Лаговский Б.А.[1], Чикина А.Г.[2] ©
[1]Профессор, д.т.н., кафедра «Прикладная математика»; [2]студент,
Московский государственный институт радиотехники электроники и информатики
(Технический университет)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПОЛУЧЕНИЯ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЗАЦИИ ДАННЫХ

Аннотация

Теоретически и в ходе экспериментов на математической модели обоснован новый метод повышения устойчивости численных решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода типа свёртки для одно- и двухмерных задач. Метод позволяет получать изображения исследуемых объектов с угловым разрешением, превышающим критерий Рэлея.

Ключевые слова: сверхразрешение, устойчивость решений.
Keywords: angular superresolution, inverse problem.

1. Введение. Постановка задачи

Одно из основных направлений совершенствования систем наблюдения, фиксации изображений и измерений пространственного положения объектов в различных диапазонах электромагнитных волн – повышение угловой разрешающей способности. Представляемый метод обработки позволяют получить разрешение, превышающее критерий Рэлея, т.е. добиться сверхразрешения.

В одномерном случае задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (ИУ) типа свёртки:

$$U(\alpha)=\int_{\Omega} f(\alpha-\phi)I(\phi)d\phi \tag{1}$$

где Ω - угловая область расположения источника, $I(\alpha)$ – искомое распределение амплитуды излучаемого источником (или отражённого) сигнала, $f(\alpha)$ – диаграмма направленности (ДН) системы измерения, $U(\alpha)$ – сигнал на выходе приёмника при сканировании.

2. Метод решения

Использование алгебраических методов [3-6] позволяет получать устойчивые решения (1) со сверхразрешением. Эти методы основаны на представлении источника в виде разложения по системам ортогональных в заданной области функций g(α) с неизвестными коэффициентами b_j:

$$I(\alpha)\cong\sum_{j=1}^{M} b_j g_j(\alpha)$$

и сведении решений ИУ к решению плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Для повышения степени достигаемого сверхразрешения необходимо повысить устойчивость получаемых решений [1, 4, 6].

Уменьшение размерности СЛАУ позволяет увеличить устойчивость решений. Это означает уменьшение числа используемых функций в представлении источника и, как следствие, приводит к снижению разрешающей способности.

Существует, однако, возможность уменьшить размерность используемых СЛАУ без снижения разрешения. Для этого предлагается предварительно провести симметризацию обратной задачи. Сущность метода состоит в том, что всегда возможно представить принятый сигнала U и решение I в виде суммы чётной и нечётной частей – U_0, I_0 и U_e, I_e:

$$I_o(\alpha)=1/2(I(\alpha)+I(-\alpha)),\ \ I_e(\alpha)=1/2((I_o(\alpha)-I_e(-\alpha)),\ I(\alpha)=1/2(I_o(\alpha)+I_e(\alpha)), \quad (2)$$

$$U_o(\alpha)=\int_\Omega f(\alpha-\phi)I_o(\phi)d\phi \qquad U_e(\alpha)=\int_\Omega f(\alpha-\phi)I_e(\phi)d\phi$$

$$U_o(\alpha)=1/2(U(\alpha)+U(-\alpha)) \qquad U_e(\alpha)=1/2(U(\alpha)-U(-\alpha)) \quad (3)$$

В итоге, в силу линейности, исходная задача поиска $I(\alpha)$ распадается на две. Первая - поиск чётной части $I_o(\alpha)$ по чётной части принятого сигнала на основе выбранной системы чётных функций. Вторая - поиск нечётной части $I_e(\alpha)$ по нечётной части $U_e(\alpha)$ на основе системы нечётных функций. Общее решение задачи - суперпозицией чётного и нечётного решений

$$I(\alpha) = ½\ (I_o(\alpha) + I_e(\alpha)). \quad (4)$$

Если для каждой из задач удаётся получить устойчивое решение при размерности СЛАУ $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$, т.е. при использовании $\boldsymbol{N}$ функций, то итоговое суммарное решение содержит $2\boldsymbol{N}$ функций. При прямом поиске $I(\alpha)$ в виде суперпозиции $2N$ функций потребовалось бы решать СЛАУ размерностью $2\boldsymbol{N}\ \times 2\boldsymbol{N}$, что в рассматриваемых задачах на порядок, снижает устойчивость решения, оцениваемую числом обусловленности.

