

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>Предварительные сведения.</b>	<b>3</b>
1.1 Введение в математическую логику. . . . .	3
1.1.1 Алгебра высказываний. . . . .	3
1.2 Понятие множества. Операции над множествами. . . . .	4
1.2.1 Операции над множествами. . . . .	5
1.2.2 Парадоксы теории множеств. . . . .	7
1.3 Понятие функции. . . . .	7

# Введение

# Лекция 1. Предварительные сведения.

## 1.1 Введение в математическую логику.

### 1.1.1 Алгебра высказываний.

Понятие **высказывания** является первоначальным и не определяется. Можно лишь пояснить, что **высказыванием** мы будем называть любое повествовательное предложение, про которое определенно можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывание может быть записано как на естественном языке, так и с помощью «специального» языка (например, математического).

**Пример 1.** «Простых чисел бесконечно много» — верное высказывание. « $2 + 2 = 5$ » — неверное высказывание. Фраза «математическая логика — это скучно» высказыванием не является. « $x^2 + 5x - 6 \geq 0$ » также не является высказыванием.

**Значением истинности** или **индикаторным значением** высказывания  $P$  будем называть число, равное 1 в случае истинности  $P$  и равное 0, когда  $P$  ложно.

В естественном языке можно образовать новые высказывания при помощи связок «не», «и», «или», «если ..., то ...». При помощи значений истинности можно корректно определить высказывания, соответствующие этим связкам.

**Отрицание** высказывания  $P$  — высказывание, истинное если и только если  $P$  ложно. Отрицание высказывания  $P$  обозначают  $\neg P$  или  $\bar{P}$ . При этом  $\bar{P}$  читается как «не  $P$ ».

**Конъюнкция** двух высказываний  $P$  и  $Q$  — высказывание, обозначаемое через  $P \wedge Q$ , истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания  $P$  и  $Q$ .  $P \wedge Q$  читается как « $P$  и  $Q$ ».

**Дизъюнкция** двух высказываний  $P$  и  $Q$  — высказывание, обозначаемое через  $P \vee Q$ , истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний  $P$  и  $Q$ .  $P \vee Q$  читается как « $P$  или  $Q$ ».

**Импликацией** высказываний  $P$  и  $Q$  будем называть высказывание ложное только тогда, когда  $P$  истинно, а  $Q$  ложно. Импликацию обозначают как  $P \implies Q$ . Читается это как «из  $P$  следует  $Q$ » или « $P$  влечет  $Q$ ».

Как уже было сказано, можно определить данные выше понятие с помощью значений истинности, записав следующую таблицу, которую обычно называют **таблицей истинности**.

$P$	$Q$	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Из таблицы видно, что чтобы получить значения истинности для  $P \wedge Q$ , необходимо перемножить значения истинности  $P$  и  $Q$ , т.е. конъюнкция является неким аналогом умножения для высказываний. Может быть, есть аналог и для дизъюнкции? Естественно поначалу предположить, что это будет сложение. Легко однако увидеть, что это предположение неверно.

**Упражнение 1.** Аналогами каких операций над числами являются конъюнкция и дизъюнкция? (можно придумать много аналогов, но здесь чем проще, тем лучше).

С помощью определенных выше элементарных операций над высказываниями можно строить более сложные высказывания, которые мы будем называть формулами.

## 1.2 Понятие множества. Операции над множествами.

Понятие «множество» входит в базовый словарь современной математики. Однако дать строгое определение этому понятию вовсе не так просто. В то же время каждый из нас интуитивно понимает, что **множество** – это некоторая *совокупность* каких-то объектов. Важно при этом также понимать, что данное выше «определение» вовсе таковым не является, поскольку значение слова «совокупность» (ровно как и «множество») так и не было определено.

На данном этапе нам будет удобно оставить понятие множества неопределяемым (или, как говорят, остаться в рамках наивной теории множеств). Позднее мы строго формализуем это понятие, рассмотрев аксиоматический подход к теории множеств.

Слова «класс», «набор», «совокупность», «семейство» будут использоваться как синонимы к слову «множество».

**Пример 2.** Примерами множеств могут служить множество студентов в аудитории, множество букв русского алфавита, множество страниц в книге. Как правило, множества мы будем обозначать заглавными латинскими буквами.

*Элементом* множества будем называть объект, принадлежащий этому множеству. Запись  $x \in X$  будет означать, что  $x$  является элементом множества  $X$ . Если  $x$  не принадлежит  $X$ , то будем записывать этот факт как  $x \notin X$ .

