

Машинное обучение

Лекция 2

Введение в машинное обучение

Метод k ближайших соседей

Сергей Корпачев

korpachev.ss@phystech.edu

sskorpachev@gmail.com

НИУ ВШЭ, 2026

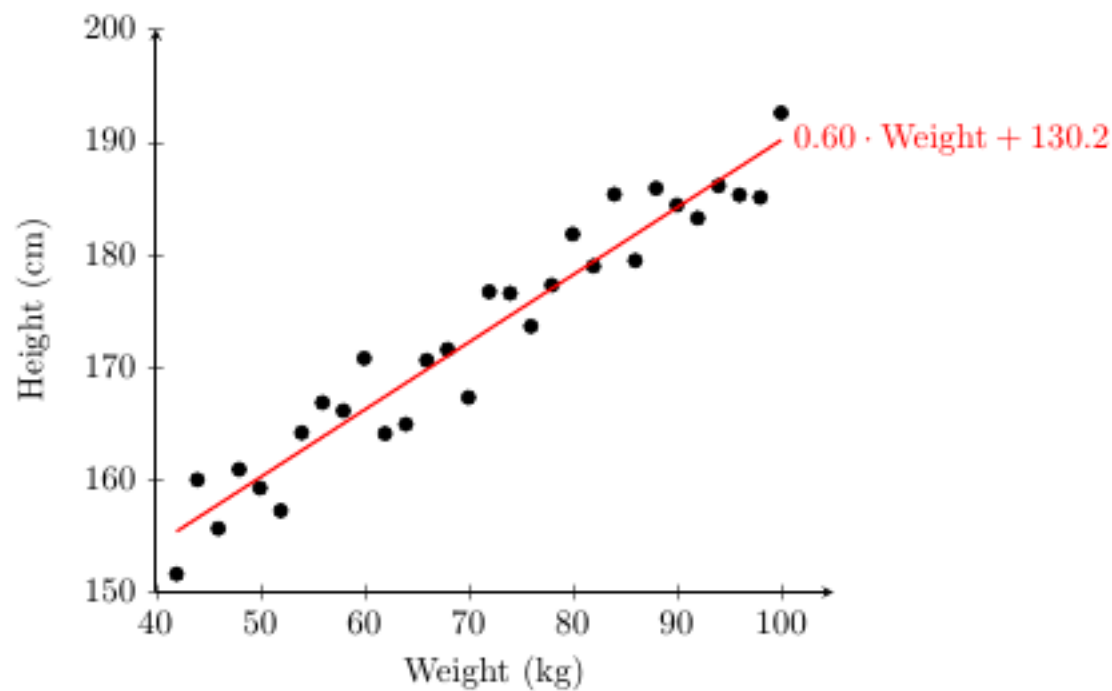
Напоминание

- \mathbb{X} — пространство объектов, \mathbb{Y} — пространство ответов
- $x = (x_1, \dots, x_d)$ — признаковое описание
- $X = (x_i, y_i)_{i=1}^{\ell}$ — обучающая выборка
- $a(x)$ — алгоритм, модель
- $Q(a, X)$ — функционал ошибки алгоритма a на выборке X
- Обучение: $a(x) = \arg \min_{a \in \mathcal{A}} Q(a, X)$

