

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.3.1 и 1.3.2

Определение модуля Юнга по измерениям
растяжения проволоки и модуля сдвига при
помощи крутильных колебаний

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

1 Введение

Цель работы:

1. экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией одностороннего растяжения и по результатам определить модуль Юнга
2. определение модулей кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника

В работе используются:

- прибор Лермантова
- проволока из исследуемого материала
- зрительная трубка со шкалой
- набор грузов
- микрометр
- рулетка
- секундомер
- линейка

2 Теоретические сведения

2.1 Теория к разделу 1.3.1

Растяжение проволоки соответствует напряженному состоянию вдоль одной оси, которое описывается формулой:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Эту формулу можно переписать также в следующем виде:

$$F = k \Delta l, \quad (2)$$

где $k = ES/l$ – жесткость проволоки. Измерения производятся на установке Лермантова. Направим зрительную трубку на зеркальце. Выведем формулу для расчета растяжения длины проволоки по показаниям шкалы прибора (см. рис. 1). Так как мы считаем проволоку слабо растяжимой, справедлива оценка $\Delta l \ll r$, где r – длина рычага. С учетом этого, угол наклона зеркальца к горизонтали можно найти как $\alpha = \Delta l/r$. С другой стороны, из соображений геометрической оптики угол α можно найти как угол между продолжениями соответствующих лучей:

$$\alpha = \frac{n}{2h}, \quad (3)$$

где n – показания шкалы, h – расстояние от шкалы до зеркальца.

Таким образом, удлинение проволоки можно выразить как:

$$\Delta l = n \frac{r}{2h} \quad (4)$$

Отсюда формулу (1) можно переписать как

$$F = \frac{ESr}{2lh} n \quad (5)$$

2.2 Теория к разделу 1.3.2

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние называется чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

Покажем, что касательное напряжение в поперечном сечении увеличивается пропорционально расстоянию до оси вращения. Рассмотрим в цилиндре колечко бесконечно малой толщиной dr и высоты dl . При закручивании верхнее колечко поворачивается относительно нижнего на угол $d\varphi$, а образующая наклоняется на угол α . Тогда при малых углах справедливо соотношение:

$$\alpha dl = r d\varphi \quad (6)$$

Касательное напряжение τ связано с углом α линейной зависимостью через модуль сдвига G , и следовательно растет с увеличением расстоянием от оси:

$$\tau = G \cdot \alpha = Gr \frac{d\varphi}{dl} \quad (7)$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot r \cdot \tau \quad (8)$$

Интегрируя это выражение по всем колечкам от оси цилиндра до его радиуса R находим суммарный момент сил:

$$M = \frac{\pi GR^4}{2} \frac{d\varphi}{dl} \quad (9)$$

Так как момент сил не меняется по длине цилиндра. Тогда для связи приложенного момента сил M и угла поворота φ поперечных сечений цилиндра имеем:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f \varphi \quad (10)$$

Где f - модуль кручения связанный с модулем сдвига G соотношением:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f \quad (11)$$

В системе можно возбудить крутильные колебания. Вращение стержня с закрепленными на нем грузиками вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента M . С учетом выражения для момента M получим, что это вращение описывается уравнением колебаний:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f \varphi = 0 \quad (12)$$

Следовательно период колебаний системы связан с расстоянием l_c от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня I_0 следующим образом:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{f} = \frac{4\pi^2 I_0}{f} + \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)}{f} l_c^2 \quad (13)$$

Эти зависимости были получены для незатухающих колебаний. Поэтому для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемой системе диссипативными силами можно пренебречь. Для этого стоит убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды и что амплитуда уменьшается не более чем в 2 раза после около 10 колебаний.

