

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы

1.2.4

Определение главных моментов инерции
твёрдых тел с помощью крутильных колебаний

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

1 Введение

Цель работы:

1. измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела
2. проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей
3. определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции

В работе используются:

- установка для получения крутильных колебаний
- набор исследуемых твердых тел
- секундомер
- штангенциркуль
- электронные весы ВЛТЭ-5100

2 Теоретические сведения

2.1 Общие сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением массы. Оно характеризуется величиной, называемой тензором инерции. Тензор инерции твердого тела может быть представлен симметричной матрицей, которая полностью определяется заданием шести элементов:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Элемент I_{ij} , где $i, j \in \{x, y, z\}$ находится по формуле:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm, I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (1)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int xy dm, I_{xz} = I_{zx} = - \int xz dm, I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dm \quad (2)$$

Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через начало координат, может быть вычислен по формуле:

$$I = \sum_{i,j=x}^z (I_{ij} s_i s_j) \quad (3)$$

Матрица тензора инерции может быть приведена к диагональному виду, диагональные элементы I_x, I_y, I_z которой называются главными моментами инерции тела. Геометрическим представлением тензора инерции является эллипсоид, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \quad (4)$$

Данный эллипсоид называется эллипсоидом инерции. Координатные оси Ox , Oy , Oz совпадают с главными осями тела. Если начало координат O совпадает с центром масс, то эллипсоид называется центральным. Зная эллипсоид инерции можно найти момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр эллипсоида. Для этого вдоль выбранной оси необходимо провести радиус-вектор \vec{r} до пересечения с поверхностью эллипсоида. Момент инерции относительно этой оси определяется так:

$$I = \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис. 1. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

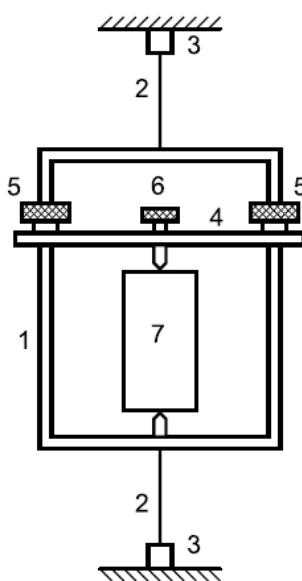


Рис. 1: Схема установки

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\varphi \quad (6)$$

Здесь I и I_p – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, φ – угол поворота рамки, меняющийся со временем t , f – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (7)$$

На рис. 2 показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA' , BB' и CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно J_x , J_y , J_z .

Момент инерции I_D при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

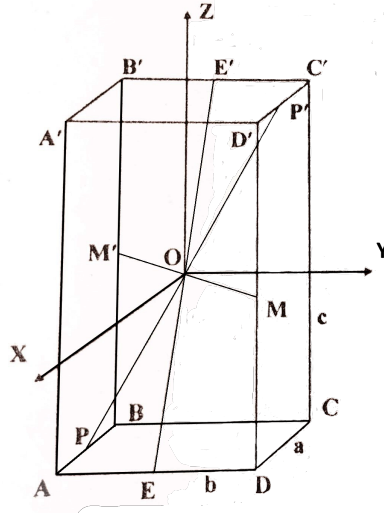


Рис. 2: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (8)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD', EE', MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \quad (9)$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \quad (10)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2, \quad (11)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2, \quad (12)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

2.2 Момент инерции различных тел

Момент инерции параллелепипеда со сторонами a , b , c можно вычислить следующим образом относительно оси z по формуле (1):

$$\begin{aligned} I_z &= \int (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{a^3}{12} + y^2 a \right) dy = \\ &= \frac{\rho abc}{12} (a^2 + b^2) = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (13)$$

Относительно двух других осей момент инерции выводится аналогично:

$$I_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), I_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad (14)$$

Момент инерции $I_{AC'}$ относительно оси, проходящей через главную диагональ вычисляется по формуле (8):

$$I_{AC'} = \frac{m}{12d^2} (a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2)) = \frac{m}{6d^2} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (15)$$

Моменты инерции $I_{MM'}$, $I_{EE'}$, $I_{PP'}$ относительно оси, проходящей через MM' , EE' , PP' соответственно вычисляются по формулам:

$$I_{MM'} = I_x \frac{a^2}{a^2 + b^2} + I_y \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad (16)$$

$$I_{EE'} = I_x \frac{a^2}{a^2 + c^2} + I_z \frac{c^2}{a^2 + c^2} \quad (17)$$

$$I_{PP'} = I_y \frac{b^2}{b^2 + c^2} + I_z \frac{c^2}{b^2 + c^2} \quad (18)$$

Для куба моменты инерции относительно данных осей вычисляются аналогично, только у куба: $a = b = c$.

Для цилиндра момент инерции относительно оси NN' , проходящей параллельно его высоте через центр его масс, вычисляется по формуле:

$$I_{\text{выс}} = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = \rho \int_0^R 2\pi r^3 h dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} \quad (19)$$

Для вычисления момента инерции $I_{\text{диам}}$ цилиндра относительно оси DD' , проходящей через его центр масс параллельно диаметру, представим цилиндр как совокупность тонких дисков толщиной dh , массой $dm = \frac{m}{H}dh$. Момент инерции тонкого диска относительно оси DD' dI вычисляется в соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера:

$$dI = \frac{dmR^2}{4} + dmh^2 \quad (20)$$

Здесь h - расстояние от центра масс цилиндра до центра тонкого диска. Момент инерции $I_{\text{диам}}$ вычисляется так:

$$I_{\text{диам}} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{dmR^2}{4} + dmh^2 \right) = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} h^2 \frac{m}{H} dh + \frac{mR^2}{4} = \frac{mH^2}{12} + \frac{mR^2}{4} \quad (21)$$

3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер: $\sigma_s = \pm 0,06$ с

Электронные весы ВЛТЭ-5100: $\sigma_m = \pm 0,1$ г

Штангенциркуль: $\sigma_{\text{шт}} = \pm 0,005$ см

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Проверка установки

Перед началом выполнения работы необходимо убедиться в том, что установка работает корректно:

1. Проволока должна быть хорошо натянута

2. Рамка должна быть жёстко закреплена
3. Устройство для возбуждения крутильных колебаний
4. Отсутствие колебаний в векртикальной плоскости

4.2 Использование установки

Научимся закреплять тела в рамке. На телах имеются специальные углубления, в которые должны входить винты, имеющиеся на рамке. Для закрепления тела в рамке (*рис. 1*) нужно, отвернув гайки 5, под- нять вверх подвижную планку 4 на рамке, вставить тело в рамку, попав углублением, имеющимся на теле, на выступ нижней стороны рамки. Опуская планку, необходимо выступающим из плавки на 5-7 мм вин- том 6 попасть в отверстие на теле. Закрепив планку гайками 5, немного подожмите тело винтом 6. Если в дальнейшем обнаружится, что тело поворачивается в рамке, надо его еще поджать винтом 6. После того, как мы научились пользоваться установкой, можно приступать к выполнению работы.

