Работа 1.4.1. Изучение колебаний физического маятника

Образец обработки экспериментальных данных

Данный документ представляет собой пример обработки результатов измерений и построения графиков с помощью библиотек языка Python. В работе измеряется период колебаний физического маятника в форме сплошного стержня. Изучается зависимость периода от расстояния до точки подвеса. По измеренной зависимости проверяется теоретическая модель и вычисляется ускорение свободного падения.

[1]:
```
# импорт библиотек
import numpy as np # для обработки данных
import matplotlib.pyplot as plt # для построения графиков
```

1 Определение погрешности измерения времени. Выбор оптимального времени измерений

Измерим время $n = 20$ колебаний маятника при некотором фиксированном положении подвесной призмы. Повторим измерения $N = 8$ раз и вычислим среднеквадратичное отклонение.

Результаты предварительных измерений:

[2]:
```
t0 = [30.55, 30.78, 30.75, 30.64, 30.57, 30.71, 30.51, 30.65] # время 20 колебаний, [c]
```

Вычисляем случайную погрешность как среднеквадратичое отклонение результатов от среднего:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2} \tag{1}$$

[3]:
```
mean = np.mean(t0) # среднее
N = len(t0) # число опытов
sigma_t = np.sqrt( 1 / (N - 1) * np.sum( (t0 - mean)**2 ) )
# тот же результат даёт встроенная функция
# np.std(t0, ddof=1)
print("t_mean = ", mean, "; sigma_t = %.3f" % sigma_t)
```

```
t_mean =  30.645 ; sigma_t = 0.097
```

Таким образом, случайная погрешность измерения полного времени составила $\sigma_t = 0{,}10$ с (инструментальная погрешность секундомера 0,01 с и ей можно пренебречь по сравнению с σ_t).

Будем считать, что основной источник погрешности измерения времени – реакция экспериментатора. Предположим, что задержка реакции человека практически зависит от полного времени измерения. Тогда исходя требуемой для опыта относительной точности $\varepsilon = 0{,}5\%$, вычислим необходимое полное время измерений:

$$t = \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \approx 20 \text{ с} \tag{2}$$

Таким образом, при периоде $T \sim 1{,}5$ с достаточно провести измерение времени $n = \frac{t}{T} \sim 13$ колебаний.

2 Измерение зависимости периода колебаний от положения подвесной призмы

Проводим измерение времени t для n колебаний для различных расстояний a (расстояние от подвесной призмы до центра масс стержня).

2.1 Данные эксперимента

Длина стержня:

[4]:
```
l = 1.000 # м
```

Расстояния до подвеса (от центра масс стержня):

[5]:
```
a = np.array([460.0, 420.0, 381.0, 360.0, 320.0, 291.0, 250.0, 210.0, 180.0, 140.0, 100.0,␣
↪70.0]) # [мм]
a = a / 1e3 # перевод в [м]
N = len(a) # число точек
```

Количество измеренных колебаний:

[6]:
```
n = np.array([15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 10, 10])
```

Измеренное время, [с]:

[7]:
```
t = np.array([24.16, 23.63, 23.30, 23.10, 23.05, 22.95, 23.01, 23.44, 24.15, 25.88, 19.44,␣
↪22.69])
```

Периоды колебаний, [с]:

[8]:
```
T = np.array(t) / n
print (T)
```

```
[1.61066667 1.57533333 1.55333333 1.54       1.53666667 1.53
 1.534      1.56266667 1.61       1.72533333 1.944      2.269     ]
```

2.2 Оценка погрешностей исходных данных

Погрешности измерений: для длины $\sigma_a = 0{,}5$ мм (половина цены деления линейки), для периода $\sigma_T = \sigma_t/t \cdot T = \sigma_t/n$

[9]:
```
sigma_a = 0.5e-3
sigma_T = sigma_t / t * T
print(sigma_T)
```

```
[0.00649298 0.00649298 0.00649298 0.00649298 0.00649298 0.00649298
 0.00649298 0.00649298 0.00649298 0.00649298 0.00973946 0.00973946]
```

2.3 Предварительное вычисление g

Если предположить, что справедлива теоретическая зависимость

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{ga}}, \tag{3}$$

то ускорение свободного падения можно найти непосредственно по данной формуле. Выразим отсюда g:

