МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Лабораторная работа 1.2.3

Определение моментов инерции
твердых тел с помощью
трифилярного подвеса

Авторы:
Идрисов Сергей
Б04-306

Долгопрудный 01.22.2023

Введение

Цель работы: Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам, проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

В работе используются:

1. Трифилярный подвес;
2. Счетчик числа колебаний;
3. Набор исследуемых тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие);
4. Секундомер.

Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Здесь r - расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m.

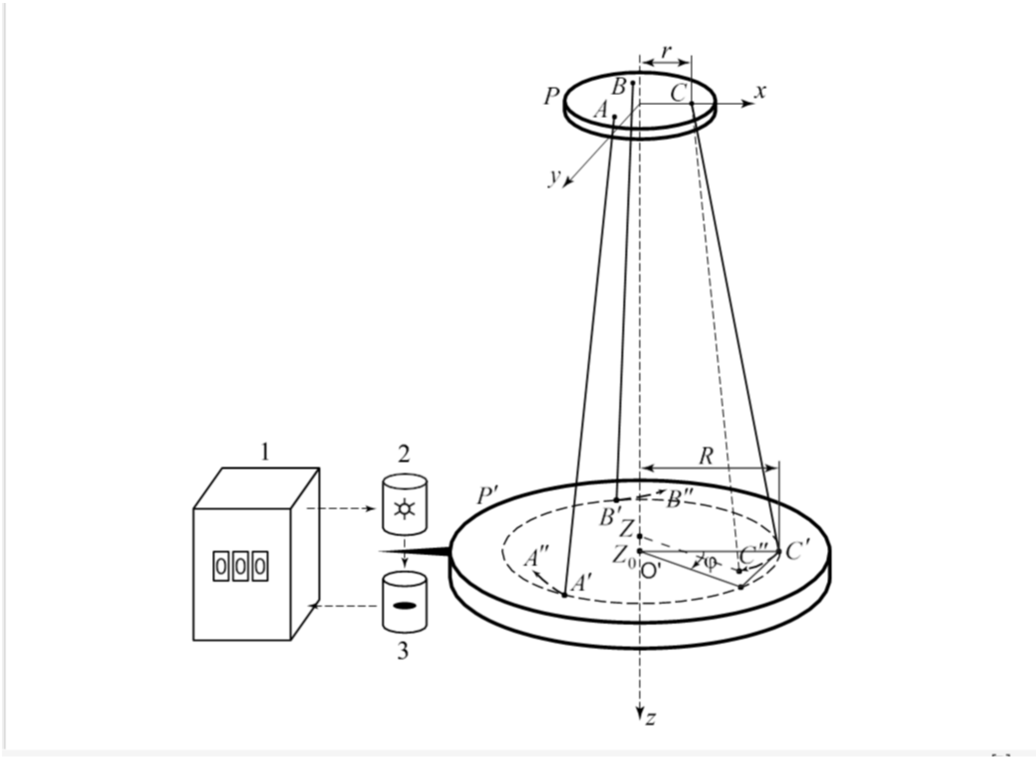

Рис. 1: Трифилярный подвес.

Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и под вешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA', BB' и CC' вращающейся платформы P'. Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом, при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол ϕ относительно верхней платформы P, возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость. В результате платформа совершает крутильные колебания.

Уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \tag{2}$$

Здесь I - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m - масса платформы с телом, ϕ - угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (угловая скорость), z_0 - координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\phi = 0$), z - координата той же точки при некотором угле поворота ϕ. Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе - (r, 0, 0). Нижний конец данной нити C', находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты (R, 0, z_0), а при повороте платформы на угол ϕ эта точка переходит в C" с координатами (R $\cos\phi$, R $\sin\phi$, z). Расстояние между точками C и C" равно длине нити L. Поэтому

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin\phi^2 + z^2 = L^2 \tag{3}$$

Учитывая, что при малых углах поворота $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi = z_0^2 - 2Rr(1-\cos\phi) \approx z_0^2 - 2Rr\phi^2 \tag{4}$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла ϕ, имеем

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \tag{5}$$

Подставляя это значение z в уравнение (2), получаем

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg\frac{Rr}{2z_0}\phi^2 = E \tag{6}$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\phi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\phi} + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = 0 \tag{7}$$

Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подста- новкой, имеет вид

$$\phi = \phi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \Theta\right) \tag{8}$$

Здесь амплитуда ϕ_0 и фаза Θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{9}$$

Из (9) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} \tag{10}$$

Учитывая, что параметры установки $R, r,$ иz_0 при проведении опытов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$I = kmT^2 \tag{11}$$

Здесь $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки. При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время τ уменьшения амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний T . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau >> T \tag{12}$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени. Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

Ход работы