3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер: $\sigma_s = \pm 0,03$ с

Штангенциркуль: $\sigma_{шт} = \pm 0,005$ см

Линейка: $\sigma_{шт} = \pm 1$ мм

Измерительная шкала: $\sigma_{шт} = \pm 0,1$ см

Электронные весы ВЛТЭ-5100: $\sigma_m = \pm 0,3$ г

4 Результаты измерений и обработка данных работы 1.3.1

4.1 Определение площади поперечного сечения проволоки

Площадь поперечного сечения проволоки не измерялась напрямую, а принята равной $d_{пр} = (0,46 \pm 0,01)$ мм.

Площадь поперечного сечения проволоки вычисляется по формуле: $S = \frac{\pi d_{пр}^2}{4} = 0,166$ мм²

Погрешность вычисления площади поперечного сечения можно вычислить по формуле: $\sigma_S = \frac{\pi d_{пр}}{2} \sigma_d = 0,007$ мм²

4.2 Измерение длины проволоки

Длина проволоки измерялась после выполнения всех остальных измерений, чтобы не сбить настройки установки перед началом опыта. Длина проволоки $l = (176,2 \pm 0,1)$ см

4.3 Вывод формулы удлинения проволоки

Формула удлинения проволоки через число делений по шкале (4) была выведена в разделе 2.1.

4.4 Проверка максимальной нагрузки

Проверим максимальную нагрузку на проволоку. Разрушающее напряжение примем за $T_p = 900 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$, рабочее напряжение не должно превышать 30% от T_p . Для проверки правильности этой оценки будем добавлять нагрузку постепенно, после чего убирать и сверять положение шкалы без дополнительной нагрузки. Повторим этот процесс для всего набора грузов. В процессе значение шкалы без дополнительной нагрузки колебалось в диапазоне от 21,9 до 22,1 см, что в пределах погрешности относительно начального положения в 22 см. Из чего можно сделать вывод о правильности сделанной оценки.

4.5 Зависимость удлинения проволоки от массы

Для получения зависимости удлинения проволоки от массы будем постепенно добавлять грузы и замерять показания шкалы для каждого добавленного груза. Результаты измерений запишем в таблицу 1. После чего будем удирать грузы по одному и снимать показания шкалы, результаты измерений запишем в таблицу 2. Так же для каждого измерения посчитаем удлинение проволоки по формуле (4).

Погрешность Δ_l для каждого значения рассчитаем по формуле (14).

N	$m_{\text{общ}}, \text{ Г}$	$m_{\text{доб}}, \text{ Г}$	n	$\sigma_m, \text{ Г}$	σ_n	$\Delta_l, \text{ мм}$	$\sigma_{\Delta_l}, \text{ мм}$
0	0,0	0,0	21,9	0,3	0,1	1,15	0,08
1	246,1	246,1	25,1	0,6	0,1	1,32	0,09
2	491,7	245,6	27,8	0,9	0,1	1,46	0,10
3	737,0	245,3	30,5	1,2	0,1	1,60	0,11
4	982,5	245,5	33,2	1,5	0,1	1,74	0,12
5	1228,1	245,6	35,7	1,8	0,1	1,87	0,12
6	1472,5	244,4	38,3	2,1	0,1	2,01	0,13
7	1717,8	245,3	40,7	2,4	0,1	2,13	0,14
8	1963,4	245,6	43,3	2,7	0,1	2,27	0,15
9	2208,9	245,5	45,7	3,0	0,1	2,40	0,16
10	2454,5	245,6	48,4	3,3	0,1	2,54	0,17
11	2700,3	245,8	49,0	3,6	0,1	2,57	0,17