[10]:
```
gs = 4 * np.pi**2 * ( l**2 / 12 + a**2 ) / (a * T**2)
gm = np.mean(gs)
print(gs)
print("g_mean = %.3f" % gm)
```

```
[9.75695771 9.83769175 9.81252714 9.84599128 9.70376499 9.7371132
 9.78646419 9.81049202 9.79250814 9.75083286 9.749986   9.66552373]
g_mean = 9.771
```

Случайную погрешность среднего найдём как стандартное отклонение, делённое на $\sqrt{N}$:

[11]:
```python
sigma_gm = np.std(gs) / np.sqrt(N)
print("sigma_gm = %.3f" % sigma_gm)
```

```
sigma_gm = 0.015
```

Окончательный результат по данному методу:

$$\bar{g} = 9{,}771 \pm 0{,}015 \text{ м/с}^2 \tag{4}$$

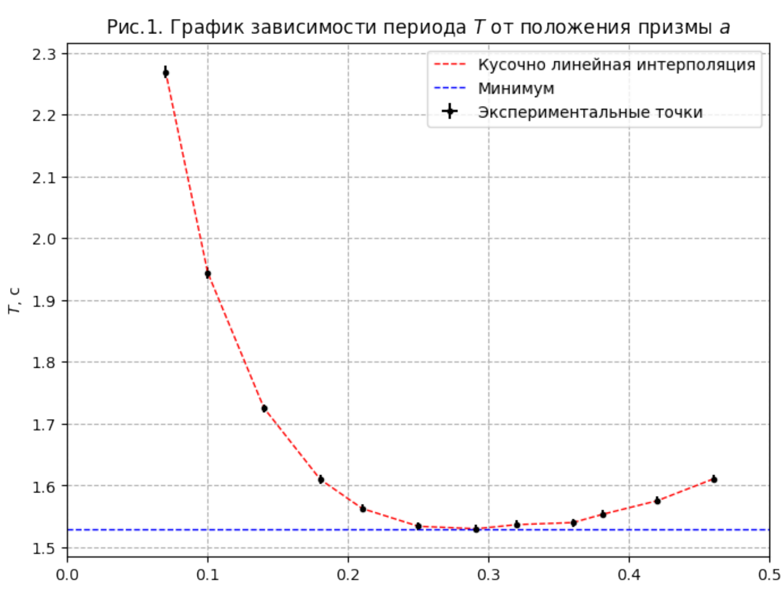
Заметим, что данный результат *не может считаться надёжным* , поскольку справедливость теоретичской зависимости ещё не была проверена. Кроме того, усреднение *разнородных* измерений (при разных значениях параметра a) в общем случае **не является корректным**.

2.4 Построение графика $T(a)$ и определение минимума периода

Построим график зависимости периода колебаний от положений призмы $T(a)$

[12]:
```python
plt.figure(figsize=(8,6), dpi=100) # размер графика
plt.ylabel("$T$, с") # подписи к осям
plt.xlabel("$a$, м")
plt.xlim([0, 0.5])
plt.title('Рис.1. График зависимости периода $T$ от положения призмы $a$') # заголовок
plt.grid(True, linestyle="--") # пунктирная сетка
plt.errorbar(a, T, xerr=sigma_a, yerr=sigma_T, fmt=".k", label="Экспериментальные точки") # точки с погрешностями
plt.plot(a, T, "--r", linewidth=1, label="Кусочно линейная интерполяция") # интерполяция
plt.plot([0.00,0.5], [1.53, 1.53], "--b", linewidth=1, label="Минимум") # минимум
plt.legend() # легенда
```

[12]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7efe7e1754e0>
```



По графику визуально определяем приблизительное положение минимума: $T_{min} \approx 1{,}53 \pm 0{,}2$ с, $a_{min} \approx 280 \pm 30$ мм.

Теоретическое значение минимума: $a_{min} = \frac{l}{\sqrt{12}} \approx 289$ мм (где $l = 1000$ мм – длина стержня) совпадает с экспериментальным в пределах погрешности.

3 Построение линеаризованного графика и определение ускорения свободного падения

Согласно теории, зависимость периода от положения призмы может быть представлена в виде

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right). \tag{5}$$

Построим график в координатах $u(v)$, где $u = T^2 a$ и $v = a^2$. Тогда теоретическая зависимость примет вид

$$u = kv + b, \quad \text{где} \quad k = \frac{4\pi^2}{g},\ b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{6}$$

[13]:
```
u = T**2 * a
v = a**2
print("u = ", u, "\nv = ", v)
```