Таким образом, для одномерных задач симметризация позволяет удвоить разрешение без снижения устойчивости решения.

Обобщение большинство известных методов решения ИУ (1) на двумерные задачи существенно усложняет алгоритмы, резко повышает время обработки сигналов. Для получения удовлетворительных результатов иногда требуется использование параллельных процессоров [5].

Перспективными для рассматриваемых двумерных задач восстановления изображений источников сигналов оказываются представленные в работах [6-9] алгебраические методы решения одномерных задач. Они заключаются в представлении приближённых решений в виде конечных разложений по задаваемым последовательностям функций с неизвестными коэффициентами.

В работе [7] показано, что решения задач восстановления изображений объектов без привлечения априорных данных может быть найдено только с ограниченным разрешением, хотя и заметно превышающим критерий Рэлея. Следовательно, для получения максимально достижимого разрешения достаточно использовать *конечные* системы ортогональных функций.

Связь величин I, U и ДН для двумерных задач выражается в виде двумерной свёртки:

$$U(x,y)=\int_\Omega f(x-x', y-y')I(x',y')dx'dy' \quad (5)$$

Задача состоит в восстановлении углового распределения I(x,y) с максимально возможным угловым разрешением.

Для двумерных задач введём понятие двойной чётности – если функция чётна по x и y, то назовём её чётно-чётной, если чётна по x и нечётна по y, назовём её чётно-нечётной и т.д. Представим принятый сигнал U и решение I в виде суммы четырёх составляющих различной чётности вида $U_{0,0}$, $U_{0,e}$, $U_{0,e}$ и $U_{e,e}$.

$$\begin{aligned}
U_{o,o}(x,y)&=1/4(U(x,y)+U(-x,y)+U(x,-y)+U(-x,-y))\\
U_{e,o}(x,y)&=1/4(U(x,y)-U(-x,y)+U(x,-y)-U(-x,-y))\\
U_{o,e}(x,y)&=1/4(U(x,y)+U(-x,y)-U(x,-y)-U(-x,-y))\\
U_{e,e}(x,y)&=1/4(U(x,y)-U(-x,y)-U(x,-y)+U(-x,-y))
\end{aligned} \quad (6)$$

Для представления решения теперь требуется 4 системы функций различной чётности. Например, на основе четырёх произведений тригонометрических функций:

$$\cos(\frac{2\pi mx}{T_x})\cos(\frac{2\pi my}{T_y}),\ \sin(\frac{2\pi mx}{T_x})\cos(\frac{2\pi my}{T_y}),\ \cos(\frac{2\pi mx}{T_x})\sin(\frac{2\pi my}{T_y}),\ \sin(\frac{2\pi mx}{T_x})\sin(\frac{2\pi my}{T_y}), \quad (7)$$

где T_x и T_y – размеры области по углам x и y. В силу линейности, исходная задача распадается на 4.

Общее решение задачи – суперпозиция решений всех чётностей

$$I(x,y) = 1/4\ (I_{e,0}(x,y) + I_{0,e}(x,y) + I_{0,0}(x,y) + I_{e,e}(x,y)). \quad (8)$$

Представляя искомое распределение I(x,y) в виде разложения по конечной системе из N^2 ортогональных функций:

$$I(x,y) \cong \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} b_{n,m} g_n(x) g_m(y) \quad (9)$$

получим принятый сигнал в виде:

