Лабораторная работа
«ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Тема 1 «ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ИГР»

Цели:
1. Изучить основные понятия матричных игр, статистических игр
2. Научиться пользоваться MS Excel при решении и анализе матричных игр

Контрольные вопросы
1. Что называется игрой? Партией? Ходом? Стратегией?
2. Как находится верхняя и нижняя чистая цена игры в матричной игре?
3. Всегда ли матричная игра имеет решение в чистых стратегиях?
4. Что называется оптимальным решением матричной игры?
5. Какие методы упрощения матричных игр Вы знаете?
6. Какие стратегии в матричной игре называются чистыми, а какие смешанными?
7. Какие методы решения матричных игр вы знаете?
8. Чем отличаются проблемы теории игр от проблем теории оптимизации?
9. На основании какого утверждения возможно сведение матричной игры к паре симметричных задач линейного программирования?
10. Какая существует связь между решениями пары симметричных задач линейного программирования и решением матричной игры?
11. Любую ли матричную игру, заданную платежной матрицей, можно свести к паре задач линейного программирования?

Пример составления платежной матрицы

Пусть после нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний:

1-ое — требуется профилактический ремонт;
2-ое — следует заменить отдельные детали и узлы;
3-е — требуется капитальный ремонт.

В зависимости от состояния оборудования руководство предприятия может принять следующие решения:

I. отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует затрат 6, 8, 15 денежных единиц для каждого состояния оборудования;
II. пригласить специалистов со стороны, при этом расходы составят 7, 10, 14 денежных единиц;
III. заменить оборудование новым, что приведет к затратам соответственно 16, 19, 20 денежных единиц.

Составьте игровую схему, выявите участников игры и их стратегии. Составьте платежную матрицу.

Решение.

Представим рассматриваемую ситуацию в виде игры — математической модели конфликта, рассматриваемого в условиях неопределенности, исход которого заранее не известен. Одним из участников игры является руководство предприятия, заинтересованное в минимизации потерь — игрок A. Вторым участником игры является «природа» (совокупность объективных неопределенных факторов) — игрок $П$, приводящий промышленное оборудование в то или иное состояние. Такие игры относятся к *играм с «природой»*, в которых первый игрок старается действовать осмотрительно, а второй — случайно.

Руководство предприятия может принять одно из трех решений (стратегий):

$A_1 = \{отремонтировать\ оборудование\ силами\ заводских\ специалистов\}$,

$A_2 = \{пригласить\ специалистов\ со\ стороны\}$,

$A_3 = \{заменить\ оборудование\ новым\}$.

Для «природы» в рассматриваемой ситуации возможны три стратегии (состояния):

$П_1 = \{требуется\ профилактический\ ремонт\}$,

$П_2 = \{следует\ заменить\ отдельные\ детали\ и\ узлы\}$,

$П_3 = \{требуется\ капитальный\ ремонт\}$.

В теории игр обычно говорят о выигрыше и максимизации выигрыша, поэтому опишем данную игровую ситуацию с минимизацией потерь в терминах выигрыша. Для этого поставим знак минус перед всеми числовыми значениями затрат на ремонт и замену оборудования, данными в условии. Если игрок A принимает i-ю стратегию A_i при j-ом состоянии «природы» $П_j$, то он получит выигрыш a_{ij}. Например, руководство принимает решение $A_2 = \{пригласить\ специалистов\ со\ стороны\}$, если $П_3 = \{требуется\ капитальный\ ремонт\}$, значит, его выигрыш $a_{23} = -14$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *платежной матрицей*.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	−6	−8	−15
A_2	−7	−10	−14
A_3	−16	−19	−20

Дальнейший ход работы

Постановка задачи. Матричная игра задана платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 11 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Указать возможные чистые стратегии сторон;
2. Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:
а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,5)).
б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы, равны соответственно 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 (воспользоваться критерием Байеса);
в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа);
3. Решить матричную игру путем сведения ее к задаче линейного программирования:
а) составить математическую модель прямой и двойственной задачи
б) найти их оптимальные планы
в) выписать оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение:

1. У игрока ***А*** 4, а у игрока ***П*** 5 возможных чистых стратегий:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$\mathbf{A}_1$	0	0	0	13	6
$\mathbf{A}_2$	1	11	8	6	2
$\mathbf{A}_3$	2	4	3	5	2
$\mathbf{A}_4$	10	1	8	1	5

2. Часто приходится принимать решение, не имея достаточной информации. Если эта неопределенность не связана с сознательным противодействием противника, а определяется внешними условиями, которыми мы не можем управлять, но от которых зависит эффективность выбранной нами стратегии, то такие ситуации принято называть *статистическими играми*, или *играми с природой*.

Природа безразлична к нашему выигрышу, следовательно, ни одно ее возможное состояние нельзя отбросить. Смешанная стратегия может иметь смысл только при многократном повторении игры. Результаты игры будем представлять платежной матрицей, обозначая возможные состояния природы $П_j$. С учетом здравого смысла и практической целесообразности сформулированы ряд критериев, которые образуют логическую схему принятия решения. Для принятия решения кроме платежной матрицы используется *матрица рисков*, элементы которой есть разности между максимально возможным выигрышем при j-м состоянии природы и выигрышем при использовании нами i-й стратегии. Иначе говоря, это упущенная нами из-за невозможности предсказать состояние природы выгода.

