

2. Функциональные ряды

2.1. Определение функционального ряда.

Область сходимости функционального ряда

Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

члены которого есть функции от x , называется **функциональным рядом**.

Придавая x определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Область сходимости функционального ряда — это совокупность значений x , при которых функции

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сходится.

Областью сходимости чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX .

Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x).$$

$S(x)$ называется **суммой функционального ряда**.

Представим $S(x)$ в виде

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots$

$R_n(x)$ называется **остатком функционального ряда**.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^n \text{ в точках } x=1, x=3.$$

Решение

Пусть $x=1$. Получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{4}{3} \right)^n \right|$. По признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пусть $x=3$. Получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{13} \right)^n$. По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+2)^n}{(n+1)(x+2)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|} < 1 \Rightarrow |x+2| > 1.$$

Решим неравенство $|x+2| > 1$. Получим $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Исследуем точки: $x = -1$, $x = -3$.

Пусть $x = -1$. Получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Данный ряд расходится.

Пусть $x = -3$. Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

По признаку Лейбница данный ряд сходится.

Таким образом, область сходимости данного по условию ряда

$$(-\infty; -3] \cup (-1; +\infty).$$

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(2n-1)}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1} n! (2n-1)}{(n+1)! (2n+1) x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{(n+1)(2n+1)} = 0 < 1.$$

Поэтому область сходимости $(-\infty; +\infty)$.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n 2x.$$

Решение. Члены $u_n(x) = \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n 2x$ ряда определены для

$x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$. При этих значениях x имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n 2x \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{1/n} \cdot 3^{1/2}}{n^{1/2n}} |\operatorname{tg} 2x| = \sqrt{3} |\operatorname{tg} 2x|,$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2n} = 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n 2x$ сходится

абсолютно, если $\sqrt{3} |\operatorname{tg} 2x| < 1$, т. е. $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} 2x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, значит,
 $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

При $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$, получаем расходящийся числовой ряд $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$

а при $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$ — условно сходящийся ряд $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}.$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n 2x$ сходится при

$x \in \left[\frac{\pi}{12}(6k-1), \frac{\pi}{12}(6k+1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$ При $x \in \left(\frac{\pi}{12}(6k-1), \frac{\pi}{12}(6k+1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$, ряд

сходится абсолютно.

2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Сходящийся функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется **равномерно сходящимся** в некоторой области X , если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n \geq N$

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

в области X , где $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) — непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости)

Если функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, причем числовой ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots$$

сходится, то функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

в этой области сходится равномерно.

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2.2)$$

называется **мажорируемым** в некоторой области изменения x , если существует такой сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.3)$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \leq a_1, |u_2(x)| \leq a_2, \dots, |u_n(x)| \leq a_n.$$

Говорят, что ряд (2.2) мажорируется рядом (2.3), или ряд (2.3) служит мажорантным для ряда (2.2).

Теорема. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на некотором отрезке $[a, b]$, есть функция непрерывная на этом отрезке.

Пример. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

на отрезке $[-2, 0]$.

Доказательство. Так как $|x+1| \leq 1$ при $x \in [-2, 0]$, то

$$\left| \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} (n=1, 2, 3, \dots).$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ с положительными членами сходится. Действительно, функция $f(x) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ в промежутке $[1, +\infty)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши и $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), причем несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = \frac{1}{\ln 2}$ сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ является *мажорирующим* для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ на отрезке $[-2, 0]$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ сходится на этом отрезке равномерно и абсолютно.

2.3. Свойства функциональных рядов

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_1(x), u_2(x), u_3(x) \dots$ — непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$, $[a, b] \in X$.