```
u =  [1.19335367 1.04230355 0.91929373 0.853776   0.75563022 0.6812019
 0.588289   0.51280469 0.466578   0.41674852 0.3779136  0.36038527]
v =  [0.2116   0.1764   0.145161 0.1296   0.1024   0.084681 0.0625   0.0441
 0.0324   0.0196   0.01     0.0049  ]
```

3.1 Оценка погрешностей точек

Предварительно рассчитаем погрешности каждой точки. Согласно формулам расчёта косвенных погрешностей, имеем $\sigma_u/u = \sqrt{(2\sigma_T/T)^2 + (\sigma_a/a)^2}$, $\sigma_v = 2a\sigma_a$:

[14]:
```
sigma_u = u * np.sqrt(4 * (sigma_T / T)**2 + (sigma_a/a)**2)
sigma_v = 2 * a * sigma_a
```

Вычислим относительные погрешности и убедимся, что все они малы:

[15]:
```
print(sigma_u/u, '\n', sigma_v/v) # относительные погрешности
```

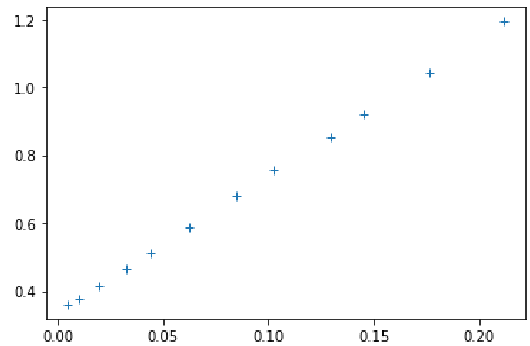
```
[0.00813541 0.00832882 0.00846243 0.00854605 0.00859396 0.00865972
 0.00869847 0.00864448 0.00853073 0.00833098 0.01119825 0.01116778]
 [0.00217391 0.00238095 0.00262467 0.00277778 0.003125   0.00343643
 0.004      0.0047619  0.00555556 0.00714286 0.01       0.01428571]
```

Видим, что относительная погрешность величины u составляет от 0,8% до 1,1%, а величины v — от 0,2% до 1,4%. Наименее точные измерения соответствуют наименьшим значениям a.

Строим предварительный график:

[16]:
```
plt.plot(v, u, "+")
```

[16]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7efe7ddaf580>]
```



Видно, что график действительно имеет вид, близкий к прямой линии.

Найдём коэффициенты наилучшей прямой по методу наименьших квадратов (МНК). Для простоты погрешности всех точек будем считать приблизительно одинаковыми. Тогда можно воспользоваться формулами

$$k = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}}{\bar{v^2} - \bar{v}^2}, \quad b = \bar{u} - k\bar{v} \tag{7}$$

[17]:
```
mu = np.mean(u) # средее
mv = np.mean(v)
mv2 = np.mean(v**2) # средний квадрат
mu2 = np.mean(u**2)
muv = np.mean (u * v) # среднее от произведения
k = (muv - mu * mv) / (mv2 - mv**2)
b = mu - k * mv
print("k = ", k, ", b = ", b)
```

```
k =  4.018295033427713 , b =  0.33801567301035323
```

Заметим, что результат совпадает с выводом встроенной в пакет numpy *функции* polyfit *(аппроксимация зависимости полиномом по методу МНК):*