Платежная матрица имеет вид:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
$\mathbf{A}_1$	0	0	0	13	6	0	13	6,5
$\mathbf{A}_2$	1	11	8	6	2	1	11	6
$\mathbf{A}_3$	2	4	3	5	2	2	5	3,5
$\mathbf{A}_4$	10	1	8	1	5	1	10	5,5
$b_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	11	8	13	6			

тогда элементы матрицы рисков $r_{ij} = b_j - a_{ij}$ и получаем:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max\limits_j r_{ij}$	$\min\limits_j r_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
$\mathbf{A}_1$	10-0=10	11	8	0	0	11	0	5,5
$\mathbf{A}_2$	10-1=9	0	0	7	4	9	0	4,5
$\mathbf{A}_3$	10-2=8	7	5	8	4	8	4	6
$\mathbf{A}_4$	10-10=0	10	0	12	1	12	0	6

а) В условиях полной неопределенности используются следующие критерии:

максиминный критерий Вальда. Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию. Природа рассматривается как противодействующая сторона. Это стратегия крайнего пессимизма. Для приведенного примера нам следует выбрать $\mathbf{A}_3$ (при этом минимальный гарантированный выигрыш равен 2);

критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск). Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска. В рассматриваемом примере это также $\mathbf{A}_3$ (при этом максимальный возможный риск равен 8);

максимаксный критерий. Выбирается стратегия, при которой возможно получение максимального выигрыша. Это – безоглядный оптимизм, иногда на него делают ставку в безвыходном положении. В данном случае это $\mathbf{A}_1$ (при этом максимальный возможный выигрыш равен 13);

критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма) – это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Стратегия выбирается в соответствии со значением

$$\max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент пессимизма $(0 \le \lambda \le 1)$. При крайних значениях этого коэффициента получим соответственно минимаксный и максимаксный критерии. При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0{,}5$ или $\lambda = 0{,}6$. Можно критерий Гурвица применить и к матрице рисков, тогда он примет вид:

$$\min_i (\lambda \max_j r_{ij} + (1-\lambda) \min_j r_{ij}).$$

Лучшими стратегиями оказываются A_1 – для матрицы выигрышей и A_2 – для матрицы рисков (при этом возможный выигрыш равен 6,5, а возможный риск равен 4,5 соответственно).

Если бы результаты применения различных критериев совпадали, то мы имели бы основание для выбора стратегии. Однако есть основание сократить область выбора, опуская стратегию $\mathbf{A}_4$. Окончательное же решение зависит от склонности и готовности к риску лица, принимающего решения. Стратегия $\mathbf{A}_1$ перспективна, хотя и несколько рискованна, стратегии $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_3$ представляются более осторожными. В подобной ситуации уместно поставить задачу сбора дополнительных статистических данных или проведения экспериментов для оценки вероятностей возможных состояний природы. Экономически такая работа будет оправдана, если затраты на ее проведение будут меньше ожидаемого выигрыша от уточнения стратегии.

б) Предположим, что вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1,n}$ известны и занесены в платежную матрицу и матрицу рисков.

Платежная матрица

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
$\mathbf{A}_1$	0	0	0	13	6	3,1
$\mathbf{A}_2$	1	11	8	6	2	4,2
$\mathbf{A}_3$	2	4	3	5	2	2,7
$\mathbf{A}_4$	10	1	8	1	5	6,3
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	

Матрица рисков

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$
$\mathbf{A}_1$	10	11	8	0	0	5,7
$\mathbf{A}_2$	9	0	0	7	4	4,6
$\mathbf{A}_3$	8	7	5	8	4	6,1
$\mathbf{A}_4$	0	10	0	12	1	2,5
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$, или минимизируют средний риск $\min \overline{r_i}$. Для принятых значений вероятности в обоих случаях предпочтительной оказывается стратегия $\mathbf{A}_4$.

в) Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Легко убедиться, что в этом случае лучшие результаты дает стратегия $\mathbf{A}_2$.

3. а) В данной игре $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2 \neq \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 6$ и игру следует решать в смешанных стратегиях. Т.к. цена игры $v>0$ ($\alpha<v<\beta$), задачу можно сразу свести к задаче линейного программирования.

Замечание! Если цена игры может оказаться отрицательна, то, прежде чем сводить игру к задаче линейного программирования, требуется, для получения положительной цены игры, прибавить ко всем элементам платежной матрицы одно и тоже положительное число. После получения ответа это число отнимают от новой цены игры.

