Содержание

Введение

Лекция 1. Предварительные сведения.

1.1 Множество натуральных чисел.

Сначала рассмотрим понятие, к которому мы все уже давно привыкли, — понятие натурального числа. Мы заново познакомимся с множествами натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и, наконец, действительных чисел $\mathbb{R}$.

1.2 Введение в математическую логику.

1.2.1 Алгебра высказываний.

Понятие **высказывания** является первоначальным и не определяется. Можно лишь пояснить, что **высказыванием** мы будем называть любое повествовательное предложение, про которое определенно можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывание может быть записано как на естественном языке, так и с помощью «специального» языка (например, математического).

Пример 1. «Простых чисел бесконечно много» — верное высказывание. «$2 + 2 = 5$» — неверное высказывание. Фраза «математическая логика — это скучно» высказыванием не является. «$x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$» также не является высказыванием.

Значением истинности или **индикаторным значением** высказывания P будем называть число, равное 1 в случае истинности P и равное 0, когда P ложно.

В естественном языке можно образовать новые высказывания при помощи связок «не», «и», «или», «если ..., то ...». При помощи значений истинности можно корректно определить высказывания, соответствующие этим связкам.

Отрицание высказывания P — высказывание, истинное если и только если P ложно. Отрицание высказывания P обозначают $\neg P$ или $\overline{P}$. При этом $\overline{P}$ читается как «не P».

Конъюнкция двух высказываний P и Q — высказывание, обозначаемое через $P \wedge Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания P и Q. $P \wedge Q$ читается как «P и Q».

Дизъюнкция двух высказываний P и Q — высказывание, обозначаемое через $P \vee Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний P и Q. $P \vee Q$ читается как «P или Q».

Импликацией высказываний P и Q будем называть высказывание ложное только тогда, когда P истинно, а Q ложно. Импликацию обозначают как $P \implies Q$. Читается это как «из P следует Q» или «P влечет Q».

Как уже было сказано, можно определить данные выше понятие с помощью значений истинности, записав следующую таблицу, которую обычно называют **таблицей истинности**.

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Из таблицы видно, что чтобы получить значения истинности для $P \wedge Q$, необходимо перемножить значения истинности P и Q, т.е. конъюнкция является неким аналогом умножения для высказываний. Может быть, есть аналог и для дизъюнкции? Естественно поначалу предположить, что это будет сложение. Легко однако увидеть, что это предположение неверно.

Упражнение 1. Аналогами каких операций над числами являются конъюнкция и дизъюнкция? (можно придумать много аналогов, но здесь чем проще, тем лучше).

С помощью определенных выше элементарных операций над высказываниями можно строить более сложные высказывания, которые мы будем называть формулами. Например, можно построить формулу

$$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P).$$

Очевидно, что полученное высказывание истинно лишь только в том случае, когда значения истинности P и Q совпадают. Такое высказывание будем называть **эквивалентностью** P и Q. Обозначать его будем следующим образом

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Определим более точно понятие формулы алгебры высказываний. **Формулой алгебры высказываний** будем называть

1) любое высказывание,

2) если F_1, F_2 — формулы, то $\overline{F_1}$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \implies F_2$ — тоже формулы.

Упражнение 2. Построить отрицание высказывания «или P или Q истинно, но не оба одновременно».

Упражнение 3. Предположим, что если P истинно, то и Q истинно, а если Q ложно, то и P ложно. Верно ли, что P и Q эквивалентны?

Логическим законом или **тавтологией** называется формула алгебры высказываний, истинная всегда. Другими словами, ее значение истинности равно единице независимо от значений истинности всех высказываний, входящих в эту формулу.

Пожалуй, самой известной тавтологией является формула исключенного третьего

$$P \vee \overline{P},$$

которая утверждает, что любое высказывание либо истинно, либо ложно (третьего не дано).

1.3 Понятие множества. Операции над множествами.

Понятие «множество» входит в базовый словарь современной математики. Однако дать строгое определение этому понятию вовсе не так просто. В то же время каждый из нас интуитивно понимает, что **множество** – это некоторая *совокупность* каких-то объектов. Важно при этом также понимать, что данное выше «определение» вовсе таковым не является, поскольку значение слова «совокупность» (ровно как и «множество») так и не было определено.

На данном этапе нам будет удобно оставить понятие множества неопределяемым (или, как говорят, остаться в рамках наивной теории множеств). Позднее мы строго формализуем это понятие, рассмотрев аксиоматический подход к теории множеств.

Слова «класс», «набор», «совокупность», «семейство» будут использоваться как синонимы к слову «множество».

Пример 2. Примерами множеств могут служить множество студентов в аудитории, множество букв русского алфавита, множество страниц в книге. Как правило, множества мы будем обозначать заглавными латинскими буквами.

Элементом множества будем называть объект, принадлежащий этому множеству. Запись $x \in X$ будет означать, что x является элементом множества X. Если x не принадлежит X, то будем записывать этот факт как $x \notin X$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Рассмотрим способы задания множеств.