Таблица 1: Зависимость удлинения от добавочной массы при увеличении массы

N	$m_{\text{общ}}, \text{ Г}$	$m_{\text{убав}}, \text{ Г}$	n	$\sigma_m, \text{ Г}$	σ_n	$\Delta_l, \text{ мм}$	$\sigma_{\Delta_l}, \text{ мм}$
12	2700,3	0,0	49,0	3,6	0,1	2,57	0,17
11	2454,5	245,8	48,5	3,3	0,1	2,54	0,17
10	2208,9	245,6	46,2	3,0	0,1	2,42	0,16
9	1963,4	245,5	43,5	2,7	0,1	2,28	0,15
8	1717,8	245,6	41,0	2,4	0,1	2,15	0,14
7	1472,5	245,3	38,4	2,1	0,1	2,01	0,13
6	1228,1	244,4	35,9	1,8	0,1	1,88	0,13
5	982,5	245,6	33,2	1,5	0,1	1,74	0,12
4	737,0	245,5	30,7	1,2	0,1	1,61	0,11
3	491,7	245,3	28,0	0,9	0,1	1,47	0,10
2	246,1	245,6	25,2	0,6	0,1	1,32	0,09
1	0,0	246,1	22,3	0,3	0,1	1,17	0,08

Таблица 2: Зависимость удлинения от добавочной массы при уменьшении массы

$$\sigma_{\Delta_l} = \sqrt{\left(\frac{d\Delta_l}{dn}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{d\Delta_l}{dr}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{d\Delta_l}{dh}\right)^2 \sigma_h^2} \quad (14)$$

4.6 График зависимости удлинения от нагрузки

Построим график зависимости удлинения проволоки Δ_l от нагрузки P . Для аппроксимации прямой воспользуемся МНК, где $u = \Delta_l$, а $v = P$. Так как зависимость должна быть прямой, получаем для двух прямых k и b рассчитываются по формулам:

$$k = \frac{\langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \quad (15)$$

$$b = \langle u \rangle - k \langle v \rangle \quad (16)$$

Погрешности для k и b рассчитываются по формулам:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} - k^2} \quad (17)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \quad (18)$$

Отсюда получаем для добавления: $k_{\text{доб}} = (0,055 \pm 0,001) \frac{\text{мм}}{\text{Н}}$, $b_{\text{доб}} = (0,923 \pm 0,009) \text{ мм}$. Для убавления массы: $k_{\text{убав}} = (0,055 \pm 0,001) \frac{\text{мм}}{\text{Н}}$, $b_{\text{убав}} = (0,934 \pm 0,009) \text{ мм}$. График зависимости для добавления массы изображен на рис. 1, график для убавления массы изображен на рис. 2. График, на котором изображены обе зависимости, изображен на рис. 3.

4.7 Определение модуля Юнга

По наклону прямой определим жёсткость проволоки, а по ней модуль Юнга. Значение наклона прямой $k = (0,055 \pm 0,001) \frac{\text{мм}}{\text{Н}}$. Жёсткость пружины $K = \frac{1}{k} = 18220 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Погрешность $\sigma_K = \frac{\sigma_k}{k^2} = 348 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Приборная погрешность $\sigma_K^{\text{приб}} =$

Модуль Юнга E можно вычислить по формуле:

$$E = \frac{Kl}{S} = 193 \text{ ГПа} \quad (19)$$

Погрешность вычисления модуля Юнга можно вычислить по формуле:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{dE}{dK}\right)^2 \sigma_K^2 + \left(\frac{dE}{dl}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{dE}{dS}\right)^2 \sigma_S^2} \approx 9 \text{ ГПа} \quad (20)$$

4.8 Определение материала проволоки

Согласно справочным данным, полученное значение для модуля Юнга $E = (193 \pm 9) \text{ ГПа}$ лежащее в интервале от 190 до 200 ГПа соответствует железу. Отсюда можно сделать вывод, что скорее всего проволока изготовлена из железа.

5 Результаты измерений и обработка данных работы 1.3.2

5.1 Установление допустимых амплитуд отклонения

5.2 Проворка применимости установки

Для того, чтобы установку можно было использовать, необходимо чтобы после десяти колебаний с амплитудой из установленного диапазона затухание было менее, чем в два раза. Так как это выполняется, то колебания можно считать гармоническими, а значит можно пренебречь затуханием во время работы.