Математическая модель задачи для игрока ***П***:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to max$$

$$\begin{cases} 13y_4 + 6y_5 \le 1, \\ y_1 + 11y_2 + 8y_3 + 6y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 5y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 10y_1 + y_2 + 8y_3 + y_4 + 5y_5 \le 1 \end{cases} \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$

Математическая модель задачи для игрока $\boldsymbol{A}$:

$$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 10x_4 \ge 1, \\ 11x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 1, \\ 8x_2 + 3x_3 + 8x_4 \ge 1, \qquad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}, \\ 13x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 1, \end{cases}$$

б) Найдем оптимальную смешанную стратегию q^* игрока $\boldsymbol{П}$. Для этого воспользуемся **Поиском решения.** Получим:

0,010703	0,059633	0	0	0,166667	0,237003

0	0	0	13	6	1	<=	1
1	11	8	6	2	1	<=	1
2	4	3	5	2	0,593272	<=	1
10	1	8	1	5	1	<=	1

Отсюда y^* = (0,010703; 0,059633; 0; 0; 0,166667), $f(y)$ =0,237003.

Для нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока $\boldsymbol{A}$ также можно воспользоваться **Поиском решения,** однако решение для двойственной задачи можно найти и из отчета по устойчивости. Получим:

Теневая Цена
0,062691131
0,082568807
0
0,091743119

Отсюда x^* = (0,062691131; 0,082568807; 0; 0,091743119), $z(x)$ =0,237003.

в) Остается вычислить цену игры v и компоненты q_j оптимальной смешанной стратегии: $v = 1/f$ = 1/0,237003=4,219355; $q_1 = v\ y_1$ =4,219355 · 0,010703= 0,045161; q_2 =0,251613; q_3 =0; q_4 =0; q_5 =0,703226. Итак, $\boldsymbol{q^*}$ **= (0,045161; 0,251613; 0; 0; 0,703226)**. Аналогично, $p_1 = v\ x_1$ =4,219355 · 0,062691131=0,264516; p_2 =0,348387; p_3 =0; p_4 = 0,387097. Таким образом, оптимальной для игрока А является смешанная стратегия $\boldsymbol{p^*}$ **= (0,264516; 0,348387; 0; 0,387097)**. Легко проверить, сумма компонент каждой из оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* равна единице, а цена игры $\boldsymbol{v}$**=4,219**, действительно, лежит между α=2 и β= 6.

Тема 2 «ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЕТЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ»

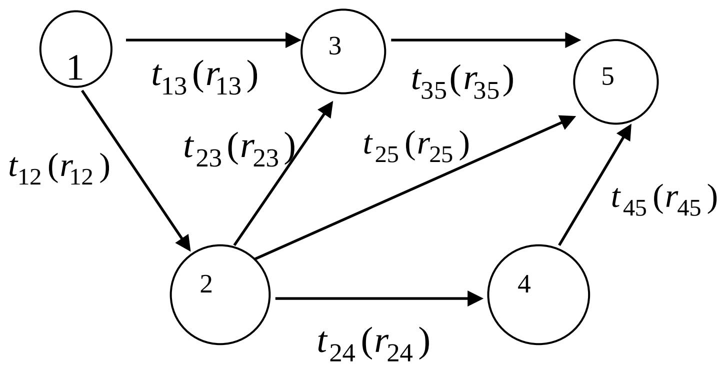
Цели:

1. Изучить основные понятия сетевого планирования и управления
2. Освоить этапы построения сетевого графика и правила расчета его параметров
3. Научиться решать и анализировать задачу сетевого планирования с одновременной оптимизацией.

Контрольные вопросы

1. Что называется событием, работой, фиктивной работой?
2. Сформулируйте правила построения сетевых графиков.
3. Какие временные параметры сетевого графика Вы знаете?
4. Что называется ранним, поздним сроком свершения события, резервом времени события?
5. Что называется ранним, поздним сроком начала (окончания) работы, полным резервом времени?
6. Какие виды резервов времени Вы знаете?
7. Дайте определение критического пути.
8. Что называется линейным графиком (графиком Ганта)?
9. Как производится учет потребностей в ресурсах при выполнении комплекса работ?
10. Как производится оптимизация сетевого графика?

Пример нахождения критического пути. Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ.



Известны продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы $(i;\ j)$ комплекса (могут быть известны и количества ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ r_{ij}).

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.
2. Найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

Параметры задачи	t_{12}	t_{13}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	t_{35}	t_{45}
	3	5	2	6	5	6	3

Решение. Решение задачи начнем с перечисления имеющихся работ и событий, а также с определения раннего срока свершения события $t_{\text{р}}(i)$ и позднего срока свершения события $t_{\text{п}}(i)$.

Ранним сроком $t_{\text{р}}(i)$ **свершения события** i называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути $t_{\text{р}}(i) = t[L_1(i)]$, где $L_1(i)$ – **максимальный предшествующий путь**. Ранний срок свершения события (5) совпадает с критическим временем: $t_{\text{р}}(5) = t_{\text{кр}}$.

Поздним сроком $t_{\text{п}}(i)$ **свершения события** i является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{\text{кр}}$. Очевидно, что $t_{\text{п}}(i)$ определяется разностью между $t_{\text{кр}}$ и длиной максимального из последующих путей $L_2(i)$: $t_{\text{п}}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)]$. Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают.

Зная сроки свершения событий, можно определить **временные параметры работ**.

Ранний срок начала работы (i, j) равен раннему сроку свершения события i: $t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i)$.

Ранний срок окончания работы (i, j) равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности: $t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}$.

