

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы

1.3.3

Измерение вязкости воздуха по течению в
тонких трубках

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

1 Введение

Цель работы:

1. экспериментально исследовать свойства течения газов по тонким трубкам при различных числах Рейнольдса
2. выявить область применения закона Пуазейля и с его помощью определить коэффициент вязкости воздуха

В работе используются:

- система подачи воздуха (компрессор, соединяющие трубки)
- газовый счетчик барабанного типа
- спиртовой микроманометр с регулируемым наклоном
- набор трубок различного диаметра с выходами для подсоединения микроманометра
- секундомер

2 Теоретические сведения

Рассмотрим движение вязкой жидкости или газа по трубке круглого сечения. При малых скоростях потока движение оказывается ламинарным (слоистым), скорости частиц меняются по радиусу и направлены вдоль оси трубки. С увеличением скорости потока движение становится турбулентным, а слои перемешиваются. При турбулентном движении скорость в каждой точке быстро меняет величину и направление, сохраняется только средняя величина скорости.

Характер движения газа (или жидкости) в трубке определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{vr\rho}{\eta} \quad (1)$$

где v – скорость потока, r – радиус трубки, ρ – плотность движущейся среды, η – её вязкость. В гладких трубах круглого сечения переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при $Re \approx 1000$.

При ламинарном течении объем газа V , протекающий за время t по трубе длиной l , определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\Delta l \eta} (P_1 - P_2) \quad (2)$$

В этой формуле $P_1 - P_2$ – разность давлений в двух выбранных сечениях 1 и 2, расстояние между которыми равно Δl . Величину Q обычно называют расходом. Формула (1) позволяет определять вязкость газа по его расходу.

Отметим условия, при которых справедлива формула (1). Прежде всего необходимо, чтобы с достаточным запасом выполнялось неравенство $Re < 1000$. Необходимо также, чтобы при течении не происходило существенного изменения удельного объема газа (при выводе формулы удельный объем считался постоянным). Для жидкости это предположение выполняется практически всегда, а для газа — лишь в тех случаях, когда перепад давлений вдоль трубки мал по сравнению с самим давлением. В нашем случае давление газа равно атмосферному (10^3 см вод. ст.), а перепад давлений составляет не более 10 см вод. ст., т. е. менее 1% от атмосферного.

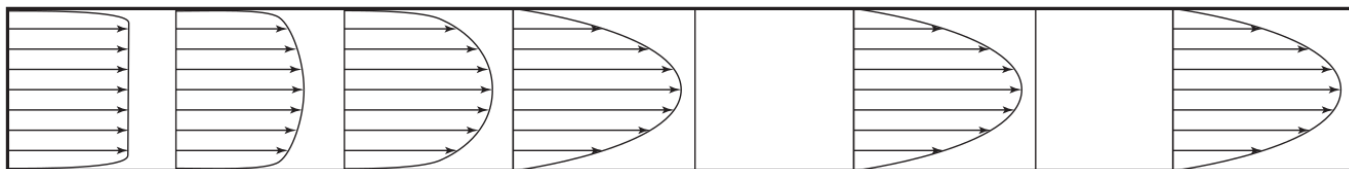


Рис. 1: Формирование потока газа в трубке круглого сечения

Формула (1) выводится для участков трубки, на которых закон распределения скоростей газа по сечению не меняется при движении вдоль потока.

При втекании газа в трубку из большого резервуара скорости слоёв вначале постоянны по всему направлению. По мере продвижения газа по трубке картина распределения скоростей меняется, так как сила трения о стенку тормозит прилежащие к ней оси. Характерное для ламинарного течения параболическое распределение скоростей устанавливается на некотором расстоянии a от входа в трубку, которое зависит от радиуса трубки r и числа Рейнольдса по формуле

$$l_{\text{уст}} \approx 0.2rRe \quad (3)$$

Градиент давления на участке формирования потока оказывается больше, чем на участке с установившимся ламинарным течением, что позволяет разделить эти участки экспериментально. Формула (2) даёт возможность оценить длину участка формирования.

3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер: $\sigma_s = 0,6$ с

Спиртовый микрометр: $\sigma_m =$

Газовый счётчик: $\sigma_r =$

Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 2. Поток воздуха под давлением, немного превышающим атмосферное, поступает через газовый счётчик в тонкие металлические трубки. Воздух нагнетается компрессором, интенсивность его подачи регулируется краном К. Трубки снабжены съёмными заглушками на концах и рядом миллиметровых отверстий, к которым можно подключать микроманометр. В рабочем состоянии открыта заглушка на одной (рабочей) трубке, микроманометр подключён к двум её выводам, а все остальные отверстия плотно закрыты пробками.

