

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

## Лабораторная работа 1.2.4

### Определении главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Авторы:  
Идрисов Сергей  
Б04-306

Долгопрудный 01.11.2023

# Введение

## Цель работы:

Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

## В работе используются:

1. установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке);
2. набор исследуемых твердых тел;
3. секундомер.

## Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяет не только величина его массы, но и ее пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина, которая называется тензором инерции. Тензор инерции твердого тела может быть представлен симметричной матрицей, которая полностью определяется заданием шести элементов.:

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Так как  $\hat{I}$  – симметричная матрица, ее можно привести к виду

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix},$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции тела.

Геометрическим образом  $\hat{I}$  является эллипсоид, называемый эллипсоидом инерции, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (1)$$

Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Эллипсоид инерции жестко связан с телом, для которого построен. Координатные оси  $Ox, Oy, Oz$  совпадают с главными осями тела. Если начало координат  $O$  совпадает с центром масс тела, такой эллипсоид инерции называется центральным.

Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Для этого необходимо вдоль выбранной оси провести радиус-вектор  $\vec{r}$  вдоль выбранной оси до пересечения с поверхностью эллипсоида. Тогда  $\vec{r}$  будет определять момент инерции тела относительно этой оси:

$$I = \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

Главные оси тела можно определить из его симметрии.

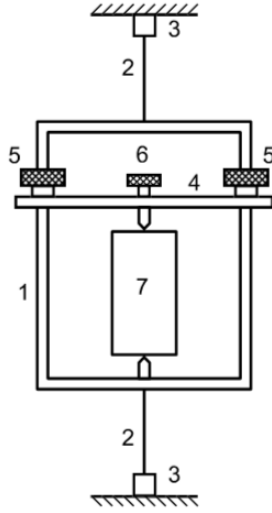


Рис. 1: Схема установки

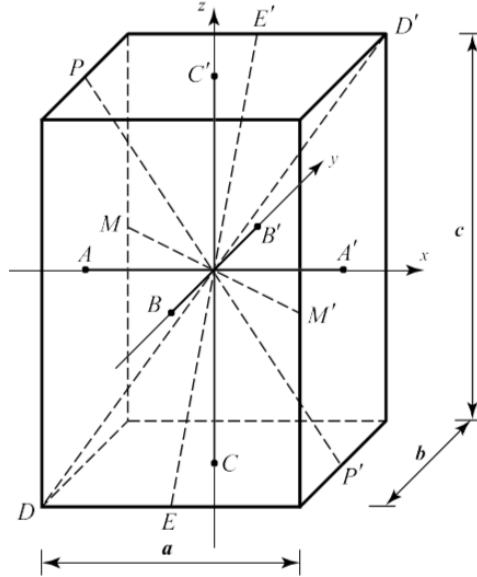


Рис. 2: Оси вращения  
прямоугольного параллелепипеда

В данной работе будем использовать устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис. 1. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальные закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi, \quad (3)$$

где  $I$  и  $I_p$  – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\varphi$  – угол поворота рамки, меняющийся со временем,  $t$ ,  $f$  – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}. \quad (4)$$

На рис. 2 показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  являются главными. Пусть  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  – моменты инерции относительно этих осей соответственно. Ось  $DD'$ , проходящая вдоль диагонали параллелепипеда, с главными осями составляет те же

углы, что с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , так как они им параллельны. Косинусы этих углов равны соответственно  $a/d$ ,  $b/d$  и  $c/d$ , где длина диагонали  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Момент инерции  $I_d$  при вращении относительно диагонали  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}, \quad (5)$$

откуда получаем соотношение

$$(a^2 + b^2 + c^2)I_d = a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z. \quad (6)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний (4), получаем соотношение между периодами колебаний:

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2. \quad (7)$$

Экспериментальная проверка этого соотношения является вместе с тем и проверкой соотношения (5). Из этой формулы следуют выражения, связывающие периоды колебаний относительно осей  $EE'$ ,  $MM'$  и  $PP'$  с главными моментами инерции.:

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2, \quad (8)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2, \quad (9)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2, \quad (10)$$

которые тоже следует проверить экспериментально.

## Ход работы

1. Проверка установки: Установка не имеет вертикальных колебаний, нить хорошо натянута и за 15 периодов угол отклонения изменился меньше, чем в два раза.

2. Закрепляем в установке фигуры, упирая штыки в углубления на них, закручиваем винты номер 5 на рисунке 2, затем фиксируем фигуру винтом 6.

3. Выбираем необходимую амплитуду колебаний, при которой затухания происходят менее чем в два раза за 15 периодов. Такой является отклонение примерно в 30 градусов.