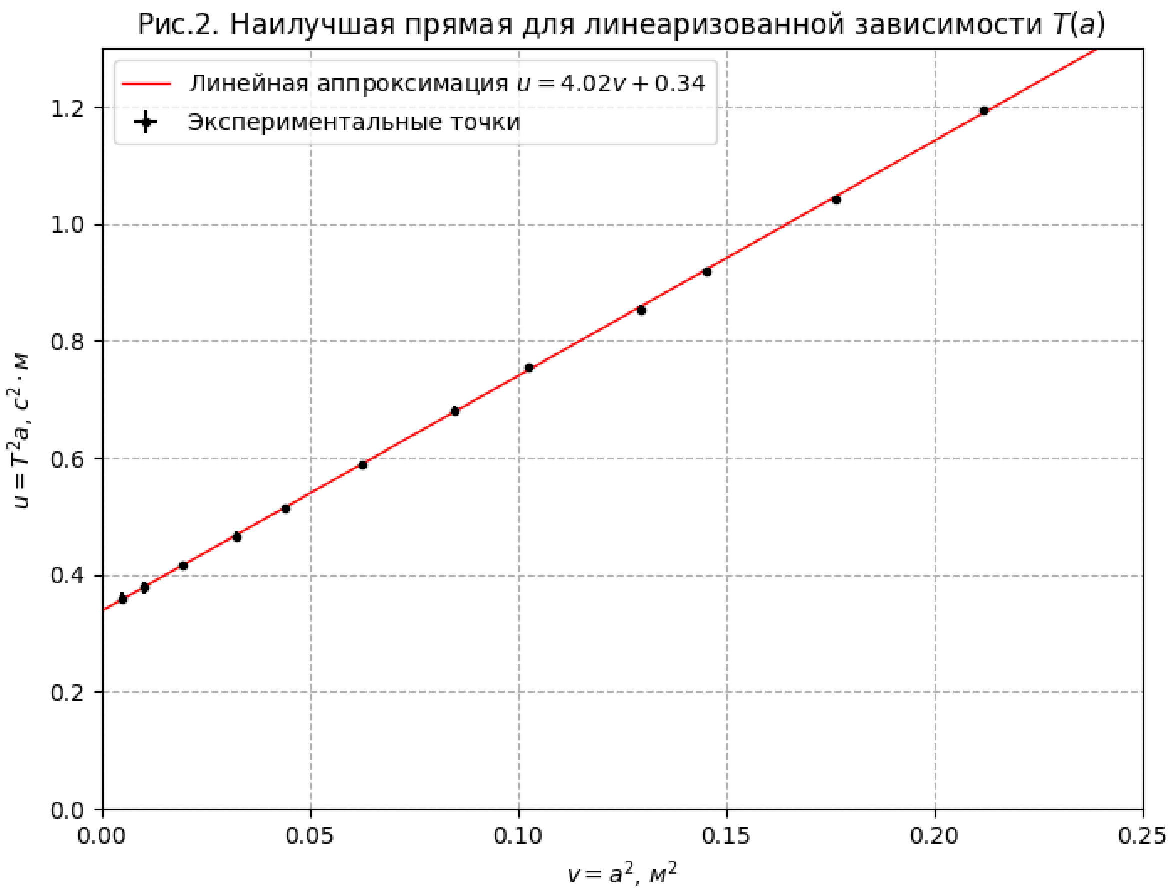
[18]:
```
np.polyfit(v, u, 1)
```

[18]:
```
array([4.01829503, 0.33801567])
```

Изобразим на графике экспериментальные точки и полученную аппроксимирующую зависимость.

[19]:
```
plt.figure(figsize=(8,6), dpi=100) # размер графика
plt.ylabel("$u=T^2 a$, $c^2 \cdot м$") # подписи к осям
plt.xlabel("$v=a^2$, $м^2$")
plt.title('Рис.2. Наилучшая прямая для линеаризованной зависимости $T(a)$') # заголовок␣
 ↪графика
plt.grid(True, linestyle="--") # сетка
plt.axis([0,0.25,0,1.3]) # масштабы осей
x = np.array([0., 1]) # две точки аппроксимирующей прямой
plt.plot(x, k * x + b, "-r",linewidth=1, label="Линейная аппроксимация $u = %.2f v + %.2f$"␣
 ↪% (k, b)) # аппроксимация
plt.errorbar(v, u, xerr=sigma_a, yerr=sigma_T, fmt="ok", label="Экспериментальные точки",␣
 ↪ms=3) # точки с погрешностями
plt.legend() # легенда
```

[19]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7efe7ddea6b0>



Вычислим ускорение свободного падения:

[20]:
```
g = (4 * np.pi**2) / k
print("g = %.3f" % g)
```

```
g = 9.825
```

По величине свободного слагаемого проверим длину стержня:

[21]:
```
L = (3 * b * g) / np.pi**2
print("L = %.3f м" % L)
```

```
L = 1.009 м
```

Видно, что она совпадает с измеренной непосредственно $l = 1000$ мм с точностью 0,9% (в пределах погрешности опыта).

Вычислим случайные погрешности определения коэффициентов прямой:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} - k^2\right)}, \qquad \sigma_b = \sigma_k \sqrt{\overline{x^2}} \tag{8}$$

и из них — случайную погрешность измерения g и L.