Перед входом в газовый счётчик установлен водяной U-образный манометр. Он служит для измерения давления газа на входе, а также предохраняет счётчик от выхода из строя. При превышении максимального избыточного давления на входе счётчика (~ 30 см вод. ст.) вода выплёскивается из трубки в защитный баллон Б, создавая шум и привлекая к себе внимание экспериментатора.

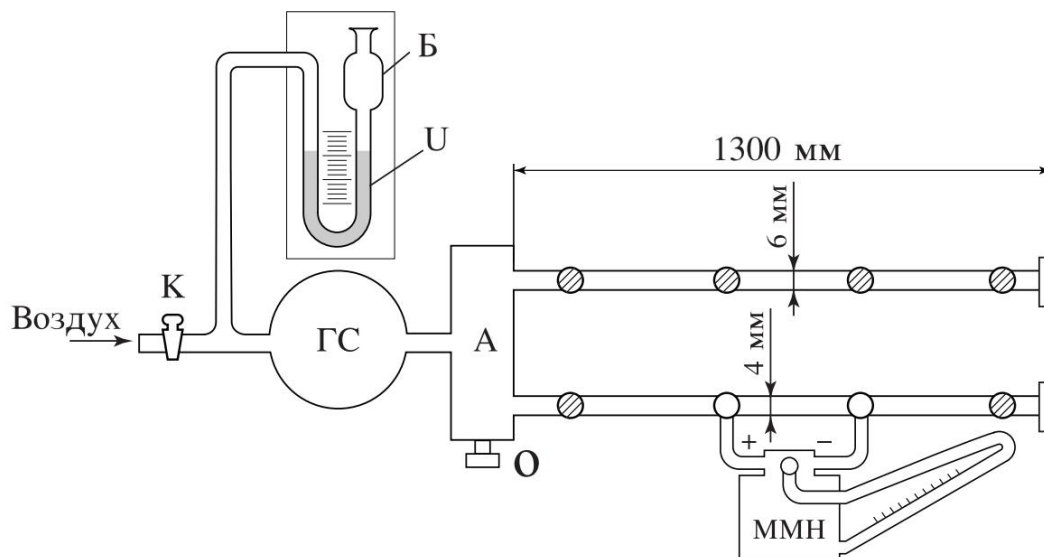


Рис. 2: Формирование потока газа в трубке круглого сечения

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Подготовка установки

Ознакомимся с устройством, проверим, что предварительная настройка оборудования была проведена правильно.

Ознакомимся с измерительными шкалами приборов.

4.2 Запуск установки

Запустим установку и убедимся, что всё оборудование работает корректно.

Подсоединим манометр к двум соседним выводам трубки с диаметром $d_1 = (3,90 \pm 0,05)$ мм. Убедимся, что все отверстия плотно завинчены пробками (кроме выходного). Убедимся, что кран К закрыт, и включим компрессор. Далее создадим небольшой поток воздуха и убедимся, что показания микроманометра стабильны.

4.3 Измерение параметров

Запишем параметры трубок:

$$d_1 = (3,90 \pm 0,05) \text{ мм}, \quad d_2 = (5,25 \pm 0,05) \text{ мм}$$

Теперь измерим параметры окружающей среды:

$$T_0 = (297,7 \pm 0,3) \text{ К}, \quad \varphi = 16,8\%, \quad P_0 = 100420 \text{ Па}$$

Вычислим плотность воздуха по этим данным $\rho = \mu P_0 / RT_0 \approx 1,18 \text{ кг/м}^3$.

4.4 Предварительные расчёты

Оценим критическое значение расхода $Q_{\text{кр}}$:

$$Re_{\text{кр}} = \frac{\bar{u} r \rho}{\eta} = \frac{Q_{\text{кр}} \rho}{\pi r \eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{\text{кр}} = \frac{\pi r \eta Re_{\text{кр}}}{\rho} = \frac{RT_0 \pi d_1 \eta Re_{\text{кр}}}{2\mu P_0} = \frac{8,31 \cdot 297,7 \cdot 3,14 \cdot 3,90 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 1000}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 100420} 60 \approx 6 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

Рассчитаем критический перепад давления в трубе $\Delta P_{\text{кр}}$ по формуле Пуазейля:

$$\Delta P_{\text{кр}} = \frac{Q_{\text{кр}} 8 \eta l}{\pi r^4} = \frac{0,0001 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5}{3,14 \cdot (3,90 \cdot 10^{-3} / 2)^4} \approx 176 \text{ Па}$$

Оценим длину $l_{\text{уст}}$

$$l_{\text{уст}} = 0,2r \cdot Re = 0,2 \cdot \frac{3,90}{2} \cdot 1000 \approx 390 \text{ мм}$$

4.5 Нахождение границы перехода от ламинарного течения к турбулентному

Меняя расход с помощью крана К визуально найдём границу перехода от ламинарного течения к турбулентному.