4. Измерим периоды 15-ти колебаний наших тел относительно разных осей и результаты внесём в таблицы 1-5.

5. Измерением геометрические размеры фигур и их массы. Результаты занесём в таблицы 6-7.

6. Измерим массы. Занесем результаты в таблицу 8. Погрешность измерений составляет 0,3 г.

Таблица 1: Периоды колебаний рамки

Ось	$Oz$	
№ измерения	$\tau$ , с	$T$ , с
1	38,56	2,57
2	38,42	2,56
3	38,51	2,57
Среднее	38,50	2,57

Таблица 2: Периоды колебаний цилиндров

Ось	Диск				Цилиндр			
	Центр		Диаметр		Центр		Диаметр	
№ измерения	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с
1	46,92	3,13	44,73	2,98	51,12	3,41	45,17	3,01
2	47,55	3,17	45,10	3,01	51,22	3,41	45,23	3,02
3	47,50	3,17	45,19	3,01	51,19	3,41	45,61	3,04
Среднее	47,32	3,16	45,01	3,00	51,18	3,41	45,34	3,02

Таблица 3: Периоды колебаний параллелепипеда

Ось	$Ox$		$Oy$		$Oz$		$MM'$	
№ измерения	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с
1	59,65	3,98	55,51	3,70	48,00	3,20	56,60	3,77
2	59,66	3,98	55,56	3,70	48,08	3,21	56,67	3,78
3	59,53	3,97	55,56	3,70	48,15	3,21	56,70	3,78
Среднее	59,61	3,98	55,54	3,70	48,08	3,21	56,66	3,78

Таблица 4: Периоды колебаний параллелепипеда

Ось	$EE'$		$PP'$		$AC'$	
№ измерения	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с
1	48,55	3,24	50,42	3,36	51,07	3,40
2	49,11	3,27	50,48	3,36	51,00	3,40
3	49,33	3,29	50,65	3,38	51,29	3,42
Среднее	49,00	3,27	50,52	3,37	51,12	3,41

Таблица 5: Периоды колебаний куба

Ось	$Ox$		$MM'$		$AC'$	
№ измерения	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с	$\tau$ , с	$T$ , с
1	45,58	3,04	45,58	3,04	45,64	3,04
2	45,44	3,03	45,55	3,04	46,61	3,11
3	45,46	3,03	45,80	3,05	45,77	3,05
Среднее	45,16	3,03	45,64	3,04	46,01	3,07

Таблица 6: Геометрические размеры куба и параллелепипеда

$l$	Куб	Параллелепипед	$\sigma_{l, \text{ куб}}, \text{ см}$	$\sigma_{l, \text{ пар}}, \text{ см}$
$a, \text{ см}$	9,25	5,04	0,01	0,01
$b, \text{ см}$	-	10,00	0,01	0,01
$c, \text{ см}$	-	15,40	0,01	0,01
$MM' = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ см}$	13,08	11,21	0,001	0,001
$PP' = \sqrt{b^2 + c^2}, \text{ см}$	13,08	18,03	0,001	0,001
$EE' = \sqrt{a^2 + c^2}, \text{ см}$	13,08	15,82	0,001	0,001
$AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \text{ см}$	16,02	18,72	0,02	0,02

Таблица 7: Геометрические размеры цилиндров

$l$	Диск	Цилиндр	$\sigma_l, \text{ см}$
$h, \text{ см}$	1,70	4,90	0,01
$d, \text{ см}$	12,45	8,84	0,01

Таблица 8: Массы тел и их обозначение

Тело	Обозначение	$m, \text{ г}$
Диск	$m_{\text{нц}}$	1569,5
Цилиндр	$m_{\text{вц}}$	1086,5
Куб	$m_{\text{к}}$	1086,5
Параллелепипед	$m_{\text{п}}$	2070,5

## Момент инерции цилиндра и диска

Диск и цилиндр можно считать одинаковыми телами, поэтому формулы для момента инерции у них будут одинаковыми.

### Момент инерции относительно центра.

Момент инерции цилиндра равен:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r dr \cdot \frac{m}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}.$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{D^2}{8}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{m}{8} \cdot 2D\right)^2 \sigma_D^2} = \frac{D}{8} \sqrt{D^2 \sigma_m^2 + 4m^2 \sigma_D^2},$$

т.е. момент инерции не зависит от высоты цилиндра.