4.3 Выбор амплитуды колебаний

Амплитуда колебаний должна быть выбрана так, чтобы после 15 колебаний она уменьшалась менее, чем в два раза. Такая амплитуда достигается при двух последовательных разгонах с использованием устройства для возбуждения крутильных колебаний (устройство включено от момента прохождения маятником начального положения до момента достижения максимальной амплитуды) и составляет приблизительно 45° . Данное значение амплитуды будет использоваться во время всех измерений.

4.4 Измерение периодов колебаний

Для пустой рамки измерим время 15 колебаний три раза:

№ изм	T, с	t, с
1	67,62	4,51
2	66,84	4,46
3	67,26	4,48

Таблица 1: Измерение периода колебаний для рамки

Систематическая погрешность вычисления периода одного колебания t равна: $\sigma_t^{\text{сист}} = \frac{\sigma_s}{15} = 0,04$ с.

Среднее значение периода $\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = 4,48$ с.

Случайная погрешность измерения $\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (t_i - \bar{t})^2} \approx 0,02$ с.

Полная погрешность измерения периода колебаний рамки может быть вычислена так:

$$\sigma_{\bar{t}}^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{t}})^2 + (\sigma_t^{\text{сист}})^2} \approx 0,04 \text{ с} \quad (22)$$

$$t_p = (4,48 \pm 0,04) \text{ с} \quad (23)$$

Проведём аналогичные измерения для параллелепипеда, только относительно 7 различных осей, изображённых на *рис. 2*. В таблицу 2 сразу запишем значение $t = \frac{T}{15}$:

Так как все измерения отличаются от среднего менее, чем на систематическую погрешность измерения, то случайной погрешностью измерения можно пренебречь.

№ изм	t_X , с	t_Y , с	t_Z , с	$t_{MM'}$, с	$t_{EE'}$, с	$t_{PP'}$, с	$t_{AC'}$, с
1	7,00	6,53	5,65	6,66	5,81	5,97	6,03
2	7,03	6,53	5,64	6,24	5,80	5,97	6,06
3	7,02	6,60	5,65	6,66	5,82	5,98	6,06
ср	7,01	6,55	5,65	6,52	5,81	5,97	6,05

Таблица 2: Измерение периода колебаний параллелепипеда для различных осей

Проведём аналогичные измерения для куба и двух цилиндров и запишем в таблицы (блином обозначается цилиндр с меньшей высотой):

N изм	t_X , с	$t_{MM'}$, с	$t_{AC'}$, с
1	5,35	5,35	5,35
2	5,37	5,35	5,39
3	5,34	5,37	5,37
ср	5,35	5,36	5,37

Таблица 3: Измерение периода колебаний куба для различных осей

N изм	$t_{\text{выс}}$, с	$t_{\text{диам}}$, с
1	6,03	5,34
2	6,04	5,36
3	6,00	5,34
ср	6,02	5,34

Таблица 4: Измерение периода колебаний блина для различных осей

N изм	$t_{\text{выс}}$, с	$t_{\text{диам}}$, с
1	5,63	5,31
2	5,57	5,29
3	5,67	5,29
ср	5,62	5,30

Таблица 5: Измерение периода колебаний цилиндра для различных осей

Измерения периода крутильных колебаний для пустой рамки запишем в таблицу 6.

N изм	t_p , с
1	4,51
2	4,46
3	4,48
ср	4,48

Таблица 6: Измерение периода колебаний для пустой рамки

Как видно, для всех измерений значения отличаются от среднего не более, чем на систематическую погрешность, поэтому случайной погрешностью измерения можно пренебречь. Погрешность для всех измерений составит $\sigma_t = 0,04$ с.

4.5 Измерение параметров тел и вычисление моментов инерции

С помощью штангенциркуля и электронных весов измерим соответственно геометрические параметры тел и их массы и запишем в таблицы:

Цилиндр	
Характеристика	Значение
масса, г	2263,8
высота, см	4,90
диаметр, см	8,80

Таблица 7: Измерение параметров цилиндра

Блин	
Характеристика	Значение
масса, г	1569,5
высота, см	1,19
диаметр, см	12,45

Таблица 8: Измерение параметров блина

Куб	
Характеристика	Значение
масса, г	1569,5
сторона, см	9,26

Таблица 9: Измерение параметров куба

Параллелепипед	
Характеристика	Значение
масса, г	1569,5
a, см	5,04
b, см	10,01
c, см	15,00

Таблица 10: Измерение параметров параллелепипеда

Теперь рассчитаем главные моменты инерции для тел. Для параллелепипеда воспользуемся формулами (13), (14), (15), (17), (16), (18) и результат запишем в таблицу 11.

Ось	Ox	Oy	Oz	MM'	EE'	PP'	AC'
I, г · м ²	5,644	4,346	2,180	4,609	2,531	2,847	3,050
σ_I , г · м ²	0,003	0,003	0,002	0,003	0,002	0,002	0,004
ε_I , %	0,06	0,06	0,09	0,05	0,08	0,06	0,12