Поздний срок окончания работы (i, j) совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: $t_{\text{по}}(i, j) = t_{\text{п}}(j)$.

Поздний срок начала работы (i, j) равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью: $t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}$.

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{\text{рн}}(i, j)$ и $t_{\text{по}}(i, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

Полный резерв времени работы

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Независимый (свободный) резерв времени работы

$$R_{\text{н}}(i, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Величина необходимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

Частный резерв времени работы первого вида $R'(i, j)$

$$R'(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Частный резерв времени работы второго вида $R''(i, j)$

$$R''(i, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Решение

Для нашей задачи сначала перечислим все имеющиеся работы и их продолжительность, затем с использованием соответствующих формул рассчитаем ранний и поздний сроки свершения всех событий (см. ячейки C1:F6). Для определения раннего срока события сначала необходимо определить длину всех имеющихся путей сетевого графика. Рассмотрим пути из события 1 в 3; из 1 в 5; из 2 в 5 (так как для этих событий пути не единственные). Пути и их длина представлены в строках 9–13. Далее по формуле $t_{\text{р}}(i) = t[L_1(i)]$, например, для события 3, получаем $t_{\text{р}}(3) = t[L_1(3)]$. Определив ранний срок свершения последнего, 5-го события, определим критическое время: $t_{\text{р}}(5) = 12$. Определим поздние сроки свершения событий по формуле $t_{\text{п}}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)]$. Для события 3 имеем $t_{\text{п}}(3) = t_{\text{кр}} - t[L_2(3)] = t_{\text{кр}} - t_{35} = 12 - 6 = 6$, а для события 2: $t_{\text{п}}(2) = t_{\text{кр}} - t[L_2(2)] = t_{\text{кр}} - \max\{t_{23} + t_{35}; t_{25}; t_{24} + t_{45}\} = 12 - \max\{8; 5; 9\} = 3$.

D6 = =МАКС(F10:F14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Работы:	продол. Ра	События	t(p)	t(п)	Rп(i)	t(PH)=t(p)	t(PO)	t(по)	t(пн)	R(п)(i;j)	R(н)	R'
2	(1;2)	3	**1**	0	0	0	0	3	3	0	**0**	0	0
3	(1;3)	5	**2**	3	3	0	0	5	6	1	**1**	0	1
4	(2;3)	2	**3**	5	6	1	3	5	6	4	**1**	0	1
5	(2;4)	6	**4**	9	9	0	3	9	9	3	**0**	0	0
6	(2;5)	5	**5**	**12**	**12**	0	3	8	12	7	**4**	4	4
7	(3;5)	6					5	11	12	6	**1**	0	0
8	(4;5)	3					9	12	12	9	**0**	0	0
9	Путь из 1 в 3:			Путь из 1 в 5:			Путь из 2 в 5:						
10	13	5		135		11	235	8					
11	123	5		1235		11	25	5					
12				125		8	245	9					
13				1245		12							
14													

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет **резерв времени события**: $R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_{\text{р}}(i)$. Резервы критических событий равны 0. Резервы событий представлены в ячейках F2:F6. Таким образом, события 1, 2, 4, 5 принадлежат критическому пути.

Определим временные параметры работ: ранний срок начала работы (i, j), поздний срок окончания работы (i, j), поздний срок начала работы (i, j). Например, для работы (2;3): $t_{\text{рн}}(2;3) = t_{\text{р}}(2) = 3$, $t_{\text{ро}}(2;3) = t_{\text{р}}(2) + t_{23} = 3 + 2 = 5$, $t_{\text{пн}}(2;3) = t_{\text{п}}(3) - t_{23} = 6 - 2 = 4$. Аналогичным образом рассчитываются временные параметры остальных работ (см. ячейки O2:J8).

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{\text{рн}}(i; j)$ и $t_{\text{по}}(i, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени: полный резерв времени работы, независимый (свободный) резерв времени работы, частный резерв времени работы первого вида (гарантийный), частный резерв времени работы второго вида.

Вычисляем резервы времени работ задачи (они находятся в столбцах K, L, M).

На основе сетевого графика составим линейный график (график Ганта), на котором изображается время начала и окончания каждой работы, а также полный резерв времени для каждой работы. По графику также определим работы, принадлежащие критическому пути. Для построения линейного графика нам понадобятся следующие данные: ранний срок начала работы, продолжительность работы и полный резерв времени работы. Скопируем эти данные в ячейки A16:C23. В столбце D укажем, принадлежит ли данное событие критическому пути (используем тот факт, что если полный резерв времени равен нулю, то событие принадлежит критическому пути). Функция ЕСЛИ возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другие, если оно ложно. Пример использования данной функции см. ячейка D17.

