Лабораторная работа «ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ»

Тема 1 «Модели распределения ресурсов. Элементы теории двойственности»

Цели:

1. Научиться составлять оптимизационные модели, находить оптимальное решение.
2. Освоить основные положения теории двойственности и их применение при решении задач
3. Научиться проводить содержательный послеоптимизационный анализ полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Что называется задачей линейного программирования? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
4. Какие методы решения ЗЛП Вы знаете?
5. Какой смысл имеют переменные прямой и двойственной задач в задаче распределения ресурсов?
6. Какой смысл имеют дополнительные переменные в задаче распределения ресурсов? дополнительные переменные двойственной задачи?
7. Используя теорию двойственности, ответить на вопросы:
   - прямая задача имеет оптимальный план. Что можно сказать про решение двойственной?
   - некоторые переменные оптимального плана прямой задачи отличны от нуля. Что можно сказать про соответствующие ограничения двойственной задачи?
   - при изменении количества одного из ресурсов на единицу, как изменится оптимальное значение целевой функции?
8. Зная решение задачи распределения ресурсов, укажите дефицитные и избыточные ресурсы. Какой ресурс является наиболее ценным?

Ход работы

Задачи распределения финансов, оборудования, сырья можно рассматривать как задачи распределения ресурсов.

Формулировка задачи. Выпускается продукция четырех типов П1, П2, П3, П4, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ресурс	Продукция				Запас ресурса
	П1	П2	П3	П4	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	–

Задание.

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить экономический смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план, и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план,

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы,

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи,

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи,

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок,

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции, при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

Решение:

1. Составим математическую модель задачи. Если возможен выпуск n различных видов продукции, которые обозначим Π_j, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$, а используемые для этого ресурсы (виды сырья, группы оборудования, рабочая сила различной квалификации, производственные площади, финансовые средства и т. д.) общим числом m, ограничены величинами b_i где $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то обычно построение модели начинают с определения ее переменных. В рассматриваемой задаче за переменные естественно принять объемы выпуска каждого из возможных видов продукции, которые традиционно обозначают x_j, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Будем искать такой план выпуска продукции, который обеспечит максимальную прибыль Z. Это наиболее часто используемая, хотя далеко не единственная, трактовка поставленной задачи. Но преимущество математического подхода в том и состоит, что обеспечивается точность всех формулировок. В данном случае достаточно знать прибыль от производства единицы каждого вида продукции, которую обозначим c_j, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Тогда получаем задачу:

Максимизировать $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Осталось сформулировать ограничения, которые состоят в том, что:

$$\begin{Bmatrix}\text{Необходимы й объем ресурсов} \\ \text{для производст ва всей продукции}\end{Bmatrix} \le \begin{Bmatrix}\text{Располагае мые} \\ \text{ресурсы}\end{Bmatrix}.$$

Таким образом, пусть переменные x_j – количество выпускаемой продукции Π_j, $j=\overline{1,4}$. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$z(x) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \quad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,4}, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \end{cases}$$

где $z(x)$ – целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции, первые три неравенства описывают условия ограниченности имеющихся ресурсов, кроме того, переменные x_j, $j = \overline{1,4}$ не могут быть выражены отрицательными числами.

2. Составим математическую модель двойственной задачи. Для этого прямую задачу запишем в виде следующей таблицы

Коэф-ты целевой функции c_j	60	70	120	130	$\to \max$	
переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Знак неравенств	b_i
y_1	1	1	1	1	$\le$	16
y_2	6	5	4	3	$\le$	110
y_3	4	6	10	13	$\le$	100
	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	$x_3 \ge 0$	$x_4 \ge 0$		

Согласно правилам построения двойственных задач, каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, поэтому, исходя из экономического смысла можно сказать, что переменные двойственной задачи y_i, $i = \overline{1,3}$ – это оценки ресурсов (трудовых, сырья, финансов).

Двойственная задача имеет вид

$$f(y) = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 60, \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 \ge 70, \\ y_1 + 4y_2 + 10y_3 \ge 120, \\ y_1 + 3y_2 + 12y_3 \ge 130, \end{cases} \quad y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$$

где $f(y)$ – целевая функция, которая определяет суммарную оценку ресурсов, неравенства системы показывают, что оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы соответствующей продукции не меньше, чем прибыль от выпуска единицы этой продукции, кроме того, переменные y_i, $i = \overline{1,3}$ не могут быть выражены отрицательными числами.

3. Алгоритм решения задачи. Рассмотрим организацию вычислений на дополнительных аналогичных примерах.

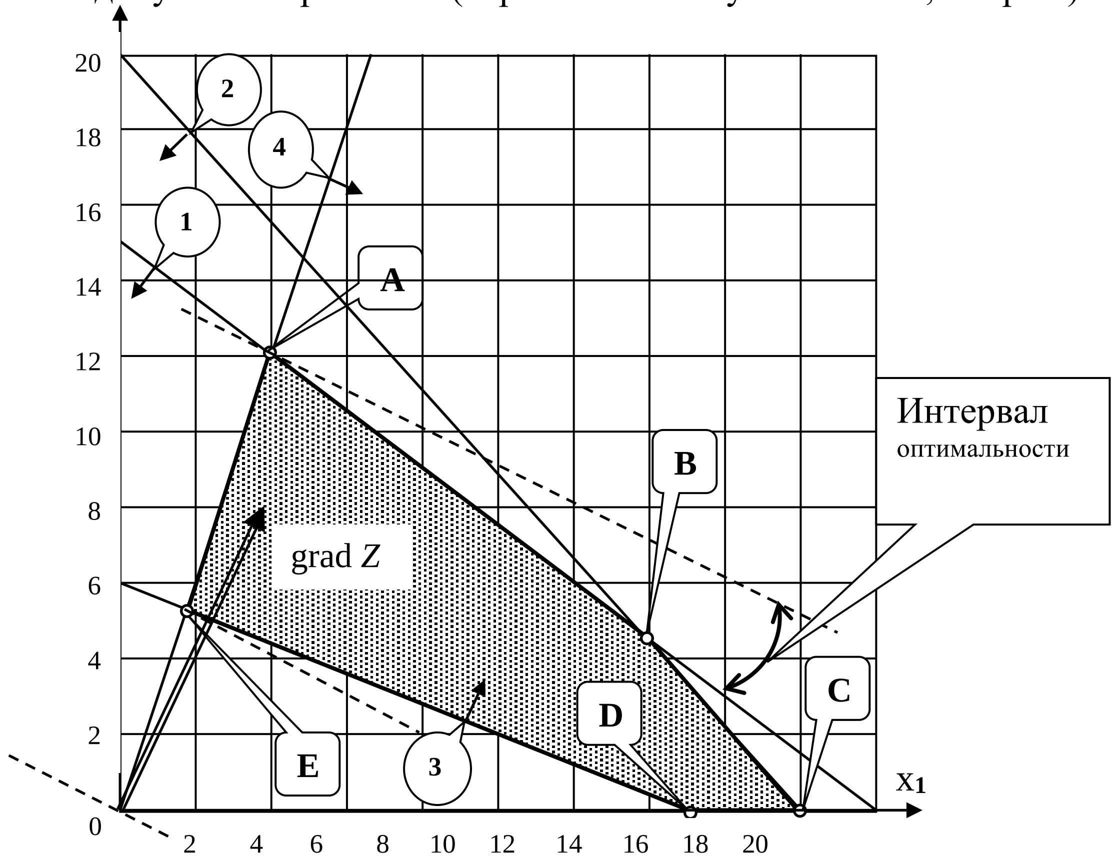
Пример 1. Графический метод. Пусть задана линейная модель следующего вида:

$$\max\ (\min)\ Z = 4x_1 + 8x_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (1) \\ 10x_1 + 9x_2 \le 180 & (2) \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 30 & (3) \\ 6x_1 - 2x_2 \ge 0 & (4) \end{array}\right\}.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Каждое ограничение задает полуплоскость. При построении удобно нумеровать все заданные ограничения. Тогда легко проверять правильность построения как линий, так и области допустимых решений (пересечение полуплоскостей, см. рис.).



После построения вектора $grad\ Z = (4, 8)$, перемещая перпендикулярную к нему линию фиксированных значений функционала, найдем, что искомые экстремумы достигаются в точках:

$A(4;\ 12)$, $Z_{max} = 120$ и $E(1{,}8;\ 5{,}3)$, $Z_{min} = 49{,}4$.

Пример 2. Симплекс-метод. Пусть фирма может выпускать 3 вида продукции Π_j, где $\left(j = \overline{1,3}\right)$. При ее изготовлении используются три вида ресурсов (труд, сырье и оборудование), расход которых b_i, где $\left(i = \overline{1,3}\right)$, ограничен величинами $b_1 = 180,\ b_2 = 60$ и $b_3 = 120$. Затраты ресурса *i*-го вида на единицу продукции *j*-го вида составляют a_{ij} единиц. Прибыль от производства единицы продукции *j*-го вида составляет c_j единиц. Значения параметров приведены в таблице.

Вид ресурса, *i*	Расход *i*-го ресурса на единицу *j*-ой продукции, a_{ij}			Запас ресурса, b_i
	Π_1	Π_2	Π_3	
Труд	6	2	5	180
Сырье		2	4	60
Оборудование	5	2	5	120
Прибыль, cj	9	6	7	

Математическая модель задачи оптимизации производственного плана по величине прибыли примет вид

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 180; \\ 2x_2 + 4x_3 &\le 60; \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 120; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).& \end{aligned}\right\}$$

Преобразовывая модель к канонической форме и предпочтительному виду, получим:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 180; \\ 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 60; \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 120; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}).& \end{aligned}\right\}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу. Значения базисных переменных x_4, x_5 и x_6 будут равны правым частям системы ограничений. Значение целевой функции для опорного плана вычисляется как скалярное произведение $\Delta_0 = \mathbf{c_Б b}$, где $\mathbf{c_Б}$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, а $\mathbf{b}$ – вектор значений базисных переменных. Оценки свободных переменных вычисляются по формуле $\Delta_j = \mathbf{c_Б A}_j - c_j \ (j = \overline{1,3})$, где $\mathbf{A}_j$ вектор – столбец коэффициентов при переменной x_j.

Номер итерации	*БП*	$\mathbf{c_Б}$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				9	6	7	0	0	0	
0	x_4	0	180	6	2	5	1	0	0	180/6 = 30
	x_5	0	60	0	2	4	0	1	0	–
	x_6	0	120	5	2	5	0	0	1	120/5 = 24
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			0	–9	–6	–7	0	0	0	
1	x_4	0	36	0	–2/5	–1	1	0	–6/5	–
	x_5	0	60	0	2	4	0	1	0	60/2 = 30
	x_1	9	24	1	2/5	1	0	0	1/5	24/(2/5)=60
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			216	0	–2,4	2	0	0	1,8	
2	x_4	0	48	1	0	–1/5	1	1/5	–6/5	–
	x_2	6	30	0	1	2	0	1/2	0	–
	x_1	9	12	0	0	1/5	0	–1/5	1/5	–
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			288	0	0	6,8	0	1,2	1,8	

Для ввода в базис (при нулевой итерации) выберем переменную с максимальной по абсолютной величине отрицательной оценкой. Это переменная x_1. Соответствующий ей столбец называют разрешающим. В таблице он выделен затенением. Вычисленные симплексные отношения показывают максимально возможные значения для этой переменной, если учитывать только одно, соответствующее строке, ограничение. Для этой переменной второй вид ресурса не требуется $a_{12} = 0$ и симплексное отношение во второй строке не вычисляется. Если бы получился отрицательный результат, то его также заменили бы прочерком.

