

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 1.4.8

Измерение модуля Юнга методом  
акустического резонанса

Автор:  
Макаров Лев Евгеньевич  
Б04-306

# 1 Введение

## Цель работы:

1. исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне
2. измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров
3. измерить модули Юнга различных материалов

## В работе используются:

- генератор звуковых частот
- частотомер
- осциллограф
- электромагнитные излучатель и приёмник колебаний
- набор стержней из различных материалов

# 2 Теоретические сведения

Согласно закону Гука при приложении к элементу среды механического напряжения  $\sigma$  возникает относительная деформация в этом направлении  $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}$ , определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E \quad (1)$$

При кратковременном воздействии в среде возникает кратковременная волна, называемая акустической или звуковой. Скорость распространения этой волны  $u$  равна

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

Рассмотрим стержень длиной  $L$ . Его можно считать тонким в направлении распространения волн, если длина  $\lambda$  звуковых волн в нём сильно больше радиуса:  $\lambda \gg R$ . Такая волна может распространяться только вдоль стержня.

Акустическая волна отражается от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

Волновое уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3)$$

Здесь  $\xi(x, t) = f(x - ut)$ , где  $f$  – произвольная функция. Это дифференциальное уравнение описывает распространение упругих волн в тонком стержне. Оно имеет универсальный

характер и описывает волны самой разной природы: акустические волны в твёрдых телах, жидкостях и газа, волны на струне, электромагнитные волны и т.п. Величина  $u$  в уравнении (3) имеет смысл скорости распространения волны.

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой  $f$  продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin \omega t - kx + \varphi_1 + A_2 \sin \omega t - kx + \varphi_2 \quad (4)$$

где  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота.  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

Первое слагаемое (4) описывает гармоническую (синусоидальную) волну, бегущую в положительном направлении по  $x$ , второе — в отрицательном. Соотношения между амплитудами  $A_{1,2}$  и начальными фазами  $\varphi_{1,2}$  этих волн, а также возможные частоты колебаний  $\omega$ , определяются граничными условиями на концах стержня. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть концы стержня не закреплены. Тогда напряжения в них должны равняться нулю. Положим координаты торцов равными  $x = 0$  и  $x = L$ . Тогда, используя связь напряжения и деформации

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5)$$

запишем граничные условия для свободных (незакреплённых) концов стержня:

$$\sigma(0) = 0 \longrightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \sigma(L) = 0 \longrightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (6)$$

Соотношения (6) должны выполняться в произвольный момент времени. Записывая первое граничное условие (6) для функции (4), найдём

$$-kA_1 \cos \omega t + \varphi_1 + kA_2 \cos \omega t + \varphi_2 = 0 \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что это соотношение будет выполняться при любом  $t$ , если только у «падающей» и «отражённой» волн одинаковы амплитуды

$$A_1 = A_2 \quad (8)$$

и фазы

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (9)$$

Условие равенства амплитуд (8) можно интерпретировать как условие отражения волн от торцов без потери энергии. Поскольку на практике потери неизбежны, это условие выполняется лишь приближённо:  $A_1 \approx A_2$ . Условие (9) означает, что при отражении синусоидальной волны от свободного конца стержня, её фаза не изменяется. Нетрудно также убедиться, что если же концы стержня закрепить ( $\xi|_{x=0} = \xi|_{x=L} = 0$ ), то фазы падающей и отражённой волн будут отличаться друг от друга на  $\pi$ .

Далее, перепишем исследуемую функцию (4), используя граничные условия (8) и (9) и формулу суммы синусов:

$$\xi(x, t) = 2A \cos kx \sin \omega t + \varphi \quad (10)$$

Колебания вида (10) называют гармоническими стоячими волнами. Наконец, воспользуемся вторым граничным условием (6) применительно к функции (10). В результате придём к уравнению  $\sin kL = 0$ , решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел  $k$ :

$$k_n L = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (11)$$

или, выражая (13) через длину волны  $\lambda = 2\pi/k$ , получим

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

Допустимые значения частот

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (13)$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной  $L$ . Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот  $f_n$  в стержне возникает акустический резонанс.

