ПОСТРОЕНИЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ БИЛИНЕАРИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Душин С.В., Абраменков А.Н., Кутяков Е.Ю., Искаков А.Б., Сальников А.М.

Нелинейная непрерывная конечномерная динамическая система описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) \qquad (1)$$

Линейность **f** по **u**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \qquad (1a)$$

Линейность **f** по **x**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) \qquad (1b)$$

Билинейная система – это динамическая система, которую можно рассматривать как линейную по $\boldsymbol{x}$ с параметром $\boldsymbol{u}$, либо как линейную по $\boldsymbol{u}$ с параметром $\boldsymbol{x}$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \qquad (2)$$

Рассмотрим динамическую систему в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) + G(x)u \\ y = Cx \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение динамики, учитывающее первые **N** челнов разложения нелинейных функций в ряд Тейлора:

$$\dot{x} \approx A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i x^{(i)} + B_0 u + \sum_{i=1}^{N} B_i x^{(i)} u \tag{4}$$

$$A_0 = F(0), B_0 = G(0)$$

$$x^{(i)} = x \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{i-1 \text{ раз}} x \tag{5}$$

$$\frac{d(x^{(n)})}{dt} = \frac{d(x^{(n-1)} \otimes x^{(1)})}{dt} = \dot{x}^{(n-1)} \otimes x^{(1)} + x^{(1)} \otimes \dot{x}^{(n-1)} \tag{6}$$

Билинеаризованное уравнение динамики исходной динамической системы:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{x}}u + \hat{\boldsymbol{B}}u \qquad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(P)} \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_N \\ \boldsymbol{A}_{20} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2,N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{N0} & \boldsymbol{A}_{N1} \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_N \\ \boldsymbol{B}_{20} & \boldsymbol{B}_{21} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2,N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{B}_{N0} & \boldsymbol{B}_{N1} \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{O} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{ji} = \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \cdots + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{A}_i \qquad (8)$$

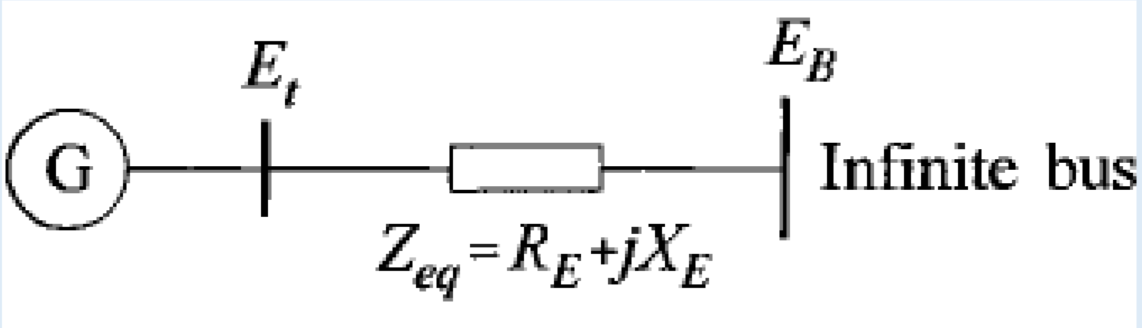
$$\boldsymbol{B}_{ji} = \boldsymbol{B}_i \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{B}_i \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \cdots + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{B}_i \qquad (9)$$

В частном случае, когда функция $\boldsymbol{G}$ в (3) не зависит от $\boldsymbol{x}$, матрица $\hat{\boldsymbol{N}}$ будет иметь упрощенный вид:

$$\hat{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{20} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{B}_{N0} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{B}_{k0} = \boldsymbol{B}_0 \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{B}_0 \otimes \boldsymbol{I} \ldots \otimes \boldsymbol{I} + \cdots + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{B}_0 \qquad (11)$$

Рассмотрим систему «генератор-нагрузка»:



Исходные нелинейные уравнения динамики данной системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\Delta\omega)}{dt} = -\dfrac{K_D\Delta\omega}{2H} - \dfrac{E'E_B}{2HX} sin\delta + \dfrac{T_m}{2H} \\ \dfrac{d\delta}{dt} = \omega_0\Delta\omega \end{cases} \qquad (12)$$

$\boldsymbol{\Delta\omega}$ – изменение частоты вращения ротора генератора; $\boldsymbol{\omega_0}$ – опорная частота сети; $\boldsymbol{\delta}$ – угол ротора; $\boldsymbol{T_m}$- механическая мощность; $\boldsymbol{E'}$– напряжение генератора; $\boldsymbol{E_B}$ – напряжение бесконечной шины; $\boldsymbol{X}$ – импеданс соединительной линии; $\boldsymbol{K_D}$ – коэффициент демпфирования.