Выберем в качестве разрешающей строки ту, для которой симплексное отношение минимально. В данном случае строка, соответствующая третьему ограничению, ограничивает максимальное значение переменной x_1 и, следовательно, будет разрешающей. Она выделена затенением, а элемент a_{13}, называемый разрешающим, – еще и жирным шрифтом.

Перейдем к нехудшему опорному плану, вводя в базис переменную x_1 (разрешающий столбец) вместо x_6 (разрешающая строка). По правилам симплексного преобразования элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, который становится равным единице. Все остальные элементы разрешающего столбца для новой итерации равны нулю. Для продолжения пересчета элементов таблицы, включая значения базисных переменных и оценки, используется формула прямоугольников. Старое значение элемента умножаем на разрешающий элемент (первая диагональ) и отнимаем произведение элементов, образующих вторую диагональ прямоугольника. Результат делим на разрешающий элемент и записываем в таблицу для новой итерации. Например, новое значение переменной x_4 вычисляется как (180$\times$5 – 120$\times$6)/5 = 180 – 24$\times$6 =36, новое значение коэффициента $a_{12}^{'}$ будет

$$\frac{5\times 2-6\times 2}{5}=-2/5\ ,$$

величина новой оценки $\Delta_2^{'}$ для переменной x_2 составит

$$\frac{5\times(-6)-(-9)\times 2}{5}=\frac{-30+18}{5}=\frac{-12}{5}=-2{,}4\,.$$

Прежде чем переходить к следующей итерации, следует для контроля правильности расчетов, вычислить оценки, используя приведенные выше формулы для Δ_0 и Δ_j, $j=\left(\overline{1{,}6}\right)$. В этих формулах участвуют все используемые числовые значения, поэтому случайные ошибки при ручном расчете будут своевременно обнаружены. При программной реализации на этой основе можно построить алгоритмы для коррекции погрешностей, возникающих из-за ограниченной точности вычислений, которые могут накапливаться при большом числе итераций.

Для рассматриваемой задачи на первой итерации только переменная x_2 имеет отрицательную оценку и, следовательно, должна быть включена в базис. Разрешающей строкой, как это видно из значений симплексных отношений, приведенных в таблице, будет вторая, поэтому переменную x_5 исключаем из базиса. После выполнения второй итерации получаем, что все оценки переменных положительны, а, следовательно, оптимальный по прибыли план найден.

Это вектор $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (12, 30, 0, 48, 0, 0)$, которому соответствует прибыль $Z^* = Z(\mathbf{x}^*) = 288$. В этот оптимальный план вошла дополнительная переменная $x_4 = 48$, означающая, что такое количество единиц первого ресурса не используется в оптимальном плане. Переменные x_5 и x_6 равны нулю (в базис они не входят), следовательно, второй и третий ресурсы использованы полностью.

Таким образом, при применении симплексного метода не только находится оптимальный план, но и полезная для анализа задачи дополнительная информация, например, об объемах ресурсов, не используемых в этом плане. Вполне определенный экономический смысл имеют и оценки переменных, полученные при последней итерации. Его выяснение отложим до рассмотрения теории двойственности.

Компьютерные программы могут предусматривать и получение дополнительных отчетов. Полученный оптимальный план не предусматривает производство третьего вида продукции. Предположим, что по тем или иным причинам ее производство нужно обеспечить. Введение дополнительного ограничения на минимальный объем производства этой продукции приведет к снижению прибыли, значит в реальной действительности производство будет искать способы обойти это ограничение. Чтобы получить желаемый результат экономическими средствами, достаточно повысить прибыльность этой продукции (или снизить прибыльность других видов продукции). Например, при использовании *Excel* можно получить отчет об устойчивости решения по отношению к коэффициентам целевой функции. Очевидно, что для третьего вида продукции должно существовать такое минимальное значение величины прибыли, при котором эта продукция войдет в оптимальное решение. Удобнее получить это значение из дополнительного отчета, чем выполнять перебор вариантов.

Пример 3. Исходя из специализации и технологических возможностей предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице 2. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Вид ресурса, i</td><td colspan="4">Выпускаемая продукция</td><td rowspan="2">Запас ресурса</td></tr>
<tr><td>$П_1$</td><td>$П_2$</td><td>$П_3$</td><td>$П_4$</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>Трудовые ресурсы, чел.-ч.</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>4800</td></tr>
<tr><td>P_2</td><td>Полуфабрикаты, кг</td><td>2</td><td>10</td><td>6</td><td>0</td><td>2400</td></tr>
<tr><td>P_3</td><td>Станочное оборудование, станко-ч.</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1500</td></tr>
<tr><td colspan="2">Цена единицы продукции, ден. ед.</td><td>65</td><td>70</td><td>60</td><td>120</td><td></td></tr>
</table>

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800,\\ &2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400,\\ &x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

Z	65	70	60	120		max
y_i	4	2	2	8	$\le$	4800
	2	10	6	0		2400
	1	0	2	1		1500

Составим двойственную задачу. Транспонируем таблицу:

f	4800	2400	1500		min
	4	2	1	$\ge$	65
	2	10	0		70
	2	6	2		60
	8	0	1		120

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &4y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 65,\\ &2y_1 + 10y_2 \ge 70,\\ &2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 60,\\ &8y_1 + y_3 \ge 120, \end{aligned}\right\}$$

$$y_j \ge 0, (i = \overline{1,3}).$$

Симплекс-методом решили прямую задачу: $x^* = (0;\,0;\,400;\,500;\,0;\,0;\,200)$, $Z^* = Z(x^*) = 84000$.

Номер итерации	БП	$\mathbf{c_Б}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
				65	70	60	120	0	0	0
0	x_5	0	4800	4	2	2	**8**	1	0	0
	x_6	0	2400	2	10	46	0	0	1	0
	x_7	0	1500	1	0	2	1	0	0	1
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
			0	–65	–70	–60	–120	0	0	
1	x_4	120	600	1/2	1/4	1/4	1	1/8	0	0
	x_6	0	2400	2	0	6	0	0	1	0
	x_7	0	900	1/2	-1/4	7/4	0	–1/8	0	1
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			72000	-5	-40	-30	0	15	0	0

2	x_4	120	500	5/12	-1/6	0	1	1/8	-1/24	0
	x_3	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/6	0
	x_7	0	200	-1/12	-19,6	0	0	–1/8	-7/24	1
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			84000	5	10	0	0	15	5	0
Соответствующие переменные двойственной задачи				y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Учитывая это соответствие, выписываем из индексной строки последней (2-й) итерации компоненты искомого оптимального плана y^* = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) — двойственные оценки.

В соответствии с теоремой min f = max Z = 84 000. Запишем это равенство в развернутой форме: $48000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500$

Учитывая, что компоненты $y_1^* = 15, y_2^* = 5, y_3^* = 0$ представляют собой оценки ресурсов P_1, P_2, P_3, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции. В этом состоит экономическое содержание теоремы.

Таким образом, оптимальность плана означает точное воплощение в оценке произведенной по этому плану продукции оценки всех израсходованных ресурсов, т. е. полное отсутствие непроизводительных затрат.

Найден оптимальный план x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200) выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: 0 + 2400 + 500 = 1300 < 1500. Это означает, что расход ресурса P_3 меньше его запаса, т. е. ресурс P_3 избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане y^* = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) двойственной задачи оценка y_3^* этого ресурса равна нулю.

А вот оценки y_1^* и y_2^* ресурсов P_1 и P_2 выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: 4·0 + 2·0 + 2·400 + 8·500 = 4800, 2·0+ 10·0 + 6·400 = 2400.

Поскольку 15 > 5, ресурс P_1 считается более дефицитным, чем ресурс P_2. Это мы подтвердим более убедительно позднее.

На основе теоремы 2 (о дополняющей нежесткости) нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция $П_1$ и $П_2$: первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: 4 · 15 + 2 · 5 + 0 > 65, 2 · 15+ 10 · 5 > 70. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно. Что же касается продукции $П_3$ и $П_4$ ($x_3^* > 0, x_4^* > 0$), то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: 2 · 15+ 6 · 5 + 2 · 0 = 60, 8 · 15 + 0 = 120.

Установлено, что ресурсы P_1 и P_2 являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы 3 можно утверждать, что на каждую единицу ресурса P_i, введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_i Z$, численно равная y_i^*. В самом деле, при Δb_1 = 1 получаем $\Delta_1 Z$= $= y_i^* \Delta b_1$ = 15 · 1 = 15. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса P_2 обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 ден. ед. Теперь становится понятно, почему ресурс P_1 считается более дефицитным по сравнению с ресурсом P_2: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса P_3, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 Z = y_3 \Delta b_3 = 0$. $\Delta b_з = 0$. Из этих рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. По оптимальному плану $x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200)$ выпускать следует продукцию $П_3$ и $П_4$. Оценки y_6^* и y_7^* этих видов продукции равны нулю. Что это означает практически, станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = (2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*) - 60 =$$

$$= (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0, y_7^* = (8y_1^* + y_3^*) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0.$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции $П_1$ и $П_2$, являющейся, как установлено ранее, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:

$y_4^* = (y_1^* + 2y_2^* + y_3^*) - 65 = 70 - 65 = 5, y_5^* = (2y_1^* + 10y_2^*) - 70 = 80 - 70 = 10.$ Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая изготовленная единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень выручки.

Выясним состав двойственной оценки. Для этого рассмотрим, например, первый ресурс (его запас $b_1 = 4800$). Он дефицитен. Увеличение запаса этого ресурса на единицу приведет к дополнительному выпуску продукции, что увеличит выручку на $y_1^* = 15$ ден. ед. За счет чего? Возьмем соответствующий столбец $A_5 = (1/8; 0; -1/8)^т$ табл. Элементы его характеризуют изменение объемов выпуска продукции и остатка ресурса при увеличении первого ресурса на единицу, т. е. если заменить b_1 на $b_1^{'} = b_1 + 1 = 4800 + 1 = 4801$, то выпуск продукции $П_4$ $x_4 = 500$ заменится на $x_4^{'*} = 500 + 1/8 = 500{,}125$; выпуск продукции $П_3$ $x_3^* = 400$ — на $x_3^{'*} = 400 + 0 = 400$. Резерв же третьего ресурса сократится до $x_7^{'*} = 200 - 1/8 = 199{,}875$. При этом выручка возрастет на $120 \cdot 1/8 + 60 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/8) = 15$ ден. ед., что соответствует двойственной оценке первого ресурса. Аналогично, при увеличении второго ресурса на единицу выручка возрастет на $120 \cdot (-1/24) + 60 \cdot 1/6 + 0 \cdot (-7/24) = 5$ ден.ед., что соответствует двойственной оценке второго ресурса. Полученные равенства и показывают, какие составляющие образуют двойственные оценки.

