МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Вопрос по выбору

Изучение вращательного движения неоднородного тела

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

Долгопрудный 2023

1 Гипотеза

При вращательном движении неоднородного тела возникает эффект "подпрыгивания" , как показано на рисунке 1. В данном случае рассматривается тело цилиндрической формы с точечной массой, размещённой с краю тела.

Рис. 1: *Процесс прыжка во время вращательного движения*

Когда колесо не подпрыгивает, точечная масса движется по циклоиде. Если бы в какой-то момент времени колесо пропало, то точечная масса двигалась бы по параболической траектории, причём такая траектория касательна к циклоиде. То есть при движении масса пытается двигаться по параболе, но она закреплена на диске. То есть данный эффект возникает, когда масса пытается двигаться по параболе и тянет за собой диск.

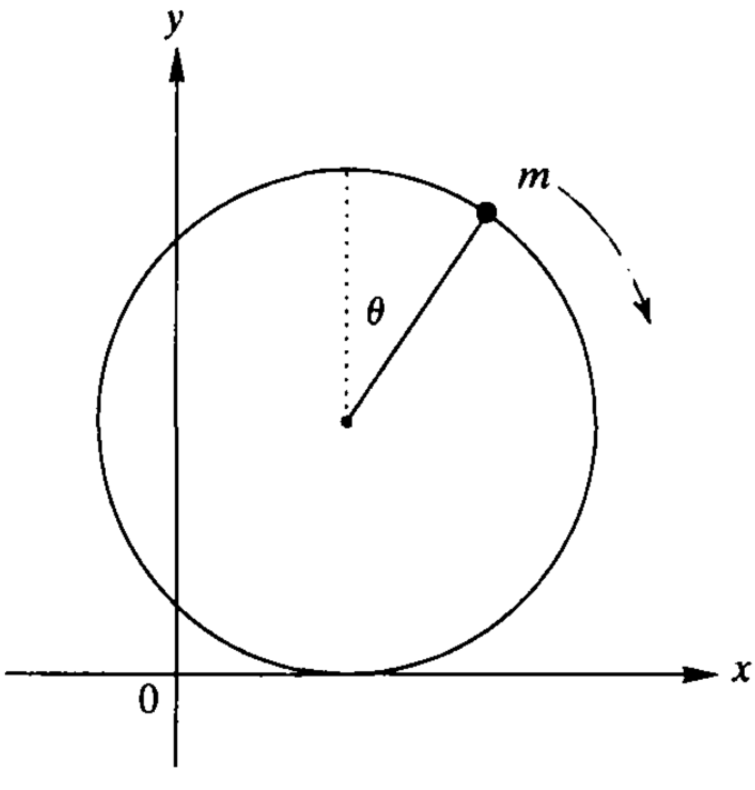

Рис. 2: *Колесо во время вращения*

Рассмотрим этот эффект подробнее на примере диска, с закреплённой с краю точечной массой (рис. 3). При исследовании его движения будем рассматривать центр масс.