3. Билинеаризация простой энергосистемы

Уравнения динамики в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{K_D}{2H}x_1 - \frac{E'E_B}{2HX}sin(x_2) + b_1u_1 \\ \dot{x_2} = \omega_0 x_1 \end{cases} \quad (13)$$

где $x_1 = \Delta\omega, x_2 = \delta, u_1 = T_m,\ b_1 = \frac{1}{2H}$

Разложив нелинейную часть первого уравнения системы (13) в ряд Тейлора в равновесной точке $\boldsymbol{x_0} = \{x_{01}, x_{02}\}$, и ограничившись первыми тремя членами, получим (в отклонениях от точки $\boldsymbol{x_0}$):

$$\begin{cases} \dot{x_1} \approx D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + D_{12}^{(2)}{x_2}^2 + D_{12}^{(3)}{x_2}^3 + b_1u_1 \\ \dot{x_2} = D_{21}x_1 \end{cases} \quad (14)$$

где $D_{11} = -\frac{K_D}{2H}$; $D_{12} = -\frac{E'E_B}{2HX}cos(x_{02})$; $D_{12}^{(2)} = \frac{E'E_B}{4HX}sin(x_{02})$; $D_{12}^{(3)} = \frac{E'E_B}{12HX}cos(x_{02})$;

$D_{21} = \omega_0$.

Или, в векторно-матричном виде:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{A_1 x^{(1)}} + \boldsymbol{A_2 x^{(2)}} + \boldsymbol{A_3 x^{(3)}} + \boldsymbol{B_0}\,\boldsymbol{u} \qquad (15)$$

$$x^{(1)} = [x_1 \quad x_2]^T$$

$$x^{(2)} = [x_1 \quad x_2]^T \otimes [x_1 \quad x_2]^T = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2x_1 \quad x_2^2]^T$$

$$x^{(3)} = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2x_1 \quad x_2^2]^T \otimes [x_1 \quad x_2]^T$$
$$= [x_1^3 \quad x_1^2x_2 \quad x_1x_2x_1 \quad x_1x_2^2 \quad x_2x_1^2 \quad x_2x_1x_2 \quad x_2^2x_1 \quad x_2^3]^T$$

- линейная часть разложения: $A_1 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix}$;
- квадратичная часть разложения: $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
- кубическая часть разложения: $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2H} \\ 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} T_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Билинеаризация простой энергосистемы

Конечное билинеаризованное уравнение динамики исходной нелинейной системы (в свёрнутом виде):

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \widehat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{x}}u_1 + \widehat{\boldsymbol{B}}u_1 \qquad (16)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{bmatrix};\ \hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ . & A_{21} & A_{22} \\ . & . & A_{31} \end{bmatrix};\ \widehat{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{20} & 0 & 0 \\ 0 & B_{30} & 0 \end{bmatrix};\ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = A_1 \otimes I + I \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{20} = B_0 \otimes I + B_0 \otimes I = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{22} = A_2 \otimes I + I \otimes A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{30} = B_0 \otimes I \otimes I + I \otimes B_0 \otimes I + I \otimes I \otimes B_0 = \begin{bmatrix} 3b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 2b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = A_1 \otimes I \otimes I + I \otimes A_1 \otimes I + I \otimes I \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 3D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 2D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 2D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & D_{21} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix};$$