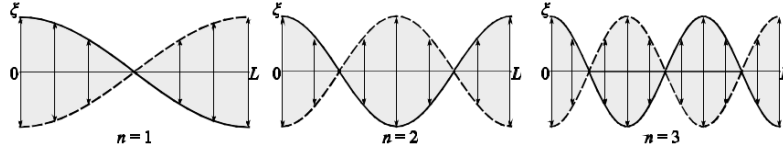


Рис. 1: Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами (для наглядности изображение дано не в масштабе, реальные смещения малы по сравнению с длиной стержня,  $\xi \ll L$ )

Зависимость амплитуды смещения  $\xi$  от координаты  $x$  для собственных колебаний стержня с незакреплёнными концами при  $n = 1, 2, 3$  представлена на рис. 1. Амплитуда колебаний смещения среды распределена вдоль стержня по гармоническому закону:  $\xi_0(x) = 2A \cos kx$ . Точки с максимальной амплитудой называются пучностями смещения, точки с минимальной (нулевой) амплитудой — узлами смещения. Номер гармоники  $n$  определяет количество узлов смещения на стержне. Заметим, что согласно закону Гука (1) в пучности смещения имеет место узел напряжения, и, наоборот, в узлах смещения имеется пучность напряжения (в частности, на свободных торцах стержня напряжение всегда нулевое, а деформация максимальна).

Напоследок отметим, что в реальной системе стоячая волна не может быть получена в чистом виде: всегда существуют потери энергии, связанные, в том числе с отражением волн на краях стержня ( $A_1 \neq A_2$ ). Поэтому для поддержания колебаний необходимо наличие некоторого стороннего возбудителя, а к стоячей волне примешивается бегущая с малой амплитудой:  $|A_1 - A_2| \ll A_{1,2}$ . Также именно благодаря бегущим волнам энергия может передаваться от одних частей стержня к другим (в стоячей волне энергия не переносится, а только переходит из кинетической в потенциальную и обратно).

### 3 Оборудование и экспериментальные погрешности

**Штангенциркуль:**  $\sigma_{шт} = \pm 0,005$  см

**Электронные весы ВЛТЭ-310:**  $\sigma_m = \pm 0,003$  г

**Микрометр:**  $\Delta_{мкм} = \pm 0,01$  мм

**Измеритель частоты:**  $\Delta_{\text{ч}} = \pm 0,3$  Гц

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Настройка осциллографа

Проведём предварительную настройку осциллографа. Выставим настройки согласно рисунку 2. Таким образом при включении установки в дальнейшем мы получим фигуру Лиссажу на

экране. Включим все приборы.



Рис. 2: Предварительные настройки осциллографа

## 4.2 Подготовка эксперимента

Развяднем датчики и поместим между ними на подставку исследуемый стержень. В начале используется медный стержень. Длина стержня  $L = (600 \pm 0,5)$  мм.

## 4.3 Установка электромагнитов

Разместим электромагниты напротив торцов стержня так, чтобы торцы стержня совпали с центрами датчиков, а зазор между полюсами электромагнита и торцевой поверхностью стержней составлял 1–3 мм. Плоскость магнитов должна быть строго перпендикулярна оси стержня. Электромагниты не должны касаться стержня.

## 4.4 Предварительная оценка резонансных частот

Для этого оценим частоту первого резонанса  $f_1 = u/2L$ , где  $u$  – табличное значение скорости звука в среде. Для меди  $u = 3790$  м/с. А значит  $f_1 \approx 3160$  Гц. Значит резонансную частоту для стержня будем искать в этом диапазоне значений.

## 4.5 Настройка утановки

Медленно перестраивая звуковой генератор вблизи оценочного значения  $f_1$  найдём первый резонанс. Приближение к резонансу характеризуется появлением фигуры Лиссажу на экране осциллографа. Для увеличения сигнала колебаний стержня нужно очень осторожно придвигать датчики к торцам стержня, не допуская прилипания стержня к датчикам. На экране осциллографа должна получиться фигура, напоминающая бочку (рис. 3). При резонансе амплитуда принятого сигнала достигает максимума и не меняется во времени.

