

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Вопрос по выбору
Изучение вращательного движения
неоднородного тела

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

Долгопрудный 2023

1 Гипотеза

При вращательном движении неоднородного тела возникает эффект "подпрыгивания", как показано на рисунке 1. В данном случае рассматривается тело цилиндрической формы с точечной массой, размещённой с краю тела.

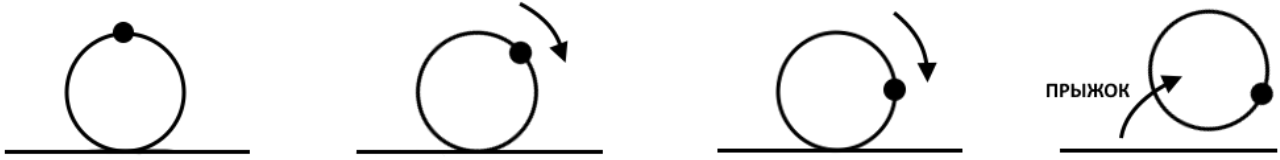


Рис. 1: Процесс прыжка во время вращательного движения

Когда колесо не подпрыгивает, точечная масса движется по циклоиде. Если бы в какой-то момент времени колесо пропало, то точечная масса двигалась бы по параболической траектории, причём такая траектория касательна к циклоиде. То есть при движении масса пытается двигаться по параболе, но она закреплена на диске. То есть данный эффект возникает, когда масса пытается двигаться по параболе и тянет за собой диск.

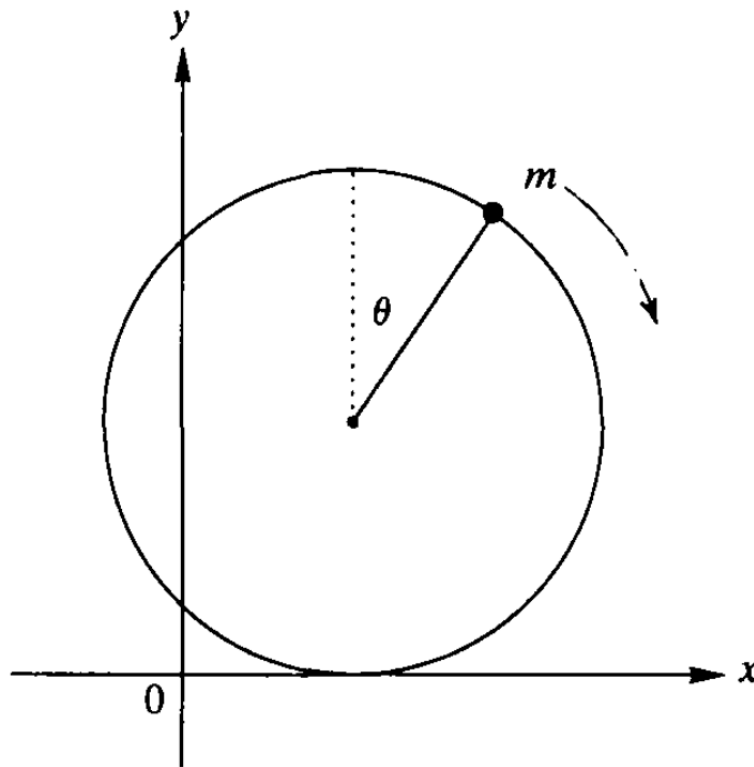


Рис. 2: Колесо во время вращения

Рассмотрим этот эффект подробнее на примере диска, с закреплённой с краю точечной массой (рис. 3). При исследовании его движения будем рассматривать центр масс.

