МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Лабораторная работа 1.4.8
Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Авторы:
Идрисов Сергей
Б04-306

Долгопрудный 06.12.2023

Введение

Цель работы:

исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются:

1. генератор звуковых частот;
2. электромагнитные излучатель и приёмник колебаний;
3. набор стержней из различных материалов;
4. частотомер;
5. осциллограф.

Теоретические сведения

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E. Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ, действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформацию вдоль этой же оси $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E \tag{1}$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой.Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2}$$

где ρ – плотность среды. В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными — при этом возникает деформация сдвига перпендикулярно распространению волны. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн, распространяющихся в длинных тонких стержнях.

Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L. С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина α звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: $\alpha >> R$. Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси. Если боковые стенки тонкого стержня свободны, то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды. Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины α, испытает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и измерить модуль Юнга материала стержня.

Дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне.Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x, сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x,t)$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\delta\xi}{\delta x} \tag{3}$$

- это относительное удлинение элемента стержня в точке x. Заметим, что смещение слоёв $\xi(x,t)$ является функцией не только координаты, но и времени, поэтому мы используем обозначения для частных производных по координате и времени. Далее, согласно закону Гука (1), имеем

$$\sigma = \varepsilon E = E\frac{\delta\xi}{\delta x} \tag{4}$$

Здесь напряжение равно $\sigma = \frac{F}{S}$, где F - продольная сила, действующая на элементарный участок Δx, S - площадь поперечного сечения стержня. Напряжения, действующие на стенки рассматриваемого элемента в сечениях x и x + Δx, будут различными. Из-за этого возникнет результирующая возвращающая сила, стремящаяся вернуть элемент стержня в исходное (недеформированное и несмещённое) состояние:

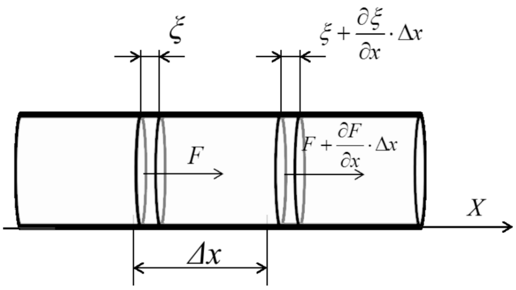

Рис. 1: Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях.

$$\Delta F = S\sigma(x+\Delta x) - S\sigma(x) = \frac{\delta\sigma}{\delta x}S\Delta x = \frac{\delta^2\sigma}{\delta x^2}ES\Delta x \tag{5}$$

Эта сила вызовет ускорение движение элемента стержня массой $\Delta m = S\rho\Delta x$ вдоль оси x. Ускорение рассматриваемого элемента – это вторая производная по времени от смещения его границ:

$$a = \frac{\delta^2\xi}{\delta t^2}$$

Тогда используя 2-й закон Ньютона и соотношения (3) - (5), получим уравнение движения среды:

$$S\rho\Delta x\frac{\delta^2\xi}{\delta t^2} = \frac{\delta^2\sigma}{\delta x^2}ES\Delta x$$

Наконец, вводя величину с размерностью скорости согласно (2), запишем полученное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = u^2 \frac{\delta^2 \sigma}{\delta x^2} \tag{6}$$

Это уравнение носит название волнового. Общее решение дифференциального уравнения (6) представимо ввиде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями ±u:

$$\xi(x, t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut) \tag{7}$$

где u - скорость волны, ϕ_1 и ϕ_2 - функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий. В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \phi_2) \tag{8}$$

где $\omega = 2\pi f$— циклическая частота. Коэффициент $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называют волновым числом или пространственной частотой волны. Пусть концы стержня не закреплены. Тогда напряжения в них должны равняться нулю. Положим координаты торцов равными x = 0 и x = L. Тогда, используя связь напряжения и деформации (4), запишем граничные условия для свободных (незакреплённых) концов стержня:

$$\sigma(0) = 0 \to \frac{\delta \xi}{\delta x}|_{x=0} = 0, \sigma(L) = 0 \to \frac{\delta \xi}{\delta x}|_{x=L} \tag{9}$$

Соотношения (9) должны выполняться в произвольный момент времени. Записывая первое граничное условие (9) для функции (8), найдём

$$-kA_1 \cos(\omega t + \phi_1) + kA_2 \cos(\omega t + \phi_2) = 0$$

Нетрудно видеть, что это соотношение будет выполняться при любом t, если только у «падающей» и «отражённой» волн одинаковы амплитуды

$$A_1 = A_2 \tag{10}$$

и фазы

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{11}$$

Условие равенства амплитуд (10) можно интерпретировать как условие отражения волн от торцов без потери энергии. Поскольку на практике потери неизбежны, это условие выполняется лишь приближённо: $A_1 \approx A_2$. Условие (11) означает, что при отражении синусоидальной волны от свободного конца стержня, её фаза не изменяется.