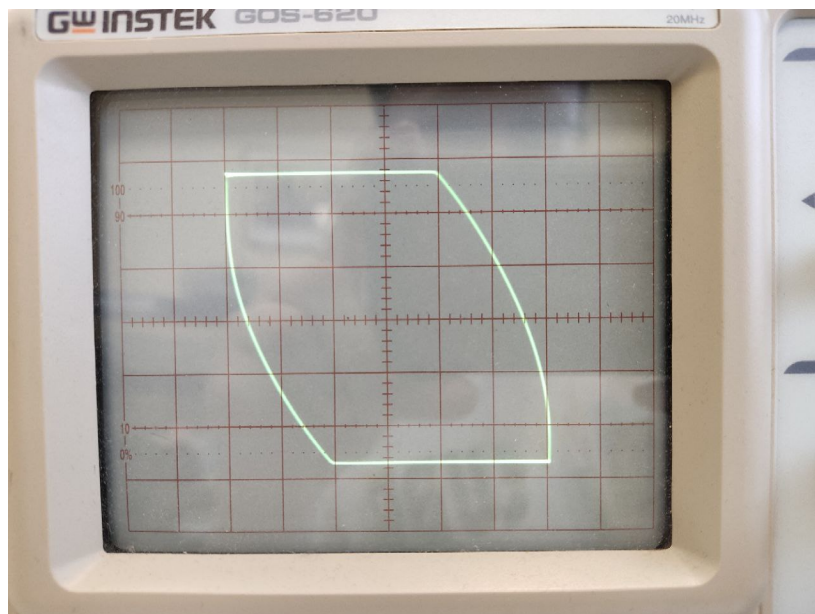


Рис. 3: Бочка

## 4.6 Получение первого резонанса

Согласно предыдущему пункту определим значение первого резонанса.

$$f_1 = 3218,7 \text{ Гц} \quad (14)$$

Погрешность измерения равна утроенному последнему разряду измерения:  $\sigma_{f_1} = 0,3 \text{ Гц}$ .

## 4.7 Определение резонансных частот

Для определения значения резонансных частот оценим следующие значения по формуле:

$$f_n = n f_1 \quad (15)$$

После чего будем искать резонанс в районе полученных значений по аналогии с первым резонансом и результаты измерений запишем в таблицу 1.

n	1	2	3	4	5	6	7
f, Гц	3218,7	6444,2	9663,7	12890,0	16105,0	19308,0	22472,0

Таблица 1: Результаты измерения резонансных частот для медного стержня

Погрешность измерений равна  $\sigma_f = 0,3 \text{ Гц}$ .

## 4.8 Определение плотности стержня

Плотность стержня будем определять используя несколько цилиндрических образцов, сделанных из того же материала, что и стержень. Для каждого измерим: диаметр с помощью микрометра, высоту с помощью штангенциркуля и массу с помощью электронных весов. После чего посчитаем плотность по формуле:

$$\rho = \frac{4m}{\pi h d^2} \quad (16)$$

Приборную погрешность измерения плотности вычислим по формуле:

$$\sigma_{\rho}^{\text{приб}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2} \quad (17)$$

Результаты всех измерений запишем в таблицу 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
d, мм	11,85	11,96	11,85	11,75	12,11	11,96	11,94	11,95
h, мм	29,8	30,3	30,1	40,3	40,0	40,5	39,7	41,5
m, г	29,109	30,106	29,453	38,710	40,989	40,347	39,382	41,333
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	8857	8844	8872	8858	8897	8868	8859	8880
$\sigma_{\rho}^{\text{приб}}$ , кг/м <sup>3</sup>	33	33	33	27	27	26	27	26

Таблица 2: Измерение плотности стержня

Среднее значение  $\bar{\rho} = 8867$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда случайную погрешность можно вычислить по формуле:  $\sigma_{\rho}^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (\rho_i - \bar{\rho})^2} \approx 6$  кг/м<sup>3</sup>.