Таблица 11: Моменты инерции для различных осей параллелепипеда

Погрешности вычисляются по следующим формулам и тоже занесены в таблицу 11:

$$\sigma_{I_x} = \sqrt{\left(\frac{dI_x}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI_x}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dI_x}{dc}\right)^2 \sigma_c^2} \approx 0,003 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (24)$$

$$\sigma_{I_y} = \sqrt{\left(\frac{dI_y}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI_y}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dI_y}{dc}\right)^2 \sigma_c^2} \approx 0,003 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (25)$$

$$\sigma_{I_z} = \sqrt{\left(\frac{dI_z}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI_z}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dI_z}{db}\right)^2 \sigma_b^2} \approx 0,002 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (26)$$

$$\sigma_{I_{MM'}} = \sqrt{\left(\frac{dI_{MM'}}{dI_x}\right)^2 \sigma_{I_x}^2 + \left(\frac{dI_{MM'}}{dI_y}\right)^2 \sigma_{I_y}^2 + \left(\frac{dI_{MM'}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dI_{MM'}}{db}\right)^2 \sigma_b^2} \approx 0,003 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (27)$$

$$\sigma_{I_{EE'}} = \sqrt{\left(\frac{dI_{EE'}}{dI_x}\right)^2 \sigma_{I_x}^2 + \left(\frac{dI_{EE'}}{dI_z}\right)^2 \sigma_{I_z}^2 + \left(\frac{dI_{EE'}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dI_{EE'}}{dc}\right)^2 \sigma_c^2} \approx 0,002 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (28)$$

$$\sigma_{I_{PP'}} = \sqrt{\left(\frac{dI_{PP'}}{dI_y}\right)^2 \sigma_{I_y}^2 + \left(\frac{dI_{PP'}}{dI_z}\right)^2 \sigma_{I_z}^2 + \left(\frac{dI_{PP'}}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dI_{PP'}}{dc}\right)^2 \sigma_c^2} \approx 0,002 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (29)$$

$$\sigma_{I_{AC'}} = \sqrt{\left(\frac{dI_{AC'}}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI_{AC'}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dI_{AC'}}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dI_{AC'}}{dc}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{dI_{AC'}}{dd}\right)^2 \sigma_d^2} \approx 0,004 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (30)$$

В формуле (30) d – длина диагонали параллелепипеда и вычисляется:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \approx 18,72 \text{ см} \quad (31)$$

Погрешность для σ_d вычисляется следующим образом:

$$\sigma_d = \sqrt{\left(\frac{dd}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dd}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dd}{dc}\right)^2 \sigma_c^2} = \sigma_{шт} = 0,005 \text{ см} \quad (32)$$

Для куба расчёты аналогичны случаю параллелепипеда, только все моменты инерции получаются одинаковыми. Результаты записаны в таблицу 12.

$$I_{\text{куба}} = \frac{ma^2}{6} \approx 1,554 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (33)$$

Погрешность вычисления момента инерции куба вычисляется по формуле:

$$\sigma_{I_{\text{куба}}} = \sqrt{\left(\frac{dI_{\text{куба}}}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI_{\text{куба}}}{da}\right)^2 \sigma_a^2} \approx 0,002 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (34)$$

Ось	Ох	ММ'	АС'
$I, \text{ г} \cdot \text{м}^2$	1,554	1,554	1,554
$\sigma_I, \text{ г} \cdot \text{м}^2$	0,002	0,002	0,002
$\varepsilon_I, \%$	0,11	0,11	0,11

Таблица 12: Моменты инерции для различных осей куба

Главные моменты инерции цилиндров вычислим по формулам (19) и (21). Результаты измерений запишем в таблицу 13.

	Блин		Цилиндр	
Ось	высотная	диаметровая	высотная	диаметровая
$I, \text{ г} \cdot \text{ м}^2$	3,041	1,539	2,191	1,549
$\sigma_I, \text{ г} \cdot \text{ м}^2$	0,005	0,002	0,005	0,003
$\varepsilon_I, \%$	0,16	0,16	0,23	0,17

Таблица 13: Моменты инерции для различных осей цилиндров

4.6 Зависимость T от I

Как известно, период колебаний связан с моментом инерции следующим соотношением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \quad (35)$$

Отсюда получаем, что T^2 прямо зависит от I , для проверки данной зависимости построим график зависимости T^2 от I с помощью МНК. Определим параметры (k, b) наилучшей прямой $u = kv + b$, где $u = T^2$, а $v = I$:

$$k = \frac{\langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} = 4,8 \frac{\text{ с}^2}{\text{ г} \cdot \text{ м}^2} \quad (36)$$

$$b = \langle u \rangle - k \langle v \rangle = 21,7 \text{ с}^2 \quad (37)$$

Найдём их погрешности $(\sigma_k \sigma_b)$:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} - k^2} = 0,2 \frac{\text{ с}^2}{\text{ г} \cdot \text{ м}^2} \quad (38)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \approx 0,2 \text{ с}^2 \quad (39)$$

Нанесём прямую и экспериментальные точки на график, изображённый на рисунке 9. Как видно из графика зависимость выполняется достаточно точно.

4.7 Проверка полученных значений

Проверим справедливость формул (9), (10), (11), (12), для этого вычислим теоретические значения периодов из этих формул:

$$T_{\text{ММ}'}^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2}{a^2 + b^2}} \approx 6,65 \text{ с} \quad (40)$$

$$T_{\text{ЕЕ}'}^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{b^2 + c^2}} \approx 5,80 \text{ с} \quad (41)$$

$$T_{\text{РР}'}^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + c^2}} \approx 5,94 \text{ с} \quad (42)$$

$$T_{\text{АС}'}^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \approx 6,03 \text{ с} \quad (43)$$

Погрешности теоретических величин можно высчитать по следующим формулам:

$$\sigma_{T_{MM'}^{теор}} = \sqrt{\left(\frac{dT_{MM'}^{теор}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dT_{MM'}^{теор}}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dT_{MM'}^{теор}}{dT_x}\right)^2 \sigma_{T_x}^2 + \left(\frac{dT_{MM'}^{теор}}{dT_y}\right)^2 \sigma_{T_y}^2} \approx 0,03 \text{ с} \quad (44)$$

$$\sigma_{T_{EE'}^{теор}} = \sqrt{\left(\frac{dT_{EE'}^{теор}}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dT_{EE'}^{теор}}{dc}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{dT_{EE'}^{теор}}{dT_y}\right)^2 \sigma_{T_y}^2 + \left(\frac{dT_{EE'}^{теор}}{dT_z}\right)^2 \sigma_{T_z}^2} \approx 0,03 \text{ с} \quad (45)$$

$$\sigma_{T_{PP'}^{теор}} = \sqrt{\left(\frac{dT_{PP'}^{теор}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dT_{PP'}^{теор}}{dc}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{dT_{PP'}^{теор}}{dT_x}\right)^2 \sigma_{T_x}^2 + \left(\frac{dT_{PP'}^{теор}}{dT_z}\right)^2 \sigma_{T_z}^2} \approx 0,03 \text{ с} \quad (46)$$

$$\sigma_{T_{AC'}^{теор}} = \sqrt{\sum_{i \in \{a,b,c\}} \left(\left(\frac{dT_{AC'}^{теор}}{di} \right)^2 \sigma_i^2 \right) + \sum_{i \in \{x,y,z\}} \left(\left(\frac{dT_{AC'}^{теор}}{dT_i} \right)^2 \sigma_{T_i}^2 \right)} \approx 0,02 \text{ с} \quad (47)$$

Для проверки полученных значений посчитаем величину хи-квадрат для всех T по данной формуле:

$$\chi^2 = \sum \frac{(T^{теор} - T^{эксп})^2}{\sigma_{T^{теор}}^2 + \sigma_{T^{эксп}}^2} \quad (48)$$

При хорошем соответствии модели и данных, величина $\chi^2/(n-p)$ должна в среднем быть равна единице. В данном случае $n = 3$, $p = 2$, поэтому $\chi^2/(n-p) = \chi^2$. Запишем полученные величины в таблицу.