Далее, перепишем исследуемую функцию (8), используя граничные условия (10) и (11) и формулу суммы синусов:

$$\xi(x,t) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t + \phi) \tag{12}$$

Колебания вида (12) называют гармоническими стоячими волнами. Воспользуемся вторым граничным условием (9) применительно к функции (12). В результате придём к уравнению sin kL = 0, решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел k:

$$k_n L = \pi n, n = 1, 2, 3... \tag{13}$$

или,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in N \tag{14}$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

Допустимые значения частот

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}, n \in N \tag{15}$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной L. Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот f_n в стержне возникает акустический резонанс.

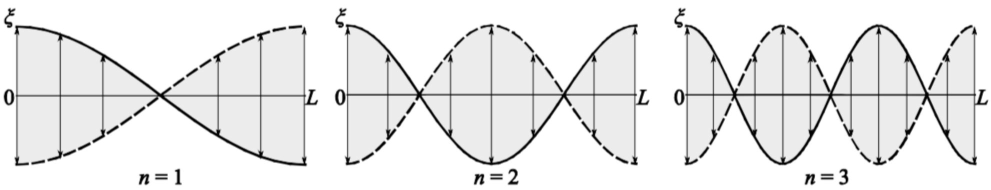

Рис. 2. Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами (для наглядности изображение дано не в масштабе, реальные смещения малы по сравнению с длиной стержня, $\xi << L$)

Точки с максимальной амплитудой называются пучностями смещения, точки с минимальной (нулевой) амплитудой — узлами смещения. Номер гармоники n определяет количество узлов смещения на стержне.

Схема и методика измерений.

Экспериментальная установка

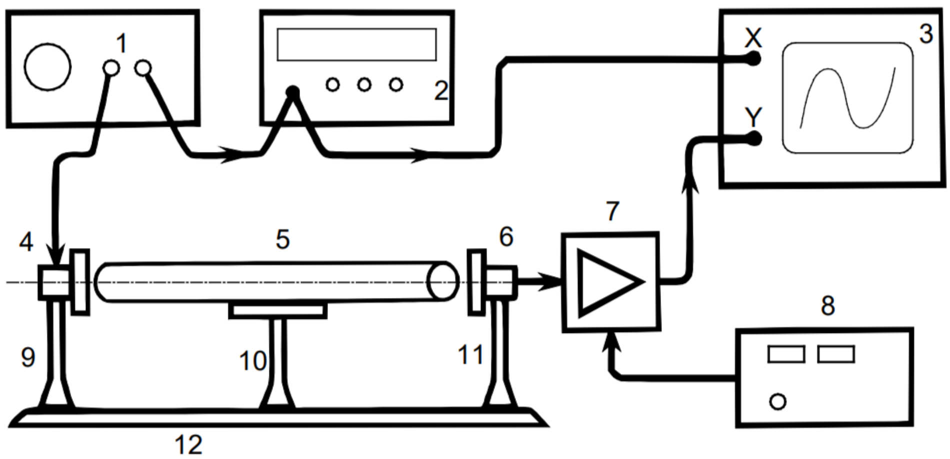

Рис. 3. Схема установки: 1 - генератор звуковой частоты, 2 - частотомер, 3 - осциллограф, 4 - электромагнит-возбудитель, 5 - образец, 6 - электромагнито-приёмник, 7 - усилитель звуковой частоты, 8 - блок питания усилителя, 9, 11 - стойки крепления электромагнитов, 10 - стойка крепления образца, 12 – направляющая.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12. Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже.

Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала E может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне u и его плотности ρ. Для определения скорости u в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня $f \approx f_n$, резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная номер гармоники n и соответствующую резонансную частоту ν_n, на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L\frac{f_n}{n} \tag{16}$$

Таким образом, для измерения скорости u необходимо измерить длину стержня L и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса $f_n(n)$. Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью.Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (16), но и на множестве других частот. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (16).

Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами: их добротность оказывается порядка $Q \sim 102 \div 103$. Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при $f \sim 5$ кГц ширина резонанса Δf оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как $\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\Delta f} \sim \frac{Q}{f}$, оказывается весьма велико (до нескольких секунд), из-за чего поиск резонанса следует проводить, изменяя частоту генератора максимально медленно.

Ход работы

1. Для начала раздвинем датчики и поместите между ними исследуемый стержень на подставку 10. Для начала проведём опыт с медным стержнем, оценив при этом примерный диапазон частот, на котором будет происходить резонанс.

2.Разместим электромагниты напротив торцов стержня так, чтобы торцы стержня совпали с центрами датчиков, а зазор между полюсами электромагнита и торцевой поверхностью стержней составлял 1–3 мм. Плоскость магнитов должна быть строго перпендикулярна оси стержня. Нельзя допускать соприкосновения электромагнита с торцами стержня.

3. Предварительно определите диапазон частот генератора, в котором целесообразно искать резонансы. Для этого оцените частоту первого резонанса по формуле $\nu = \frac{u}{2L}$, воспользовавшись табличным значением скорости продольных волн в тонком медном стержне: $u \approx 3,7 \cdot 10^3$м/с, для стали $u \approx 5 \cdot 10^3$м/с, для алюм-дюрали $u \approx 5,1 \cdot 10^3$м/с

$L = 600 \pm 0,5$мм, $\nu_{\text{мед}} \approx 3$кГц, $\nu_{\text{жел}} \approx 4,1$кГц, $\nu_{\text{дюр}} \approx 4,2$кГц

Медленно перестраивая звуковой генератор вблизи расчетной частоты f_1 найдём первый резонанс, наблюдая за амплитудой колебаний на экране осциллографа. При приближении к резонансу амплитуда сигнала с регистрирующего датчика (канал CH2) резко возрастает, а амплитуда опорного сигнала (канал CH1) не меняется. Для увеличения сигнала колебаний стержня нужно очень осторожно придвигать датчики к торцам стержня, не допуская прилипания стержня к датчикам. Точно найденный резонанс характеризуется следующими признаками:

1. Амплитуда принятого сигнала достигает максимума;

2. Амплитуда не меняется во времени (отсутствуют «биения»).

Резонансная кривая металлических стержней имеет очень острый пик, его ширина составляет единицы герц. Поэтому подстройку генератора необходимо производить максимально плавно и медленно. В режиме работы осциллографа «X–Y» на экране должен наблюдаться эллипс, который при резонансе достигает максимального размера.

4. Определим значение первой резонансной частоты f_1 по индикатору частотомера, результаты занесём в таблицу 1.

5. Получим резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Для этого, плавно перестраивая генератор, добьёмся резонанса вблизи частот $f_n \approx nf_1$, где n = 2, 3, ... Измерим резонансные частоты до n=7. Запишим измеренные значения частот в таблицу 1.
$\sigma_f = \pm 1$Гц

Таблица 1: Резонансные частоты для разных типов стержней.

N°	$f_{\text{мед}}$, кГц	$f_{\text{жел}}$, кГц	$f_{\text{дюр}}$, кГц
1	3,217	4,129	4,231
2	6,422	8,281	8,482
3	9,652	12,398	12,710
4	12,865	16,534	16,937
5	16,066	20,646	21,159
6	19,278	24,778	25,366
7	22,466	28,895	29,570

Таблица 2: Характеристики образцов стержней.

	Длина l, мм	Диаметр D, мм	Масса m, г	Площадь S, см^2
Медь				
1	41,4	11,95	41,332	4,643
2	39,6	11,94	39,386	4,434
3	40,3	11,96	40,354	4,527
4	39,8	12,11	40,994	4,584
5	40,3	11,75	38,72	4,37
6	30,1	11,85	29,459	3,32
7	30,1	11,96	30,115	3,382
8	29,7	11,85	29,117	3,276
Железо				
1	31,05	11,83	28,108	3,413
2	29,5	11,98	26,025	3,325
3	29,9	11,99	26,154	3,376
4	41,3	12,11	37,084	4,757
5	40,9	11,89	36,92	4,541
6	39,8	11,99	35,144	4,494
7	39,6	12,01	34,944	4,486
8	39,9	12	35,187	4,512
Алюм-дюраль				
1	30	12,05	9,486	3,421
2	30	11,86	9,195	3,314
3	30	11,74	8,993	3,247
4	37	11,74	9,262	4,005
5	40	11,85	12,177	4,411
6	41,2	11,73	12,449	4,452
7	41,4	11,77	12,476	4,504
8	40,9	12,13	13,233	4,726

6. Определим плотность ρ материала стержня. Для этого взвесим и измерим штангенциркулем линейные размеры небольших образцов цилиндрической формы, изготовленных из исследуемого материала. Результаты занесём в таблицу 2.