Найдем коэффициент взаимозаменяемости ресурсов. В примере дефицитны трудовые ресурсы и полуфабрикаты. Если бы трудовые ресурсы уменьшили на единицу, то связанное с этим падение выручки (на 15 ден. ед.) можно было бы компенсировать увеличением полуфабрикатов на

$$\Delta b_2 = \frac{y_1^*}{y_2^*} \Delta b_1 = \frac{15}{5} \cdot 1 = 3.$$

Следовательно, обеспечив полуфабрикаты в объеме $b_2^{'} = b_2 + \Delta b_2 = 2400 + 3 = 2403$ (кг), можно получить с трудовыми ресурсами $b_1^{'} = b_i - \Delta b_1 = 4800 - 1 = 4799$ (чел.-ч) ту же выручку, что и при начальных ресурсах. В табл. представлены значения коэффициентов взаимозаменяемости для примера. Знак ∞ означает, что заменить уменьшение на единицу одного ресурса никаким увеличением другого невозможно.

k \ i	1	2	3
1	1	1/3	0
2	3	1	0
3	∞	∞	1

Проанализируем целесообразность расширения ассортимента выпускаемой продукции и установление цены на новую продукцию. Пусть в условиях примера изучается вопрос о целесообразности выпуска продукции $П_5$ с характеристиками, представленными в табл.

Чтобы выпуск продукции $П_5$ был оправдан, оценка ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции $П_5$, должна быть не менее цены $c_5 = 95$.

Вид ресурса, i		$П_1$
P_1	Трудовые ресурсы, чел.-ч.	3
P_2	Полуфабрикаты, кг	6
P_3	Станочное оборудование, станко-ч.	8
Цена единицы продукции, ден. ед.		95

Находим оценку затраченных ресурсов: $3·15+6·5+8·0 = 75$. Поскольку $75 < 95$, выпускать продукцию $П_5$ целесообразно: каждая единица этой продукции принесет предприятию прибыль, равную $95 – 75 = 20$ ден. ед.

4. (см. формулировку исходной задачи). Решение задачи на компьютере. Для решения задачи средствами Excel рекомендуется использовать надстройку **Поиск решения**. Для ее подключения в Excel 2007/2010/2013/2016 следует выбрать **Файл**>**Параметры**>**Надстройки**>**Перейти**>**Поиск решения.** После этого **Поиск решения** появится в меню **Данные.**

Следует сделать форму и ввести исходные данные (рис. 1).

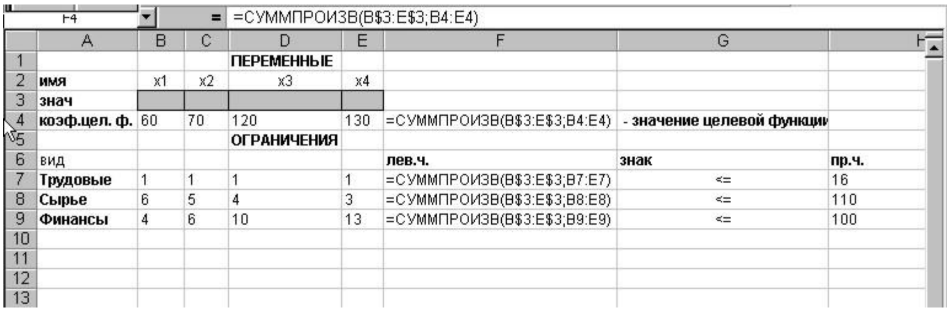
Далее осуществляется ввод зависимостей из математической модели (рис. 2). Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F4, воспользуемся функцией **СУММПРОИЗВ**. Выбираем **Мастер Функций** и вызываем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В **массив 1** вести строку со значениями переменных, т. е. B$3:E$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки ячеек не менялся при копировании формул). Заметим, что в указанных ячейках B3:E3, которые на рис. 7 выделены серым цветом, по окончании решения задачи будет находиться оптимальное решение. В **массив 2** ввести адрес строки коэффициентов целевой функции, т. е. B4:E4. В ячейке будем иметь значение 0, согласно введенной формуле.

F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				ПЕРЕМЕННЫЕ							
2	имя	x1	x2	x3	x4						
3	знач										
4	коэф.цел. ф.	60	70	120	130	0	- значение целевой функции				
5				ОГРАНИЧЕНИЯ							
6	вид					лев.ч.	знак	пр.ч.			
7	Трудовые	1	1	1	1	0	<=	16			
8	Сырье	6	5	4	3	0	<=	110			
9	Финансы	4	6	10	13	0	<=	100			
10											
11											
12											

Рис. 1

Заметим, что все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F4 в столбец «левые части ограничений». На рис. 2 показано какие формулы должны быть введены в указанные ячейки.



F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	имя	x1	x2	x3	x4			
3	знач							
4	коэф.цел. ф.	60	70	120	130	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)	- значение целевой функции	
5				ОГРАНИЧЕНИЯ				
6	вид					лев.ч.	знак	пр.ч.
7	Трудовые	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B7:E7)	<=	16
8	Сырье	6	5	4	3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B8:E8)	<=	110
9	Финансы	4	6	10	13	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B9:E9)	<=	100
10								
11								
12								
13								

Рис. 2

Решение задачи (рис. 3). Курсор в ячейку F4. Командой **Поиск решения** из меню **Сервис (**Excel 2003**)** либо **Данные (**Excel 2007/2010/2013/2016**)** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные:

Установить целевую функцию – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т. е. $F$4;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – адреса изменяемых значений переменных, т. е. $B$3:$E$3;

Ограничения – **Добавить…**

На экране появится диалоговое окно *Добавление ограничения.*

Вводим ограничения по ресурсам $F$7 $\le$ $H$7 **Добавить;** $F$8 $\le$ $H$8 **Добавить;** $F$9 $\le$ $H$9. По окончании ввода данных нажать **OK**.

Можно добавить все ограничения сразу, так как они имеют одинаковый знак ограничений $\le$.

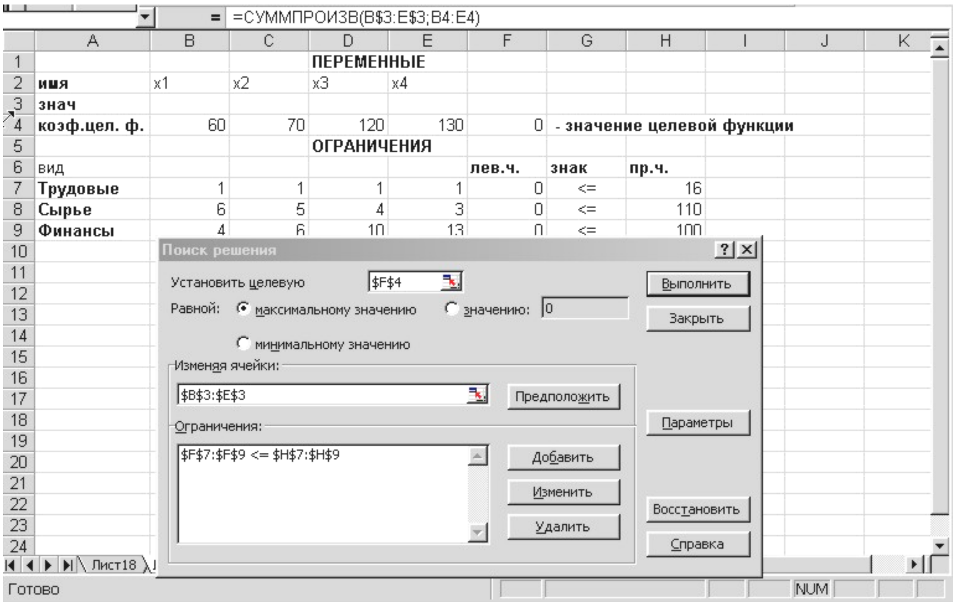


Рис. 3

Командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры** и устанавливаем флажки: **Линейная модель, Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование** (рис. 4). **OK**.

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув по кнопке **Выполнить,** находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 5). В ячейках B3:E3 имеем оптимальное решение задачи $X^{\text{opt}} = (10;0;6;0)$, максимальное значение целевой функции – в ячейке F4 $z(X^{\text{opt}}) = 1320$.

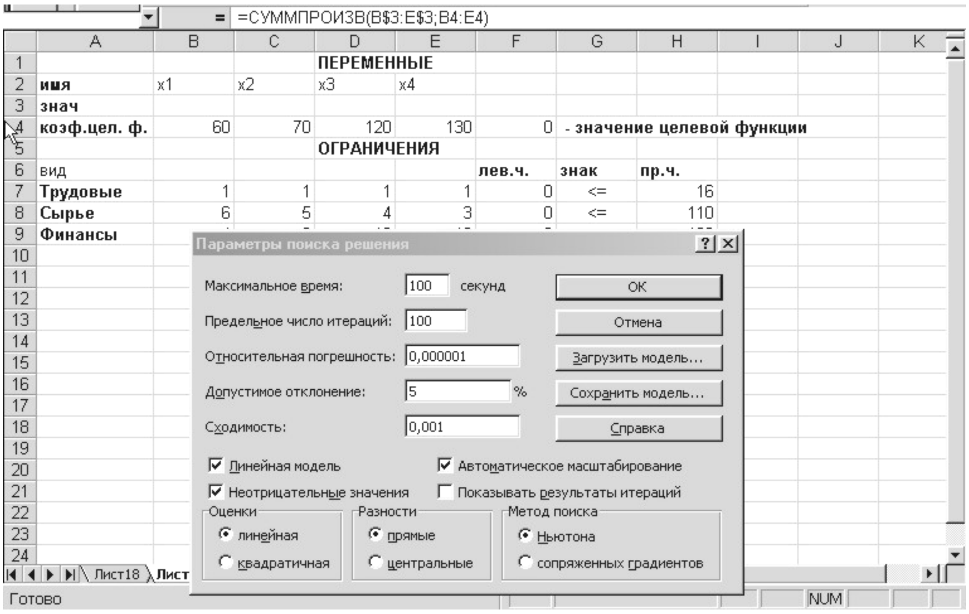


Рис. 4

Таким образом, согласно оптимальному плану следует выпускать продукцию П1 и П3, в количествах 10 ед. и 6 ед. соответственно. Продукцию П2 и П4 выпускать не следует. Ограничения говорят о том, что первый и третий ресурсы израсходованы полностью, а второго ресурса осталось 26 ед.