Типы ответов

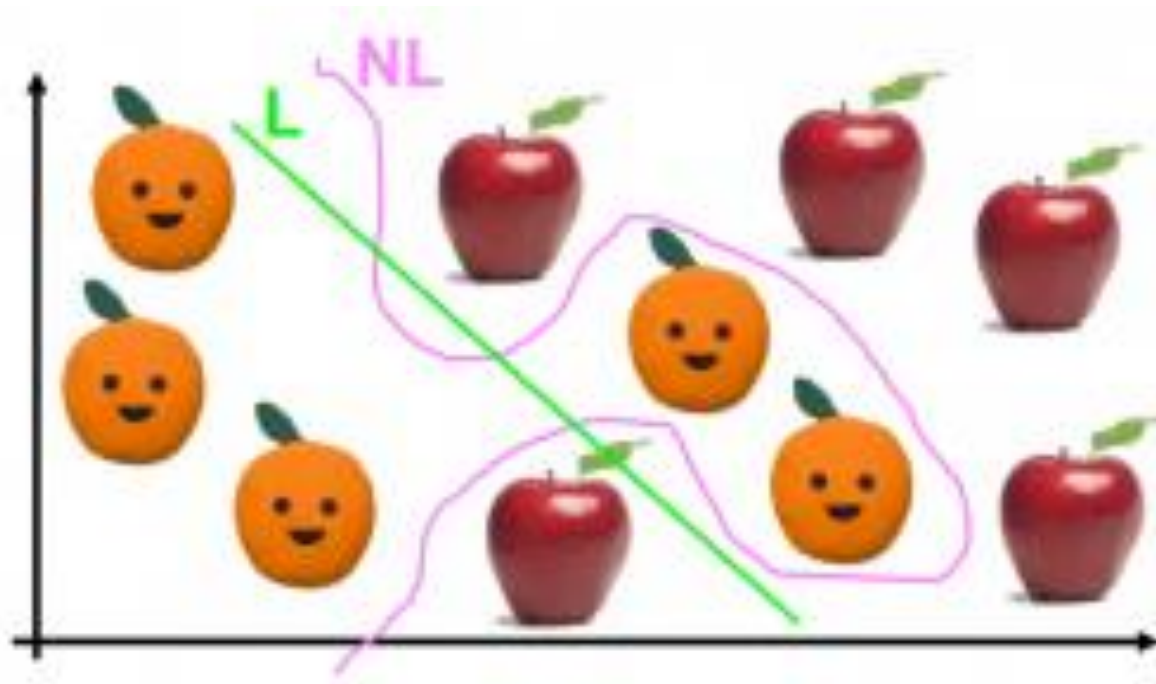
Регрессия

- Вещественные ответы: $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$
- (вещественные числа — числа с любой дробной частью)
- Пример: предсказание роста по весу



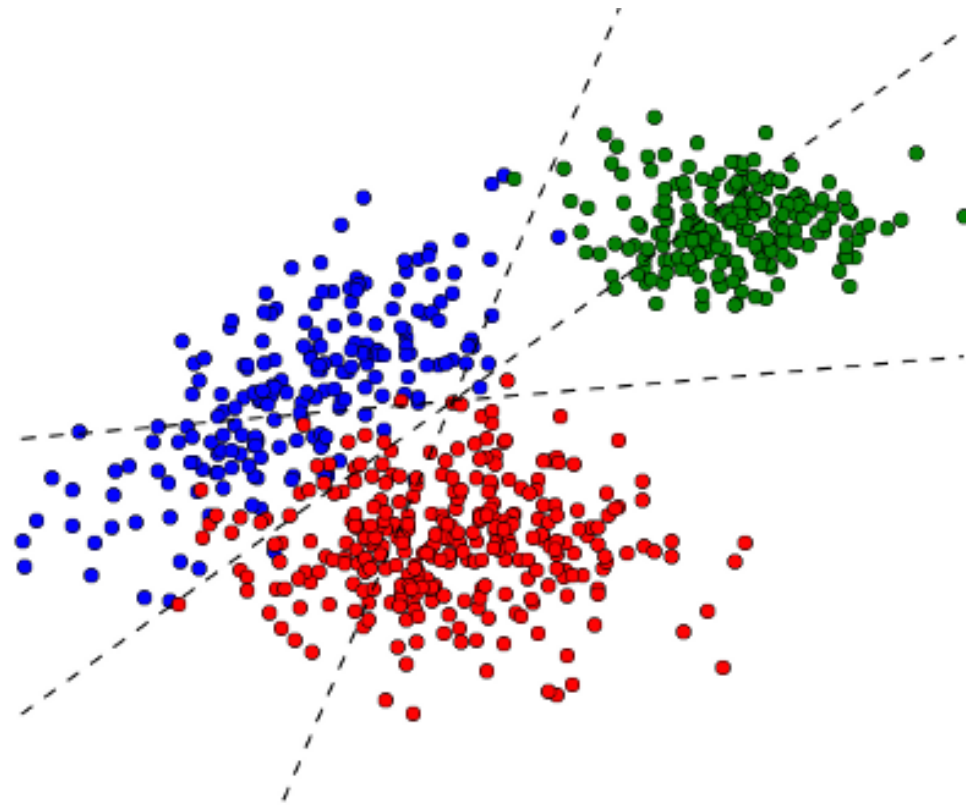
Классификация

- Конечное число ответов: $|\mathbb{Y}| < \infty$
- Бинарная классификация: $\mathbb{Y} = \{-1, +1\}$



Классификация

- Многоклассовая классификация: $\mathbb{Y} = \{1, 2, \dots, K\}$



Классификация

- Классификация с пересекающимися классами: $\mathbb{Y} = \{0, 1\}^K$
 - (multi-label classification)
- Ответ — набор из K нулей и единиц
- i -й элемент ответа — принадлежит ли объект i -му классу

- Какие темы присутствуют в статье?
- (математика, биология, экономика)

Ранжирование

- Набор документов d_1, \dots, d_n
- Запрос q
- Задача: отсортировать документы по *релевантности* запросу
- $a(q, d)$ — оценка релевантности

Ранжирование

Яндекс

картинки с котиками — 5 млн ответов



Найти

Поиск

Картинки

Видео

Карты

Маркет

Ещё



Картинки с кошками | Fun Cats — Забавные коты

[funcats.by](#) > [pictures/](#) ▼

Картинки с кошками. Прикольные коты. 777 **изображений**. ... 32 **изображения**. Кошки Стамбула. 41 **изображение**. Веселые котята.