$\sigma_l = 0,1$мм, $\sigma_D = 0,01$мм, $\sigma_m = 0,001$г

$\varepsilon_l = 0,25\%, \varepsilon_D = 0,08\%, \varepsilon_m = 0,01\%$.

$\rho_{\text{мед}} = 8,95\frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \varepsilon_{\rho_{\text{мед}}} = 0,2\%$

$\rho_{\text{жел}} = 7,67\frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \varepsilon_{\rho_{\text{жел}}} = 1,8\%$

$\rho_{\text{дюр}} = 2.82\frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \varepsilon_{\rho_{\text{дюр}}} = 4\%$

7. Для стержня из железа проведём дополнительный опыт: перестраивая генератор, добъёмся возбуждения первой гармоники f_1 резонансных колебаний в стержне при «половинной» частоте генератора $f = f_{\frac{1}{2}}$. Мы будем наблюдать фигуру Лиссажу.

Возьмём $f \approx 2,06$кГц

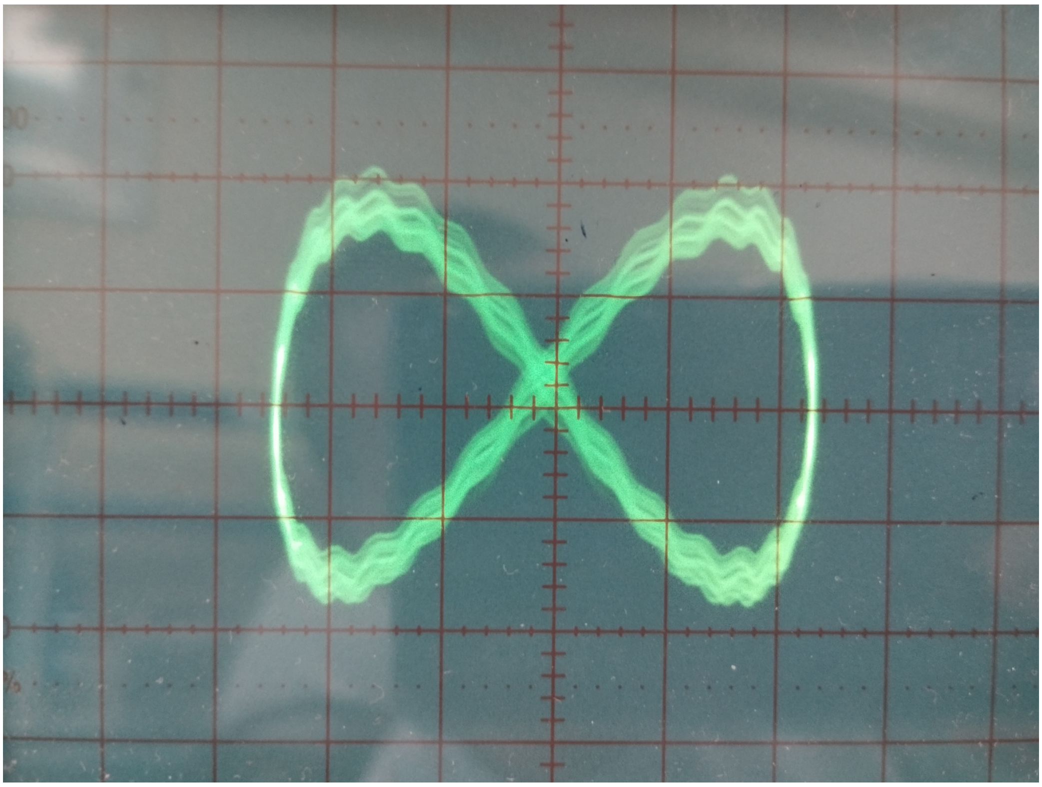

Рис. 3.Фигура Лиссажу

8. Определим добротность стержня как колебательной системы, измерив амплитудно-частотную характеристику одного из стержней $A(f - f_1)$

вблизи первого резонанса. Ширина максимума функции $A(f - f_1)$ связана с добротностью Q стержня как колебательной системы: если Δf — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$, то $Q = \frac{f_n}{\Delta f}$. Будем определять добротность медного стержня.