5.3 Измерение периодов колебаний

Перед началом измерений измерим параметры цилиндров и запишем их в таблицу 3. Из этих данных можно рассчитать моменты инерции каждого из цилиндров относительно осей, проходящих через центр масс каждого параллельно стержню. Результаты вычисления моментов инерции тоже запишем в таблицу. Момент инерции цилиндра через данную ось вычисляется по формуле:

$$I = \frac{mH^2}{12} + \frac{md^2}{16} \quad (21)$$

Погрешность момента инерции можно рассчитать по формуле:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{dI}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{dI}{dh}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{dI}{dd}\right)^2 \sigma_d^2} \quad (22)$$

Вычислим погрешность измерения моментов инерции цилиндров и запишем в таблицу 3.

хар-ка	цилиндр 1	цилиндр 2
m , г	204,1	202,5
h , см	4,02	4,05
d , см	4,88	4,83
I , г · м ²	3,065	2,980
σ_I , г · м ²	0,005	0,004

Таблица 3: Характеристики цилиндров на установке

Будем утанавливать грузы на одинаковом расстоянии от стержня до центров масс грузов l_c и два раза измерять период десяти колебаний. Повторим это для 17 различных значений l_c . Результаты измерений запишем в таблицу 4.

N	l, см	L_C	T_1, с	T_2, с	t, с
1	0,00	2,02	16,16	16,13	1,615
2	1,00	3,02	17,43	17,43	1,743
3	2,00	4,02	19,35	19,34	1,935
4	3,00	5,02	20,68	20,69	2,069
5	4,00	6,02	22,91	22,91	2,291
6	5,00	7,02	24,53	24,52	2,453
7	6,00	8,02	26,6	26,58	2,659
8	7,00	9,02	29,01	29,01	2,901
9	8,00	10,02	31,72	31,72	3,172
10	9,00	11,02	33,6	33,61	3,361
11	10,00	12,02	36,38	36,39	3,639
12	11,00	13,02	38,87	38,88	3,888
13	12,00	14,02	41,4	41,41	4,141
14	13,00	15,02	43,76	43,76	4,376
15	14,00	16,02	46,3	46,3	4,630
16	15,00	17,02	48,79	48,79	4,879
17	16,00	18,02	51,37	51,36	5,137

Таблица 4: Результаты измерения периодов колебаний

Согласно соотношению (13) t^2 должно прямо зависеть от l_c^2 . Для аппроксимации наилучшей прямой этой зависимости воспользуемся МНК, где $u = t^2$, а $v = l_c^2$. Так как зависимость должна быть прямой, получаем для двух прямых k и b рассчитываются по формулам:

$$k = \frac{\langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \approx 0,0741 \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2} \quad (23)$$

$$b = \langle u \rangle - k \langle v \rangle \approx 2,44 \text{ с}^2 \quad (24)$$

Погрешности для k и b рассчитываются по формулам:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} - k^2} \approx 0,0003 \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2} \quad (25)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \approx 0,03 \text{ с}^2 \quad (26)$$

График зависимости t^2 от l_c^2 изображён на расунке 4. Согласно формуле (13) коэффициент наклона прямой равен:

$$k = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{f} \implies f = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{k} \approx 0,02167 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (27)$$

Погрешность вычисления модуля кручения можно вычислить по формуле:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{df}{dm_1}\right)^2 \sigma_{m_1}^2 + \left(\frac{df}{dm_2}\right)^2 \sigma_{m_2}^2 + \left(\frac{df}{dk}\right)^2 \sigma_k^2} \approx 0,00008 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (28)$$

5.4 Определение модуля сдвига

Измерим диаметр проволоки с помощью штангенциркуля в 5 различных местах и результаты измерений запишем в таблицу 5.

n	1	2	3	4	5
d, мм	1,560	1,570	1,560	1,590	1,560

Таблица 5: Результаты измерения диаметра проволоки

Тогда $d_{\text{пр}} = \frac{\sum d}{n} = 1,568 \text{ мм}$, погрешность измерения соответственно равна: $\sigma_{d_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_{\text{шт}}}{n} = 0,001 \text{ мм}$. Длина проволоки известна и равна: $L = (1730 \pm 2) \text{ мм}$.