4.6 Подборка параметров измерения расхода

Подберём параметры измерения расхода так, чтобы относительная погрешность составила не более, чем 1 %. Для этого нужно проводить измерения не менее 30 секунд при любом расходе.

4.7 Измерение зависимости перепада давления от расхода

Измерим зависимость перепада давления от расхода. Для этого будем постепенно увеличивать значение расхода до тех пор, пока течение остаётся ламинарным. Когда течение станет турбулентным замерим ещё несколько точек. Все результаты измерения занесём в таблицу 1.

4.8 Измерение распределения давления вдоль трубы

Измерим распределение давления газа вдоль трубки $P(x)$. Установим поток воздуха так, чтобы он сохранил ламинарность. Не меняя расхода, последовательно будем подсоединять микроанометр к каждой соседней паре выходов и измерить разницу давления. Результаты измерений запишем в таблицу 2.

4.9 Измерения для второй трубы

Проведём измерения, аналогичные пунктам 4.4-4.8, для второй трубы с диаметром $d_2 = (5,25 \pm 0,05)$ мм. Все результаты измерений запишем в таблицы 3 и 4 соответственно.

N	h , мм	Q , л/мин	ΔP , Па
1	5	0,341	7,9
2	10	0,683	15,9
3	15	1,000	23,8
4	20	1,353	31,8
5	25	1,667	39,7
6	30	1,989	47,6
7	35	2,286	55,6
8	40	2,636	63,5
9	45	2,937	71,5
10	50	3,245	79,4
11	55	3,553	87,4
12	60	3,864	95,3
13	65	4,131	103,2
14	70	4,431	111,2
15	75	4,712	119,1
16	80	4,981	127,1
17	90	5,317	142,9
18	100	5,506	158,8
19	110	5,685	174,7
20	120	5,897	190,6
21	130	6,108	206,5
22	140	6,308	222,4
23	150	6,501	238,2
24	160	6,656	254,1
25	170	6,865	270,0
26	180	7,019	285,9
27	190	7,195	301,8
28	200	7,394	317,6
29	210	7,542	333,5

Таблица 1: *Измерение зависимости давления от расхода для первой трубы*

N	x , см	L , см	h , мм	ΔP , Па
1	81	50	50	79,4
2	41	40	40	63,5
3	11	30	30	47,6
4	0	11	38	60,4

Таблица 2: *Измерение распределения давления вдоль первой трубы*

N	h , мм	Q , л/мин	ΔP , Па
1	9	1,969	14,3
2	14	3,106	22,2
3	19	4,171	30,2
4	24	5,223	38,1
5	29	6,293	46,1
6	34	7,226	54,0
7	44	7,838	69,9
8	54	8,311	85,8
9	64	8,748	101,6
10	74	9,326	117,5
11	84	9,931	133,4
12	94	10,497	149,3
13	104	11,101	165,2
14	114	11,715	181,1
15	124	12,303	196,9
16	134	12,760	212,8
17	144	13,287	228,7
18	154	13,795	244,6
19	164	14,298	260,5
20	174	14,785	276,4
21	184	15,260	292,2
22	194	15,733	308,1
23	204	16,084	324,0
24	214	16,434	339,9

Таблица 3: *Измерение зависимости давления от расхода для второй трубы*

1	80,5	50	20	31,8
2	40,5	40	17	27,0
3	10,5	30	13	20,6
4	0	10,5	17	27,0

Таблица 4: *Измерение распределения давления вдоль второй трубы*

4.10 Измерение зависимости расхода от радиуса при выбранном градиенте

Данный пункт работы не выполнялся.

4.11 График зависимости расхода от перепада давления

Построим график зависимости расхода от перепада давления $Q(\Delta P)$. Зависимость на ламинарном и турбулентном участках должна быть прямой (по отдельности), поэтому для каждого участка можем воспользоваться МНК для нахождения наилучшей прямой. В данном случае $x = \Delta P$, а $y = Q$. Для аппроксимации наилучшей прямой воспользуемся формулой:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \text{ а } b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \quad (4)$$

Погрешности для k и b рассчитываются по формулам:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \quad (5)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (6)$$

Посчитаем значения МНК для каждой трубы и для каждого участка.