Таблица 3: Изменение амплитуды.

$f(-\frac{A_{max}}{\sqrt{2}})$, кГц	$f(A_{max})$, кГц	$f(\frac{A_{max}}{\sqrt{2}})$, кГц	Δf Гц
3,216	3,218	3,219	3
3,216	3,218	3,219	3
3,216	3,218	3,219	3

где $A_{max} = 18, \frac{A_{max}}{\sqrt{2}} \approx 12,5, \varepsilon_A = 5,5\%, \varepsilon_Q = 5,6\%$
Тогда добротность:

$$Q = 1072 \pm 60$$

9. Обработка результатов.

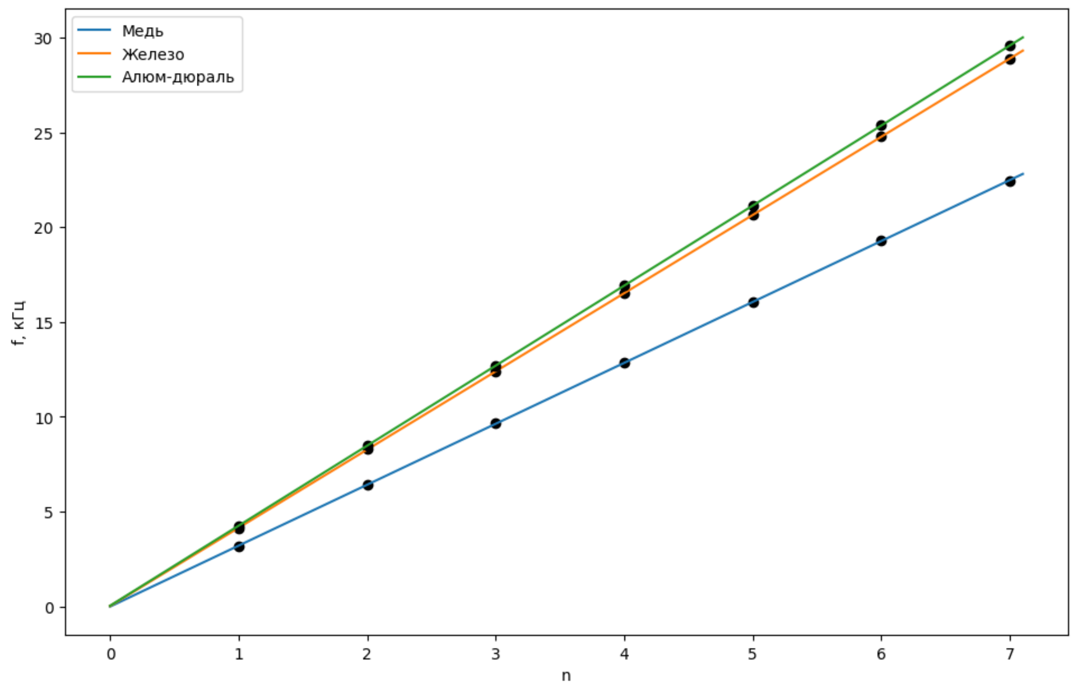

Рис. 4.График зависимости частоты от номера гармоники.

Средняя ошибка $\varepsilon = 0,2\%$ Коэффицент наклона: Меди : 3,21 Железа : 4,13 Алюм-дюрали : 4.22 Свободный член b у каждого стержня « 1, поэтому можно считать, что каждая прямая проходит через ноль. Возникновение b скорее всего связано с неидеальностью установки и касанием стержня опоры 10.

10. Определим скорость звука с помощью коэффицента наклона графика.

$$u = 2L\frac{f_n}{n}$$

$u_{\text{мед}} = 3852\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $u_{\text{жел}} = 4956\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $u_{\text{дюр}} = 5064\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\varepsilon_u = 2\%$ 11. Определение модуля Юнга. С помощью формулы

$$E = u^2\rho$$

найдём модуль Юнга материалов. Результаты занесём в таблицу 4.

Таблица 4: Модуль Юнга.

	Медь	Железо	Алюм-дюраль
E, ГПа	132	188	72
$E_{\text{табл}}$, ГПа	110	200	70

$\varepsilon_E = 5,6\%$

Вывод

Мы исследовали явление акустического резонанса в тонком стержне, измерили скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров, измерили модули Юнга различных материалов.