Воспользовавшись формулой (11) вычислим модуль сдвига для проволоки: $G = 63,2 \text{ ГПа}$

Погрешность вычисления модуля сдвига σ_G можно вычислить по формуле:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{dG}{dL}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{dG}{df}\right)^2 \sigma_f^2 + \left(\frac{dG}{dd_{\text{пр}}}\right)^2 \sigma_{d_{\text{пр}}}^2} \approx 0,3 \text{ ГПа} \quad (29)$$

Тогда $G = (63,2 \pm 0,3) \text{ ГПа}$. Так как материал проволоки известен – сталь, то можно сравнить полученное значение для модуля сдвига с табличными значениями. Они варьируются от 45 до 90 ГПа, что не противоречит экспериментальным данным.

6 Обсуждение результатов и выводы

6.1 Работа 1.3.1

В ходе работы была получена зависимость между напряжением и деформацией одностороннего растяжения проволоки. По результатам был определён модуль Юнга $(193 \pm 9) \text{ ГПа}$ для проволоки, что соответствует железу.

6.2 работа 1.3.2

В ходк работы было получено значение модуля кручения $(0,02167 \pm 0,00008) \text{ Н} \cdot \text{м}$ и сдвига $(63,2 \pm 0,3) \text{ ГПа}$ для данной проволоки, что соответствует значениям данных величин для стали.