Расстояние от центра диска до центра масс можно вычислить как

$$r = \frac{mR}{M + m} \quad (1)$$

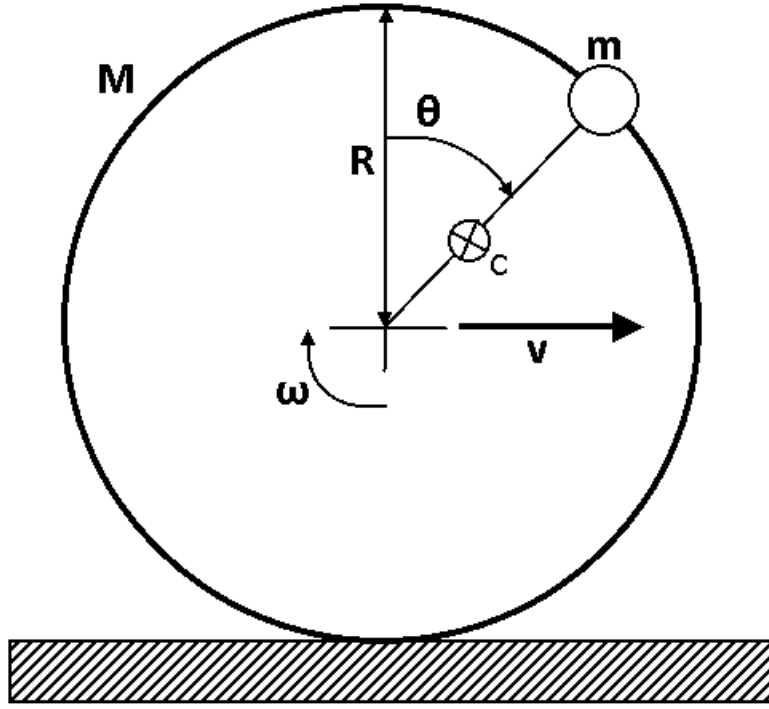


Рис. 3: Колесо во время вращения

где M – масса диска, m – масса дополнительного груза, R – радиус диска. Дальнейшее движение будем рассматривать как движение невесомого диска радиусом r , с закреплённой точечной массой m_0 на расстоянии r от центра диска.

Рассмотрим процесс вращения, направим оси так, как показано на рисунке 2. Для точечной массы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + m_0gy = \frac{m_0v_0^2}{2} + 2rm_0g \quad (2)$$

Когда колесо не подпрыгивает, точечная масса движется по циклоиде. Запишем движение в этом случае в координатах:

$$x(t) = r\varphi(t) + r \sin \varphi(t) \quad (3)$$

$$y(t) = r + r \cos \varphi(t) \quad (4)$$

Подставив эти соотношения в выражение для закона сохранения энергии, имеем:

$$\frac{m_0}{2} ((r\dot{\varphi} + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (-r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})^2) + m_0g(r + r \cos \varphi) = \frac{m_0v_0^2}{2} + 2m_0gr \quad (5)$$

Отсюда получаем, что

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4gr \sin^2 \frac{\varphi}{2} + v_0^2}{4r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (6)$$

Тогда можем представить \dot{y} и \ddot{y} как

$$\dot{y} = -r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -\sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{4gr \sin^2 \frac{\varphi}{2} + v_0^2} \quad (7)$$

$$\ddot{y} = -2g \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{v_0^2}{4r} \quad (8)$$

Так как масса m_0 тянет диск вверх для прыжка и двигать его по параболе, поэтому прыжок произойдёт в тот момент, когда производная движения массы превысит производную циклоиды, то есть прыжок возникает при минимальном φ таком, что $-g \geq \ddot{y}(\varphi(t))$, а если преобразовать, то

$$\sin \frac{\varphi}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{v_0^2}{4gr} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Так же можно получить выражение для минимальной начальной скорости, чтобы колесо подпрыгнуло при угле φ :

$$v_0 \geq \sqrt{4gr - 8gr \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (10)$$

Отсюда следует, что при начальной скорости $v_0 \geq \sqrt{4gr}$ колесо подпрыгнет всегда в какой-то момент движения. Тогда подставим выражение для r :

$$v_0 = \sqrt{4g \frac{mR}{M+m}} \quad (11)$$

2 Эксперимент

Для эксперимента будем использовать два различных колеса, первое представляет собой картонный диск массой $M_1 = (22,7 \pm 0,1)$ г и радиусом $R_1 = (15,0 \pm 0,1)$ см, точечная масса для него $m_1 = (29,4 \pm 0,1)$ г.

Второе колесо является крышкой (полым цилиндром, у которого отсутствует одна стенка) массой $M_2 = (12,3 \pm 0,1)$ г и радиусом $R_2 = (6,0 \pm 0,1)$ см, груз имеет массу $m_2 = (23,6 \pm 0,1)$ г.

Во время эксперимента будем закручивать колёса с различными начальными скоростями и наблюдать, будет ли колесо подпрыгивать. По видео оценим начальную скорость движения. Воспользуемся методом пропорций: зная параметры колёс можно оценить расстояние, пройденное телом, составив пропорцию. Время оценим по кадрам, пройденным за время движения.

Для показанного видео оценка скорости составляет $v_0 \approx 63,5$ см/с, а угол приблизительно 30 градусов, что соответствует теоретической оценке [9](#).

3 Анализ данных и выводы

Как показано на видео эксперимент прошёл удачно и эффект наблюдался. Экспериментальное значение скорости соответствует теоретическому. Отсюда можно судить, что теоритическая оценка верна.