ось	χ^2
ММ'	59,512
ЕЕ'	0,108
РР'	1,312
АС'	1,249

Таблица 14: Значения χ^2 для различных осей

Видно, что для оси ММ' значение сильно больше 2, это скорее всего связано с грубой ошибкой во время измерений, из-за чего теория не соответствует эксперименту. Значение для оси ЕЕ' ниже 0,5, что свидетельствует о практически полном совпадении экспериментальных значений с теоретическими. Значения для РР' и АС' лежат в районе 1, это означает хорошее соответствие теории и эксперимента.

4.8 Построение эллипсоидов инерции

Для каждого тела рассчитаем величину $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$, которая пропорциональна расстоянию от центра масс тела до точки пересечения эллипсоида с этой осью.

Ось	X	Y	Z	ММ'	ЕЕ'	РР'	АС'
T, с	7,01	6,55	5,65	6,52	5,81	5,97	6,05
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2} \text{ с}$	18,54	20,92	29,11	21,13	27,06	25,33	24,60

Таблица 15: Вычисление значений $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ для параллелепипеда

Ось	X	MM'	AC'
T, с	5,35	5,36	5,37
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2} \text{ с}$	34,21	34,11	33,84

Таблица 16: Вычисление значений $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ для куба

	Блин		Цилиндр	
Ось	высотная	диаметровая	высотная	диаметровая
T, с	6,02	5,34	5,62	5,30
$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2} \text{ с}$	24,87	34,35	29,45	35,40

Таблица 17: Вычисление значений $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ для цилиндров

Теперь по полученным данным можно построить эллипсоид инерции для всех тел. Строить эллипсы можно воспользовавшись МНК.

Из параметрического уравнения эллипса $y = b \cdot \sin(\varphi), x = a \cdot \cos(\varphi)$ получаем, что зависимость координат x, y от соответственно $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$ – линейная. Так как длина радиус вектора известна и можно легко рассчитать углы, под которыми направлены побочные оси к главным, то можно воспользоваться МНК, чтобы получить значения a и b .

$$a = \frac{\langle x \cos(\varphi) \rangle}{\langle \cos(\varphi)^2 \rangle}, \quad b = \frac{\langle y \sin(\varphi) \rangle}{\langle \sin(\varphi)^2 \rangle} \quad (49)$$

Погрешности можно рассчитать так:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle \cos(\varphi)^2 \rangle} - a^2}, \quad \sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle \sin(\varphi)^2 \rangle} - b^2} \quad (50)$$

Для осей куба и параллелепипеда рассчитаем a, b, σ_a и σ_b и занесём результаты вычислений в таблицу 18.

	Параллелепипед			
Плоскость	$a, 10^{-2} \text{ с}^{-1}$	$b, 10^{-2} \text{ с}^{-1}$	$\sigma_a, 10^{-2} \text{ с}^{-1}$	$\sigma_b, 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
xOy	21,05	19,19	0,04	0,40
xOz	19,98	27,79	1,13	0,35
yOz	22,60	26,92	0,76	0,66
	Куб			
xOy	34,16	34,16	0,02	0,02

Таблица 18: Вычисление параметров сечений эллипсоидов для куба и параллелепипеда

Теперь можем построить графики и разместить на них экспериментальные точки. Графики сечений эллипсоида инерции для параллелепипеда представлены на рисунках 3, 4 и 5. График сечения эллипсоида инерции куба изображен на рисунке 6. Графики сечений эллипсоидов инерции для цилиндра и блина изображены соответственно на рисунках 7 и 8.

5 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы были измерены периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закреплённого в ней тела.

Была проверена теоретическая зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей. Было установлена, что данная зависимость в целом хорошо выполняется.

Были определены моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела. Были найдены главные моменты инерции тела. Были построены эллипсоиды инерции для каждого тела. Видно, что точки не идеально ложатся на график, что означает присутствие приличной погрешности, которая скорее всего связана с неидеальностью работы установки, а так же погрешностями, которые возникают из-за человеческого фактора.