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается  $\emptyset$ .

Рассмотрим способы задания множеств.

1. *Перечисление*. Чтобы задать множество, нужно попросту указать все элементы, которые ему принадлежат. Например, можно задать множество букв английского алфавита  $M$  следующим образом

$$M = \{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\}.$$

2. *Характеристический предикат*. Чтобы задать множество, нужно указать предикат  $P(x)$ , истинный тогда и только тогда, когда  $x$  принадлежит множеству.

$$M = \{x \mid P(x)\} = \{x : P(x)\}.$$

3. *Индексация*. Это способ используется, если нужно проиндексировать («занумеровать») элементы одного множества с помощью другого множества — множества индексов  $I$ .

$$M = \{x_i\}_{i \in I}.$$

Например, если  $I = \{2, 3, 5\}$ , то

$$M = \{x_i\}_{i \in I} = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

### 1.2.1 Операции над множествами.

Будем говорить, что множество  $X$  **содержится** в множестве  $Y$  (или что  $Y$  **содержит**  $X$ ), если для любого  $x \in X$  выполнено  $x \in Y$ . Записывать это будем следующим образом:  $X \subset Y$ . Альтернативный способ прочтения этой записи — « $X$  является **подмножеством**  $Y$ ».

Заметим, что пустое множество  $\emptyset$  является подмножеством любого множества. Также отметим, что множество всегда является своим подмножеством.

Множества  $X$  и  $Y$  будем называть равными при выполнении обоих условий

$$X \subset Y, Y \subset X.$$

**Определение 1.** *Пересечением* двух множеств  $X$  и  $Y$  назовем множество  $X \cap Y$ , состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множествам  $X$  и  $Y$ .

**Определение 2.** *Объединением* двух множеств  $X$  и  $Y$  назовем множество  $X \cup Y$ , состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $X$  и  $Y$ .

Более формально данные выше определения можно записать как

$$X \cap Y = \{x : (x \in X) \wedge (x \in Y)\},$$

$$X \cup Y = \{x : (x \in X) \vee (x \in Y)\},$$

откуда четко видно соответствие между логическими и теоретико-множественными операциями.

**Определение 3.** *Разностью* множеств  $X$  и  $Y$  будем называть множество  $X \setminus Y$ , состоящее из элементов, принадлежащих  $X$ , но не принадлежащих  $Y$ .

Отметим, что при взятии разности двух множеств важен порядок —  $X \setminus Y$ , вообще говоря, не совпадает с  $Y \setminus X$ .

**Определение 4.** Множества  $X$  и  $Y$  будем называть **непересекающимися** или **дизъюнктными**, если  $X \cap Y = \emptyset$ .

Объединение непересекающихся множеств  $X$  и  $Y$  будем часто обозначать  $X \sqcup Y$ .

**Определение 5.** Пусть  $X \subset Y$ . Множество  $Y \setminus X$  будем называть **дополнением**  $X$  к (относительно)  $Y$ .

Понятно, что

$$X \sqcup (Y \setminus X) = Y$$

.

### 1.2.2 Парадоксы теории множеств.

Вольное обращение с понятием «множество» (которое, как напомним, все еще не было строго определено) может привести к различного рода парадоксам. Рассмотрим некоторые из них.

#### **Парадокс Рассела.**

Парадокс Б.Рассела показывает, что понятие множества всех множеств противоречиво само по себе.

Одной из переформулировок этого парадокса является **парадокс браздобрея**. Он звучит следующим образом. Известно, что в некоторой деревне браздобрей бреет тех и только тех, кто не бреет себя. Бреет ли себя браздобрей? С одной стороны, если он себя не бреет, то он должен себя брить в силу поставленного условия. Но, с другой стороны, если он себя уже бреет, то он этого уже делать не должен опять-таки в силу поставленного условия.

### 1.3 Понятие функции.

Пусть  $X, Y$  — какие-то множества. Попытаемся определить понятие функции, определенной на  $X$  со значениями во множестве  $Y$ . Сначала рассмотрим обычное «школьное» определение.

**Определение 6 (нестрогое).** *Функцией  $f$ , определенной на  $X$  со значениями в  $Y$ , называется некое правило (закон), по которому каждому элементу  $x \in X$  сопоставляется некий элемент  $y \in Y$ . При этом  $X$  называется областью определения функции  $f$ , а  $Y$  — областью значений функции  $f$ .*

## Список литературы