Симметризация решений

Повышение устойчивости решений может быть достигнуто, как уже указывалось, при уменьшении размерности матриц, получающихся при параметризации решений, угловое разрешение при этом снижается. Существует, однако, возможность уменьшить размерность матрицы в два раза без снижения углового разрешения. Для этого необходимо предварительно провести *симметризацию* обратной задачи.

Искомое решение $I(\alpha)$ всегда может быть представлено в виде суммы чётного и нечётного решений:

$$I(\alpha) = 1/2(I_o(\alpha) + I_e(\alpha)), \quad I_o(\alpha) = 1/2(I(\alpha) + I(-\alpha)), \quad I_e(\alpha) = 1/2((I_o(\alpha) - I_e(-\alpha))$$

Тогда принятый сигнал также может быть выражен в виде суммы чётной и нечётной частей:

$$U_o(\alpha) = \int_\Omega f(\alpha - \phi) I_o(\phi) d\phi \qquad U_e(\alpha) = \int_\Omega f(\alpha - \phi) I_e(\phi) d\phi,$$

где

$$U_o(\alpha) = 1/2(U(\alpha) + U(-\alpha)) \qquad U_e(\alpha) = 1/2(U(\alpha) - U(-\alpha))$$

В итоге, в силу линейности, исходная задача поиска $I(\alpha)$ алгебраическими методами распадается на две. Первая - поиск чётной части $I_o(\alpha)$ по чётной части принятого сигнала на основе выбранной системы чётных функций. Вторая - поиск нечётной части $I_e(\alpha)$ по нечётной части $U_e(\alpha)$ на основе системы нечётных функций. Сумма двух найденных решений различной чётности является решением всей задачи.

Если при решении каждой из задач удаётся получить устойчивое решение при использовании N функций, то итоговое суммарное решение содержит $2N$ функций, чего не всегда удаётся добиться при прямом поиске $I(\alpha)$, когда решается плохо обусловленная СЛАУ вдвое большей размерности $2\,N \times 2\,N$.

Таким образом, симметризация задачи позволяет удвоить эффективное разрешение без снижения устойчивости решения.

На рис. 2.8. показано решение задачи восстановления изображения источников на основе симметризации задачи. В качестве систем ортогональных функций использовались вейвлеты Хаара. Были заданы два малоразмерных источника с различающимися в два раза амплитудами излучаемых сигналов – 1. Полученное решение в виде восстановленных источников – 2, принимаемый сигнал - 3.

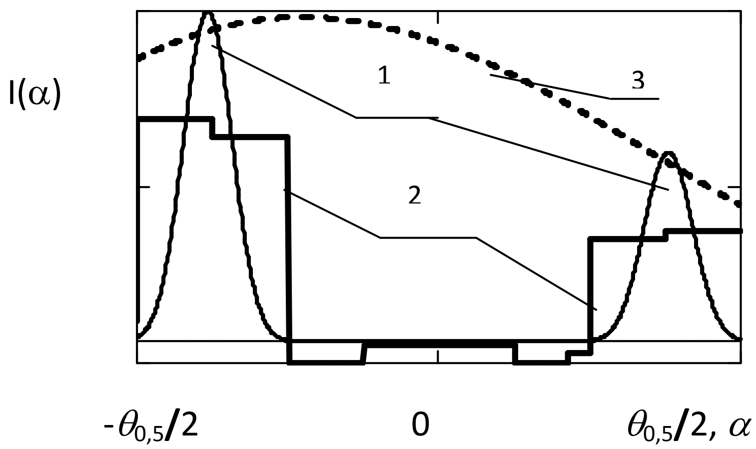

Рис. 2.8. Восстановление изображения источников на основе симметризации задачи.

Восстановление изображений источников с заметно различающимися уровнями излучаемых сигналов - более сложная, чем приведенная ранее, обратная задача. При непосредственном наблюдении, без обработки сигнала, разрешение становится возможным при угловом расстоянии между приведенными источниками не менее 2,3$\theta_{0,5}$.

Использование алгоритма обработки на основе симметризации позволило значительно повысить эффективное угловое разрешение по сравнению с критерием Рэлея - в 5,8 раза.

Дальнейшее улучшение результатов достигается при одновременном применении симметризации задачи и использовании предварительной, а также получаемой в ходе решения, информации об искомой функции $I(\alpha)$.

На рис.2.9. приведено решение задачи для двух близко расположенных источников с различными амплитудами излучаемого сигнала. Представлены: 1– точечные источники сигнала; 2 – решение на основе симметризации и получаемой в ходе построения решения информации о локализации источников; 3, 4 - чётная и нечётная части принимаемого сигнала, полученные при симметризации решения.

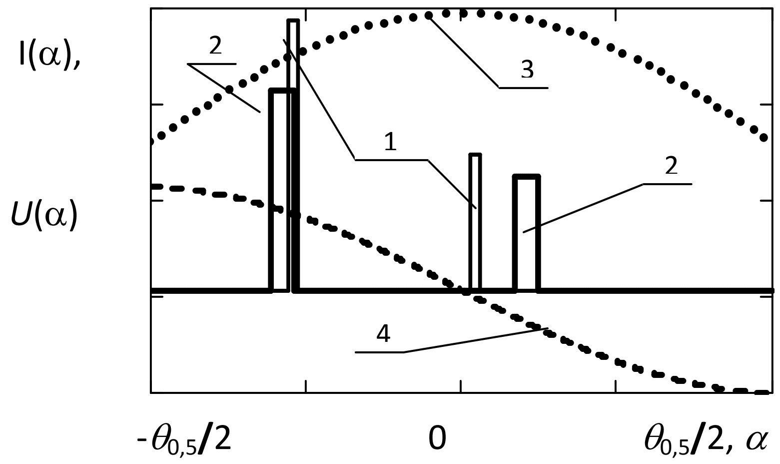

Рис. 2.9. Решение при применении симметризации задачи и использовании получаемой в ходе решения информации об искомой функции.

1– источники сигнала; 2 – найденное решение; 3, 4 - чётная и нечётная части принимаемого сигнала.

Без представленной обработки сигнала такие цели разрешаются при угловом расстоянии между ними не менее $2{,}54\,\theta_{0,5}$.

Обработка сигнала с помощью метода симметризации позволила значительно повысить устойчивость решений.