[22]:
```
N = len(v) # число точек
sigma_k = np.sqrt(1/(N-2) * ( (mu2 - mu**2)/(mv2 - mv**2) - k**2 ) )
sigma_b = sigma_k * np.sqrt(mv2)
sigma_g = sigma_k / k * g
sigma_L = L * np.sqrt( (sigma_b / b)**2 + (sigma_g / g)**2 )
print("sigma_k = %.3f, sigma_b = %.3f" % (sigma_k, sigma_b))
print("sigma_g = %.3f, sigma_L = %.3f" % (sigma_g, sigma_L))
```

```
sigma_k = 0.016, sigma_b = 0.002
sigma_g = 0.040, sigma_L = 0.007
```

Окончательный результат для ускорения свободного падения:

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}04 \text{ м/с}^2. \tag{9}$$

«Эффективная» длина стержня, определённая как параметр теоретической зависимости:

$$L = 1009 \pm 7 \text{ мм}. \tag{10}$$

3.2 Проверка качества аппроксимации по сумме хи-квадрат

Для проверки точности аппроксимации, вычислим сумму χ^2:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{\Delta u}{\sigma_u} \right)^2 \tag{11}$$

[23]:
```
chi2 = np.sum( ((u - (k * v + b)) / sigma_u)**2 )
doF = N -2
print("chi_2 = ", chi2, ", chi_2/doF = ", chi2 / doF)
```

```
chi_2 =  3.1652710916285764 , chi_2/doF =  0.31652710916285764
```

Нормированная (на число степеней свободы) величина $\chi^2/(N-2) \approx 0{,}3 < 1$ показывает, что выполненная аппроксимация является удовлетворительной (при этом оценка погрешностей по вертикальной оси несколько завышена).

Вероятность P того, что в опыте обнаружено отклонение от теоретической зависимости, можно вычислить по значению “распределения хи-квадрат”. Данная функция распределения реализована в пакете scipy.stats.

[24]:
```
import scipy.stats
# "кумулятивная функция распределения" (cdf) задаёт вероятность того, что величина chi^2␣
↪случано превысит заданное значение (при заданном числе степеней свободы doF)
p_value = scipy.stats.chi2.cdf(chi2, doF)
print("P-value = %.1f%%" % (p_value * 100))
```

```
P-value = 2.3%
```

Таким образом, вероятность того, что в опыте обнаружено отклонение от теории, составляет $P = 2{,}3\%$.

4 ДОПОЛНЕНИЕ. Нелинейная аппроксимация по методу минимума хи-квадрат

Это дополнение не является обязательной частью учебного задания. Здесь продемонстрировано, как можно обработать результаты эксперимента, не прибегая к линеаризации графика. Мы вычислим параметры эксперимента с помощью нелинейного метода минимизации суммы хи-квадрат (известный также под названием "МНК с весами"), используя функцию curve_fit *пакета* scipy.optimize.

[25]:
```
from scipy.optimize import curve_fit
```

Зададим теоретическую зависимость как функцию $T(a)$, считая величины g и l параметрами модели:

$$T(a; g, l) = 2\pi \sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{ga}} \tag{12}$$

[26]:
```
f = lambda x, g, l: 2 * np.pi * np.sqrt( (l**2 / 12 + x**2) / (g * x) )
```

Воспользуемся функцией curve_fit для подбора оптимальных параметров. Данный метод численно минимизирует сумму

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{T_i - T(a_i; g, l)}{\sigma_{Ti}} \right)^2 \tag{13}$$

Результатом является набор оптимальных параметров (g, l), и "ковариационная матрица" (диагональные элементы которой равны дисперсии соответствующего параметра).

[27]:
```
popt, pcov = curve_fit(f, a, T, sigma=sigma_T) # sigma задаёт погрешности каждой точки по␣
 ↪оси ординат
```

[28]:
```
# оптимальные параметры содержаться в массиве popt
g, l = popt
print(g, l)
```

```
9.839361842336142 1.0060669740525674
```

[29]:
```
# Случайные погрешности параметров -- это диагональные элементы "ковариационной" матрицы pcov
sigma_g, sigma_l = np.sqrt(np.diag(pcov))
print("sigma_g = ", sigma_g, ", sigma_l = ", sigma_l)
```

```
sigma_g =  0.04020866077908003 , sigma_l =  0.003369125054261992
```

Изобразим на графике результат нелинейной аппроксимации, наложенный на экспериментальные точки.