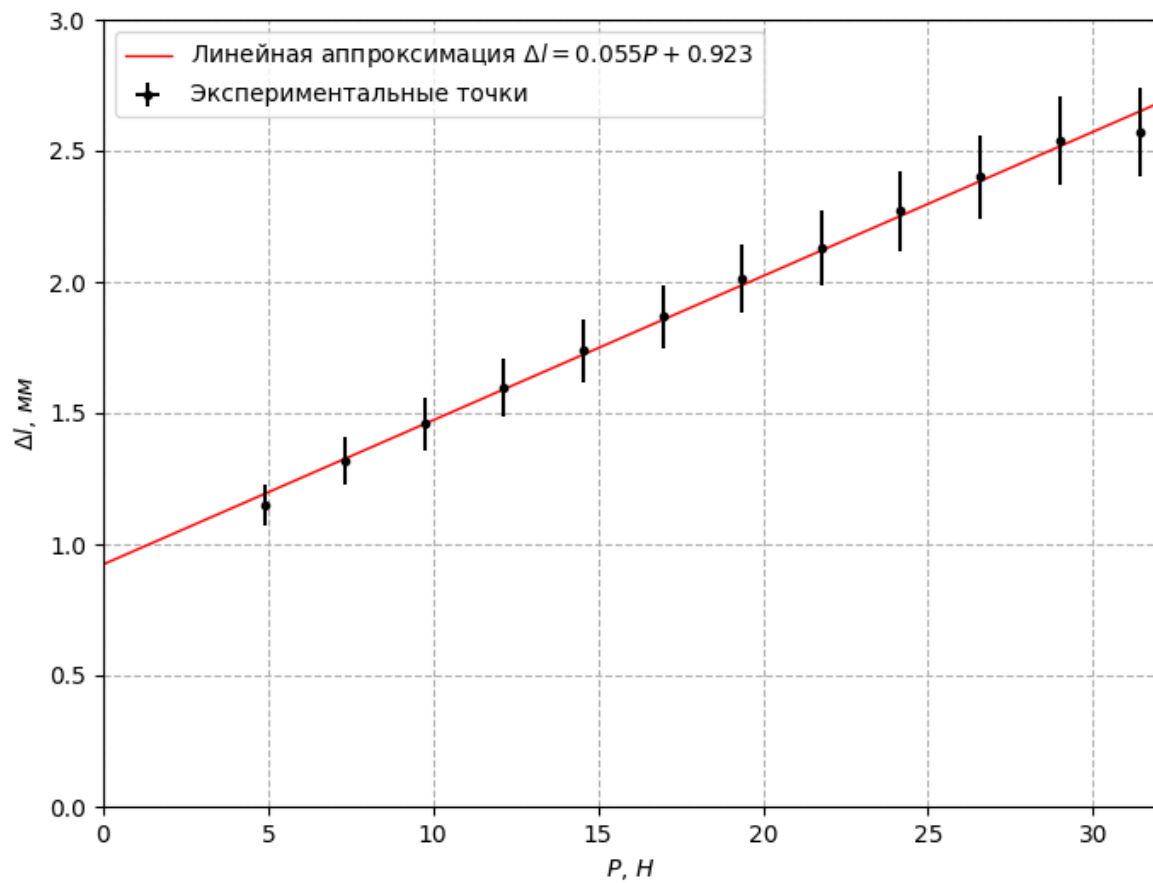


Рис. 1: График зависимости Δl от P при увеличении массы

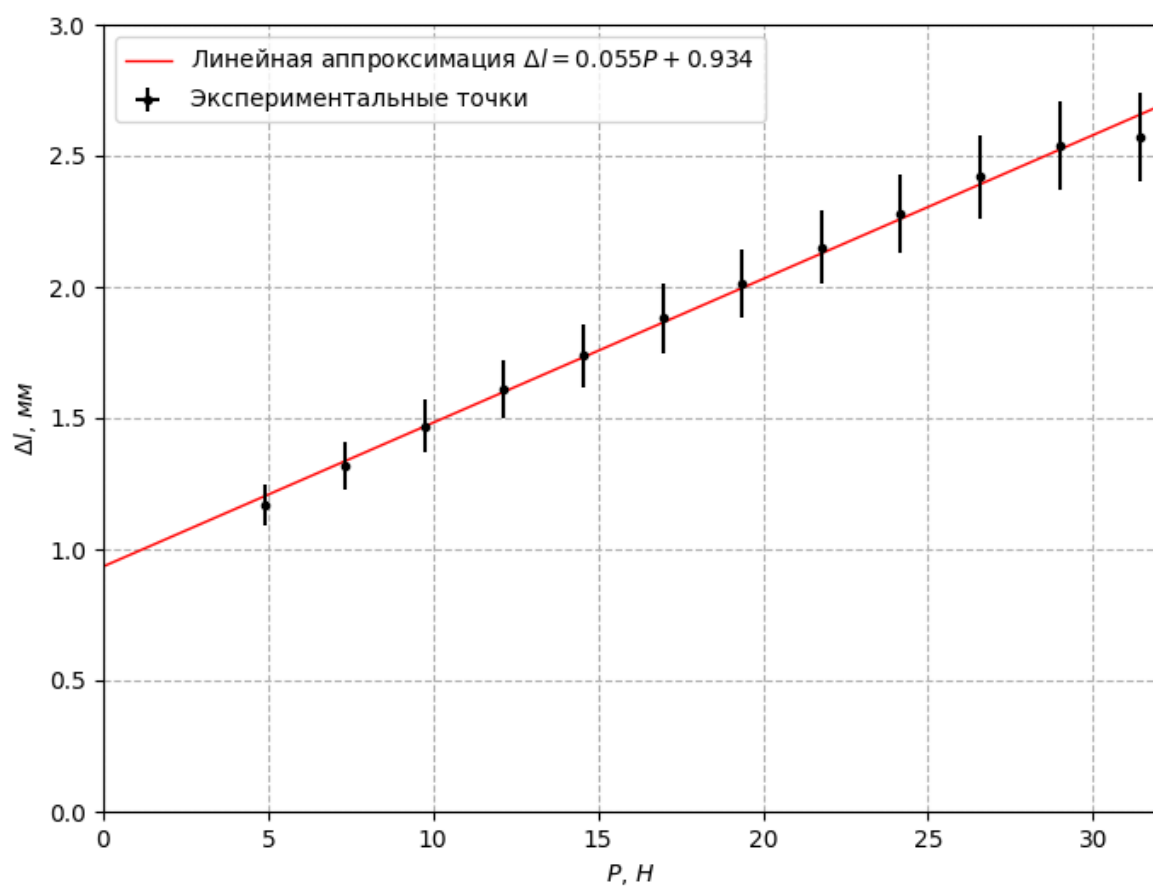