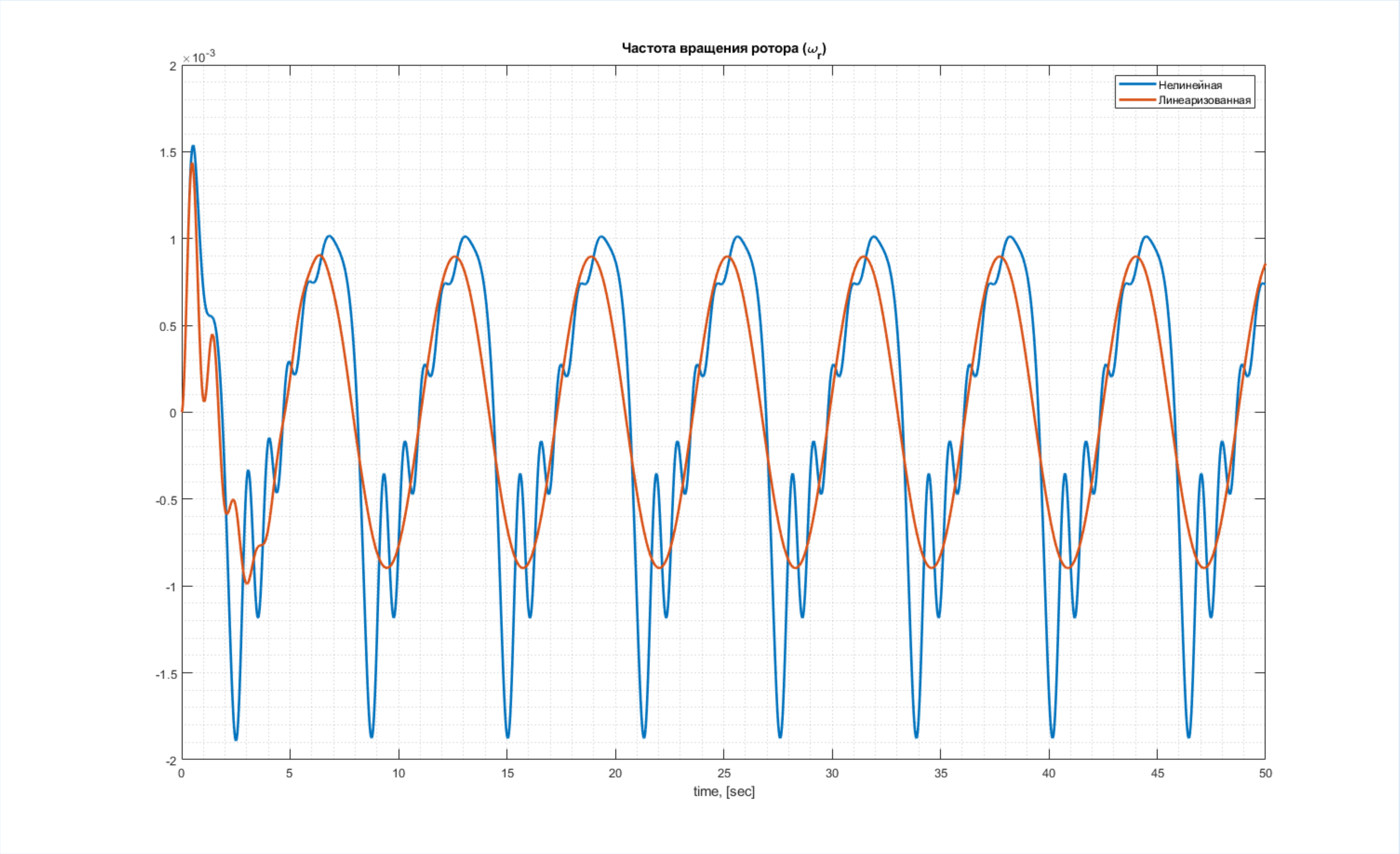
Конечное билинеаризованное уравнение динамики исходной нелинейной системы (в развёрнутом виде):

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(3)} \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 2D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 2D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{21} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_1 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2x_1 \\ x_1x_2^2 \\ x_2x_1^2 \\ x_2x_1x_2 \\ x_2^2x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_1 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2x_1 \\ x_1x_2^2 \\ x_2x_1^2 \\ x_2x_1x_2 \\ x_2^2x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} [u_1] + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_1]$$