$$k_1^{\text{лам}} = \frac{237,206 - 2,738 \cdot 67,50}{5896,35 - 67,50^2} \approx 0,039 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$\sigma_{k1}^{\text{лам}} = \frac{1}{\sqrt{16}} \sqrt{\frac{9,547 - 2,738^2}{5896,35 - 67,50^2} - 0,0391^2} \approx 0,003 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$k_1^{\text{турб}} = \frac{1513,139 - 230,29 \cdot 6,355}{57134,70 - 230,29^2} \approx 0,0121 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$b_1^{\text{турб}} = 6,355 - 0,0121 \cdot 230,29 \approx 3,57 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

$$\sigma_{k1}^{\text{турб}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{40,991 - 6,355^2}{57134,70 - 230,29^2} - 0,0121^2} \approx 0,0002 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$\sigma_{b1}^{\text{турб}} = 0,0002 \sqrt{57134,70 - 230,29^2} \approx 0,01 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

$$k_2^{\text{лам}} = \frac{235,708 - 39,25 \cdot 5,118}{1854,76 - 39,25^2} \approx 0,111 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$\sigma_{k2}^{\text{лам}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{30,207 - 5,118^2}{1854,76 - 39,25^2} - 0,111^2} \approx 0,008 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$k_2^{\text{турб}} = \frac{2753,237 - 204,88 \cdot 12,345}{48766,71 - 204,88^2} \approx 0,0330 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$b_2^{\text{турб}} = 12,345 - 0,0330 \cdot 204,88 \approx 5,59 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

$$\sigma_{k2}^{\text{турб}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \sqrt{\frac{159,807 - 12,345^2}{48766,71 - 204,88^2} - 0,0330^2} \approx 0,0004 \frac{\text{л}}{\text{мин} \cdot \text{Па}}$$

$$\sigma_{b2}^{\text{турб}} = 0,0004 \sqrt{48766,71 - 204,88^2} \approx 0,04 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

Теперь изобразим графики прямых для трубы 1 и для трубы 2 на рис. 3 и 4 соответственно.