### Момент инерции относительно диаметра.



Момент инерции цилиндра равен:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left( \frac{dmR^2}{4} + dmh^2 \right) = \int_{-H/2}^{H/2} \left( \frac{mR^2}{4H} + \frac{mh^2}{H} \right) dh = \\
 &= \frac{mR^2}{4H} \int_{-H/2}^{H/2} dh + \frac{m}{H} \int_{-H/2}^{H/2} h^2 dh = \frac{mR^2}{4H} H + \frac{m}{H} \left( \frac{H^3}{3 \cdot 8} - \frac{-H^3}{3 \cdot 8} \right) = \\
 &= \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} = \frac{mD^2}{16} + \frac{mH^2}{12}; \\
 \sigma_I &= \sqrt{\left( \frac{D^2}{16} \right)^2 \sigma_m^2 + \left( \frac{m}{16} \cdot 2D \right)^2 \sigma_D^2} + \sqrt{\left( \frac{H^2}{12} \right)^2 \sigma_m^2 + \left( \frac{m}{12} \cdot 2D \right)^2 \sigma_H^2} = \\
 &= \frac{D}{16} \sqrt{D^2 \sigma_m^2 + 4m^2 \sigma_D^2} + \frac{H}{12} \sqrt{H^2 \sigma_m^2 + 4m^2 \sigma_H^2}.
 \end{aligned}$$

## Момент инерции параллелепипеда

**Относительно оси, параллельной одному из ребер, проходящей через центр масс.**

Момент инерции относительно оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int \left( \frac{dm}{12} (a^2 + b^2) \right) = \int_{-c/2}^{c/2} \left( \frac{m}{12c} (a^2 + b^2) \right) dr = \frac{m}{12} (a^2 + b^2); \\
 \sigma_{I_z} &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2) \sigma_m^2 + 4m^2 \sigma_{\sqrt{a^2 + b^2}}^2};
 \end{aligned}$$

Для осей  $Ox$  и  $Oy$  моменты инерции определяются аналогично.

**Относительно оси, проходящей через центр масс и соединяющей середины противоположных ребер.**

Рассмотрим параллелепипед из случая выше. Проведем через его центр масс ось  $Oq$ , проходящую через середины противоположных ребер длины  $b$ .

$$I_q = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma,$$

где  $\alpha = \angle(Oq, Ox)$ ,  $\beta = \angle(Oq, Oy)$  и  $\gamma = \angle(Oq, Oz)$ ,

$$\text{т.е. : } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}};$$

$$\Rightarrow I_q = I_x \frac{a^2}{a^2 + c^2} + I_y \cdot 0 + I_z \frac{c^2}{a^2 + c^2} = I_x \frac{a^2}{a^2 + c^2} + I_z \frac{c^2}{a^2 + c^2};$$

Таким образом, получено выражение для момента инерции относительно оси, направленной перпендикулярно ребру длины  $b$ . Для остальных двух случаев моменты получаются аналогично.

**Относительно оси, проходящей через центр масс вдоль главной диагонали параллелепипеда.**

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow I_q = I_x \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + I_y \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + I_z \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{I_q}^2 &= \frac{a^4 \sigma_{I_x}^2 + b^4 \sigma_{I_y}^2 + c^4 \sigma_{I_z}^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \\ &+ 4 \cdot \frac{(I_x a \sigma_a)^2 + (I_y b \sigma_b)^2 + (I_z c \sigma_c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \\ &+ 4 \cdot \frac{(I_x a^2 + I_y b^2 + I_z c^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \sigma_{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}^2. \end{aligned}$$

## Момент инерции куба

У куба моменты инерции относительно любой оси равны, поэтому достаточно посчитать его для любой из удобной нам осей.

**Относительно оси, параллельной одному из ребер, проходящей через центр масс.**

$$I_{Ox} = \frac{m}{12}(a^2 + a^2) = \frac{ma^2}{6};$$

$$\sigma_{I_{\text{куб}}} = \frac{a}{6} \sqrt{a^2 \sigma_m^2 + 4m^2 \sigma_a^2}.$$

## Подсчет моментов инерции

По выведенным выше формулам определим моменты инерции рассматриваемых тел. Результаты занесем в таблицы 9 - 11.