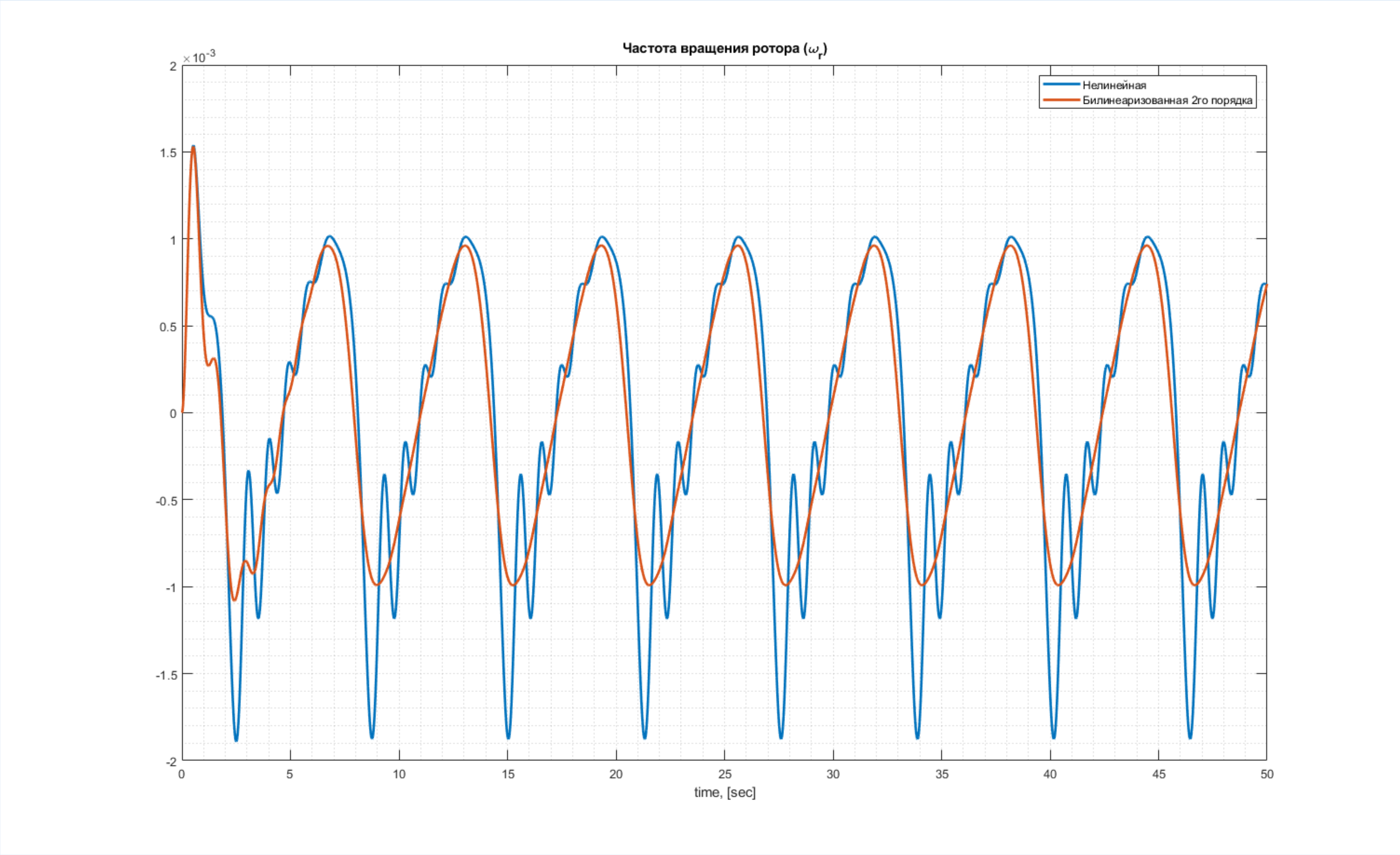
3. Билинеаризация простой энергосистемы

Отклик исходной нелинейной и линеаризованной моделей на внешнее возмущение $\boldsymbol{u}_1$ в виде периодических колебаний механической мощности $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}$, подаваемой на генератор ($\boldsymbol{u}_1 = \Delta \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} \sin(t)$ при $\Delta \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} = 0.25$)