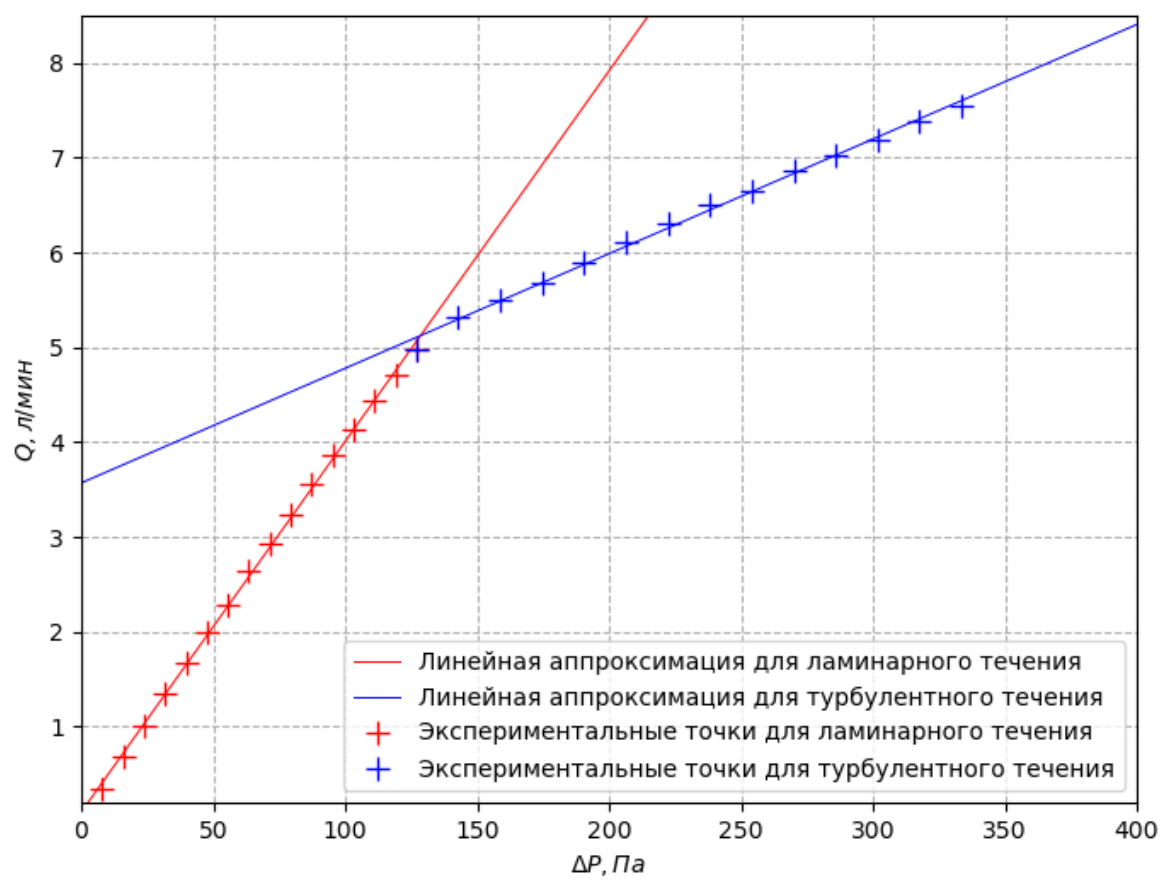


Рис. 3: График зависимости Q от ΔP для первой трубы

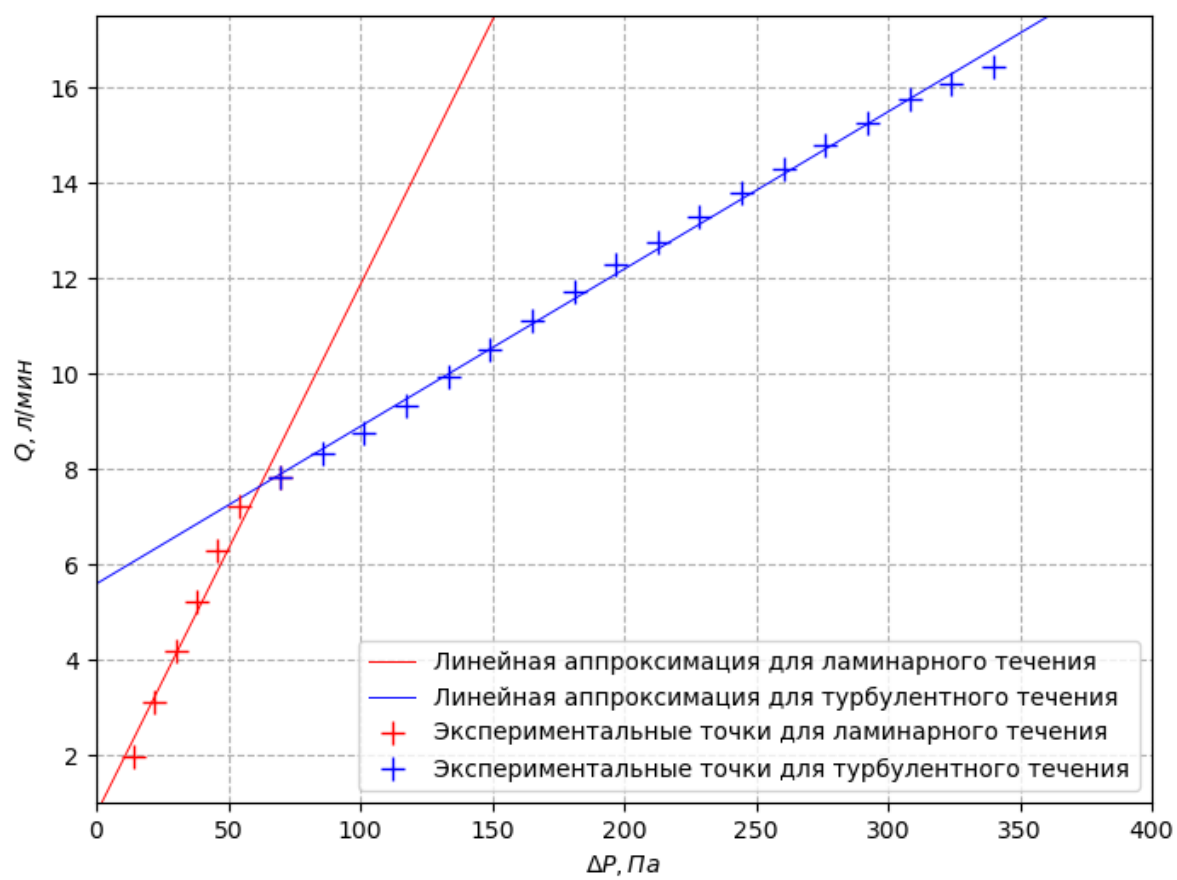


Рис. 4: График зависимости Q от ΔP для второй трубы

Из формулы (2), получаем

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8l\eta} \text{ и } Q = k\Delta P \implies \eta = \frac{\pi r^4}{8lk} = \frac{\pi d^4}{128lk} \quad (7)$$

Погрешность вычисления коэффициента вязкости можно вычислить по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial d}\right)^2 (\sigma_d)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial l}\right)^2 (\sigma_l)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial k}\right)^2 (\sigma_k)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\eta}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\eta}{l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\eta}{k}\right)^2 \sigma_k^2} = \eta \sqrt{16 \frac{\sigma_d^2}{d^2} + \frac{\sigma_l^2}{l^2} + \frac{\sigma_k^2}{k^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

По этой формуле вычислим значение вязкости для обеих трубок:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\pi r^4}{8lk_1^{\text{лам}}} = \frac{3,14 \cdot (3,90 \cdot 10^{-3}/2)^4}{8 \cdot 0,5 \cdot 0,0391/60000} \approx 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \\ \sigma_{\eta 1} &= 1,7 \cdot 10^{-5} \sqrt{16 \frac{0,05^2}{3,90^2} + \frac{0,5^2}{50,0^2} + \frac{0,003^2}{0,039^2}} \approx 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \\ \eta_2 &= \frac{\pi r^4}{8lk_2^{\text{лам}}} = \frac{3,14 \cdot (5,25 \cdot 10^{-3}/2)^4}{8 \cdot 0,5 \cdot 0,111/60000} \approx 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \\ \sigma_{\eta 2} &= 2,0 \cdot 10^{-5} \sqrt{16 \frac{0,05^2}{3,90^2} + \frac{0,5^2}{50,0^2} + \frac{0,003^2}{0,039^2}} \approx 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \end{aligned}$$