Тогда погрешность измерения плотности  $\sigma_{\rho} = \sqrt{(\sigma_{\rho}^{\text{сл}})^2 + (\sigma_{\rho}^{\text{приб}})^2} \approx 30$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда плотность медного стержня равна:

$$\rho_{\text{м}} = (8867 \pm 30) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (18)$$

#### 4.9 Проверка справедливости соотношения $R/\lambda \ll 1$

Диаметр стержня напрямую не измерялся но он сравним с диаметром образцов  $d \approx 12$  мм. Длина волны при резонансе  $\lambda$  вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \implies \frac{R}{\lambda} = \frac{Rn}{2L} = \frac{dn}{4L} \quad (19)$$

Тогда если это соотношение выполняется для наибольшего  $n$ , то и для всех меньших значений оно тоже выполняется:

$$\lambda = \frac{dn}{4L} \approx 0,035 \ll 1 \quad (20)$$

Отсюда следует, что соотношение выполняется для всех  $n \leq 7$ . Поэтому во время работы стержень можем считать тонким.

#### 4.10 Опыты с другими стержнями

Повторим опыты пунктов 4.2-4.9 для двух других стержней: стального и дюралюминиего.

Для обоих стержней измерим значение семи резонансных частот аналогично медному и запишем в таблицу 3.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f_{\text{ст}}$ , Гц	4128,6	8285,1	12400,0	16529,0	20653,0	24772,0	28882,0
$f_{\text{дюр}}$ , Гц	4246,2	8514,2	12742,0	16998,0	21225,0	25453,0	29662,0

Таблица 3: Результаты измерения резонансных частот для двух стержней

Измерим плотность стержней аналогично медному, результаты измерений для стального запишем в таблицу 4, а для дюралюминиего в таблицу 5.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
d, мм	11,98	11,83	11,99	12,00	12,00	11,99	11,89	12,11
h, мм	29,6	32,2	29,9	40,0	39,7	39,9	41,1	41,3
m, г	26,022	28,105	26,151	35,186	34,938	35,145	36,916	37,080
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7799	7941	7746	7778	7781	7801	8089	7795
$\sigma_{\rho}^{\text{приб}}$ , кг/м <sup>3</sup>	29	28	29	23	24	23	24	23

Таблица 4: Результаты измерения плотности стального стержня

Среднее значение  $\bar{\rho}_{\text{ст}} = 7841$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда случайную погрешность можно вычислить по формуле:  $\sigma_{\rho}^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (\rho_i - \bar{\rho})^2} \approx 41$  кг/м<sup>3</sup>.

Тогда погрешность измерения плотности  $\sigma_{\rho} = \sqrt{(\sigma_{\rho}^{\text{сл}})^2 + (\sigma_{\rho}^{\text{приб}})^2} \approx 48$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда плотность стального стержня равна:

$$\rho_{\text{ст}} = (7841 \pm 48) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (21)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
d, мм	12,05	11,85	11,73	11,73	11,85	11,74	11,75	12,12
h, мм	30,1	30,1	30,1	30,8	40,1	41,4	41,5	41,2
m, г	9,485	9,193	8,992	9,260	12,178	12,452	12,480	13,232
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2763	2769	2764	2782	2754	2779	2773	2784
$\sigma_{\rho}^{\text{приб}}$ , кг/м <sup>3</sup>	10	10	10	10	8	8	8	8

Таблица 5: Результаты измерения плотности дюралюминиевого стержня

Среднее значение  $\bar{\rho}_{\text{дюр}} = 2771$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда случайную погрешность можно вычислить по формуле:  $\sigma_{\rho}^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (\rho_i - \bar{\rho})^2} \approx 4$  кг/м<sup>3</sup>.

Тогда погрешность измерения плотности  $\sigma_{\rho} = \sqrt{(\sigma_{\rho}^{\text{сл}})^2 + (\sigma_{\rho}^{\text{приб}})^2} \approx 10$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда плотность дюралюминиевого стержня равна:

$$\rho_{\text{дюр}} = (2771 \pm 10) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (22)$$

Так как диаметр стержней одинаковый, а длина волн при резонансе такая же, то соотношение  $R/\lambda \ll 1$  выполняется для обоих стержней.