Рис. 2: График зависимости Δ_l от P при уменьшении массы

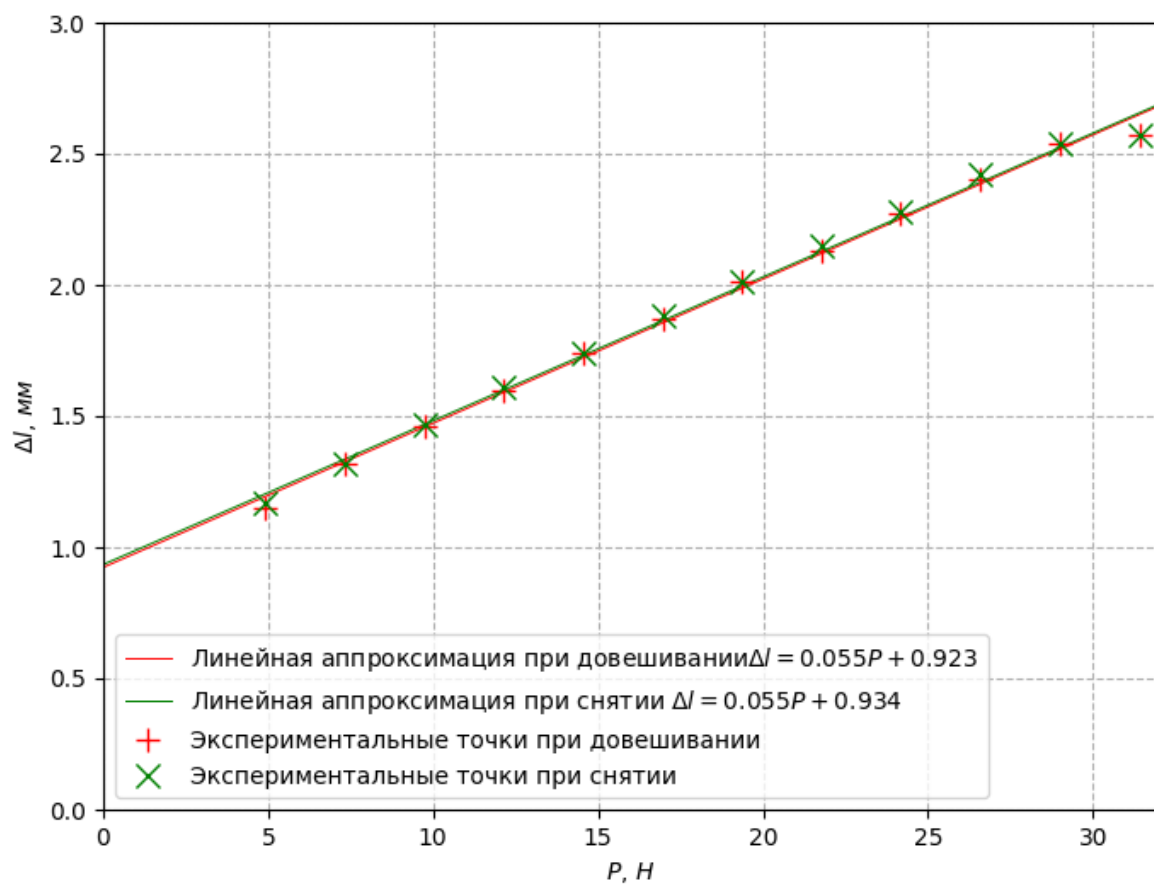