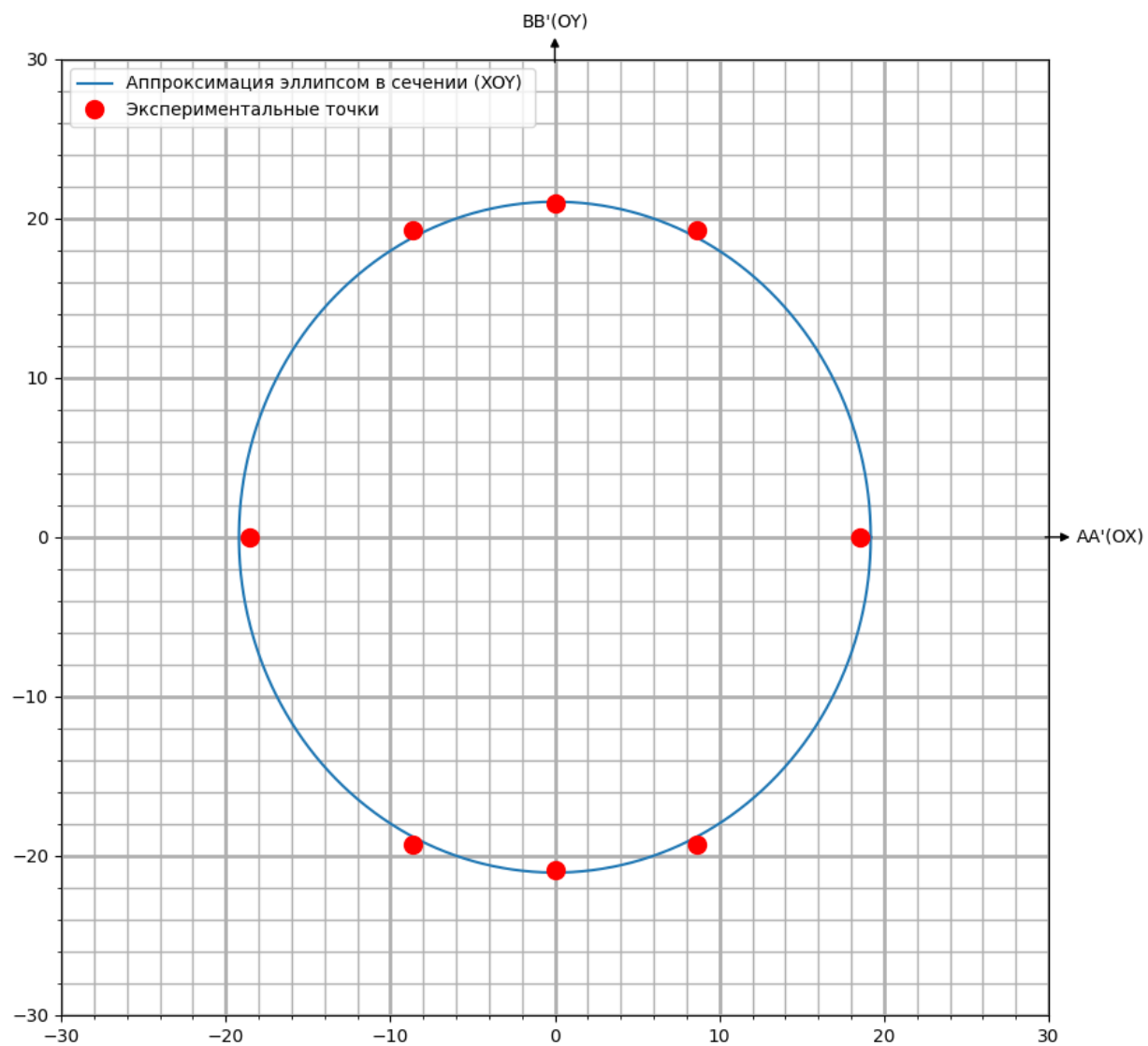


Рис. 3: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда в плоскости XOY

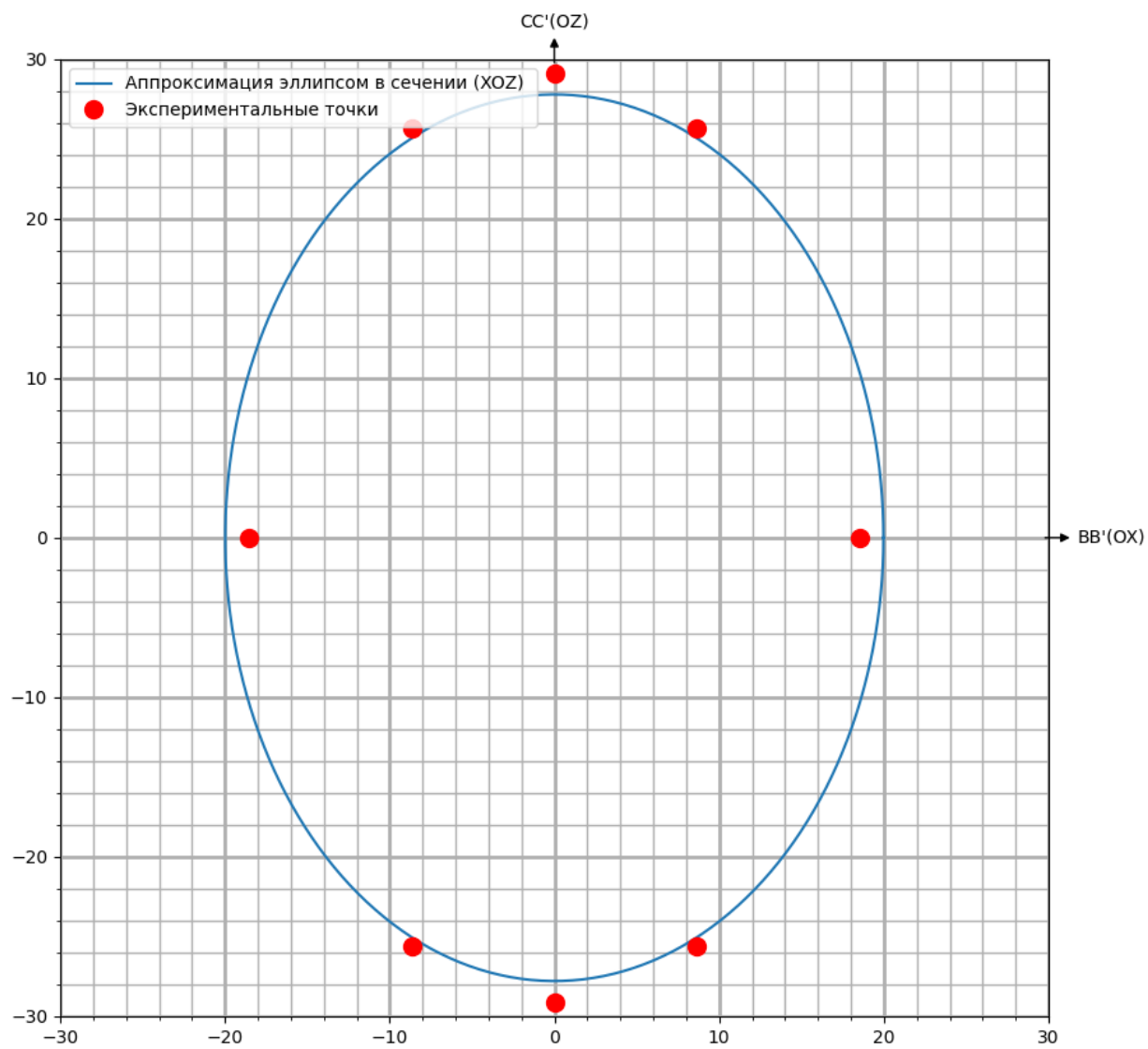