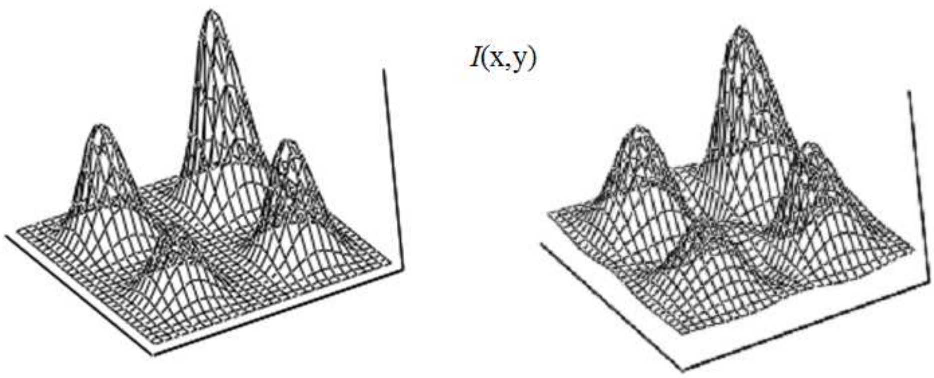
$$U(x,y) \cong \sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m} \varphi_{n,m}(x,y) \quad \text{, где} \quad (10)$$

$$\varphi_{n,m}(x,y) = \int_{\Omega} f(x-x', y-y') g_n(x') g_m(y') dx'dy' \quad (11)$$

Коэффициенты разложения $b_{n,m}$, обеспечивающие минимальное среднеквадратичное отклонение, находятся из СЛАУ:

$$\int_{\Omega} U(x,y) \varphi_{j,k}(x,y) d\alpha = \sum_{n,m=1}^{N} b_m \int_{\Omega} \varphi_{j,k}(x,y) \varphi_{n,m}(x,y) dxdy \quad j,k = 1,2 \ldots N \quad (12)$$

Количественные характеристики увеличения разрешения и его пределы исследовались на математической модели. Рассматривалась игольчатая ДН, образованная плоской квадратной антенной решёткой (АР) размерами 30∗30 d/λ с равномерным возбуждением.



Слева – истинный источник сигнала; справа – найденное решение;
Рис.1. **Результаты восстановления источников сигналов**

На рис.1 показано решение задачи восстановления изображения источников на основе симметризации задачи. Были заданы 4 источника с плавно-неоднородным распределением интенсивности, максимумы которых различаются в четыре раза. В качестве системы ортогональных функций использовались четыре функций из (7). Полученное решение (8) позволило разрешить все 4 источника, правильно передать их расположение и характер распределения интенсивности. Амплитудные значения восстановлены с небольшими ошибками - в пределах 7% .

Заключение. Использование предложенных алгебраических методов на основе симметризации задач значительно повышает эффективное угловое разрешение. Достигнутая степень сверхразрешения при различных типах источников сигналов в 5-8 и более раз превышала критерий Рэлея.

Литература

1. Quinquis A., Radoi E., Totir F.C. - Some radar imagery results using superresolution techniques // IEEE Trans. - 2004. Vol. 52. № 5. P. 1230-1244.
2. Lagovsky B.A. - Superresolution: Data Mining. - Progress In Electromagnetics Research Symposium // PIERS Proceed.- 2012.- p.1309– 1312
3. Лаговский Б.А. - Сверхразрешение на основе синтеза апертуры цифровыми антенными решетками // Антенны. - 2013. № 6, - С. 9 -16.
4. Lagovsky B.A., Samokhin A.B. Image Restoration of Two-dimensional
1. Signal Sources with Superresolution //Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings. Stockholm. PIERS Proceedings 2013. –p. 315-319.
5. Лаговский Б.А. - Восстановление изображения групповой цели цифровыми антенными решетками // Антенны. = 2011. № 2(165).- С. 40 -46.
6. Лаговский Б.А., Самохин А.Б. Устойчивость алгебраических методов восстановления изображений источников с повышенным угловым разрешением // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2011, № 4, т.16. С. 6-12.
7. Лаговский Б.А., Самохин А.Б., Самохина А.С. - Формирование изображений радиолокационных целей со сверхразрешением алгебраическими методами // Успехи современной радиоэлектроники. – 2014, № 8, - с. 23-27.
8. Lagovsky B.A. Image Restoration of the Objects with Superresolution on the Basis of Spline - Interpolation. Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2012-Moscow), PIERS Proceedings 2012. pp. 989 – 992.
9. Lagovsky B.A. Superresolution: Simultaneous Orthogonalization of Function Systems Describing the Received Signal and its Source. Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2012-Moscow), PIERS Proceedings 2012. pp. 993 – 996.