При этом будет получена максимальная прибыль в количестве 1320 ден. ед.

Если задача не имеет решения или данные введены неверно (целевая функция не ограничена или система ограничений несовместна), то выдается сообщение: «Значения целевой ячейки не сходятся».

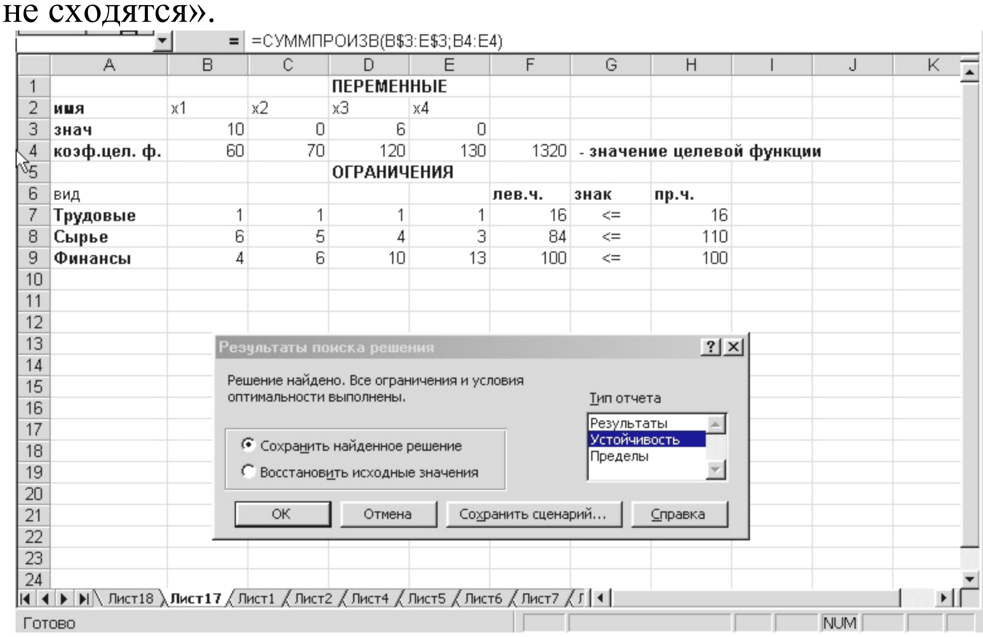


Рис. 5

5. Анализ оптимального решения. Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно **Результат поиска решения.** Решение найдено (рис. 5). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов: результаты; устойчивость; пределы.

Вызов отчета осуществляется по следующему алгоритму.

На экране: диалоговое окно **Результат поиска решения.** Решение найдено (рис. 5). Установить курсор на тип вызываемого отчета. Например: отчет по устойчивости. **OK**. На экране: вызванный отчет на новом листе, на ярлычке которого указано название отчета.

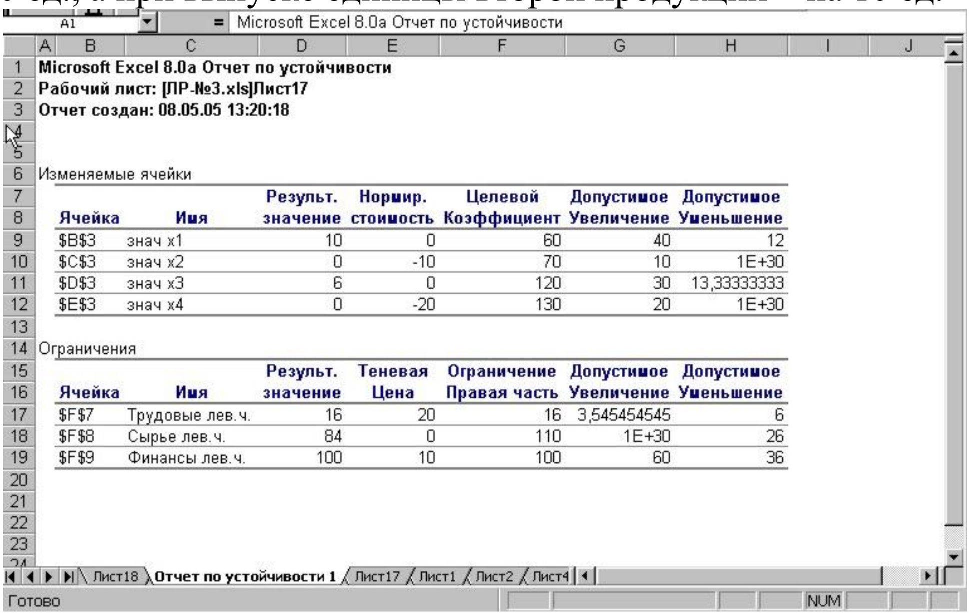
Установить курсор на ярлычок с названием отчета и щелкнуть левой кнопкой мыши. На экране: вызванный отчет (см. рис. 6). Можно сразу выделить все три типа отчетов (по устойчивости, по пределам и по результатам).

Отчет по устойчивости. Отчет состоит из двух таблиц. Первая приводит следующие значения для переменных: результат решения задачи; нормировочную стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Во второй таблице приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Согласно полученным данным $Y^{\text{opt}} = (20;0;10;0;10;0;20)$. Первые три значения (берем из графы «теневая цена» отчета по устойчивости) показывают оценки ресурсов (трудовые, сырье, финансы). Наиболее дефицитным является первый ресурс (так как его оценка наибольшая, при изменении количества ресурса на единицу в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 20), менее дефицитным является третий ресурс (финансы). Второй ресурс (сырье) дефицитным не является (его оценка равна 0).

Последние четыре значения (берем из графы нормировочная стоимость с противоположным знаком) показывают, какую продукцию выгодно выпускать, а какую – нет. Согласно полученным данным при выпуске единицы продукции П4 целевая функция уменьшится на 20 ед., а при выпуске единицы второй продукции – на 10 ед.



Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [ЛР-№3.xls]Лист17
Отчет создан: 08.05.05 13:20:18

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	знач x1	10	0	60	40	12
$C$3	знач x2	0	-10	70	10	1E+30
$D$3	знач x3	6	0	120	30	13,33333333
$E$3	знач x4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$7	Трудовые лев.ч.	16	20	16	3,545454545	6
$F$8	Сырье лев.ч.	84	0	110	1E+30	26
$F$9	Финансы лев.ч.	100	10	100	60	36

Рис. 6

Интервал устойчивости для 1-го ресурса (трудовые ресурсы) имеет вид (16-6;16+3,545). Значения берем из столбцов «допустимое увеличение», «допустимое уменьшение», «ограничение, правая часть».

Отчет по результатам. Отчет состоит из трех таблиц. В первой таблице приводятся сведения о целевой функции. В столбце **Исходно** приведены значения целевой функции до начала вычислений. Во второй таблице приводятся значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. В третьей показываются результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

Отчет по пределам. В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

Если же задача линейного программирования решения не имеет, то выдается сообщение: Поиск не может найти подходящего решения.

Тема 2 «МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОСТАВОК, РАЗМЕЩЕНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА.

Цель

Освоить правила составления математических моделей многоэтапных и многопродуктовых транспортных задач с учетом возможных ограничений.

Контрольные вопросы

1. Что называется ТЗ? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? *Всегда ли он существует?* Приведите примеры.
3. Что называется базисным планом ТЗ? *Всегда ли он существует?* Приведите примеры.
4. Что называется оптимальным планом? *Всегда ли он существует?* Приведите примеры.
5. Какие методы составления первоначального базисного плана Вы знаете?
6. Какие методы решения ТЗ Вы знаете?
7. Каковы условия оптимальности плана ТЗ?
8. Как определяется единственность (не единственность) оптимального плана? *Как выписать все оптимальные планы ТЗ?*
9. Сформулируйте двухэтапную ТЗ?
10. Сформулируйте условие разрешимости двухэтапной ТЗ?
11. При каких условиях двухэтапную ТЗ можно свести к двум одноэтапным ТЗ?
12. Сформулируйте многопродуктовую ТЗ?
13. Сформулируйте условие разрешимости многопродуктовой ТЗ?
14. Сформулируйте условие несбалансированности многопродуктовой ТЗ?
15. При каких условиях многопродуктовую ТЗ можно свести к обычным ТЗ?
16. Укажите особенности расстановки тарифов для фиктивного потребителя в многопродуктовой ТЗ.

Транспортная задача

Пример. Требуется определить оптимальный план перевозок транспортной задачи, заданной транспортной таблицей.

Предложение поставщиков	Спрос получателей		
	90	**30**	**40**
50	8	9	2
60	5	3	1
70	7	6	4

Решение.

Специальная структура транспортной модели позволяет построить опорный план целым рядом методов, которые отличаются по степени приближения к оптимальному решению, что неизбежно влечет их усложнение. Хороший компромисс обеспечивает *метод* *минимального элемента*. Рассмотрим применение этого метода на примере (табл. 4). Пусть возможности поставщиков составляют 50, 60 и 70 ед. груза, а спрос получателей задан как 90, 30 и 40 ед. Поскольку возможные поставки превышают спрос на 20 ед., введем фиктивного получателя с таким объемом спроса. Эти данные вместе со значениями стоимостей перевозок занесем в таблицу. Номерами ее строк и столбцов будем считать порядковые номера поставщиков и получателей.

Таблица 4

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	90	**30**	**40**	**20**
50	8	9	2 ~	0
60	5	3	1 **40**	0
70	7	6	4 ~	0

Для фиктивного получателя транспортные затраты нулевые, так как груз остается у поставщика. Поэтому при выборе маршрута с минимальной стоимостью не будем принимать его во внимание. Тогда наименьшую стоимость имеет ячейка (2, 3). С учетом ограничений для второй строки и третьего столбца записываем в нее значение объема перевозки 40 ед. и корректируем предложение и спрос. Для третьего получателя спрос удовлетворен, следовательно, третий столбец вычеркиваем. Следующей ячейкой с минимальной стоимостью в незаполненной части таблицы будет ячейка (2, 2), и в нее занесем значение объема перевозок равное 20. Последовательность действий и конечный результат представлены в табл. 5.

Таблица 5

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	90	**30**	**40**	**20**
50	8 **30**	9 ~	2 ~	0 **20**
60	5 ~	3 **20**	1 **40**	0 ~
70	7 **60**	6 **10**	4 ~	0 ~

Метод потенциалов основан на соотношениях теории двойственности и состоит в том, что каждому поставщику ставятся с соответствие числа (потенциалы) u_i, а каждому получателю – v_j, удовлетворяющие условиям: $u_i + v_j = c_{ij}$, в тех клетках таблицы, которые вошли в опорный план. Таких клеток $m+n$, а потенциалов $m+n-1$. Потенциалы можно интерпретировать как выплаты за единицу груза, получаемые транспортной организацией как при погрузке, так и после доставки груза. Величины потенциалов могут быть любого знака, но выплаты за перевозку по тому опорному плану, для которого они определены, будут точно соответствовать заданным тарифам.