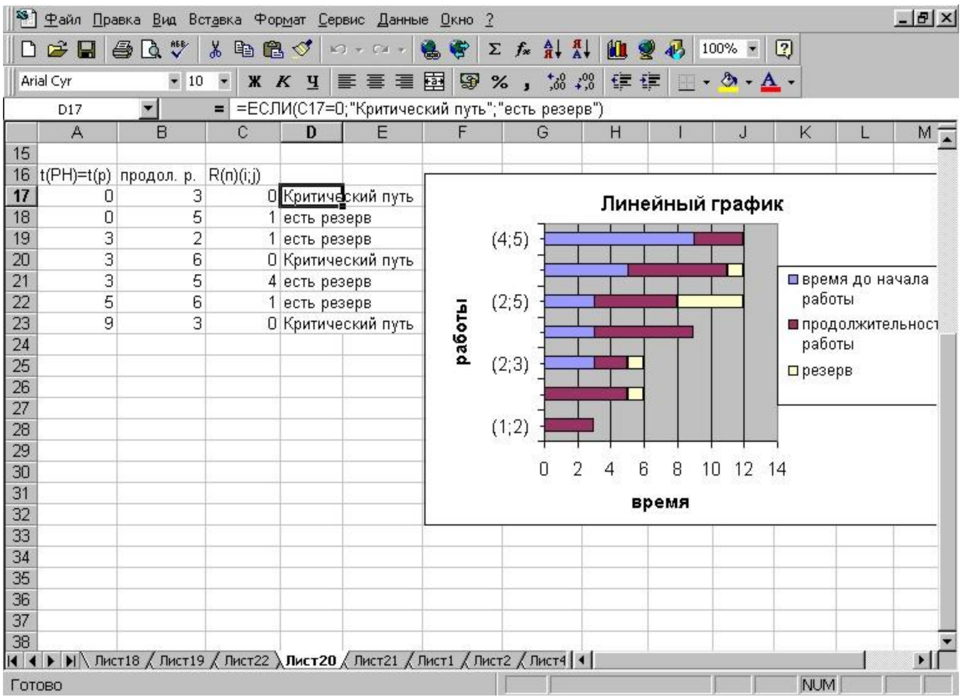
Построение диаграммы «Линейный график»

1. Щелкнуть курсором на кнопке Мастер диаграмм. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 1 (вид диаграммы).

Выбрать: **Линейчатая; Вид: Вид 2**. **Далее.**

2. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 2 (источник данных диаграммы) и вид выбранной диаграммы. **Диапазон:** вводим наши данные (три столбца A17:C23), **Ряд – подписи по оси X:** вводим столбец «Работы»: (1;2) – (4;5) (ячейки A2:A8, рис. 22). **Далее.**

3. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 3 (параметры диаграммы). На этом шаге можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст виден на экране. **Далее.**



4. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 4 (размещение диаграммы). Выбрать: **поместить диаграмму на имеющемся листе**. **Готово**.

5. На экране диаграмма.

Пример (оптимизация).

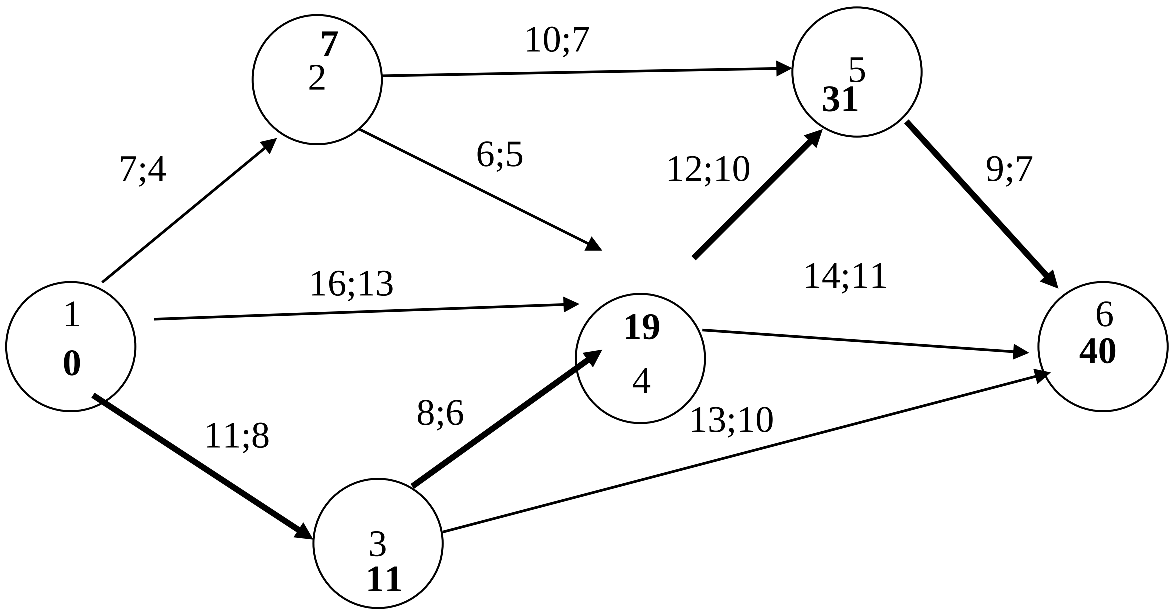
Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти такие $t^{н}_{ij}$, t^{o}_{ij}, x_{ij}, чтобы:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным.;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij}.