#### 4.11 Половинная частота резонанса

Для стержня из дюралюминия проведём дополнительный опыт: добъёмся резонанса при частоте генератора  $f = f_1/2 = 2123,5$  Гц. При этой частоте наблюдается фигура Лиссажу изображённая на рисунке 4.

Во время обычного резонанса частота собственных колебаний стержня равна частоте колебаний стоячих волн в нём. Во время же половинного резонанса, частота колебаний волн в два раза больше. Из-за этого вид фигуры Лиссажу меняется: она становится похожа на бабочку (рис. 4).

#### 4.12 Определение добротности стержня

Для стального стержня определим добротность, как для колебательной системы, измерив амплитудно-частотную характеристику  $A(f - f_1)$  вблизи первого резонанса.



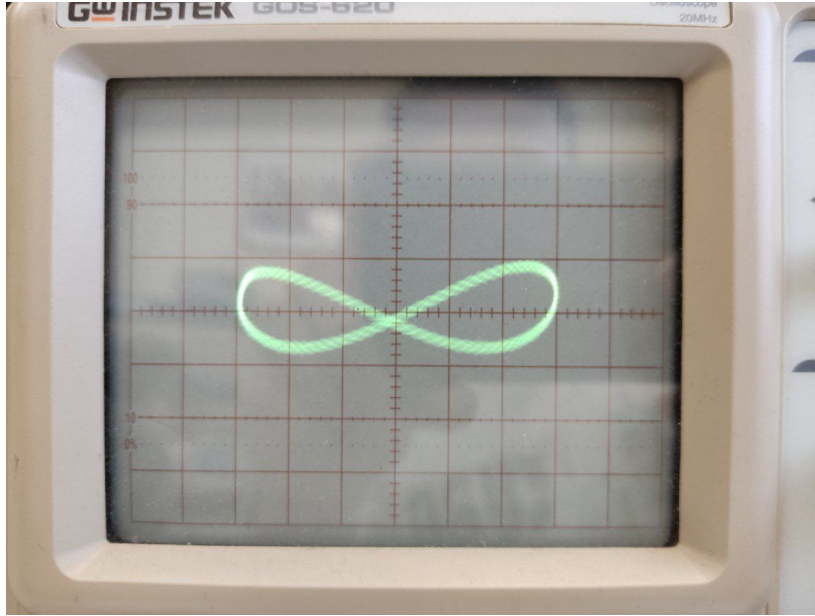


Рис. 4: Фигура Лиссажу при половинном резонансе

Ширина максимума функции  $A(f - f_1)$  связана с добротностью  $Q$  стержня как колебательной системы :

$$Q = \frac{f_n}{\Delta f} \quad (23)$$

где  $\Delta f$  – ширина АЧХ на уровне  $A = A_{max}/\sqrt{2}$ .

Получим резонанс в стержне при некоторой частоте  $f = (4129 \pm 0,3)$  Гц и, переключив СН1 в режим GND считаем показания  $A_{max} = (27 \pm 1)$  делений, соответственно  $A \approx 19$  делений. Измерим  $\Delta f = f_1 - f_2$ . Где  $f_1$  и  $f_2$  - частоты, при которых достигается значение  $A$ . Погрешность измерения  $\Delta f$  равна удвоенной погрешности измерения  $f$ :  $\sigma_{\Delta f} = 0,6$  Гц. Повторим это измерение три раза и результаты запишем в таблицу 6.

№	1	2	3
$f_1$ , Гц	4127,3	4127,4	4127,3
$f_2$ , Гц	4130,3	4130,5	4130,4
$\Delta f$ , Гц	3,0	3,1	3,1
$Q$	1376	1332	1332
$\sigma_Q^{\text{приб}}$	138	129	129

Таблица 6: Измерение ширины АЧХ при  $A$

Для каждого измерения так же вычислим добротность по формуле (23), где  $f_n = f$  и результаты запишем в таблицу.