Видно, что полученные значения в пределах погрешности совпадают. Тогда вязкость равна:

$$\eta = (1,85 \pm 0,2) \text{ Па} \cdot \text{с} \quad (9)$$

Теперь можем рассчитать критическое число Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$:

$$Re_{\text{кр}} = \frac{Q_{\text{кр}} \rho}{\pi r \eta} = \frac{5/60000 \cdot 1,18}{3,14 \cdot (3,90 \cdot 10^{-3}/2) \cdot 1,85 \cdot 10^{-5}} \approx 900$$

4.12 Зависимость давления от координаты

Построим график зависимости давления от координаты подключения микроманометра. При ламинарном тесении эта зависимость должна быть прямой, поэтому можем воспользоваться МНК. В данном случае $x = \Delta P$, а $y = Q$. Для аппроксимации наилучшей прямой воспользуемся формулой:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \text{ а } b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \quad (10)$$

Погрешности для k и b рассчитываются по формулам:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \quad (11)$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (12)$$

5 Посчитаем значение для точек ламинарного течения для обеих труб:

$$k_1 = \frac{3187,066 - 44,3 \cdot 63,5}{2787,67 - 44,3^2} \approx 0,45 \text{ Па/см}$$

$$b_1 = 63,5 - 0,45 \cdot 44,3 \approx 43,5 \text{ Па}$$

$$\sigma_{k1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4204,172 - 63,5^2}{2787,67 - 44,3^2} - 0,45^2} \approx 0,02 \text{ Па/см}$$

$$\sigma_{b1} = 0,02 \sqrt{2787,67 - 44,3^2} \approx 0,6 \text{ Па}$$

$$k_2 = \frac{1289,121 - 43,8 \cdot 26,5}{2743,58 - 43,8^2} \approx 0,16 \text{ Па/см}$$

$$b_2 = 26,5 - 0,16 \cdot 43,8 \approx 19,6 \text{ Па}$$

$$\sigma_{k2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{721,436 - 26,5^2}{2743,58 - 43,8^2} - 0,16^2} \approx 0,02 \text{ Па/см}$$

$$\sigma_{b2} = 0,02 \sqrt{2743,58 - 43,8^2} \approx 0,4 \text{ Па}$$

Нанесём график для трубы 1 и для трубы 2 на рис. 5 и на рис. 6 соответственно.

