для любой его компоненты координата z выражается через x и y, $a_z\left(x,y,z\right)=a_z\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)$, $d\sigma=\dfrac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}$, и

$$\iint\limits_{\Sigma}a_z\cos\gamma d\sigma=\iint\limits_{Dxy}a_z(x,y,z(x,y))\cos\gamma\frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}=\pm\iint\limits_{Dxy}a_z(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Знак (+) соответствует острому углу между нормалью и осью z ($\cos\gamma>0$), знак (–) – тупому углу между нормалью и осью z ($\cos\gamma<0$).
Аналогично

$$\iint\limits_{\Sigma}a_x\cos\alpha d\sigma=\pm\iint\limits_{Dyz}a_x(x(y,z),y,z)dydz,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}a_y\cos\beta d\sigma=\pm\iint\limits_{Dxz}a_y(x,y(x,z),z)dxdz,$$

и окончательно имеем:

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})=\pm\iint\limits_{Dyz}a_x(x,(y,z),y,z)dydz\pm\iint\limits_{Dxz}a_y(x,y(x,z),z)dxdz\pm\iint\limits_{Dxy}a_z(x,y,z(x,y))dxdy.$$

1). Знаки перед слагаемыми соответствуют знакам направляющих косинусов нормали $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$.

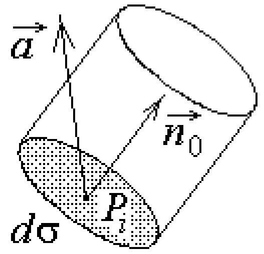
2). Вычисление потока векторного поля сводится к вычислению трёх двойных интегралов при условии, что поверхность взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Если это не имеет места, поверхность нужно разбить на однозначно проектирующиеся участки.

3). Указанная формула устанавливает связь между потоком и поверхностным интегралом 2-го рода

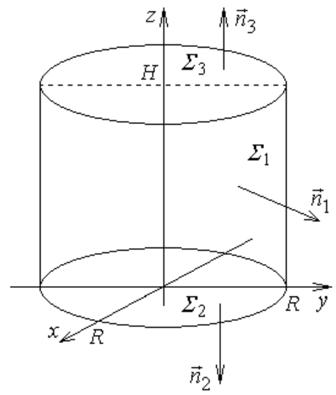
$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})=\iint\limits_{\Sigma}\left(\pm a_x(x,y,z)dydz\pm a_y(x,y,z)dxdz\pm a_z(x,y,z)dxdy\right).$$

3.4. Физический смысл потока

Пусть $\vec{a}(P)$ – поле скоростей некоторой жидкости $\vec{a}=\vec{V}$, а Σ – некоторая поверхность в поле, тогда: $(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})=(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)d\sigma$ $=|\vec{V}|\cos\varphi\, d\sigma = np_{\vec{n}_0}\vec{V}\cdot d\sigma$ – объём столба жидкости с основанием $d\sigma$ и высотой $\text{Пр}_{\vec{n}_0}\vec{V}$, т. е. объем жидкости, протекающей через площадку $d\sigma$ в единицу времени в направлении $\vec{n}_0$. Суммируя по поверхности Σ, получаем, что $\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})$ – поток жидкости, протекающей через поверхность Σ в единицу времени.



ПРИМЕР. Вычислить поток векторного поля радиус-вектора $\vec{a}=\vec{r}(x,y,z)$ через внешнюю сторону цилиндра (H – высота, R – радиус).



Решение:

$\vec{a}(\vec{r})=\vec{r}$, $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, следовательно,

$$\mathit{П}=\mathit{П}_1+\mathit{П}_2+\mathit{П}_3.$$

$$\mathit{П}_1=\iint\limits_{\Sigma_1}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})=\iint\limits_{\Sigma_1}(\vec{r}\cdot\vec{n}_0)d\sigma=\ldots$$

{$(\vec{r}\cdot\vec{n}_0)=R$, из рисунка ясно, что проекция $\vec{r}$ на нормаль к Σ_1 равна R}

$$\ldots=\iint\limits_{\Sigma_1}Rd\sigma=R\iint\limits_{\Sigma_1}d\sigma=2\pi R^2H.$$

$$\mathit{П}_3=\iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{r}\cdot d\vec{\sigma})=\iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{r}\cdot\vec{n}_0)d\sigma=\ldots$$