Для незаполненных клеток значение разности $c_{ij} - (u_i + v_j)$ может оказаться любого знака. Если $c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$, то включение такой клетки в базис только увеличит суммарные затраты. Следовательно, если во всех незаполненных клетках тарифы превышают суммы потенциалов, то план оптимален. Рассматриваемые разности являются оценками переменных, поэтому, если план еще не является оптимальным, то нужно выбрать для включения в базис ту клетку, для которой абсолютное значение отрицательной оценки $c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ является наибольшим, и занести в нее максимально возможную величину перевозимого груза. При этом балансы по строкам и столбцам необходимо сохранить, а все переменные должны оставаться неотрицательными.

Выполнение описанной процедуры рассмотрим на примере (табл. 6). Сначала требуется определить 7 неизвестных потенциалов, имея 6 уравнений. Любому из них можно присвоить произвольное значение (например $u_1 = 0$) и затем, считая, что в заполненных клетках $u_i + v_j = c_{ij}$, последовательно (порядок вычислений показан стрелками) найдем остальные потенциалы.

Таблица 6

Предложение поставщиков	Спрос получателей				
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **30**	9	2 **-3**	0 **20**	0
60	5	3 **20**	1 **40**	0	-4
70	7 **60**	6 **10**	4	0	-1
	8	7	5	0	u_i / v_j

Перспективной для ввода в базис является только переменная (1, 3), оценка которой равна $c_{13} - (u_1 + v_3) = 2 - 0 - 5 = -3$. Занесем ее в правый нижний угол клетки и построим замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в этой ячейке и состоит из последовательности вертикальных и горизонтальных отрезков (диагональные недопустимы), соединяющих заполненные клетки. Поскольку вводимая в базис переменная всегда может быть выражена через базисные переменные, то такой цикл всегда существует и будет единственным. Его можно обходить как по часовой стрелке, так и против, что несущественно. Важно то, что если вводимую в базис переменную пометить знаком ⊕ и изменять знак в каждой угловой точке цикла, то в любой строке и любом столбце каждому знаку ⊕ будет соответствовать знак ⊖ (табл. 7).

Таблица 7

Предложение поставщиков	Спрос получателей				
	90	**30**	**40**	**20**	
50	⊖ 8 **30**	9	⊕ 2 **-3**	0 **20**	0
60	5	⊕ 3 **20**	⊖ 1 **40**	0	-4
70	⊕ 7 **60**	⊖ 6 **10**	4	0	-1
	8	7	5	0	u_i / v_j

Следовательно, если всем участвующим в цикле переменным дать некоторое приращение Δ с соответствующими знаками, то все балансовые соотношения по строкам и столбцам будут сохранены. Чтобы объемы перевозок оставались неотрицательными, это приращение Δ нужно взять равным минимальному по абсолютной величине значению переменной из числа помеченных знаком ⊖. В примере это ячейка (3, 2), поэтому $\Delta = 10$.

После изменения грузопотоков получим новое базисное решение, которое приведено в табл. 8. В него введена переменная x_{13} и исключена переменная x_{32}. После этой итерации суммарные затраты на перевозки изменятся на

$$\Delta(c_{13} - (u_1 + v_3)) = 10(2 - 0 - 5) = 10(-3) = -30\,.$$

Вычисление новых значений потенциалов производится аналогично.

Таблица 8

Предложение поставщиков	Спрос получателей				
	90	**30**	**40**	**20**	
50	⊖ 8 **20**	9	⊕ 2 **10**	0 **20**	0
60	⊕ 5 **-2**	3 **30**	⊖ 1 **30**	0	-1
70	7 **70**	6	4	0	-1
	8	4	2	0	u_i / v_j

Новой вводимой в базис переменной будет x_{22}, имеющая оценку

$$c_{22} - (u_2 + v_2) = 5 - (-1) - 8 = -2\,.$$

Построенный для нее цикл позволяет изменить значения входящих в него переменных на $\Delta = 20$ Результаты приведены в табл. 9.

Таблица 9

Предложение поставщиков	Спрос получателей				
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8	9	⊕ 2 **30**	⊖ 0 **20**	0
60	⊕ 5 **20**	3 **30**	⊖ 1 **10**	0	-1
70	⊖ 7 **70**	6	4	⊕ 0 **-1**	1
	6	4	2	0	u_i / v_j

После вычисления потенциалов отрицательная оценка получится для переменной x_{34}, действительно $c_{34} - (u_3 + v_4) = 0 - 1 - 0 = -1$ и $\Delta = 10$. Получим табл. 10.

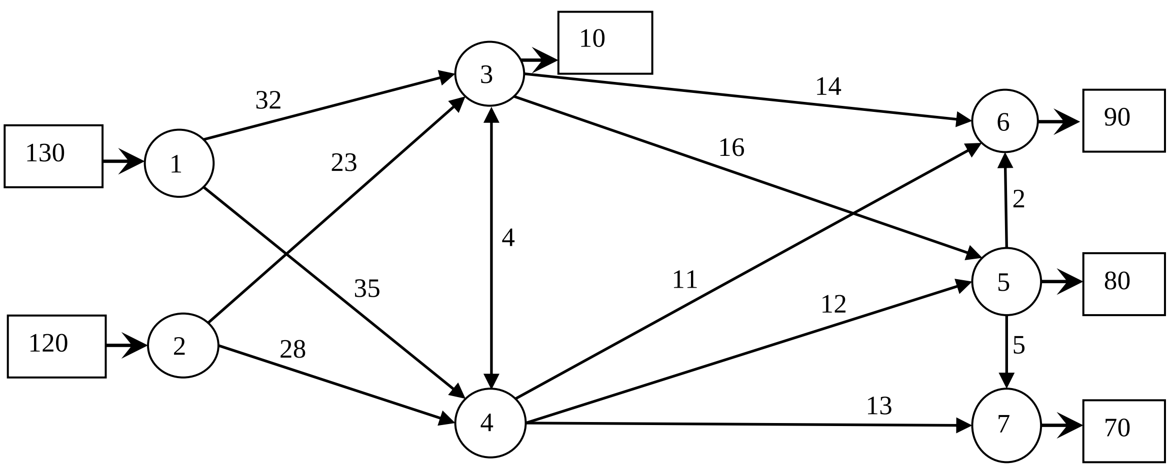
Таблица 10

Предложение поставщиков	Спрос получателей				
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8	9	2 **40**	0 **10**	0
60	5 **30**	3 **30**	1	0	-2
70	7 **60**	6	4	0 **10**	0
	7	5	2	0	u_i / v_j

Теперь для небазисных переменных все оценки $c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$ неотрицательны, поэтому решение оптимально. Так как среди этих оценок нет нулевых то решение единственно.

Транспортная модель с промежуточными пунктами

Часто кроме исходных и конечных пунктов перевозок используются промежуточные пункты для временного хранения грузов. При этом часть продукции может быть реализована непосредственно в этих пунктах, возможно также, что через отдельные конечные пункты осуществляются перевозки транзитом в другие конечные пункты. Такую модель можно преобразовать в обычную транспортную модель, если ввести буфер достаточно большой, чтобы вместить объем всего предложения или спроса. Будем называть транзитными все пункты, в которые груз может как ввозиться, так и вывозиться. Для каждого транзитного пункта (таким пунктам будут соответствовать одновременно и строка и столбец транспортной модели) увеличим и объем спроса, и объем предложения на величину буфера. Очевидно, что тариф перевозки из такого пункта в него же может быть только нулевым, а полученная переменная, которая может достигать величины буфера, выполняет только техническую роль. При таком построении модели транзитные перевозки будут использоваться только тогда, когда это необходимо или выгодно. Для исключения несуществующих маршрутов перевозок будем полагать, что тарифы для них равны достаточно большому числу *M*. Пример такой задачи приведен на рисунке.

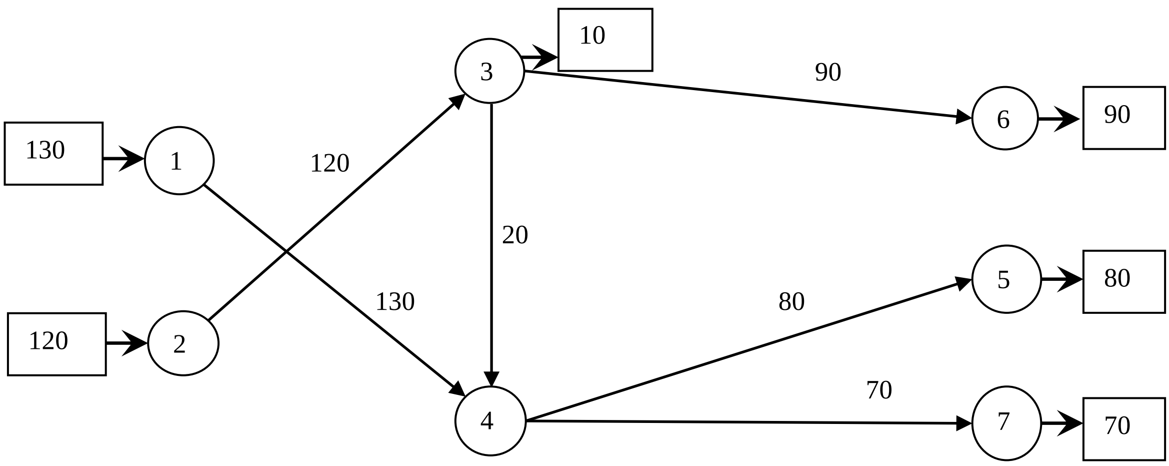


Пункты ① и ② – это грузоотправители с объемами поставки 130 и 120 единиц, пункты ③ и ④ – транзитные (перевалочные) центры, причем в пункте ③ реализуется 10 единиц груза. Объемы реализации в пунктах ⑤ ⑥ и ⑦, а также затраты на транспортировку единицы груза по всем возможным маршрутам показаны. Заметим, что между пунктами ③ и ④ возможны перевозки в любом направлении, а через пункт ⑤ допустим транзит в пункты ⑥ и ⑦. Транспортную модель этой задачи представим в виде табл. 11.

Таблица 11

	③	④	⑤	⑥	⑦	
①	32	35	*M*	*M*	*M*	130
②	23	28	*M*	*M*	*M*	120
③	0	4	16	14	*M*	*B*
④	4	0	12	11	13	*B*
⑤	*M*	*M*	0	2	5	*B*
	B+10	*B*	*B*+80	90	70	

Для расчета примем объем буфера $B = 250$, что равно всему объему предложения (или спроса). Поскольку через пункты ③, ④ и ⑤ может осуществляться транзит, то, когда эти пункты рассматриваются как поставщики, им соответствует объем предложения, равный буферу. Для этих же пунктов объем спроса увеличен на величину буфера. В результате баланс спроса и предложения сохраняется. Перемещению груза из пункта в него же соответствует нулевой тариф, а для исключения недопустимых маршрутов возьмем число *M* при численном расчете, например, $M = 99$. Если ни один из таких маршрутов не войдет в оптимальное решение, что всегда возможно при корректной постановке задачи, значит это число выбрано достаточно большим. Решение (полученное с использованием *Excel,* см. далее) приведено на рисунке. Показаны только используемые маршруты и оптимальные объемы перевозок.