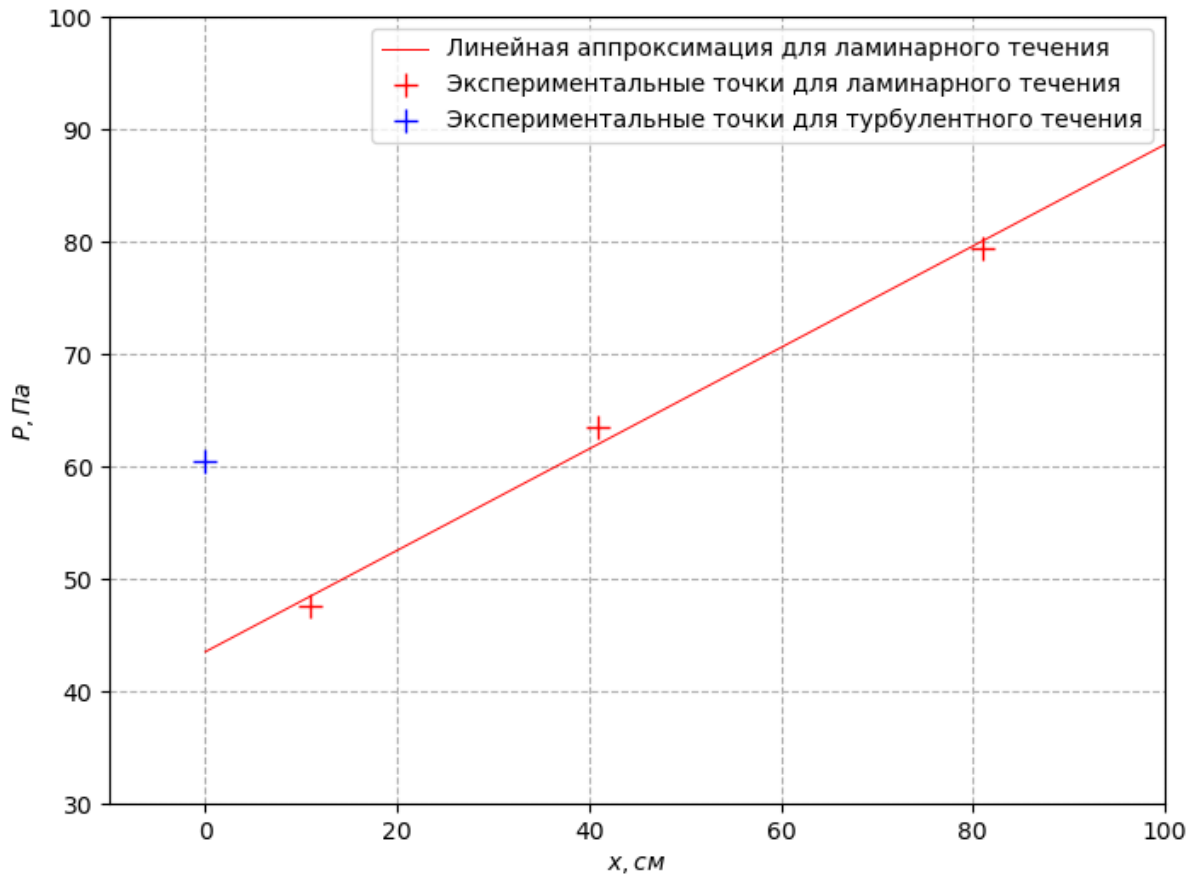


Рис. 5: График зависимости P от x для первой трубы

Из графиков видно, что значение $l_{уст}$ значительно меньше, чем теоретическое значение.

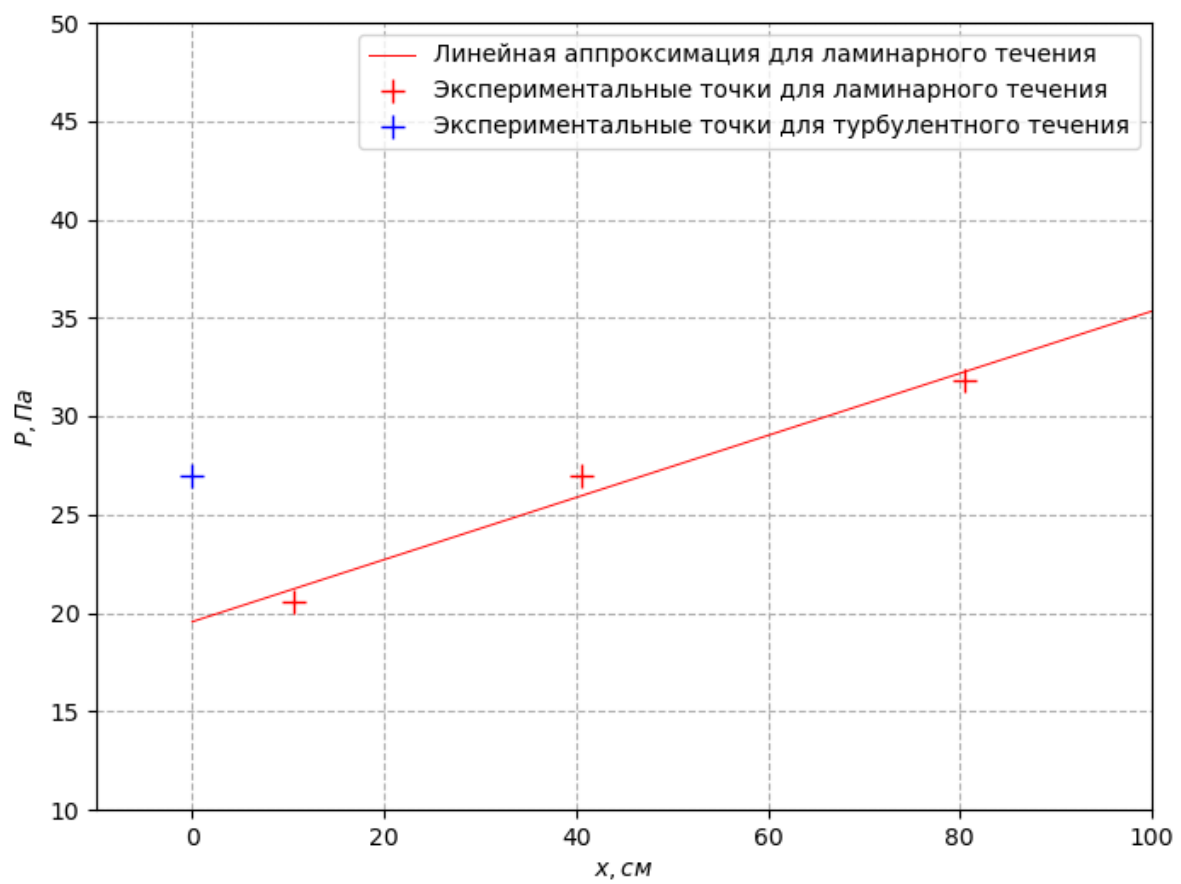


Рис. 6: График зависимости P от x для второй трубы

4.13 Проверка зависимости расхода от радиуса

Данный пункт работы не выполнялся, так как не выполнялся пункт 4.10.