Рис. 4: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда в плоскости XOZ

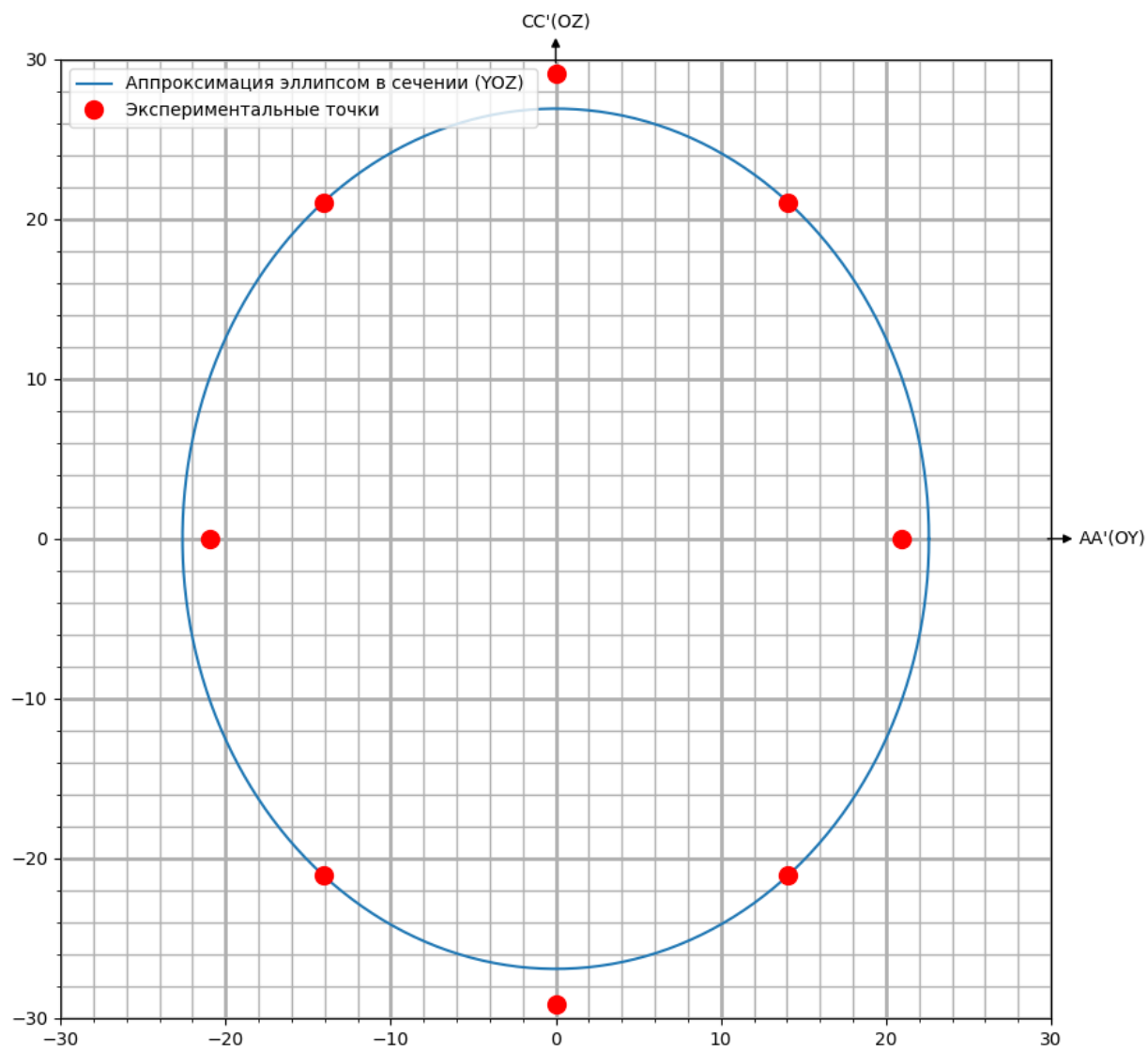


Рис. 5: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда в плоскости YOZ