Теорема 2. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u'_1(x), u'_2(x), \dots, u'_n(x), \dots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'.$$

Пример. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Решение. Интегрируя дважды почленно в пределах от 0 до x при $|x| < 1$ геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+2} = \int_0^x \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = -\frac{1}{2} \int_0^x \ln(1-x^2) dx.$$

Последний интеграл вычислим методом интегрирования по частям, полагая

$$u = \ln(1-x^2), \quad du = -\frac{2xdx}{1-x^2}, \quad dv = dx, \quad v = x:$$

$$\int_0^x \ln(1-x^2) dx = \left(x \ln(1-x^2) \right) \Big|_0^x - 2 \int_0^x \frac{-x^2 dx}{1-x^2} = x \ln(1-x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx =$$

$$= x \ln(1-x^2) - 2 \left(x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \Big|_0^x = x \ln(1-x^2) - 2x + \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Следовательно $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)} = x - \frac{1}{2} x \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, отсюда при $x \neq 0$ и $|x| < 1$ сумма исходного ряда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)} = 1 - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Очевидно, что $S(0) = 0$ и

$$\begin{aligned} S(-1) = S(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (*)$$

Известно, что для всех значений x из промежутка $[-1, 1]$ имеет место равенство

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \dots,$$

в частности, при $x=1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \dots,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \dots = 1 - \ln 2. \quad (**)$$

Сравнивая (.*) и (**), получаем

$$S(-1) = S(1) = 1 - \ln 2.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$ сходится на отрезке $[-1,1]$ и его сумма равна

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{при } 0 < |x| < 1, \\ 1 - \ln 2 & \text{при } |x|=1. \end{cases}$$

Во всех остальных точках ряд расходится.

3. Степенные ряды

3.1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots; \quad (3.1)$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots, \quad (3.2)$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots$ — действительные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд (3.1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

2. Если ряд (3.1) расходится при некотором значении x'_0 , то он расходится при всяком x , для которого $|x| > |x'_0|$.

Доказательство

1. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Следовательно, $\exists M > 0$ такое, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M , то есть

$$|a_n x_0^n| \leq M.$$

Перепишем равенство (3.1) в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots \quad (3.3)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (3.4)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (3.5)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (3.5) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ и, следовательно, сходится.

Так как члены ряда (3.4) меньше соответствующих членов ряда (3.5), то ряд (3.4) сходится. Значит ряд (3.3) или (3.1) сходится (сходится абсолютно).

2. Если бы в какой-то точке x , удовлетворяющей условию $|x| > |x'_0|$, ряд сходил, то в силу (1) он должен был бы сходить-ся и в точке x'_0 , так как $|x'_0| < |x|$. Но это противоречит условию, что в точке x'_0 ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x .

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда.

Если x_0 — точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости.

Обозначим $|x_0| = R$ — *радиус сходимости*, $(-R; R)$ — *интервал сходимости* степенного ряда.

1. Пусть $R > 0$. Если $|x| < R$, то при всех x ряд сходится абсолютно. Если $|x| > R$, то при всех x ряд расходится.

2. Пусть $R = 0$. Ряд сходится только в точке 0 (или x_0).

3. Пусть $R = \infty$. Ряд сходится на всей числовой оси OX .

На концах интервала вопрос о сходимости (расходимости) решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

3.2. Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда

1. Если $a_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $x - x_0$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

при условии, что этот предел существует (конечный или бесконечный).

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n \frac{1}{n^2}$.

Решение $a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$

Найдем радиус сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Решим неравенство $|x-2| < 1$.

Получим интервал $1 < x < 3$.

Исследуем отдельно точки $x = 1, x = 3$.

Пусть $x = 1$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x = 3$. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

который сходится (по интегральному признаку Коши).

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $1 \leq x \leq 3$.

2. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю, и последовательность оставшихся в ряду показателей степеней разности $x - x_0$ любая (то есть не образует арифметическую прогрессию), то радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}, \quad a_n \neq 0.$$

3. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}.$$

Решение

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n}{(n+1) \cdot 5^{n+1} \cdot (x+1)^n} \right| = \frac{1}{5} |x+1| < 1.$$

Решим неравенство $|x+1| < 5$. Получим $-6 < x < 4$.

Исследуем отдельно точки $x = -6$, $x = 4$.

Пусть $x = -6$. Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$,

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x = 4$. Получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

который расходится.

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $-6 \leq x < 4$.

3.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, целиком принадлежащем его интервалу сходимости.

Сумма степенного ряда является функцией непрерывной на любом отрезке, целиком принадлежащем его интервалу сходимости.

Ряд, полученный почленным дифференцированием (интегрированием) степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости и его сумма внутри интервала сходимости равна производной (интегралу) от суммы первоначального ряда.