Приборную погрешность измерения  $Q$  можно вычислить по формуле:

$$\sigma_Q^{\text{приб}} = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta f}}{\Delta f}\right)^2} \quad (24)$$

Вычислим её для каждого  $Q$  и результаты запишем в таблицу. Случайная погрешность  $Q$  пренебрежимо мала по сравнению с приборной, поэтому  $\sigma_Q \approx \sigma_Q^{\text{приб}}$ . Тогда добротность равна:

$$Q = 1347 \pm 132 \quad (25)$$

### 4.13 Опыты со стержнями другой длины

Во время выполнения работы аналогичные опыты со стержнями с другими параметрами не проводились.

### 4.14 Обработка результатов

Для каждого из исследуемых стержней построим график зависимости  $f_n$  от  $n$ . Для этого воспользуемся МНК. В данном случае  $u = f_n$ , а  $v = n$ . Так как зависимость согласно формуле должна быть линейной, получаем:

$$k_{\text{мед}} = \frac{\langle uv \rangle}{\langle v^2 \rangle} = 3217 \text{ Гц} \quad (26)$$

$$k_{\text{ст}} = \frac{\langle uv \rangle}{\langle v^2 \rangle} = 4129 \text{ Гц} \quad (27)$$

$$k_{\text{дюр}} = \frac{\langle uv \rangle}{\langle v^2 \rangle} = 4243 \text{ Гц} \quad (28)$$

Найдём погрешность  $\sigma_k$ :

$$\sigma_{k_{\text{мед}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle} - k^2} = 2 \text{ Гц} \quad (29)$$

$$\sigma_{k_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle} - k^2} = 1 \text{ Гц} \quad (30)$$

$$\sigma_{k_{\text{дюр}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle} - k^2} = 2 \text{ Гц} \quad (31)$$

График изображён на рисунке 5.

### 4.15 Определение скорости звука

Определим скорость звука в стержнях. Для этого воспользуемся формулой (13). Оттуда следует, что:

$$k = \frac{u}{2L} \implies u = 2Lk \quad (32)$$

Тогда случайная относительная погрешность  $\varepsilon_u = \varepsilon_k^{\text{случ}}$ .

Коэффициент  $k$  так же можно найти как  $k = f_n/n$ , поэтому приборная относительная погрешность  $k$  равна приборной относительной погрешности  $f_n$ :  $\varepsilon_k^{\text{приб}} = 0,01\%$ . Тогда

$$\varepsilon_k = \sqrt{(\varepsilon_k^{\text{случ}})^2 + (\varepsilon_k^{\text{приб}})^2} \quad (33)$$

Погрешность вычисления  $u$  равна:

$$\sigma_u = u \sqrt{(\varepsilon_L)^2 + (\varepsilon_k)^2} \quad (34)$$

Для каждого стержня рассчитаем  $u$  и  $\sigma_u$ , результаты измерений запишем в таблицу 7.

материал	медь	сталь	дюраль
$k$ , Гц	3217	4129	4243
$\varepsilon_k$ , %	1	1	1
$u$ , м/с	3860	4955	5092
$\sigma_u$ , м/с	39	50	51

Таблица 7: Скорость звука в стержнях

## 4.16 Определение модуля Юнга

Модуль Юнга для каждого стержня можно вычислить из формулы (2):  $E = u^2 \rho$

Погрешность нахождения модуля Юнга можно найти по формуле:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)^2 \sigma_\rho^2} \quad (35)$$

Вычислим модуль Юнга и погрешность для каждого стержня, результаты измерений запишем в таблицу 8. В эту же таблицу запишем табличные значения модуля Юнга для материалов.

материал	медь	сталь	дюраль
$\rho$	8867	7841	2771
$\sigma_\rho$	30	48	10
$E$ , ГПа	132	192	72
$\sigma_E$ , ГПа	3	4	1
$E_{\text{табл}}$ , ГПа	110	200	70

Таблица 8: Модуль Юнга для материалов стержней

## 5 Обсуждение результатов и выводы

Во время работы было исследовано явление акустического резонанса в тонких стержнях, сделанных из различных материалов.

Была измерена скорость распространения продольных звуковых колебаний в этих стержнях.