Можно учесть и другие дополнительные условия. Например, пусть объем поставки груза от *i*-го поставщика к *j*-му получателю не должен превышать d_{ij}. Для этого *j*-й столбец заменим на два столбца и занесем в первый из них спрос d_{ij}, а во второй – оставшийся объем спроса. Тарифы в обоих столбцах одни и те же, но в *i*-ой строке в первом из двух введенных столбцов тариф используется фактический, а во второй заносится достаточно большое число *M*. При ручном расчете – это единственный разумный вариант решения задачи. При использовании пакета прикладных программ (*Excel, MathCad*) достаточно просто добавить условие, что $x_{ij} \le d_{ij}$. Однако использование описанных выше табличной и графической форм представления задачи остается удобным и полезным.

Пример решения двухэтапной транспортной задачи на компьютере

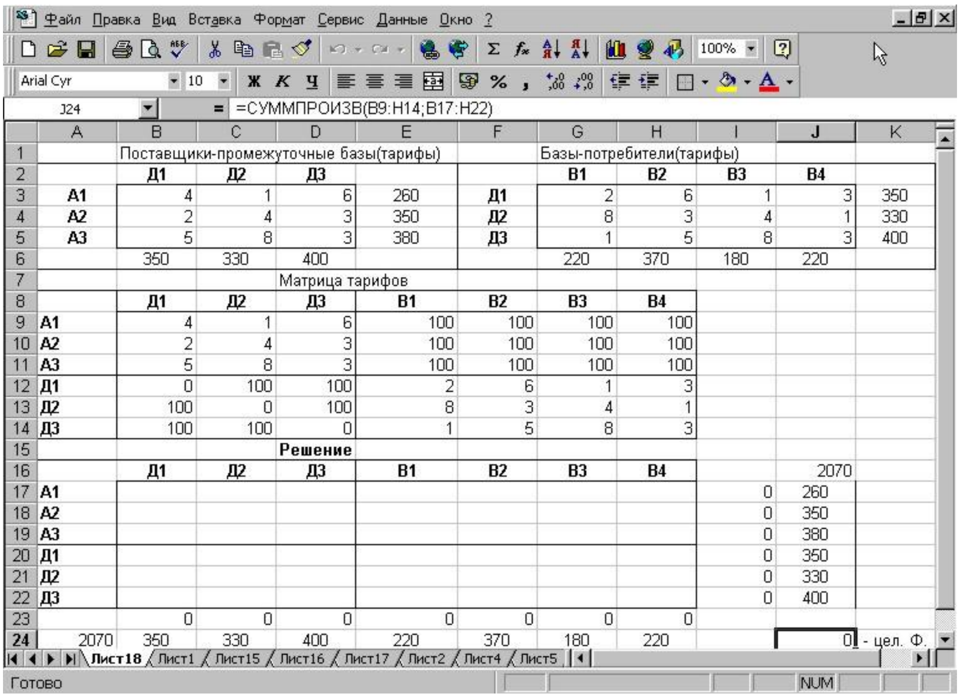
Задача. В некотором районе имеются m $(i=\overline{1,m})$ заводов A_i, мощности которых a_i. Продукция заводов поступает сначала на промежуточные базы D_r $(r=\overline{1,q})$, пропускная способность которых d_r, а затем n $(j=\overline{1,n})$ потребителям B_j с потребностями b_j. Возможности заводов, мощности промежуточных баз, запросы потребителей и стоимости перевозок единицы продукции от заводов на базы c_{ir} и с баз к потребителям t_{rj} представлены в табл.

Таблица

Объем поставок a_i, т	Объем потребления b_j, т	Пропускная способность промежуточных пунктов (базы) d_r, т	Стоимость перевозки единицы продукции	
			c_{ir}, ден. ед.	t_{rj}, ден. ед.
260	220	350	4, 1, 6	2, 6, 1, 3
350	370	330	2, 4, 3	8, 3, 4, 1
	180			
380	220	400	5, 8, 3	1, 5, 8, 3

Определить: оптимальную схему прикрепления потребителей к перевалочным базам и перевалочных баз к поставщикам на основе решения двухэтапной транспортной задачи.

Решение. Так как выполняются необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи, т.е. $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j \le \sum_{r=1}^{3} d_r$ то можно приступать к решению задачи.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Поставщики-промежуточные базы(тарифы)					Базы-потребители(тарифы)				
2		Д1	Д2	Д3			В1	В2	В3	В4	
3	А1	4	1	6	260	Д1	2	6	1	3	350
4	А2	2	4	3	350	Д2	8	3	4	1	330
5	А3	5	8	3	380	Д3	1	5	8	3	400
6		350	330	400			220	370	180	220	
7				Матрица тарифов							
8		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4			
9	А1	4	1	6	100	100	100	100			
10	А2	2	4	3	100	100	100	100			
11	А3	5	8	3	100	100	100	100			
12	Д1	0	100	100	2	6	1	3			
13	Д2	100	0	100	8	3	4	1			
14	Д3	100	100	0	1	5	8	3			
15				Решение							
16		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4		2070	
17	А1								0	260	
18	А2								0	350	
19	А3								0	380	
20	Д1								0	350	
21	Д2								0	330	
22	Д3								0	400	
23		0	0	0	0	0	0	0			
24	2070	350	330	400	220	370	180	220		0	- цел. Ф.

Рис. 13

Для решения транспортной задачи с помощью **Поиска решения** следует ввести данные, как показано на рис. 13. В ячейки B9:H14 вводится стоимость перевозок. Ячейки B17:H22 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестных, после решения здесь появится оптимальное решение. В ячейки J17:J22 введены объемы производства, а в ячейки B24: H24 – объемы спроса. В ячейку J24 вводится целевая функция. В ячейку I17 – формула =СУММ(B17:H17), которая затем копируется в ячейки I18:I22. Эти формулы характеризуют объем производства. В ячейку B23 вводится формула =СУММ(B17:B22), затем она копируется в ячейки C23:H23. Эти формулы определяют объем продукции, ввозимой в пункты потребления. Далее выбираем **Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** и вводим требуемые данные (см. рис. 14).

В диалоговом окне Параметры поиска решения установить флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое маштабирование**. После нажатия кнопки **Выполнить** получим оптимальный план поставок продукции и соответствуюшие ему транспортные расходы (рис. 15)

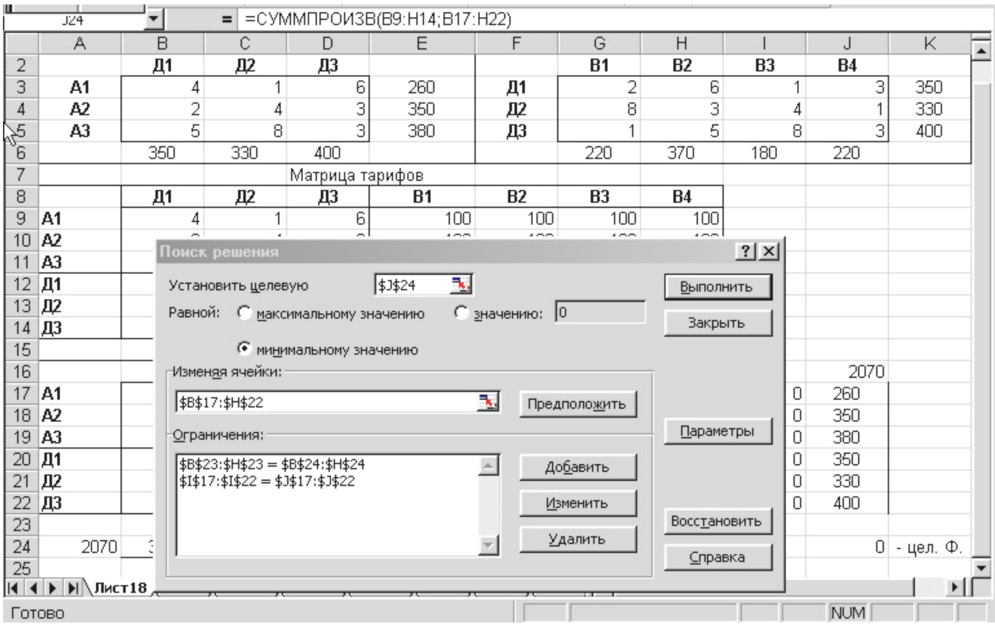


Рис. 14

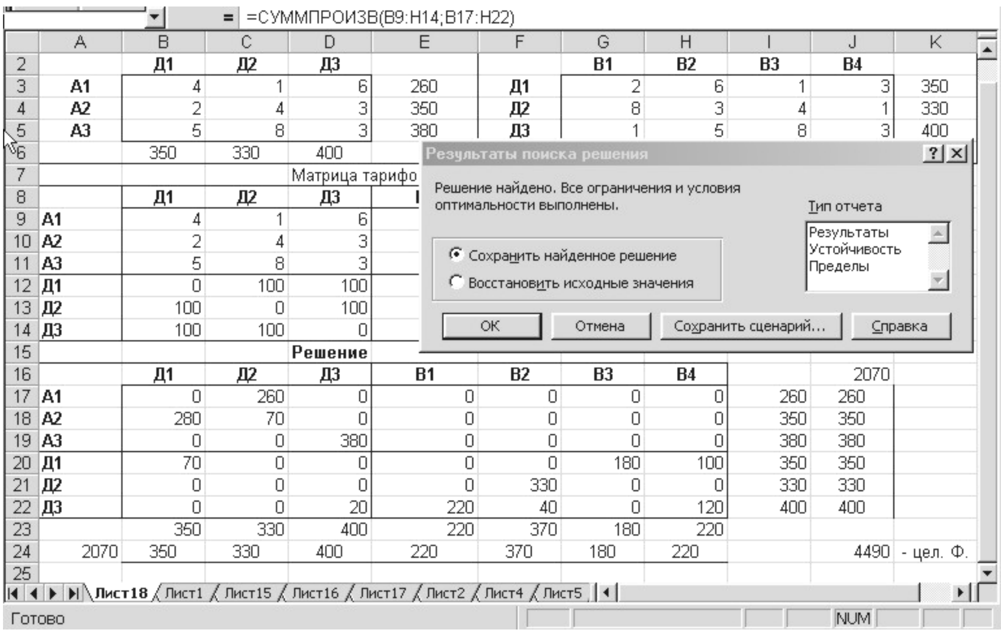
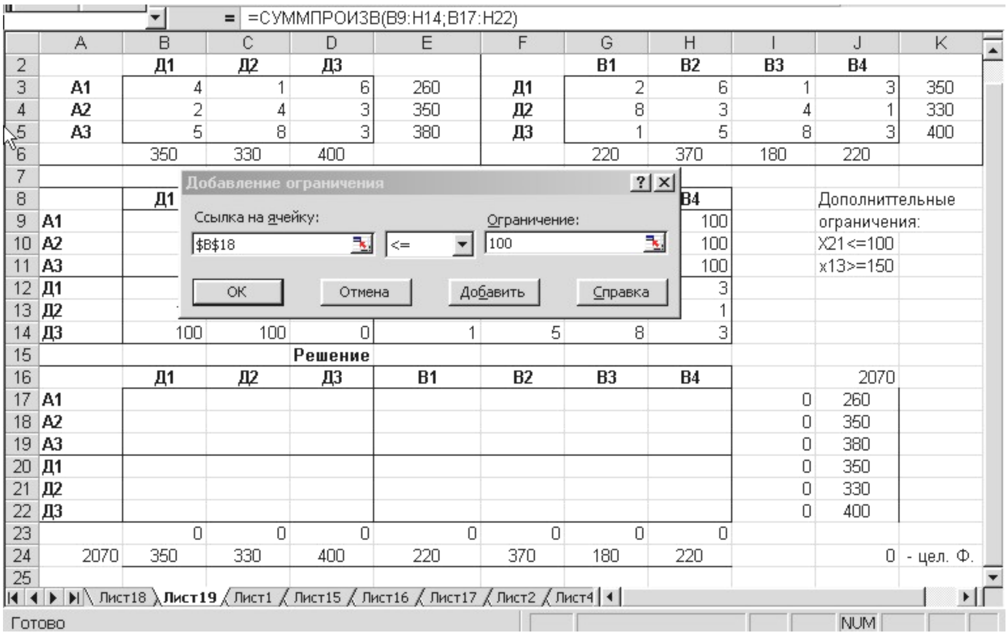