Если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad \int_a^x S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad -R < x - x_0 < R.$$

Пример. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1}.$$

Решение. Рассмотрим сходящийся при $|x| < 1$ геометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

и дифференцируем его дважды

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Исходный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1}$ представим в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1} + 8x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Из предыдущих равенств следует, что при $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{8x}{(1-x)^2} - \frac{3x}{1-x} = \frac{5x - 3x^3}{(1-x)^3}.$$

При $x = 1$ и $x = -1$ получаем соответственно ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n^2 + 9n + 5)$, которые расходятся.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1}$ сходится при $|x| < 1$ и его сумма равна $S(x) = \frac{5x - 3x^3}{(1-x)^3}$, $x \in (-1; 1)$.

3.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < R$, то есть

$$x_0 - R < x < x_0 + R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c = x_0 + \Theta(x - x_0), \quad 0 < \Theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ получим ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots.$$

Теорема 1

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходиллся к $f(x)$ в точке x , необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом n выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| < M,$$

где M — положительная постоянная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left| \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = -\cos x = -\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad f'''(0) = 1, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

2. $f(x) = \cos x$.

Заметим, что $\cos x = (\sin x)'$. Проинтегрируем ряд (3.6) и получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. $f(x) = e^x$.

Данная функция имеет производные всех порядков на интервале $(-a; a)$, где $a > 0$ — любое число, причем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^a$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Так как $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то получаем ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4. $f(x) = \arctg x$.

Данную функцию можно представить следующим образом

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Тогда

$$\arctg x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Область сходимости: $-1 \leq x \leq 1$.

Итак,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

5. $f(x) = \ln x$.

Разложим в ряд по степеням $(x-1)$.

Заметим, что $\frac{1}{x} = (\ln x)'$.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -(x-1)$.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots \quad (3.7)$$

Область сходимости: $|q| < 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

Интегрируем почленно ряд (3.7)

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[t - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} + \dots \right]_1^x.$$

Итак,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^n + \dots, \quad 0 < x \leq 2.$$

6. $f(x) = \ln(x+1)$.

Заметим, что

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Итак,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

7. $f(x) = (1+x)^m$, m — любое действительное число.

Вычислим производные:

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m,$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1), \dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots (m-(n-1)).$$

Составим ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m \dots (m-(n-1))}{n!} x^n + \dots$$

Найдем область сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n)x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n-m)}{n+1} \right| = |x|,$$

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

При $m \geq 0$ $-1 < x < 1$;

при $-1 < m < 0$ $-1 < x \leq 1$;

при $m \leq -1$ $-1 < x < 1$.

8. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

Решение

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех x из области сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

1. Вычислим производные

$$y = \frac{1}{x-5}, y(6) = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{(x-5)^2}, y'(6) = -1,$$

$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3}, y''(6) = 2!,$$

$$y''' = -\frac{2 \cdot 3}{(x-5)^4}, y'''(6) = -3!,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}}, y^{(n)}(6) = (-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5} = 1 + \frac{-1}{1!}(x-6) + \frac{2!}{2!}(x-6)^2 - \frac{3!}{3!}(x-6)^3 + \dots = \sum_n (-1)^n (x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1;$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(c-5)^{n+2} (n+1)!} (x-6)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}}, \quad c = 6 + \theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n} \right| = |x-6| < 1, \quad 5 < x < 7.$$

Пусть $x = 5$, тогда получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n = 1 + 1 + \dots$, который расходится.

Пусть $x = 7$, тогда получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x \in (5; 7)$.

3. Докажем, что для всех x из области сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Для всех $x \in (5; 7)$ имеем

$$c - 5 > 1, \quad |x - 6| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{c-5} \left(\frac{x-6}{c-5} \right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-6)^n, \quad x \in (5; 7).$$

4. Приложения степенных рядов

4.1. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Приближенное вычисление значения функции в точке.

Пример. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \approx 0,17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{(0,17453)^2}{2!} + \frac{(0,17453)^4}{4!} + \dots$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0,17453)^4}{4!} < 0,0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то $|R_2| < |u_3| < 0,0001$, то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - 0,01523;$$

$$\cos 10^\circ \approx 0,9848.$$

4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение e^x вместо x выражение –
чим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0,25} (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) dx = x \Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{10} \Big|_0^{0,25} - \dots \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} + \dots \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0,001,$$

то

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

