ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Методические указания к лабораторным работам по курсу «Оптоинформационные технологии и системы»

Самара 2020

Содержание

Введение

Краткие теоретические сведения

Задание.

Варианты

Введение

Данная лабораторная работа содержит сведения о применении быстрого преобразования Фурье (БПФ) и его адаптации для оптических систем.

Необходимо реализовать оптическое преобразование Фурье, используя алгоритм БПФ и стандартные методы численного интегрирования, сравнить результаты и убедиться, что они совпадают.

Также необходимо изучить некоторые свойства преобразования Фурье с помощью аналитических выводов и численного моделирования.

Краткие теоретические сведения

Рассматривается оптическая система, изображённая на рисунке 1.

Изображение выглядит как спортивная игра, спорт

Автоматически созданное описание

Рисунок 1 – Схема оптической системы

Будем считать, что на вход системе падает плоская волна, равная единице. Квадратная апертура ограничивает входной пучок, так что мы считаем его равным нулю за пределами апертуры. В отверстии апертуры находится дифракционный оптический элемент (ДОЭ). Линза расположена между апертурой и экраном на фокусном расстоянии от них.

Для упрощения будем рассматривать только те случаи, когда 𝜆𝑓 = 1, где 𝜆 – длина волны, 𝑓 – фокусное расстояние линзы. Тогда оператор распространения запишется в виде финитного преобразования Фурье:

, (1)

где 𝑓(𝑥,𝑦) – финитная функция (supp 𝑓 ⊆ [−𝑎;𝑎]2), задающая вид оптического распределения после прохождения ДОЭ, [−𝑎;𝑎]2 – квадратная область внутри апертуры, 𝐹𝑎(𝑢,𝑣) – спектр, ℱ𝑎 – оператор финитного преобразования Фурье.

Обычное преобразование Фурье отличается от финитного лишь тем, что интегрирование в последнем случае осуществляется по конечной области.

Так как входное распределение перед апертурой равно единице, а при прохождении через ДОЭ эффекты дифракции упрощаются до обыкновенного умножения, то входное распределение 𝑓(𝑥,𝑦) будет совпадать с функцией пропускания ДОЭ.

Важно: мы считаем толщину апертуры и ДОЭ в приближении бесконечно малой величиной.

Прежде чем приступать к двумерной задаче (т. к. функции зависят от двух переменных), рассмотрим более простую – одномерную:

. (2)

Для расчёта такого преобразования можно воспользоваться алгоритмом быстрого преобразование Фурье (БПФ). Он не рассматривается в данном пособии, поэтому можно использовать готовую реализацию. Однако, при реализации финитного преобразования Фурье по формуле (2) через БПФ следует учитывать нижеописанные замечания.

Предположим, что после дискретизации функции 𝑓(𝑥) получается вектор 𝐟 размерности 𝑁:

 (3)

где 𝑇 – символ транспонирования. Здесь и далее подразумевается, что количество отсчётов чётно.

Классически дискретное преобразования Фурье записывается для периодических функций в виде:

, (4)

где 𝐅 – спектр дискретного преобразования Фурье. Формула (4) аппроксимирует следующий интеграл:

. (5)

Иными словами, классическое преобразование Фурье подразумевает, что пределы интегрирования начинаются с нуля, в то время как наше преобразование Фурье центрировано.

Если продолжить функцию 𝑓(𝑥) с периодом 2𝑎 на всю числовую прямую, то для того, чтобы дискретное преобразование (4) аппроксимировало интеграл (2), а не (5), необходимо поменять местами первую и вторую половины компонентов вектора (3).

Замечание: классическое прямое преобразование Фурье (4) не учитывает шаг дискретизации ℎ𝑥, поэтому после применения операции БПФ необходимо умножить результат на ℎ𝑥.

После выполнения БПФ мы получаем вектор значений, но он будет определён для функции, заданной на промежутке [0;2𝑏], где 𝑏 предстоит определить. Поскольку нас интересует центрированная система, необходимо снова поменять местами первую и вторую половины компонентов полученного вектора, получив итоговый вектор 𝐅. Тогда область задания функции 𝐹𝑎(𝑢) изменится на [−𝑏;𝑏].

При использовании БПФ будет выполняться соотношение: ℎ𝑥ℎ𝑢 = 1/𝑁, где ℎ𝑢 – шаг дискретизации по оси 𝑢. Отсюда видно, что:

. (6)

Из формулы (6) следует: чем больше точек дискретизации взять, тем больше будет область задания функции 𝐹𝑎(𝑢). При малых 𝑁 аппроксимация будет плохой, а при больших 𝑁 промежуток [−𝑏;𝑏] может быть настолько большим, что важных деталей функции мы просто не увидим.