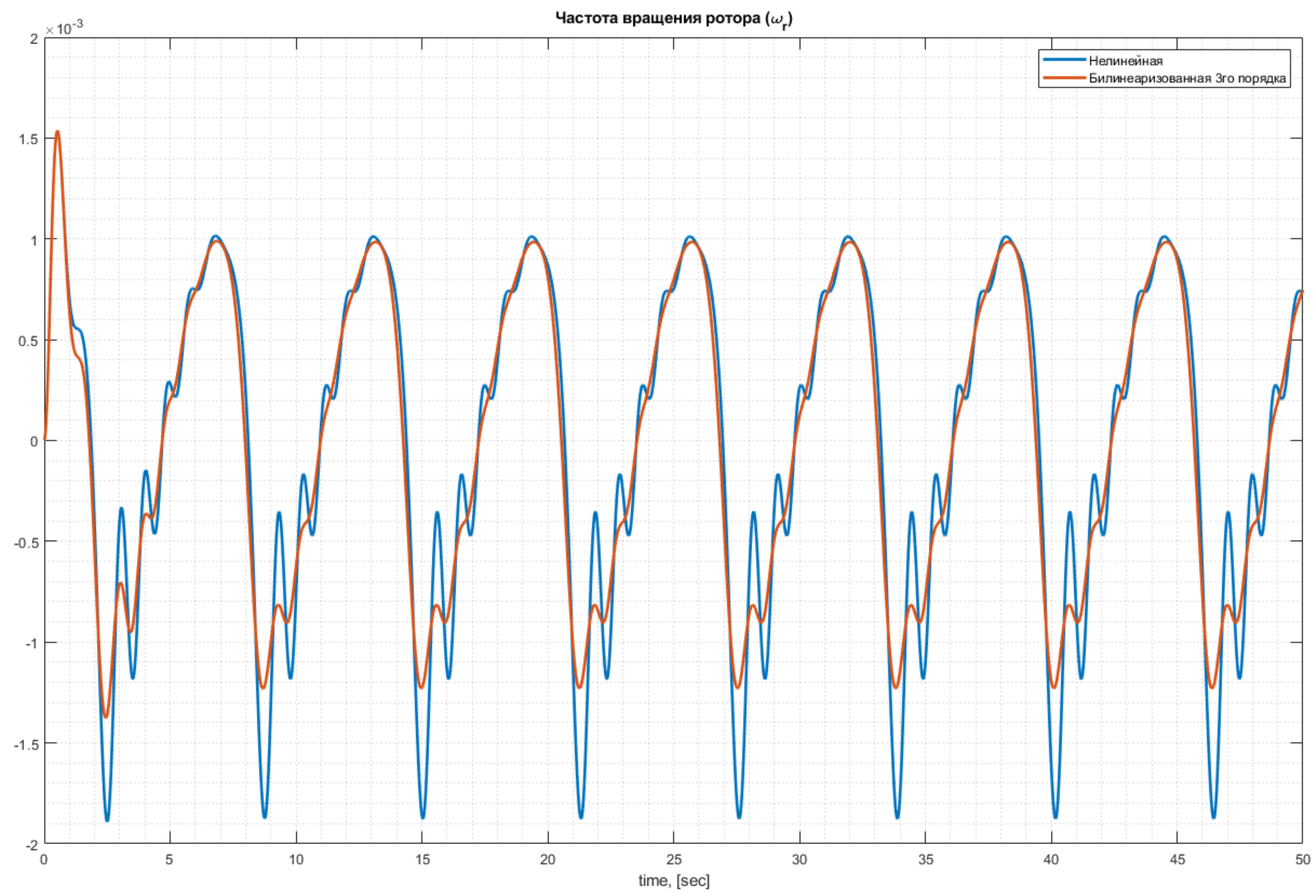


3. Билинеаризация простой энергосистемы

Отклик исходной нелинейной и билинеаризованной моделей на внешнее возмущение $\boldsymbol{u}_1$ в виде периодических колебаний механической мощности $\boldsymbol{T_m}$, подаваемой на генератор ($\boldsymbol{u}_1 = \Delta \boldsymbol{T_m} \sin(t)$ при $\Delta \boldsymbol{T_m} = 0.25$)



Отклик исходной нелинейной и билинеаризованной моделей на внешнее возмущение $\boldsymbol{u}_1$ в виде периодических колебаний механической мощности $\boldsymbol{T}_m$, подаваемой на генератор ($\boldsymbol{u}_1 = \Delta \boldsymbol{T}_m \sin(t)$ при $\Delta \boldsymbol{T}_m = 0.25$)



3. Билинеаризация простой энергосистемы

Отклонения линейной и билинеаризованных моделей от исходной нелинейной модели (при $\boldsymbol{\omega_0} = 377$; $\boldsymbol{\delta}_0 = 49.92°$; $\boldsymbol{T_m} = 0.9$; $\boldsymbol{E'} = 1.123$; $\boldsymbol{E_B} = 0.995$; $\boldsymbol{X} = 0.95$; $\boldsymbol{K_D} = 10$; $\boldsymbol{H} = 3.5$)