Был измерен модуль Юнга по полученным данным.

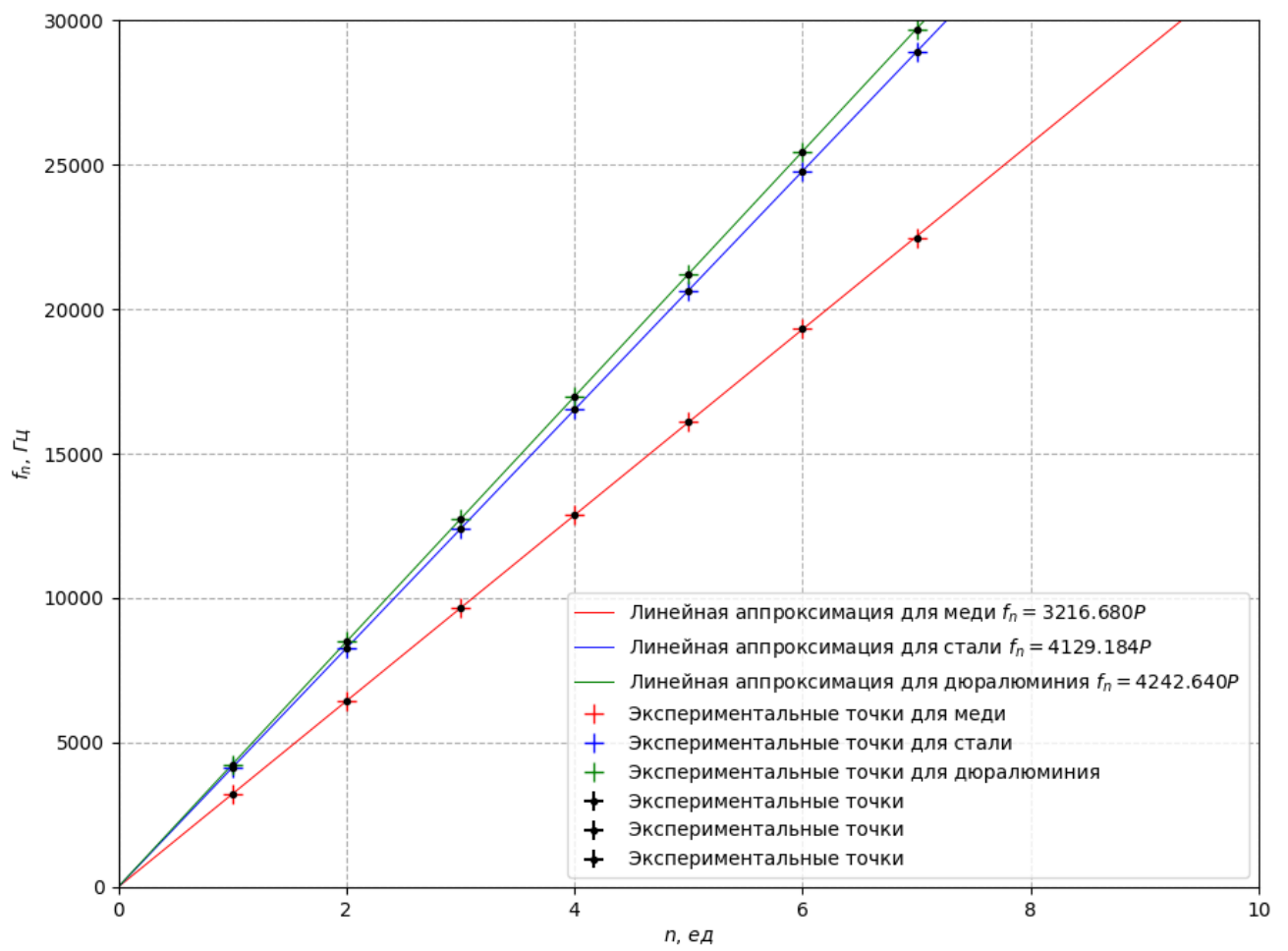


Рис. 5: График зависимости  $f_n$  от  $n$