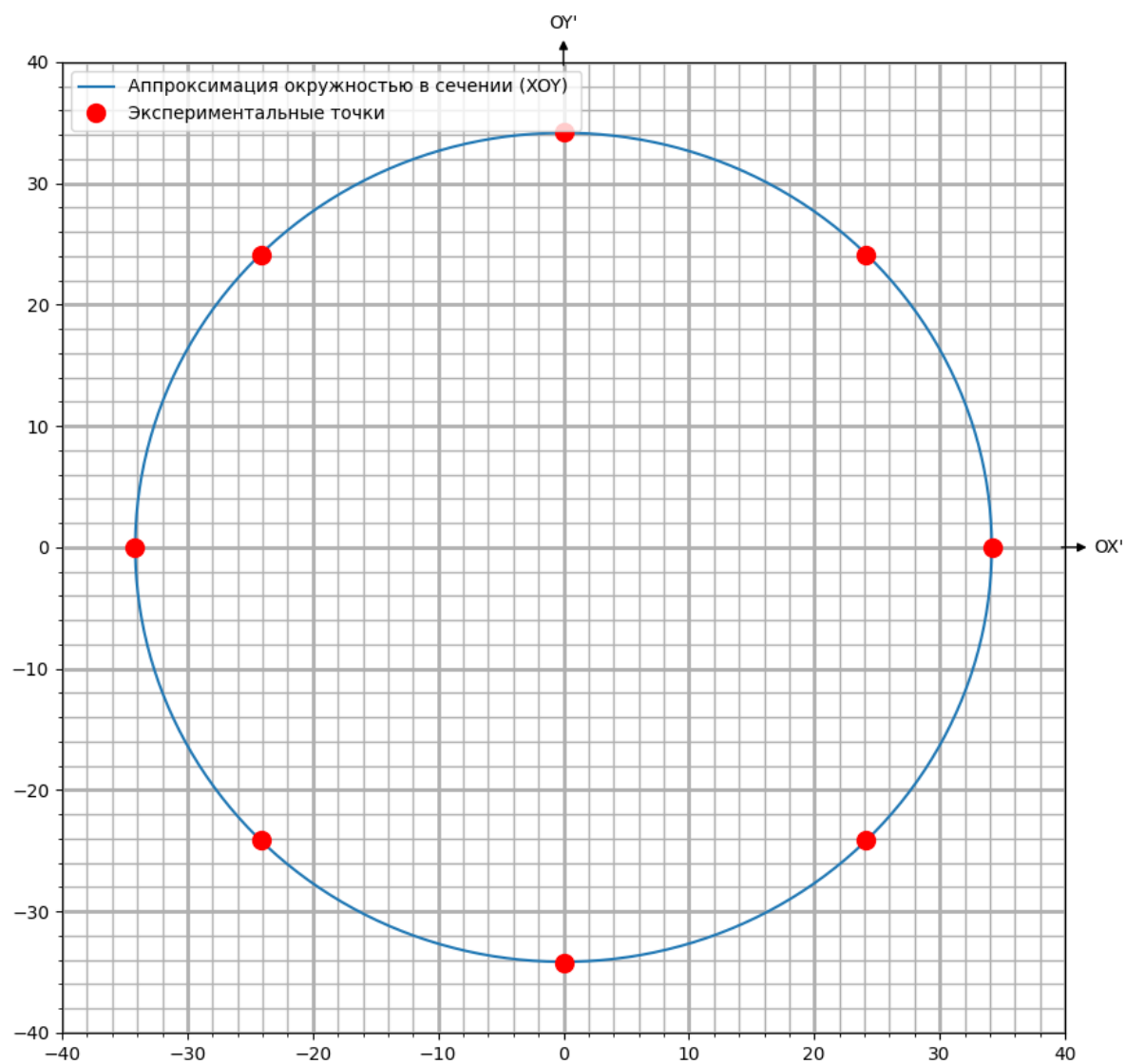


Рис. 6: Сечение эллипсоида инерции куба

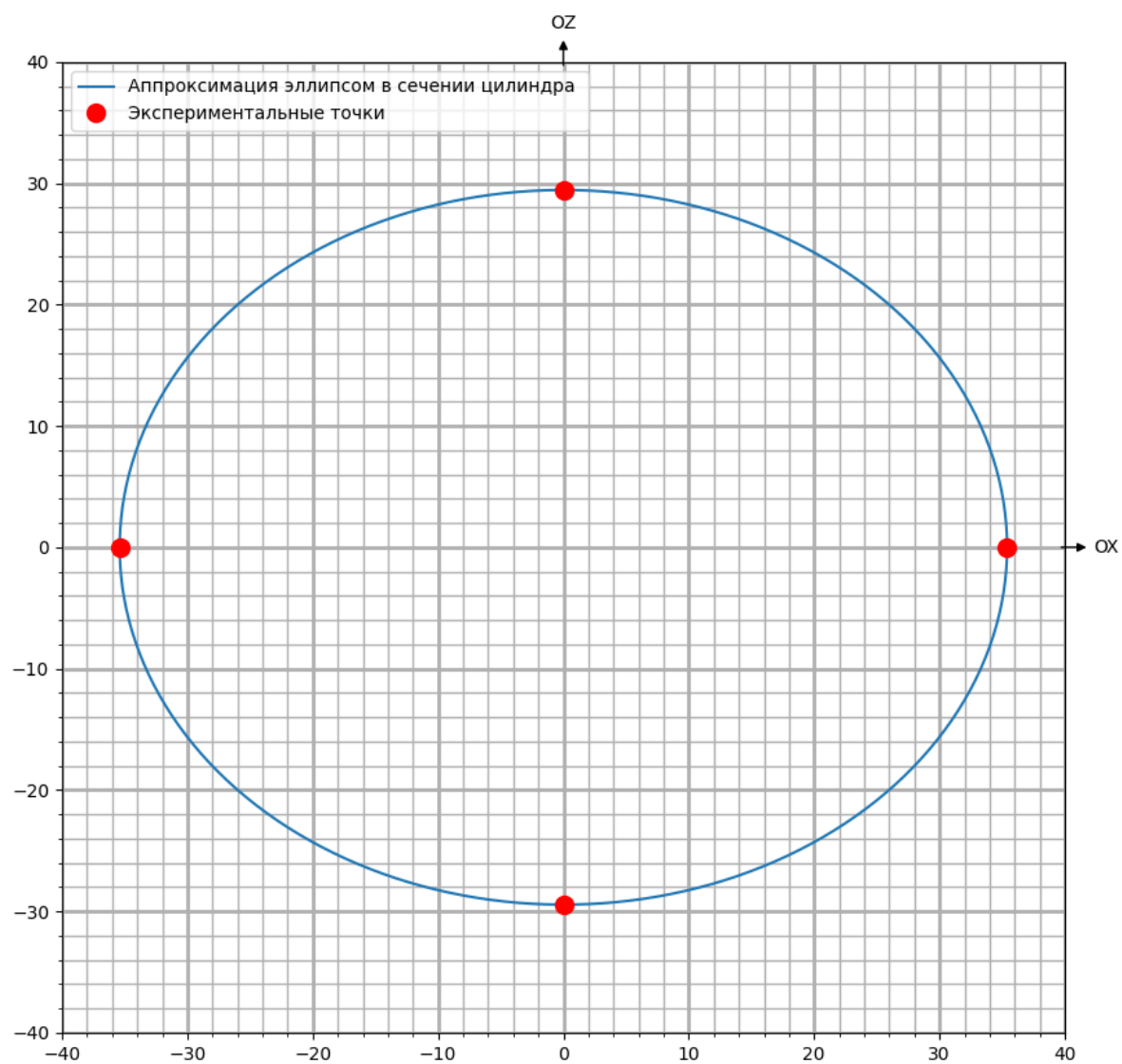


Рис. 7: Сечение эллипсоида инерции для цилиндра