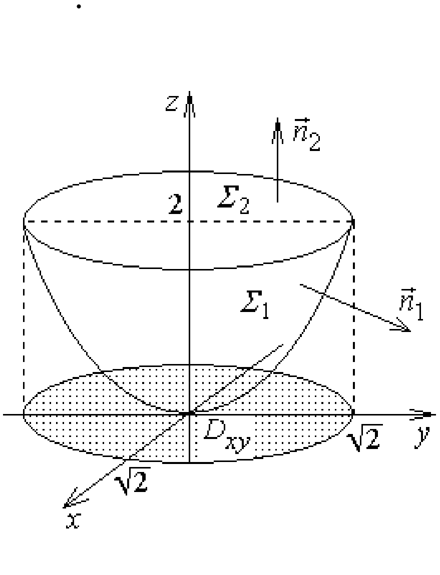
{из рисунка ясно, что проекция $\vec{r}$ на $\vec{n}_0$ по Σ_3 равна H, т. е. $(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)_{\Sigma_3}=H$ }

$$\ldots=\iint\limits_{\Sigma_3}Hd\sigma=H\iint\limits_{\Sigma_3}d\sigma=\pi R^2H.$$

$$\mathit{П}_2=\iint\limits_{\Sigma_2}(\vec{a}\cdot d\vec{\sigma})=\iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{r}\cdot\vec{n}_0)d\sigma=0.$$

$$\mathit{П}=\mathit{П}_1+\mathit{П}_2+\mathit{П}_3=3\pi R^2H.$$

ПРИМЕР. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(\vec{r})=y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность Σ, образованную поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=2$ (нормаль внешняя).



Решение:

Разобьем поверхность на две части $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и представим поток в виде $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$;

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} \left(\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}\right) = \iint\limits_{\Sigma_1} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}_0\right) d\sigma,$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = (0, y^2, z);\ \vec{n} = (2x, 2y, -1),$$

$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1},\ \vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$$ (знак выбирается «+», так как $\cos(\gamma) > 0$),

$$\vec{n}_0 = \left\{\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\right\}.$$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy =$$
$$= \iint\limits_{D_{xy}} (2y^3 - (x^2 + y^2)) dxdy = \ldots$$

{перейдем в полярную систему координат}

$$\ldots = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho (2\rho^3 \sin^3\varphi - \rho^2) = \ldots = -2\pi.$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\Sigma_2} \left(\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}\right) = \iint\limits_{\Sigma_2} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}_0\right) d\sigma = \ldots$$

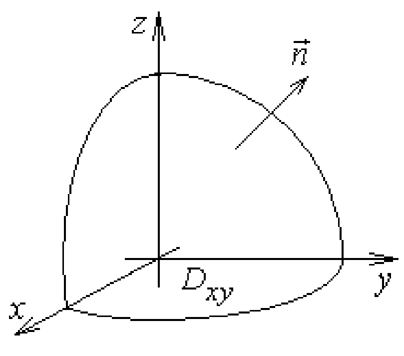
$$\{\vec{n}_0 = (0;0;1) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) = z\}$$

$$\ldots = \iint\limits_{D_{xy}} z dxdy = 2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 2\pi(\sqrt{2})^2 = 4\pi.$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -2\pi + 4\pi = 2\pi.$$

ПРИМЕР

Найдите поток вектора $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через расположенную в первом октанте часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя).



Решение:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy$$

{компоненты поля и области интегрирования обладают симметрией относительно замены $x \to y \to z$ и $D_{yz} \to D_{xy} \to D_{xz}$ }

$$\Pi = 3\iint\limits_{D_{xy}} a_z dxdy = 3\iint\limits_{Dxy} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 3\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{3}{16}\pi .$$

Важно отметить, что cosα, cosβ, cosγ положительны, перед всеми интегралами берется знак (+), так как сторона поверхности – внешняя.

3.5. Дивергенция векторного поля

Дивергенция – это дифференциальная и локальная (зависит от точки) количественная характеристика векторного поля. Пусть вектор-функция $\vec{a}(P) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$ в точке $P(x,y,z)$ называется число $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}$, или, опуская аргументы: $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$. Используя оператор Гамильтона (набла): $\vec{\nabla} = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$, дивергенцию можно записать в виде скалярного произведения $div\,\vec{a} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$.

3.5.1. Свойства дивергенции

1. Линейность $div(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\, div\,\vec{a} + \mu\, div\,\vec{b}$, где λ и μ – произвольные постоянные.
2. Пусть $u = u(x,y,z)$ – скалярное поле, тогда $div(u\cdot\vec{a}) = u\, div\,\vec{a} + (\vec{a}\cdot grad\, u)$.

Доказательство:

$$div(u\cdot\vec{a}) = \frac{\partial(u\cdot a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\cdot a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u\cdot a_z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{a_x\partial u}{\partial x} + \frac{a_y\partial u}{\partial y} + \frac{a_z\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \vec{a}\cdot grad\, u + u\cdot div\,\vec{a} .$$

ПРИМЕР. 1). $\vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$div\,\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1+1+1 = 3 .$$

2). $\vec{a} = (c_1, c_2, c_3)$, $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial}{\partial x}c_1 + \dfrac{\partial}{\partial y}c_2 + \dfrac{\partial}{\partial z}c_3 = 0$.