4.14 Зависимость $Q(\Delta P)$

На турбулентном участке расход Q должен линейно зависеть от $\sqrt{\Delta P r^5}$, для проверки этой зависимости воспользуемся МНК. В данном случае $x = \sqrt{\Delta P r^5}$, а $y = Q$. Параметры наилучшей прямой можно найти как:

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}, \quad \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2} \quad (13)$$

Посчитаем коэффициенты наилучшей прямой:

$$k = \frac{1361,819}{17204,738} \approx 0,0792 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Па} \cdot \text{мм}^5}}$$
$$\sigma_k = \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{32}} \sqrt{\frac{107,825^2}{17204,738^2} - 0,0792^2} \approx 0,0002 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Па} \cdot \text{мм}^5}}$$

Нанесём прямую и точки на рис. 7.

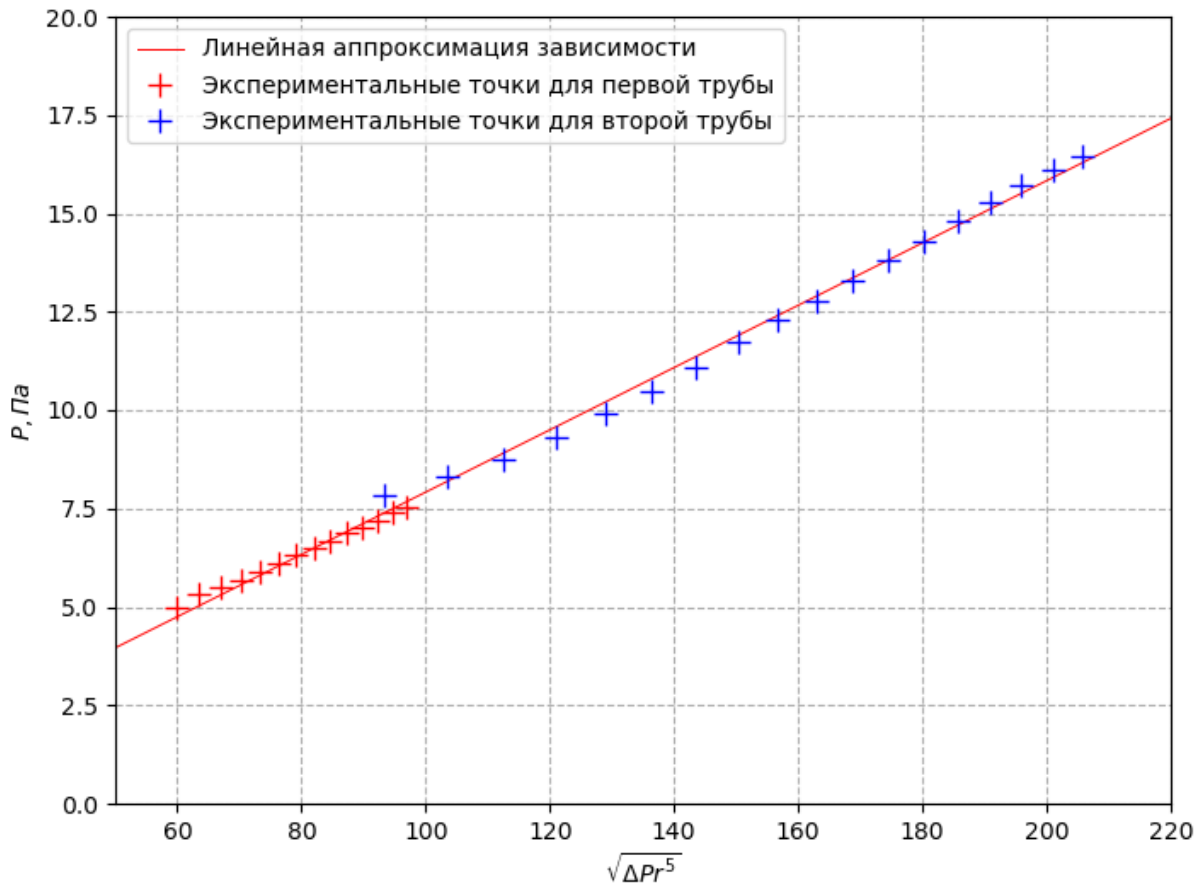


Рис. 7: График зависимости Q от $\sqrt{\Delta P r^5}$

Из графика видно, что зависимость выполняется.