Таблица 9: Моменты инерции цилиндров относительно разных осей

Цилиндр	Диск		Цилиндр	
Ось	Центр	Диаметр	Центр	Диаметр
$I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	3,041	1,539	2,191	1,549
$\sigma_I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	0,003	0,001	0,003	0,002
$\varepsilon_I$	0,08%	0,10%	0,11%	0,14%

Таблица 10: Моменты инерции параллелограмма относительно разных осей

Оси	$Ox$	$Oy$	$Oz$	$MM'$	$EE'$	$PP'$	$AC'$
$I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	5,642	4,344	2,181	4,604	2,534	2,849	3,051
$\sigma_I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	0,004	0,007	0,003	0,008	0,004	0,004	0,004
$\varepsilon_I$	0,08%	0,16%	0,13%	0,18%	0,14%	0,14%	0,14%

Таблица 11: Моменты инерции куба относительно оси  $Ox$

Оси	$Ox$
$I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	1,554
$\sigma_I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	0,002
$\varepsilon_I$	0,11%

6. Построим эллипсоид инерции. Найдем расстояние от центра масс тела (расположим его в начале координат) до поверхности эллипсоида вдоль рассматриваемых осей. Оно пропорционально  $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ , где  $T^2$  – период колебаний вдоль оси,  $T_p^2$  – период крутильных колебаний рамки.

**Эллипсоид инерции цилиндра.**

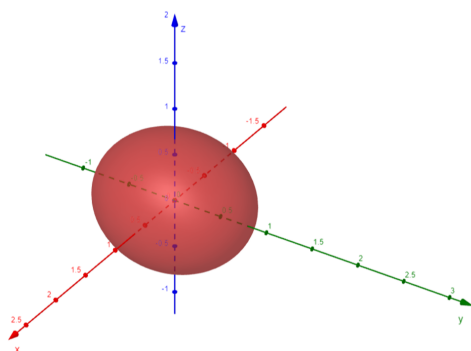


Рис. 3: Эллипсоид инерции диска.

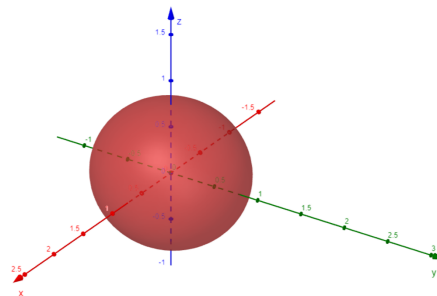


Рис. 4: Эллипсоид инерции цилиндра.

Таблица 12: Расчет  $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$  для осей цилиндров.

Тело	Диск		Цилиндр	
Ось	Центр	Диаметр	Центр	Диаметр
$T^2, c^2$	9,9856	9,00	11,6281	9,1204
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, \frac{1}{c}$	0,54	0,65	0,45	0,63

### Эллипсоид инерции куба.

Таблица 13: Расчет  $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$  для осей куба.

Тело	Куб
Ось	$Ox$
$T^2, c^2$	9,9856
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, \frac{1}{c}$	0,54

### Эллипсоид инерции параллелепипеда.

Таблица 14: Расчет  $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$  для осей параллелепипеда.

Ось	$Ox$	$Oy$	$Oz$	$MM'$	$EE'$	$PP'$	$AC'$
$T^2, c^2$	15,8404	13,69	10,3041	14,2884	10,6929	11,3569	11,6281
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, \frac{1}{c}$	0,33	0,38	0,52	0,36	0,49	0,46	0,45

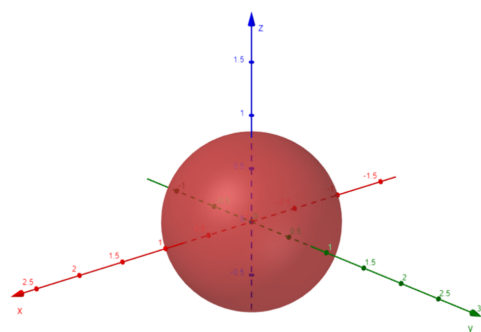


Рис. 5: Эллипсоид инерции куба.