Рис. 3: График зависимости Δl от P в обоих случаях

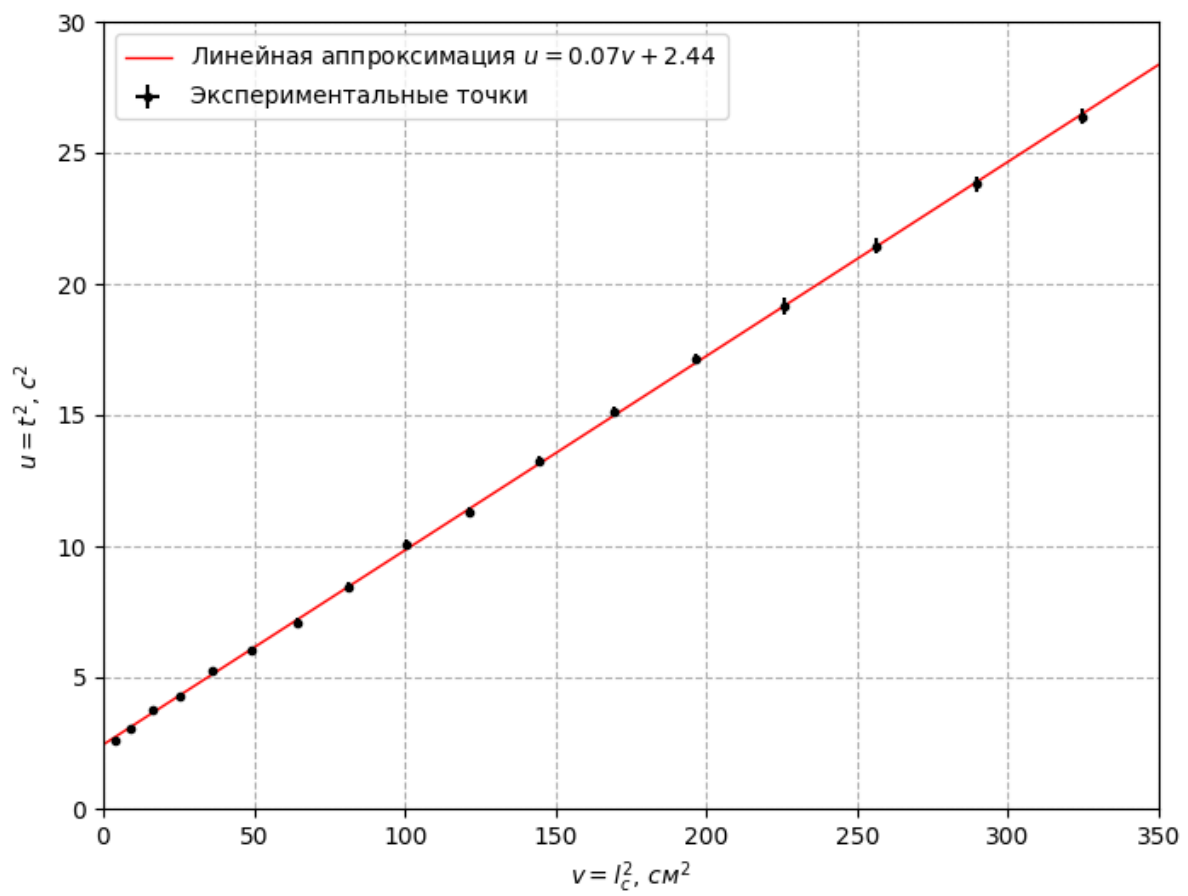


Рис. 4: График зависимости t^2 от l_c^2