Номер задачи	Пара-метры	Работы										Срок выполнения проекта t_0
		1,2	**1,3**	**1,4**	**2,4**	**2,5**	**3,4**	**3,6**	**4,5**	**4,6**	**5,6**	
*	t_{ij}	7	11	16	6	10	8	13	12	14	9	34
	d_{ij}	4	8	13	5	7	6	10	10	11	7	
	k_{ij}	0,1	0,3	0,2	0,05	0,25	0,2	0,12	0,5	0,08	0,02	

*1 Запишем все данные на сетевой график и рассчитаем сроки свершения событий для варианта *.*



Расчеты показали, что срок выполнения проекта $t_{кр}$ = 40, т.е. превышает директивный срок t_0 = 34.

2. Составление математической модели задачи.

Целевая функция имеет вид

$$f= x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \ (\min) .$$

Запишем ограничения задачи:

а) срок выполнения проекта не должен превышать t_0 = 34:

$t^о_{36} \le 34$; $t^о_{46} \le 34$; $t^о_{56} \le 34$;

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$t^о_{12} - t^н_{12} \ge 4$; $t^о_{34} - t^н_{34} \ge 6$;

$t^о_{13} - t^н_{13} \ge 8$; $t^о_{36} - t^н_{36} \ge 10$;

$t^о_{14} - t^н_{14} \ge 13$; $t^о_{45} - t^н_{45} \ge 10$;

$t^о_{24} - t^н_{24} \ge 5$; $t^о_{46} - t^н_{46} \ge 11$;

$t^о_{25} - t^н_{25} \ge 7$; $t^о_{56} - t^н_{56} \ge 7$;

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$t^о_{12} - t^н_{12} = 7 - 0,1x_{12}$; $t^о_{13} - t^н_{13} = 11 - 0,3x_{13}$;

$t^о_{14} - t^н_{14} = 16 - 0,2x_{14}$; $t^о_{24} - t^н_{24} = 6 - 0,05x_{24}$;

$t^о_{25} - t^н_{25} = 10 - 0,25x_{25}$; $t^о_{34} - t^н_{34} = 8 - 0,2x_{34}$;

$t^о_{36} - t^н_{36} = 13 - 0,12x_{36}$; $t^о_{45} - t^н_{45} = 12 - 0,5x_{45}$;

$t^о_{46} - t^н_{46} = 14 - 0,08x_{46}$; $t^о_{56} - t^н_{56} = 9 - 0,02x_{56}$;

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{н}_{14} = 0$;

$t^{н}_{24} \geq t^{o}_{12}$; $t^{н}_{25} \geq t^{o}_{12}$; $t^{н}_{34} \geq t^{o}_{13}$; $t^{н}_{36} \geq t^{o}_{13}$;

$t^{н}_{45} \geq t^{o}_{14}$; $t^{н}_{45} \geq t^{o}_{24}$; $t^{н}_{45} \geq t^{o}_{34}$;

$t^{н}_{46} \geq t^{o}_{14}$; $t^{н}_{46} \geq t^{o}_{24}$;

$t^{н}_{46} \geq t^{o}_{34}$; $t^{н}_{56} \geq t^{o}_{25}$; $t^{н}_{56} \geq t^{o}_{45}$;

д) условие неотрицательности неизвестных:

$t^{н}_{ij} \geq 0, t^{o}_{ij} \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i,j) \in \vec{e}$.

3. Численное решение задачи:

Решив данную задачу (например, средствами EXCEL), получаем следующие результаты:

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{o}_{12} = 7$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{o}_{13} = 8$; $t^{н}_{14} = 0$; $t^{o}_{14} = 15$;

$t^{н}_{24} = 7$; $t^{o}_{24} = 13$; $t^{н}_{25} = 7$; $t^{o}_{25} = 17$;

$t^{н}_{34} = 8$; $t^{o}_{34} = 15$; $t^{н}_{36} = 8$; $t^{o}_{36} = 21$;

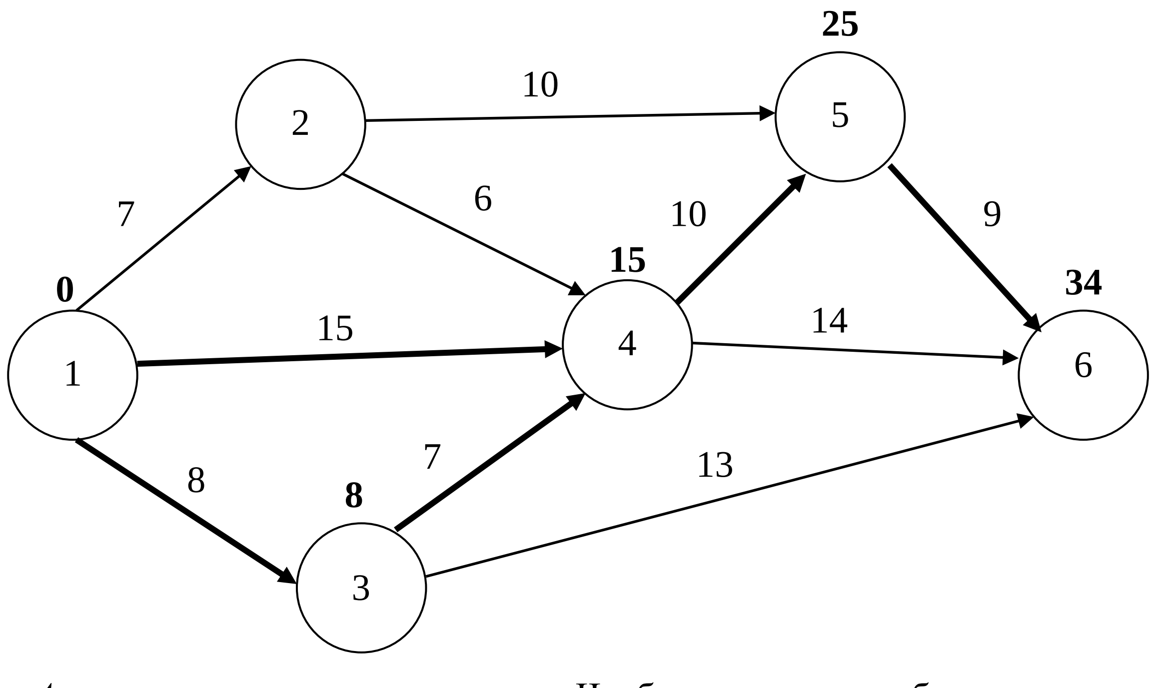
$t^{н}_{45} = 15$; $t^{o}_{45} = 25$; $t^{н}_{56} = 25$; $t^{o}_{56} = 34$;