Расстояние от центра диска до центра масс можно вычислить как

$$r = \frac{mR}{M+m} \tag{1}$$

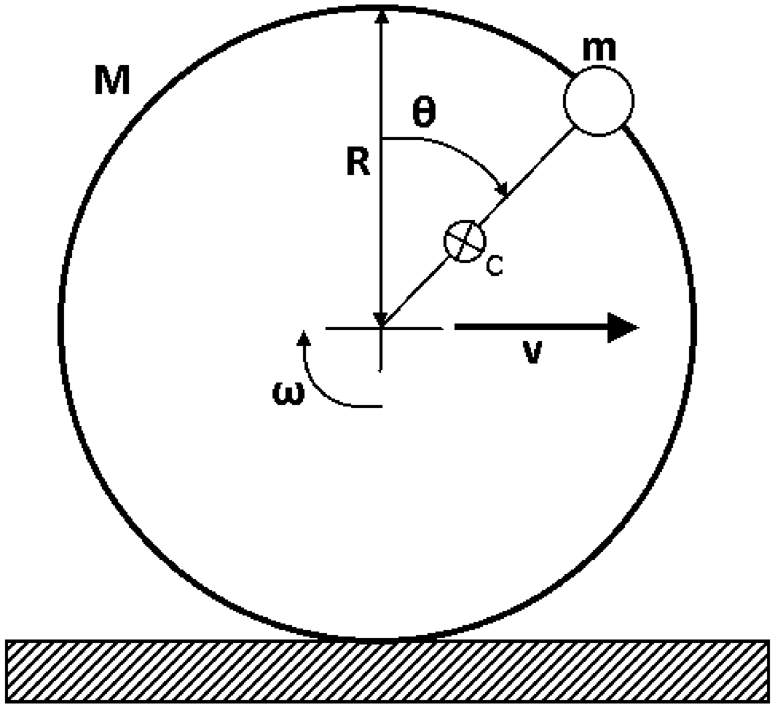

Рис. 3: *Колесо во время вращения*

где M – масса диска, m – масса дополнительного груза, R – радиус диска. Дальнейшее движение будем рассматривать как движение невесомого диска радиусом r, с закреплённой точечной массой m_0 на расстоянии r от центра диска.

Рассмотрим процесс вращения, направим оси так, как показано на рисунке 2. Для точечной массы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2}+m_0gy=\frac{m_0v_0^2}{2}+2rm_0g \tag{2}$$

Когда колесо не подпрыгивает, точечная масса движется по циклоиде. Запишем движение в этом случае в координатах:

$$x(t)=r\theta(t)+r\sin\theta(t) \tag{3}$$

$$y(t)=r+r\cos\theta(t) \tag{4}$$

Подставив эти соотношения в выражение для закона сохранения энергии, имеем:

$$\frac{m_0}{2}\left(\left(r\dot{\theta}+r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2+\left(-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2\right)+m_0g(r+r\cos\theta)=\frac{m_0v_0^2}{2}+2m_0gr \tag{5}$$

Отсюда получаем, что

$$\dot{\theta}^2=\frac{4gr\sin^2\frac{\theta}{2}+v_0^2}{4r^2\cos^2\frac{\theta}{2}} \tag{6}$$

Тогда можем представить $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ как

$$\dot{y}=-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}=-\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{4gr\sin^2\frac{\theta}{2}+v_0^2} \tag{7}$$

$$\ddot{y} = -2g\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{v_0^2}{4r} \tag{8}$$

Так как масса m_0 тянет диск вверх для прыжка и двигать его по параболе, поэтому прыжок произойдёт в тот момент, когда производная движения массы превысит производную циклоиды, то есть прыжок возникает при минимальном θ таком, что $-g \geq \ddot{y}(\theta(t))$, а если преобразовать, то

$$\sin\frac{\theta}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{v_0^2}{4gr}\right)^{1/2} \tag{9}$$

Так же можно получить выражение для минимальной начальной скорости, чтобы колесо подпрыгнуло при угле θ:

$$v_0 \geq \sqrt{4gr - 8gr\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{10}$$

Отсюда следует, что при начальной скорости $v_0 \geq \sqrt{4gr}$ колесо подпрыгнет всегда в какой-то момент движения. Тогда подставим выражение для r:

$$v_0 = \sqrt{4g\frac{mR}{M+m}} \tag{11}$$

2 Эксперимент

Для эксперимента будем использовать два различных колеса, первое представляет собой картонный диск массой $M_1 = (22{,}7 \pm 0{,}1)$ г и радиусом $R_1 = (15{,}0 \pm 0{,}1)$ см, точечная масса для него $m_1 = (29{,}4 \pm 0{,}1)$ г.

Второе колесо является крышкой (полым цилиндром, у которого отсутствует одна стенка) массой $M_2 = (12{,}3 \pm 0{,}1)$ г и радиусом $R_2 = (6{,}0 \pm 0{,}1)$ см, груз имеет массу $m_2 = (23{,}6 \pm 0{,}1)$ г.

Во время эксперимента будем закручивать колёса с различными начальными скоростями и наблюдать, будет ли колесо подпрыгивать. По видео оценим начальную скорость движения. Воспользуемся методом пропорций: зная параметры колёс можно оценить расстояние, пройденное телом, составив пропрцию. Время оценим по кадрам, пройденным за время движения.

Для показанного видео оценка скорости составляет $v_0 \approx 63{,}5$см/с, а угол приблизительно 30 градусов, что соответствует теоретической оценке 9.

3 Анализ данных и выводы

Как показано на видео эксперимент прошёл удачно и эффект наблюдался. Экспериментальное значение скорости соответствует теоретическому. Отсюда можно судить, что теоритическая оценка верна.

4 Список литературы

- Tokieda, T. F. (1997). The Hopping Hoop. The American Mathematical Monthly, 104(2), 152–154. doi:10.1080/00029890.1997.11990614

- Willem F.D. Theron. Analysis of the Rolling Motion of Loaded Hoops