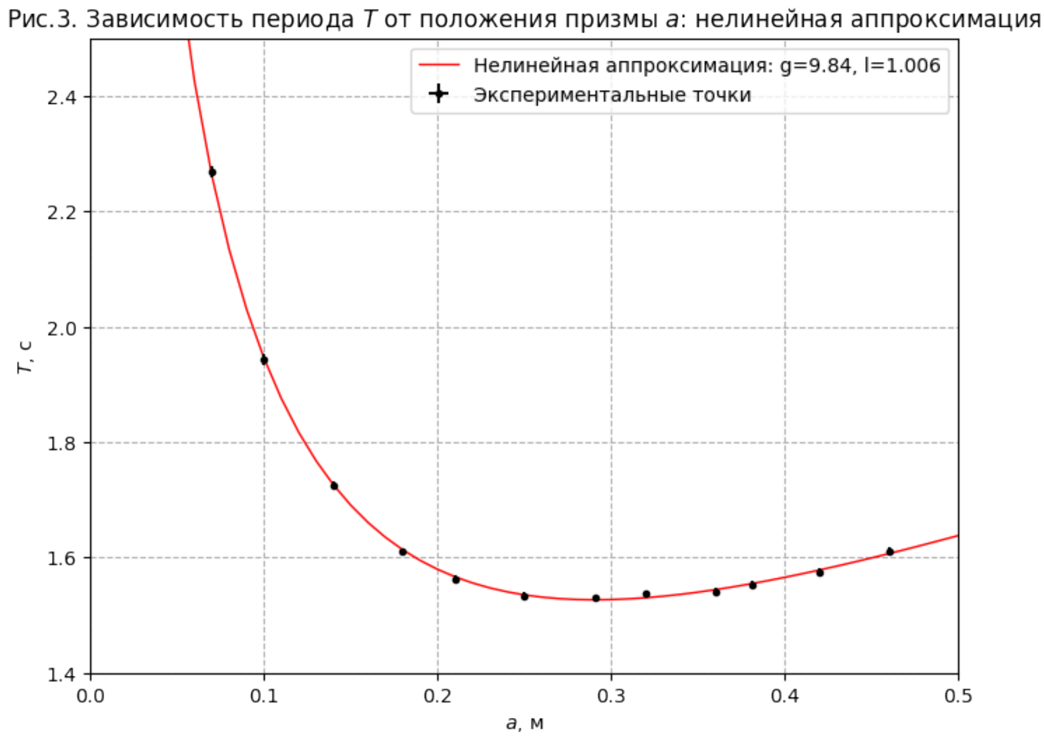
[30]:
```
plt.figure(figsize=(8,6), dpi=100)
plt.ylim(1.4, 2.5)
plt.xlim(0., 0.5)
plt.ylabel("$T$, c")
plt.xlabel("$a$, м")
plt.title('Рис.3. Зависимость периода $T$ от положения призмы $a$: нелинейная аппроксимация')

plt.grid(True, linestyle="--")

x = np.linspace(0.01, 0.5, 50)
plt.plot(x, f(x, g, l), 'r-', linewidth=1, label='Нелинейная аппроксимация: g=%.2f, l=%.3f'␣
 ↪% (g, l))
```

```
plt.errorbar(a, T, xerr=sigma_a, yerr=sigma_T, fmt=".k", label='Экспериментальные точки')
plt.legend()
```

[30]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7efe7357ce80>



Результат нелинейной аппроксимации:

$$g = 9{,}84 \pm 0{,}04 \text{ м/с}^2, \qquad l = 1{,}006 \pm 0{,}003 \text{ м} \tag{14}$$

Из теоретической зависимости при найденых g и l определим минимальное значение периода:

[31]:
```
T_min = f(l**2/np.sqrt(12), g, l)
print("T_min = %.3f c" % T_min)
```

```
T_min = 1.527 c
```

Вычислим сумму χ^2 и её нормировку на число степеней свободы:

[32]:
```
chi2 = np.sum( ( (T - f(a, g, l)) / sigma_T )**2 )
print("chi_2 = ", chi2, ", chi_2/doF = ", chi2 / (len(a)-2))
p_value = scipy.stats.chi2.cdf(chi2, doF)
print("P-value = %.1f%%" % (p_value * 100))
```

```
chi_2 =  3.531066443314955 , chi_2/doF =  0.3531066443314955
P-value = 3.4%
```

Поскольку $\chi^2/(N-2) \lesssim 1$, аппроксимация является удовлетворительной. Оценка величины погрешностей σ_T несколько завышена.