$x_{12} = 0$; ; $x_{13} = 10$; $x_{14} = 5$; $x_{24} = 0$; $x_{25} = 0$;

$x_{34} = 5$; $x_{36} = 0$; $x_{45} = 4$; $x_{46} = 0$; $x_{56} = 0$;

$f_{min} = 24$.

Результаты представим на сетевом графике:



4. *Анализ полученных результатов.* Чтобы выполнить работы проекта за директивное время $t_0=34$, необходимо дополнительно вложить 24 ден.ед. При этом средства распределятся следующим образом: 10 ден.ед. – в работу (1,3), 5 ден.ед. – в работу (1,4), 5 ден.ед. – в работу (3,4) и 4 ден.ед. – в работу (4,5), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,3) на 3 дня, работы (1,4) - на 1 день, работы (3,4) - на 1 день и работы (4,5) - на 2 дня. Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 6 ед. времени.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Варианты 1-16

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний:

1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта;

2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы;

3) оборудование требует капитального ремонта или замены.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования. Требуется:

1) **придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;**

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

Указание. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3) а) — критерием Байеса, в п. 3) б) — критерием Лапласа, в п. 3) в) — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

	Номер варианта															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a_1	5	4	7	6	10	9	8	7	10	2	6	13	7	6	10	9
a_2	11	6	11	10	8	12	1	12	17	6	12	9	11	10	8	12
a_3	9	9	9	15	13	10	7	20	13	10	10	15	9	15	13	10
b_1	7	5	6	15	18	7	15	15	12	10	8	20	6	15	18	7
b_2	12	3	8	9	14	14	10	11	15	4	13	12	8	9	14	14

b_3	6	7	16	18	10	9	16	17	9	8	7	11	16	18	10	9
c_1	15	20	21	13	25	15	12	23	21	14	14	18	21	13	25	15
c_2	10	15	10	24	12	11	9	9	8	12	11	10	10	24	12	11
c_3	16	6	12	12	9	18	18	13	14	6	17	14	12	12	9	18
q_1	0,30	0,40	0,15	0,15	0,35	0,20	0,35	0,15	0,35	0,3	0,2	0,30	0,15	0,15	0,35	0,20
q_2	0,50	0,45	0,60	0,55	0,45	0,65	0,50	0,65	0,55	0,6	0,3	0,45	0,60	0,55	0,45	0,65
q_3	0,20	0,15	0,25	0,30	0,2	0,16	0,15	0,20	0,10	0,1	0,5	0,25	0,25	0,30	0,2	0,16
γ	0,70	0,90	0,50	0,80	0,8	0,60	0,70	0,90	0,60	0,6	0,75	0,70	0,50	0,80	0,8	0,60

Варианты 17-30

За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b_1, b_2, b_3 или b_4 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c_1 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят c_2 ед. в расчете на единицу сырья.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях: а) вероятности q_1, q_2, q_3, q_4 потребности в сырье в количествах соответственно b_1, b_2, b_3 , b_4 ед. известны; б) потребление сырья в количествах b_1, b_2, b_3 , b_4 ед. представляется равновероятным; в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования).