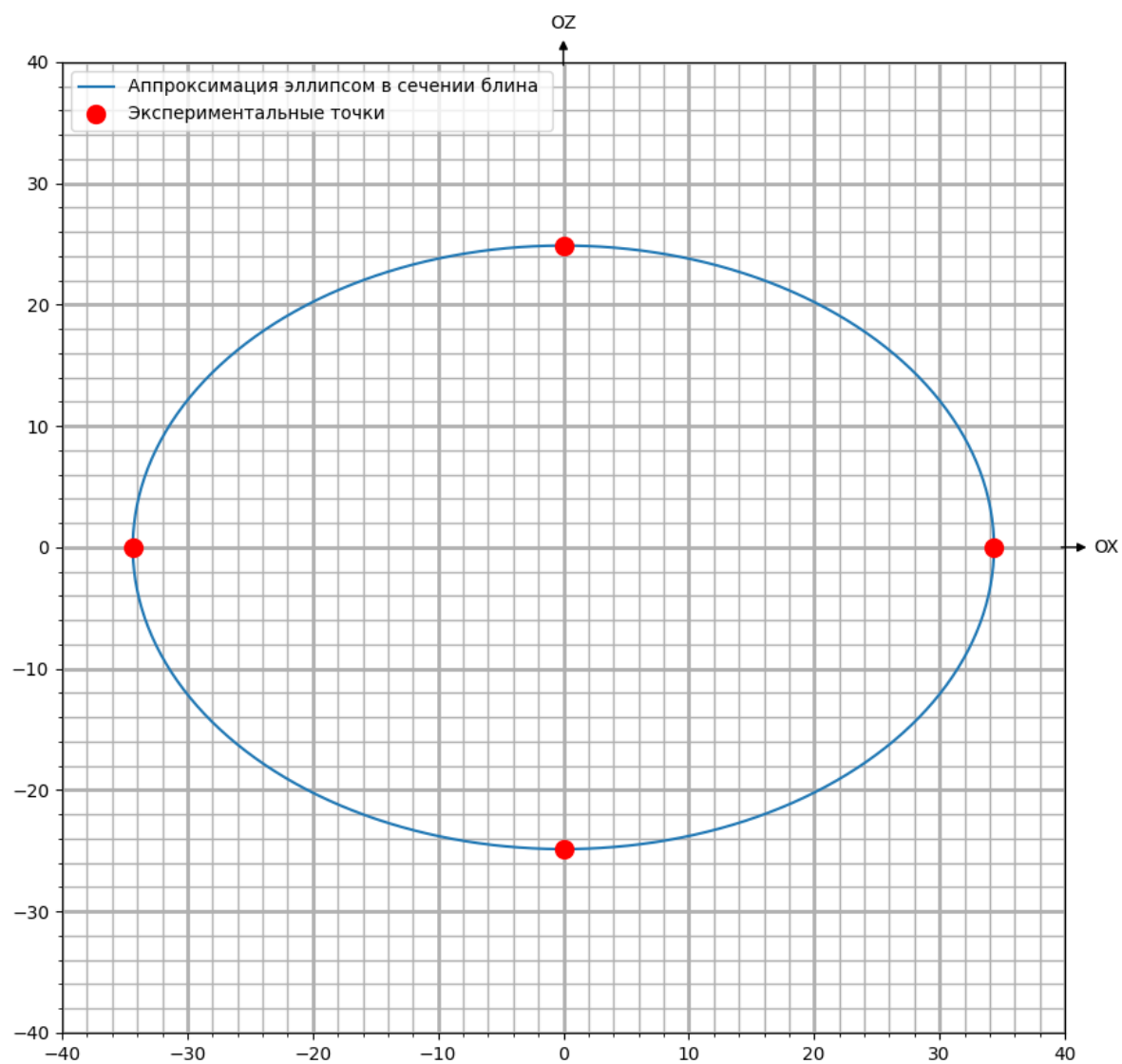


Рис. 8: Сечение эллипсоида инерции для блина

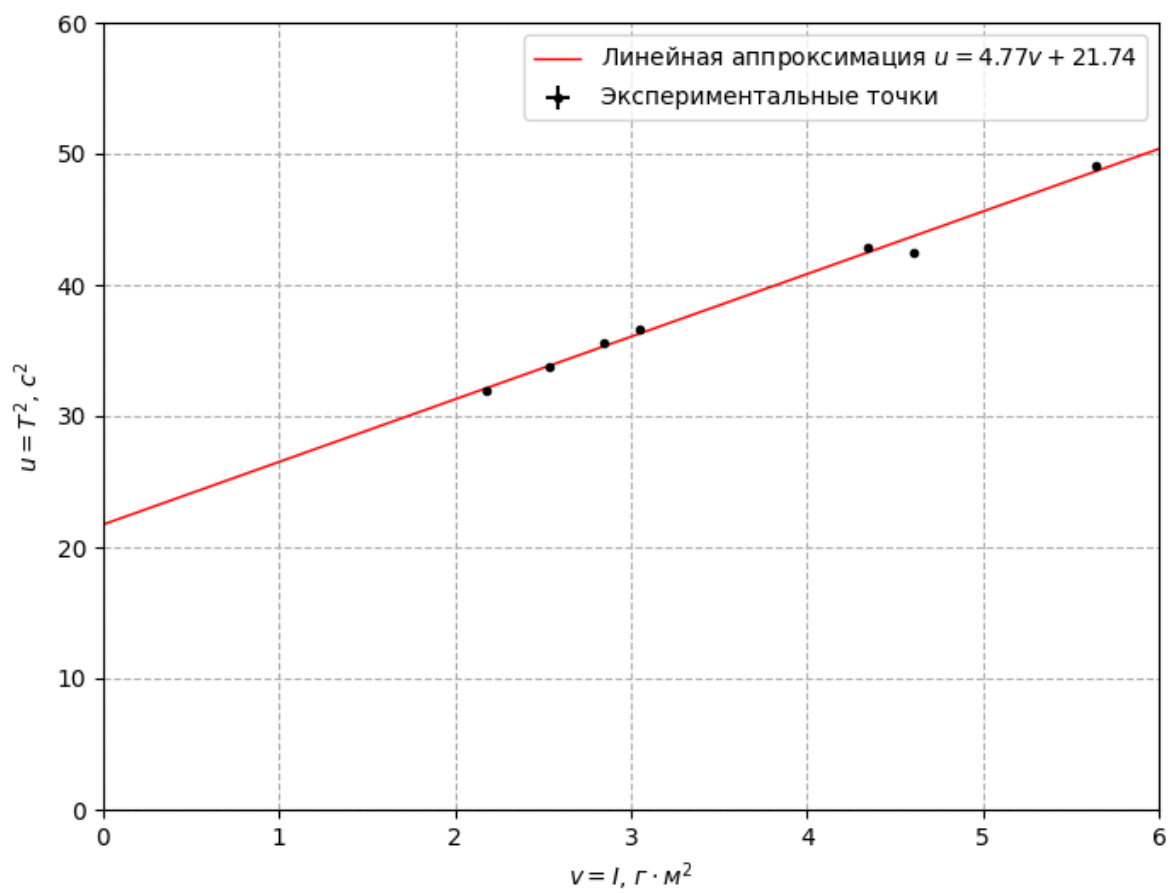


Рис. 9: Сечение эллипсоида инерции для блина