1. *Перечисление.* Чтобы задать множество, нужно попросту указать все элементы, которые ему принадлежат. Например, можно задать множество букв английского алфавита M следующим образом

$$M = \{a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z\}.$$

2. *Характеристический предикат.* Чтобы задать множество, нужно указать предикат $P(x)$, истинный тогда и только тогда, когда x принадлежит множеству.

$$M = \{x \,|\, P(x)\} = \{x : P(x)\}.$$

3. *Индексация.* Это способ используется, если нужно проиндексировать («занумеровать») элементы одного множества с помощью другого множества — множества индексов I.

$$M = \{x_i\}_{i \in I}.$$

   Например, если $I = \{2, 3, 5\}$, то

$$M = \{x_i\}_{i \in I} = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

1.3.1 Операции над множествами.

Будем говорить, что множество X **содержится** в множестве Y (или что Y содержит X), если для любого $x \in X$ выполнено $x \in Y$. Записывать это будем следующим образом: $X \subset Y$. Альтернативный способ прочтения этой записи — «X является **подмножеством** Y».

Заметим, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества. Также отметим, что множество всегда является своим подмножеством.

Множества X и Y будем называть равными при выполнении обоих условий

$$X \subset Y, \ Y \subset X.$$

Определение 1. ***Пересечением*** *двух множеств X и Y назовем множество $X \cap Y$, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множествам X и Y.*

Определение 2. ***Объединением*** *двух множеств X и Y назовем множество $X \cup Y$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X и Y.*

Более формально данные выше определения можно записать как

$$X \cap Y = \{x : (x \in X) \wedge (x \in Y)\},$$

$$X \cup Y = \{x : (x \in X) \vee (x \in Y)\},$$

откуда четко видно соответствие между логическими и теоретико-множественными операциями.

Определение 3. ***Разностью*** *множеств X и Y будем называть множество $X \setminus Y$, состоящее из элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y.*

Отметим, что при взятии разности двух множеств важен порядок — $X \setminus Y$, вообще говоря, не совпадает с $Y \setminus X$.

Определение 4. *Множества X и Y будем называть* ***непересекающимися*** *или* ***дизъюнктными****, если $X \cap Y = \varnothing$.*

Объединение непересекающихся множеств X и Y будем часто обозначать $X \sqcup Y$.

Определение 5. *Пусть $X \subset Y$. Множество $Y \setminus X$ будем называть* ***дополнением*** *X к (относительно) Y.*

Понятно, что

$$X \sqcup (Y \setminus X) = Y$$

.

1.3.2 Парадоксы теории множеств.

Вольное обращение с понятием «множество» (которое, как напомним, все еще не было строго определено) может привести к различного рода парадоксам. Рассмотрим некоторые из них.

Парадокс Рассела.

Парадокс Б.Рассела показывает, что понятие множества всех множеств противоречиво само по себе.

Одной из переформулировок этого парадокса является **парадокс брадобрея**. Он звучит следующим образом. Известно, что в некоторой деревне брадобрей бреет тех и только тех, кто не бреет себя. Бреет ли себя брадобрей? С одной стороны, если он себя не бреет, то он должен себя брить в силу поставленного условия. Но, с другой стороны, если он себя уже бреет, то он этого уже делать не должен опять-таки в силу поставленного условия.

Формализуем этот парадокс на языке теории множеств. Для этого рассмотрим множество M, которое состоит из тех и только тех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, т.е.

$$M = \{X : X \notin X\}. \tag{1}$$

Поставим вопрос, является ли M своим элементом. Ровно те же самые рассуждения, что и в парадоксе Брадобрея, показывают нам, что на этот вопрос нельзя дать ни положительный, ни отрицательный ответ.

С парадоксом Рассела тесно связен логический парадокс, который обычно называют парадокс лжеца. Он заключается в том, что высказывание

это высказывание ложно

не может быть ни истинным, ни ложным.

Парадокс Берри.

Еще один парадокс наивной теории множеств, связываемый обычно с именем Берри, заключается в следующем. Рассмотрим наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем четырнадцатью словами. Поскольку натуральных чисел, описываемых менее чем четырнадцатью словами, конечное число, существуют числа, которые не могут быть определены фразой менее чем из 14 слов. Выберем среди них наименьшее. То есть, мы выбрали «наименьшее число среди тех, которые не могут быть описаны менее чем четырнадцатью словами». Поскольку в последней фразе всего 13 слов, то тем самым выбранное число все-таки может быть описано менее чем четырнадцатью словами. В этом и заключается парадокс.

Упражнение 4. Какие «ограничения» на наивную теорию множеств нужно наложить, чтобы избежать сформулированных выше парадоксов?

1.4 Понятие функции.

Пусть X, Y — какие-то множества. Попытаемся определить понятие функции, определенной на X со значениями во множестве Y. Сначала рассмотрим обычное «школьное» определение.

Определение 6 (нестрогое). *Функцией f, определенной на X со значениями в Y, называется некое правило (закон), по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некий элемент $y \in Y$. При этом X называется областью определения функции f, а Y — областью значений функции f.*

Список литературы