В этом случае поступают следующим образом: исходный вектор 𝐟 и слева, и справа дополняют одинаковым количеством нулей, зачастую много большим, чем *N*. Будем считать, что после дополнения нулями вектор стал иметь размерность 𝑀. После выполнения алгоритма 𝐅 будет также иметь размерность 𝑀, а функция 𝐹𝑎(𝑢) по-прежнему определена на промежутке [−𝑏;𝑏].

Если же теперь «вырезать» центральную часть вектора 𝐅, оставив 𝑁 элементов, то область задания функции 𝐹𝑎(𝑢) станет равной , где

. (7)

Таким образом, мы получаем алгоритм реализации оптического финитного преобразования Фурье через использование БПФ:

1. Провести дискретизацию входной функции 𝑓(𝑥) в вектор 𝐟 с размерностью 𝑁.
2. Дополнить вектор 𝐟 и слева, и справа необходимым числом нулей до размерности 𝑀.
3. Разбить вектор 𝐟 на две половины и поменять их местами.
4. Выполнить БПФ от 𝐟 и умножить результат на шаг ℎ𝑥, получив вектор 𝐅.
5. Разбить вектор 𝐅 на две половины и поменять их местами.
6. «Вырезать» центральную часть вектора 𝐅, оставив 𝑁 элементов.
7. Пересчитать область задания функции 𝐹𝑎(𝑢) по формуле (7).

Если область оказалась слишком большой (полезная часть спектра плохо видна) или слишком маленькой (спектр не умещается), можно соответственно изменить число дополняемых нулей на шаге 2.

Замечание: некоторые реализации БПФ не требуют, чтобы число 𝑀 было целой степенью двойки, а сами добавляют дополнительные нули, нарушая симметрию. Это может привести к появлению в результатах расчёта неправильного фазового набега. Так что необходимо удостовериться, что число 𝑀 является степенью двойки.

Вернёмся теперь к формуле (1). Поскольку в формуле имеется двумерная входная функция и двумерное преобразование Фурье, то после дискретизации функций мы будем получать матрицу 𝐟. Алгоритм нахождения преобразования Фурье от неё можно свести к одномерному случаю: необходимо применить вышеописанный алгоритм к каждой строке этой матрицы, получив новую матрицу, а затем применить его к каждому столбцу полученной матрицы.

Примечание: седьмой шаг, нахождение области задания 𝐹𝑎(𝑢,𝑣), следует выполнить только один раз.

Задание

1. Реализовать одномерное финитное преобразование Фурье с помощью применения алгоритма БПФ.
2. Построить график гауссова пучка. Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики амплитуды и фазы. Амплитуда находится как модуль каждого значения функции, фаза – как аргумент (или с помощью функции *atan2*).
3. Убедиться в правильности реализации преобразования, подав на вход гауссов пучок – собственную функцию преобразования Фурье. На выходе тоже должен получиться гауссов пучок (построить график на правильной области определения ). Рекомендуемая входная область: [−𝑎,𝑎] = [−5,5].
4. Реализовать финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования (например, методом прямоугольников). Важно: необходимо вычислить интеграл для каждого дискретного значения u, чтобы получить результат в виде вектора. На вход преобразования вновь следует подавать гауссов пучок.
5. Построить результаты двух разных реализаций преобразования на одном изображении (одно для амплитуды, одно для фазы) и убедиться, что они совпадают.
6. Используя первую реализацию преобразования, подать на вход световое поле, отличное от гауссова пучка, в соответствии со своим вариантом. Построить графики самого пучка и результата преобразования.
7. Рассчитать аналитически результат преобразования своего варианта поля и построить график на одной системе координат с результатом, полученным в предыдущем пункте.
8. Дополнительное задание: выполнить пункты 1-7 для двумерного случая. Графики изменятся на двумерные изображения, одномерные функции следует заменить на двумерные, равные произведению соответствующих одномерных функций. Например, гауссов пучок поменяется на .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Входное поле | Примечание |
| 1 | sinc(𝜋𝑥) | Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать значения интегрального синуса, либо другие свойства преобразования Фурье. |
| 2 | 1/(1 + 𝑥2) | Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать лемму Жордана и теорему о вычетах. |
| 3 | exp(2𝜋𝑖𝑥) + exp(−5𝜋𝑖𝑥) | Для аналитики применить финитное преобразование. |
| 4 | rect(𝑥/4) | Для аналитики применить не финитное преобразование. |
| 5 | 𝑥3 exp(−𝑥2) | Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье. |
| 6 | (4𝑥2 − 2)exp(−𝑥2/2) | Для аналитики применить не финитное преобразование. Можно использовать понятие полиномов Эрмита и мод Гаусса-Эрмита. |
| 7 | 𝑥2 | Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье. |
| 8 | sin(3𝜋𝑥) | Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье. |
| 9 | rect((𝑥 − 1)/4) | Для аналитики применить не финитное преобразование. |
| 10 | exp(2𝑖𝑥3) | Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать понятие функции Эйри или луча Эйри и свойства преобразования Фурье. |

Варианты