Рис. 15

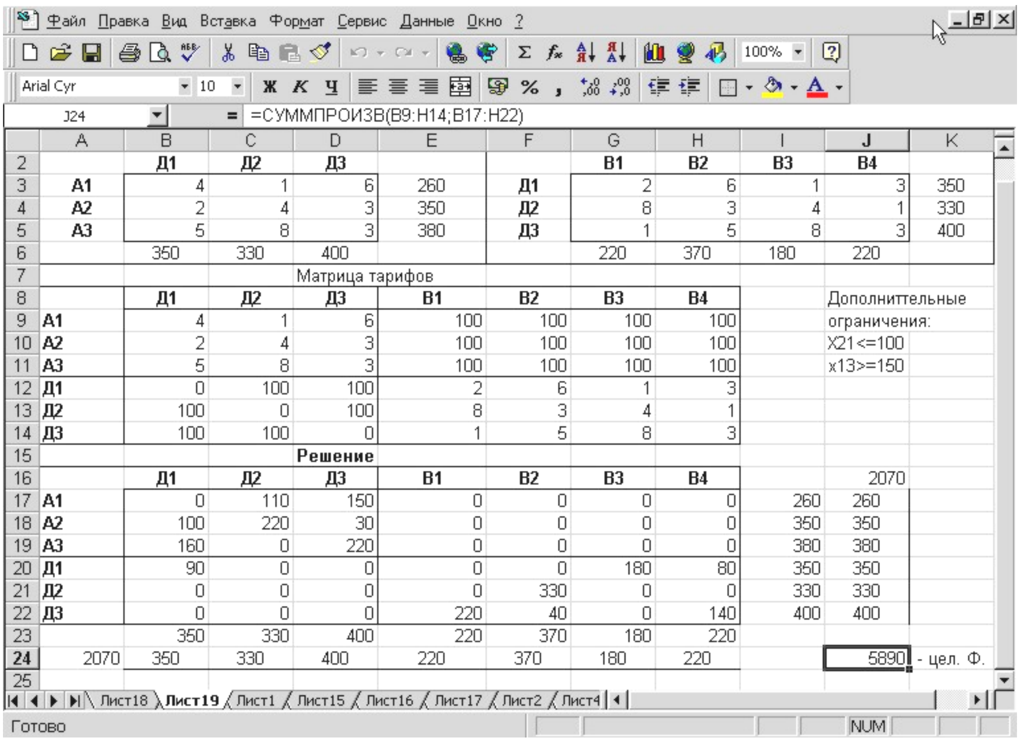
Усложним постановку задачи. Пусть требуется решить рассмотренную выше задачу с дополнительными ограничениями на перевозки: от второго производителя на первую базу может быть доставлено груза не более 100 ед., а от третьего производителя на первую базу должно быть доставлено не менее 150 ед.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		Д1	Д2	Д3			В1	В2	В3	В4	
3	А1	4	1	6	260	Д1	2	6	1	3	350
4	А2	2	4	3	350	Д2	8	3	4	1	330
5	А3	5	8	3	380	Д3	1	5	8	3	400
6		350	330	400			220	370	180	220	
7											
8		Д1						В4		Дополнительные	
9	А1							100		ограничения:	
10	А2							100		X21<=100	
11	А3							100		x13>=150	
12	Д1							3			
13	Д2							1			
14	Д3	100	100	0	1	5	8	3			
15				Решение							
16		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4		2070	
17	А1								0	260	
18	А2								0	350	
19	А3								0	380	
20	Д1								0	350	
21	Д2								0	330	
22	Д3								0	400	
23		0	0	0	0	0	0	0			
24	2070	350	330	400	220	370	180	220		0	- цел. Ф.
25											

Рис. 16

Решение задачи аналогично выше рассмотренному. Указанные ограничения учитываются в компьютерной реализации на этапе ввода ограничений. Сначала вводим общие ограничения на перевозки (окно **Добавить ограничения** (рис. 14)), а затем дополнительные ограничения (рис. 16). В результате решения получаем оптимальный план, представленный на рис. 17.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		Д1	Д2	Д3			В1	В2	В3	В4	
3	А1	4	1	6	260	Д1	2	6	1	3	350
4	А2	2	4	3	350	Д2	8	3	4	1	330
5	А3	5	8	3	380	Д3	1	5	8	3	400
6		350	330	400			220	370	180	220	
7				Матрица тарифов							
8		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4		Дополнительные	
9	А1	4	1	6	100	100	100	100		ограничения:	
10	А2	2	4	3	100	100	100	100		X21<=100	
11	А3	5	8	3	100	100	100	100		x13>=150	
12	Д1	0	100	100	2	6	1	3			
13	Д2	100	0	100	8	3	4	1			
14	Д3	100	100	0	1	5	8	3			
15				Решение							
16		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4		2070	
17	А1	0	110	150	0	0	0	0	260	260	
18	А2	100	220	30	0	0	0	0	350	350	
19	А3	160	0	220	0	0	0	0	380	380	
20	Д1	90	0	0	0	0	180	80	350	350	
21	Д2	0	0	0	0	330	0	0	330	330	
22	Д3	0	0	0	220	40	0	140	400	400	
23		350	330	400	220	370	180	220			
24	2070	350	330	400	220	370	180	220		5890	- цел. Ф.
25											

Рис. 17

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1.

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль:

а) графически,

б) симплекс-методом,

в) на компьютере, например, используя надстройку «Поиск решения».

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план, и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план,

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы,

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи,

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи,

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок,

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции, при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

Индивидуальные задания

В 1. Найти оптимальное сочетание посевов двух культур: пшеницы и гречихи. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице:

Показатель	Пшеница	Гречиха
Урожайность, ц	20	10
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	1	2
Затраты ручного труда, чел.-дней	3	1
Прибыль, ден. ед.	4	10

Производственные ресурсы: 4000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

В 2. На предприятии освоены две технологии производства основной продукции. Запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за тот же период приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса при технологии	
		№ 1	№ 2
Р1	34	2	4
Р2	16	4	1
Р3	22	2	3
Прибыль, ден. ед.		7	3

Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход русурсов не превысит их наличия.

В 3. Для изготовления обуви двух моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты на одну пару по моделям	
		№ 1	№ 2
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2
Кожа 1-го сорта	500	3	1
Кожа 2-го сорта	1200	0	1
Прибыль, ден. ед.		50	40

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

В 4. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. И помещение площадью в 45 м кв. Участок может быть оснащен машинами двух типов, характеристики которых приведены в таблице:

Марка машины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м кв.	Производительность за смену, тыс. ед.
М1	6	9	8
М2	3	4	5

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

В 5. Торговое предприятие реализует товары Т1, Т2, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов по товарам	
		Т1	Т2
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7
Площадь, м кв.	90	0,1	0,3
Прибыль, ден. ед.		5	8

Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую максимальную прибыль.

В 6. Завод при изготовлении деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице:

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология	
		I	II
Токарное	37	3	1
Фрезерное	20	2	2
Сварочное	30	0	1
Прибыль, ден. ед.		11	6

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

В 7. Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице:

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м куб.) на один дом		Запас стройматериалов, м куб.
	I проекта	II проекта	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м кв.	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

В. 8. Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции П1 и П2. Для этого используются два ограниченных ресурса — полезная площадь помещений, которая составляет 450 м^2, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов		Объем ресурса
	П1	П2	
Полезная площадь, м^2	1,5	2	450
Рабочее время, чел.-ч	3	2	600
Прибыль, ден. ед.	50	65	

В 9. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать два вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

	Ресурсы	Выпускаемая продукция		Объем ресурсов
		П1	П2	
Р1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	4800
Р2	Полуфабрикаты, кг	2	10	2400
Р3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	1500
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	

В 10. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Кол-во ед. корма в сутки		Общее количество корма (кг)
	Лисица	песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, ден. ед.	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок, была максимальной.

В. 11. На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий (А и В) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	**Нормы расхода ткани (м) на одно изделие вида**		**Общее количество ткани (м)**
	А	**В**	
I	1	-	180
II	-	1	210
III	4	2	800
Цена одного изделия (у.е.)	9	6	

В. 12. Предприятие выпускает два вида продукции (А и В) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на ед. прод. вида		Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	А	В	
Токарное	2	1	300
Фрезерное	1	-	70
Шлифовальное	1	2	340
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	8	6	

В 13. Торговое предприятие планирует организовать продажу двух видов товара (А и В), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

Показатели	Товар		Общее кол-во ресурсов
	А	В	
Расход рабочего времен на ед. товара (ч)	0,6	0,8	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м^2)	0,1	0,2	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	

В 14. За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дн., запас минеральных удобрений — 600 ц. С 1 га посева зерновых планируется получить 40 ц зерновых и 120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести минеральных удобрений 2 ц, на 1 га овощных культур — 5 ц, а также затратить на 1 га посева зерновых — 7 чел.-дн., на 1 га овощных — 20 чел.-дн. Цены на зерновые и овощные составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Найдите такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации производственной продукции.