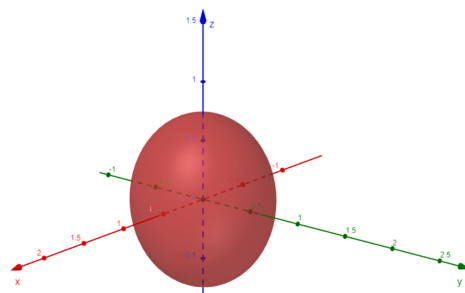


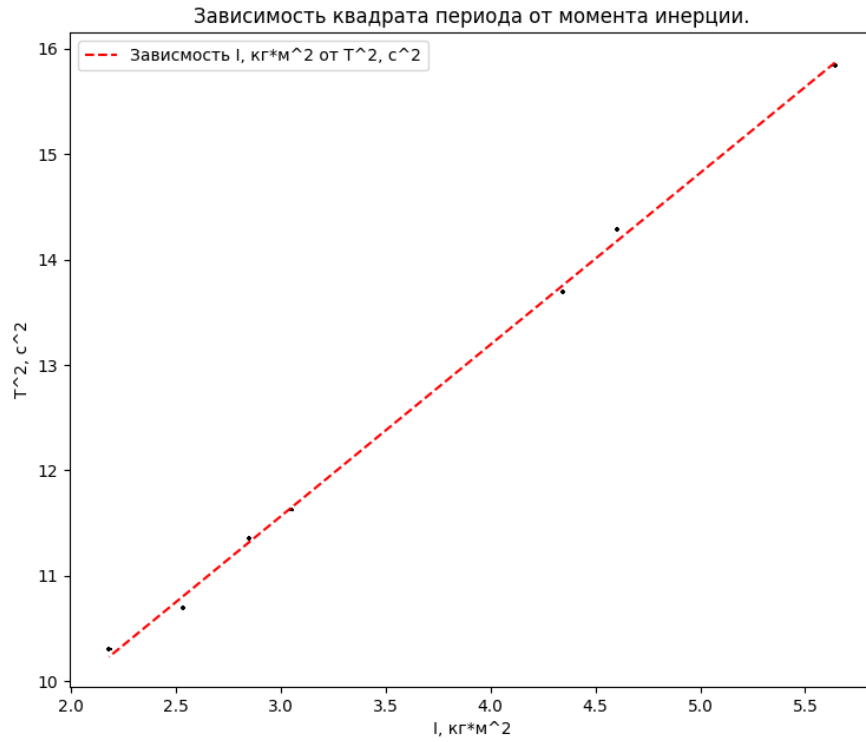
Рис. 6: Эллипсоид инерции параллелепипеда.

## Обработка результатов измерений

8. Проверим, является ли зависимость  $T^2$  от  $I$  линейной. Данные для построения графика в таблице 15.

Таблица 15: Периоды колебаний и моменты инерции для параллелепипеда

$I, 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$	5,642	4,344	2,181	4,604	2,534	2,849	3.051
$T^2, \text{с}^2$	15,8404	13,69	10,3041	14,2884	10,6929	11,3569	11,6281



9. Расчитаем функцию хи-квадрат для параллелепипеда.

$$T_A^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \quad T_P^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{b^2 + c^2}}$$

$$T_E^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + c^2}} \quad T_M^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\sigma_{T_A^{\text{теор}}} = \frac{\sigma_{T_A^2}}{2\sqrt{T_A}}; \sigma_{T_P^{\text{теор}}} = \frac{\sigma_{T_P^2}}{2\sqrt{T_P}};$$

Для  $\sigma_{T_E^2}$  и  $\sigma_{T_M^2}$  аналогично.

Для  $\chi^2$  рассмотрим  $n = 4$  (для 4-ех рассматриваемых осей) серий независимых экспериментов по  $k = 3$  наблюдений. На каждом из  $k$  ин-

тервалов вероятность  $p_i = 1/k = 1/3$ . Рассчитаем  $\chi^2$  по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{(T_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Ось	$MM'$	$EE'$	$PP'$	$AC'$
$T_{\text{эксп}}, c$	3,98	3,37	3,27	3,78
$\sigma_{T_{\text{эксп}}}, c$	0,24	0,02	0,02	0,03
$\varepsilon_{T_{\text{эксп}}}$	3,73%	0,38%	0,36%	0,44%
$T_{\text{теор}}, c$	3,41	3,31	3,34	3,56
$\sigma_{T_{\text{теор}}}, c$	0,09	0,05	0,05	0,05
$\varepsilon_{T_{\text{теор}}}$	1,42%	0,79%	0,85%	0,78%
$ T_{\text{теор}} - T_{\text{эксп}} , c$	0,47	0,06	0,07	0,18
$\sqrt{\sigma_{T_{\text{теор}}}^2 + \sigma_{T_{\text{эксп}}}^2}, c$	0,26	0,05	0,05	0,05
$s$	1,81	1,20	1,40	3,6
$\chi^2$	0,40	0,20	0,24	0,26

Число степеней свободы  $r = k - s' = 3 - 2 = 1$ . По таблице процентных значений распределения  $\chi^2$  найдем  $\alpha$ . Для полученных значений оно лежит в интервале (0.05, 0.95), т.е. больше 0.01.

## Вывод

Мы проверили теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определили моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, нашли по ним главные моменты инерции тел и построили эллипсоид инерции. Также мы проверили зависимость квадрата периода от момента инерции и сравнили результаты измерений с помощью метода хи-квадратов.