Указание. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а) — критерием Байеса, в п. 3б) — критерием Лапласа, в п. 3в) — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

	Номер варианта													
	17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
b_1	12	10	8	15	9	6	20	13	10	11	10	12	8	8
b_2	14	11	9	17	10	8	21	15	12	12	11	14	9	10
b_3	16	12	10	19	11	10	22	17	14	13	12	16	10	12
b_4	18	13	11	21	12	12	23	19	16	14	13	18	11	14
c_1	5	8	7	4	6	5	2	9	3	4	7	5	7	5
c_2	7	4	3	9	2	8	4	7	6	8	3	7	3	8
q_1	0,25	0,15	0,20	0,25	0,10	0,15	0,20	0,10	0,2	0,3	0,2	0,25	0,20	0,15
q_2	0,30	0,30	0,25	0,45	0,30	0,30	0,30	0,35	0,25	0,5	0,2	0,30	0,25	0,25
q_3	0,26	0,40	0,40	0,20	0,40	0,40	0,35	0,35	0,4	0,1	0,2	0,26	0,40	0,20
q_4	0,20	0,15	0,15	0,10	0,20	0,15	0,15	0,20	0,15	0,1	0,4	0,20	0,15	0,40
γ	0,60	0,80	0,70	0,90	0,80	0,60	0,90	0,70	0,8	0,6	0,8	0,60	0,70	0,60

Варианты 31-40

Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объем выпуска неосновной сезонной продукции *I, II* и *III*. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее реализуется полностью по сниженной цене. Буквенные обозначения себестоимости продукции, отпускных цен и объемов реализации в зависимости от уровня спроса приведены в табл. 3.

Таблица 3

Вид продук-ции	Себестоимость единицы продукции	Отпускная цена за единицу продукции		Объем реализации (тыс. ед.) при уровне спроса		
		в течение сезона	после уценки	повы-шенном	среднем	пони-женном
I	d_1	p_1	q_1	a_1	b_1	c_1
II	d_2	p_2	q_2	a_2	b_2	c_2
III	d_3	p_3	q_3	a_3	b_3	c_3

Требуется: **1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;**

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую сумму прибыли.

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования).

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы ограничиться исследованием лишь тех трех ситуаций, когда одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков: повышенный (состояние $П_1$), средний (состояние $П_2$), пониженный (состояние $П_3$). Все необходимые числовые данные приведены в табл. 4.

Таблица 4

	Номер варианта									
	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**306**	**37**	**38**	**39**	**40**
d_1	1,3	1,5	2,2	0,7	3,4	1,8	3,2	2,6	3,8	4,4
d_2	1,7	2,1	1,6	2,4	1,7	2,5	1,8	3,7	2,6	2,1
d_3	0,9	1,4	3,4	1,8	2,5	0,9	2,7	1,5	3,2	3,5
p_1	2,6	2,3	3,7	1,8	4,5	2,7	4,7-	3,4	4,7	5,2
p_2	3,0	3,4	2,4	3,7	2,8	3,8	2,5	4,2	3,9	3,6
p_3	1,8	2,8	4,5	2,5	3,2	1,5	3,8	2,8	4,5	4,7
q_1	2,1	1,8	3,2	1,2	3,2	1,4	3,5	2,8	3,5	4,1
q_2	1,8	2,2	1,6	2,4	1,4	2,6	1,2	3,2	2,8	2,6
q_3	0,7	1,6	3,2	1,2	1,8	0,8	2,1	1,7	3,2	3,2
a_1	19	22	17	28	18	24	36	14	26	38
a_2	28	32	18	19	36	24	46	38	42	16
a_3	32	44	29	37	26	41	18	24	28	39
b_1	14	17	12	16	13	17	25	8	16	22
b_2	16	18	9	20	19	14	28	22	29	9
b_3	18	28	17	21	14	22	12	13	17	24
c_1	8	12	6	7	5	9	10	5	8	12
c_2	7	10	4	8	9	7	12	9	10	4

c_3	9	13	8	10	6	9	5	7	11	13

Задание 2

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти: **1) критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график**

2) построить линейный график (график Ганта),

3) такие $t^{н}_{ij}$, t^{o}_{ij}, x_{ij}, чтобы:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij}.

4) по найденным данным найти новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

5) построить линейный график,

6) сделать выводы

Номер задачи	Пара-метры	Работы										Срок выполнения проекта t_0
		1,2	**1,3**	**1,4**	**2,4**	**2,5**	**3,4**	**3,6**	**4,5**	**4,6**	**5,6**	
1	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
2	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
3	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	
4	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
5	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
6	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
7	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
8	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	

	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	
9	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
10	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
11	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
12	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
13	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	
14	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
15	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
16	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
17	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
18	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	
19	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
20	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
21	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
22	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
23	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	

24	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
25	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	
26	t_{ij}	9	12	18	8	12	5	12	10	13	12	35
	d_{ij}	7	10	15	6	10	3	8	7	12	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,25	0,08	0,15	0,1	0,06	0,05	0,1	0,5	
27	t_{ij}	10	13	24	9	11	17	10	15	15	20	56
	d_{ij}	5	9	11	6	9	12	7	13	13	15	
	k_{ij}	0,08	0,25	0,1	0,15	0,3	0,2	0,08	0,4	0,2	0,1	
28	t_{ij}	6	13	20	9	14	16	15	10	17	13	40
	d_{ij}	5	10	16	7	11	13	12	7	15	9	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,3	0,07	0,15	0,1	0,05	0,03	0,14	0,5	
29	t_{ij}	19	10	35	18	20	9	22	17	20	18	60
	d_{ij}	16	5	25	13	15	6	17	13	16	14	
	k_{ij}	0,25	0,07	0,1	0,2	0,13	0,15	0,06	0,4	0,2	0,1	
30	t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
	d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
	k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	