В 15. Торговое предприятие имеет ограниченные ресурсы: фонд рабочего времени — 25,7 тыс. чел.-ч, площадь торговых залов — 350 м^2. Для обеспечения рентабельной работы торгового предприятия издержки обращения не должны превышать 11,3 млн. р. Постройте математическую модель определения структуры товарооборота предприятия торговли при заданных объемах ресурсов на единицу товара, затратах ресурсов для получения максимальной прибыли. Исходные данные представлены в табл.

Показатель	Товарная группа, затраты на 1 т	
	мясо	молочные продукты
Фонд рабочего времени, чел.-ч.	130	320
Площадь торговых залов, м^2	2	3,5
Издержки обращения, тыс. р.	70	130
Прибыль от продажи 1 т, млн. р.	0,125	0,24

В 16. Найти оптимальное сочетание посевов двух культур: пшеницы и гречихи. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице:

Показатель	Пшеница	Гречиха
Урожайность, ц	20	10
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	1	2
Затраты ручного труда, чел.-дней	3	1
Прибыль, ден. ед.	4	10

Производственные ресурсы: 4000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

В 17. На предприятии освоены две технологии производства основной продукции. Запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за тот же период приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса при технологии	
		№ 1	№ 2
Р1	34	2	4
Р2	16	4	1
Р3	22	2	3
Прибыль, ден. ед.		7	3

Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход русурсов не превысит их наличия.

В 18. Для изготовления обуви двух моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты на одну пару по моделям	
		№ 1	№ 2
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2
Кожа 1-го сорта	500	3	1
Кожа 2-го сорта	1200	0	1
Прибыль, ден. ед.		50	40

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

В 19. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. И помещение площадью в 45 м кв. Участок может быть оснащен машинами двух типов, характеристики которых приведены в таблице:

Марка машины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м кв.	Производительность за смену, тыс. ед.
М1	6	9	8
М2	3	4	5

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

В 20. Торговое предприятие реализует товары Т1, Т2, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов по товарам	
		Т1	Т2
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7
Площадь, м кв.	90	0,1	0,3
Прибыль, ден. ед.		5	8

Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

В 21. Завод при изготовлении деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице:

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология	
		I	II
Токарное	37	3	1
Фрезерное	20	2	2
Сварочное	30	0	1
Прибыль, ден. ед.		11	6

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

В 22. Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице:

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м куб.) на один дом		Запас стройматериалов, м куб.
	I проекта	II проекта	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м кв.	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

В. 23. Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции П1 и П2. Для этого используются два ограниченных ресурса — полезная площадь помещений, которая составляет 450 м^2, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов		Объем ресурса
	П1	П2	
Полезная площадь, м^2	1,5	2	450
Рабочее время, чел.-ч	3	2	600
Прибыль, ден. ед.	50	65	

В 24. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать два вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

	Ресурсы	Выпускаемая продукция		Объем ресурсов
		П1	П2	
Р1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	4800
Р2	Полуфабрикаты, кг	2	10	2400
Р3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	1500
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	

В 25. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Кол-во ед. корма в сутки		Общее количество корма (кг)
	Лисица	песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, ден. ед.	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок, была максимальной.

В. 26. На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий (А и В) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	**Нормы расхода ткани (м) на одно изделие вида**		**Общее количество ткани (м)**
	А	**В**	
I	1	-	180
II	-	1	210
III	4	2	800
Цена одного изделия (у.е.)	9	6	

В. 27. Предприятие выпускает два вида продукции (А и В) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на ед. прод. вида		Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	А	В	
Токарное	2	1	300
Фрезерное	1	-	70
Шлифовальное	1	2	340
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	8	6	

В 28. Торговое предприятие планирует организовать продажу двух видов товара (А и В), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

Показатели	Товар		Общее кол-во ресурсов
	А	В	
Расход рабочего времен на ед. товара (ч)	0,6	0,8	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м^2)	0,1	0,2	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	

В 29. За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дн., запас минеральных удобрений — 600 ц. С 1 га посева зерновых планируется получить 40 ц зерновых и 120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести минеральных удобрений 2 ц, на 1 га овощных культур — 5 ц, а также затратить на 1 га посева зерновых — 7 чел.-дн., на 1 га овощных — 20 чел.-дн. Цены на зерновые и овощные составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Найдите такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации производственной продукции.

Задание 2.

1) Составить математическую модель транспортной задачи;
2) Решить транспортную задачу без учета дополнительных ограничений на перевозки;

а) вручную,

б) на компьютере;

3) Решить транспортную задачу с дополнительными ограничениями на перевозки.
4) Сделать выводы.

Индивидуальные задания

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
1	$x_{44} \leqslant 500,\ \ x_{23} \geqslant 500$					16	$x_{21} \leqslant 500,\ \ x_{44} \geqslant 1000$				
	$a_i \backslash b_j$	500	500	1000	1500		$a_i \backslash b_j$	1000	1500	500	2000
	1000	3	2	5	4		500	3	2	1	5
	1500	4	3	5	3		1000	3	6	5	4
	500	1	1	3	2		1000	4	8	5	7
	1500	4	1	6	3		1500	5	7	2	6
2	$x_{32} \leqslant 200,\ \ x_{11} \geqslant 100$					17	$x_{34} \leqslant 20,\ \ x_{12} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	300	300	300	300		$a_i \backslash b_j$	40	60	50	40
	300	5	5	4	3		40	1	2	3	1
	200	4	7	4	2		50	4	2	2	9
	400	3	2	3	4		50	5	7	10	5
	100	3	1	2	7		40	4	15	13	6

Вари-ант	Задача				
3	$x_{21} \leqslant 500, \quad x_{44} \geqslant 1000$				
	$a_i \backslash b_j$	1000	1000	2000	2000
	500	5	6	3	8
	1000	1	1	2	3
	1500	2	5	4	4
	2000	6	3	5	9
4	$x_{42} \leqslant 50, \quad x_{24} \geqslant 50$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	100	100
	50	2	4	5	8
	100	5	3	4	6
	50	3	1	2	4
	100	7	2	6	9
5	$x_{44} \leqslant 100, \quad x_{23} \geqslant 50$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	200	200
	50	1	9	2	2
	100	6	4	10	3
	100	8	4	7	5
	200	7	6	5	3
6	$x_{43} \leqslant 50, \quad x_{21} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	100	200
	100	1	3	1	2
	200	4	7	3	5
	50	3	4	1	6
	100	7	8	3	6
7	$x_{11} \leqslant 20, \quad x_{33} \geqslant 30$				
	$a_i \backslash b_j$	30	30	60	90
	60	3	11	4	4
	30	2	10	5	6
	60	3	13	3	7
	30	1	4	2	1
8	$x_{21} \leqslant 10, \quad x_{12} \geqslant 10$				
	$a_i \backslash b_j$	40	20	10	20
	40	7	6	5	11
	20	3	4	2	2
	10	9	10	3	15
	10	1	5	1	3

Вари-ант	Задача				
18	$x_{21} \leqslant 500, \quad x_{44} \geqslant 500$				
	$a_i \backslash b_j$	1000	500	1500	2000
	500	3	1	2	5
	1000	1	3	4	2
	500	3	6	5	6
	1500	4	3	9	8
19	$x_{21} \leqslant 25, \quad x_{32} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	50	25	50	25
	25	3	1	8	1
	50	2	5	2	3
	75	9	4	6	5
	25	7	3	10	3
20	$x_{23} \leqslant 30, \quad x_{32} \geqslant 30$				
	$a_i \backslash b_j$	30	90	60	60
	30	1	3	4	5
	60	9	5	2	4
	90	3	4	5	4
	90	5	7	2	6
21	$x_{33} \leqslant 100, \quad x_{42} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300
	100	2	3	4	5
	200	2	4	2	6
	300	6	5	4	5
	300	4	6	7	6
22	$x_{32} \leqslant 100, \quad x_{43} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	50	150	200	150
	50	4	5	6	10
	100	6	3	8	4
	150	5	1	3	1
	150	7	2	4	2
23	$x_{22} \leqslant 25, \quad x_{44} \geqslant 25$				
	$a_i \backslash b_j$	25	50	75	50
	25	1	1	3	4
	50	7	2	4	2
	50	8	9	5	6
	50	6	7	8	5

Вариант	Задача				
9	$x_{44} \leqslant 20,\quad x_{23} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	40	30	40	50
	20	5	3	1	6
	30	4	6	4	7
	20	4	1	2	3
	40	6	3	8	10
10	$x_{32} \leqslant 100,\quad x_{23} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300
	100	4	3	5	2
	200	7	1	2	3
	300	9	2	4	5
	100	1	3	6	4
11	$x_{31} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200
	200	1	7	12	2
	100	2	3	8	4
	200	3	5	4	6
	200	4	4	3	8
12	$x_{11} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 200$				
	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200
	200	2	1	3	5
	100	4	3	4	7
	100	5	8	3	6
	400	3	5	2	4
13	$x_{32} \leqslant 20,\quad x_{24} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	40
	10	3	1	3	4
	50	5	1	2	2
	60	2	3	4	6
	40	7	2	5	3
14	$x_{43} \leqslant 20,\quad x_{34} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40
	20	4	5	2	4
	40	3	1	3	5
	80	2	7	6	8
	40	3	3	1	4
15	$x_{33} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300
	100	1	3	4	1
	200	5	2	2	7
	400	4	4	3	6
	200	7	2	5	3
24	$x_{42} \leqslant 10,\quad x_{23} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	20
	20	2	2	3	4
	40	4	5	4	7
	20	6	7	3	5
	40	3	5	7	4
25	$x_{43} \leqslant 10,\quad x_{22} \geqslant 5$				
	$a_i \backslash b_j$	5	10	15	10
	5	2	2	4	5
	20	4	6	7	10
	15	5	3	3	6
	20	6	4	5	12
26	$x_{34} \leqslant 100,\quad x_{43} \geqslant 50$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	100	150
	50	1	3	4	1
	100	3	2	2	4
	150	4	8	9	5
	150	9	6	7	10
27	$x_{33} \leqslant 60,\quad x_{42} \geqslant 60$				
	$a_i \backslash b_j$	60	120	180	120
	60	1	3	2	1
	120	6	2	4	2
	180	5	9	5	10
	180	7	6	7	15
28	$x_{32} \leqslant 70,\quad x_{43} \geqslant 140$				
	$a_i \backslash b_j$	70	140	210	140
	70	1	2	1	3
	140	2	4	5	8
	210	3	5	6	9
	210	4	6	7	10
29	$x_{42} \leqslant 80,\quad x_{23} \geqslant 80$				
	$a_i \backslash b_j$	80	160	240	160
	80	2	5	2	3
	160	3	4	4	5
	80	4	3	6	7
	160	5	2	5	4
30	$x_{31} \leqslant 90,\quad x_{44} \geqslant 90$				
	$a_i \backslash b_j$	180	90	270	180
	90	1	3	4	1
	90	3	2	9	13
	180	3	4	5	8
	180	4	5	6	4