Уморные котики (57 фото) » Бяки.нет | Картинки

[byaki.net](#) > **Картинки** > [14026-umornye-kotiki-57...](#) ▼

Бяки нет! . NET. Уморные **котики (57 фото)**. 223. Комментарии:9Автор:4ertonok
Просмотров:161 395 **Картинки**28-10-2008, 00:03.



Смешные картинки кошек с надписями | Лолкот.Ру

[lolkot.ru](#) ▼

Смешные **картинки** для новых приколов! Сделать свой прикол очень просто. ... **Котик** верит в чудеса. Он в носке подарок ищет...



Красивые картинки и фото кошек, котят и котов

[foto-zverey.ru](#) > **Кошки** ▼

Фото и картинки кошек и котят потрясающей красоты и нежности. Здесь мы собрали такие **изображения**, которые всегда вызывают море положительных эмоций...



Обои для рабочего стола Котят | картинки на стол Котят

[7fon.ru](#) > Чёрные обои и **картинки** > Обои котят ▼

Картинки Котят с 1 по 15. **Обои** для рабочего стола Котят. ... Скачать **Картинки** Котят на рабочий стол бесплатно.

Кластеризация

- Y — отсутствует
 - Нужно найти группы похожих объектов
 - Сколько таких групп?
 - Как измерить качество?
-
- Пример: сегментация пользователей мобильного оператора

Типы задач

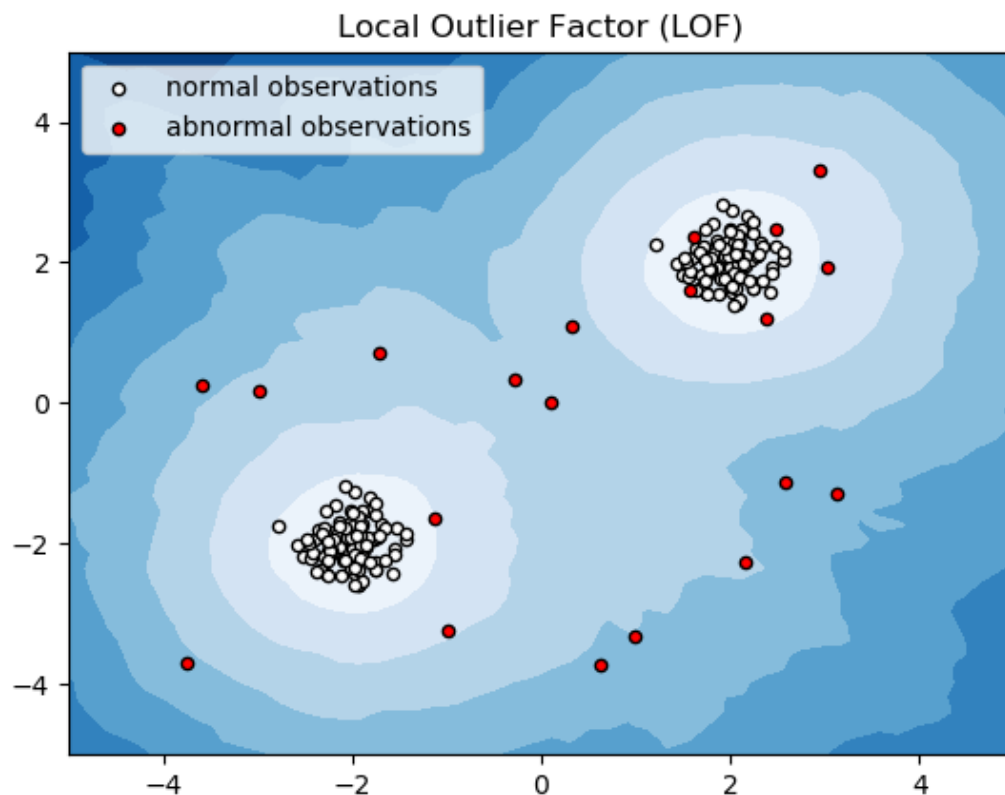
- Регрессия
- Классификация
- Кластеризация
- Много других: ранжирование, поиск аномалий и т.д.

ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ НЕТ ЦЕЛЕВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

- **Кластеризация** – задача разделения объектов на группы, при этом где целевые переменные для объектов неизвестны (или не существуют). Разделение происходит только на основе признаков описаний объектов.
- **Понижение размерности** – задача генерации новых признаков (их число меньше, чем число старых), так, что с их помощью задача решается не хуже, чем с исходными.
- **Оценивание плотности** – задача приближения распределения объектов.
- **Визуализация** – задача изображения многомерных объектов в 2х или 3х мерном пространстве с сохранением зависимостей между ними.

ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ ПЛОТНОСТИ

- Поиск аномалий с помощью оценивания плотностей



https://scikit-learn.org/0.19/auto_examples/neighbors/plot_lof.html

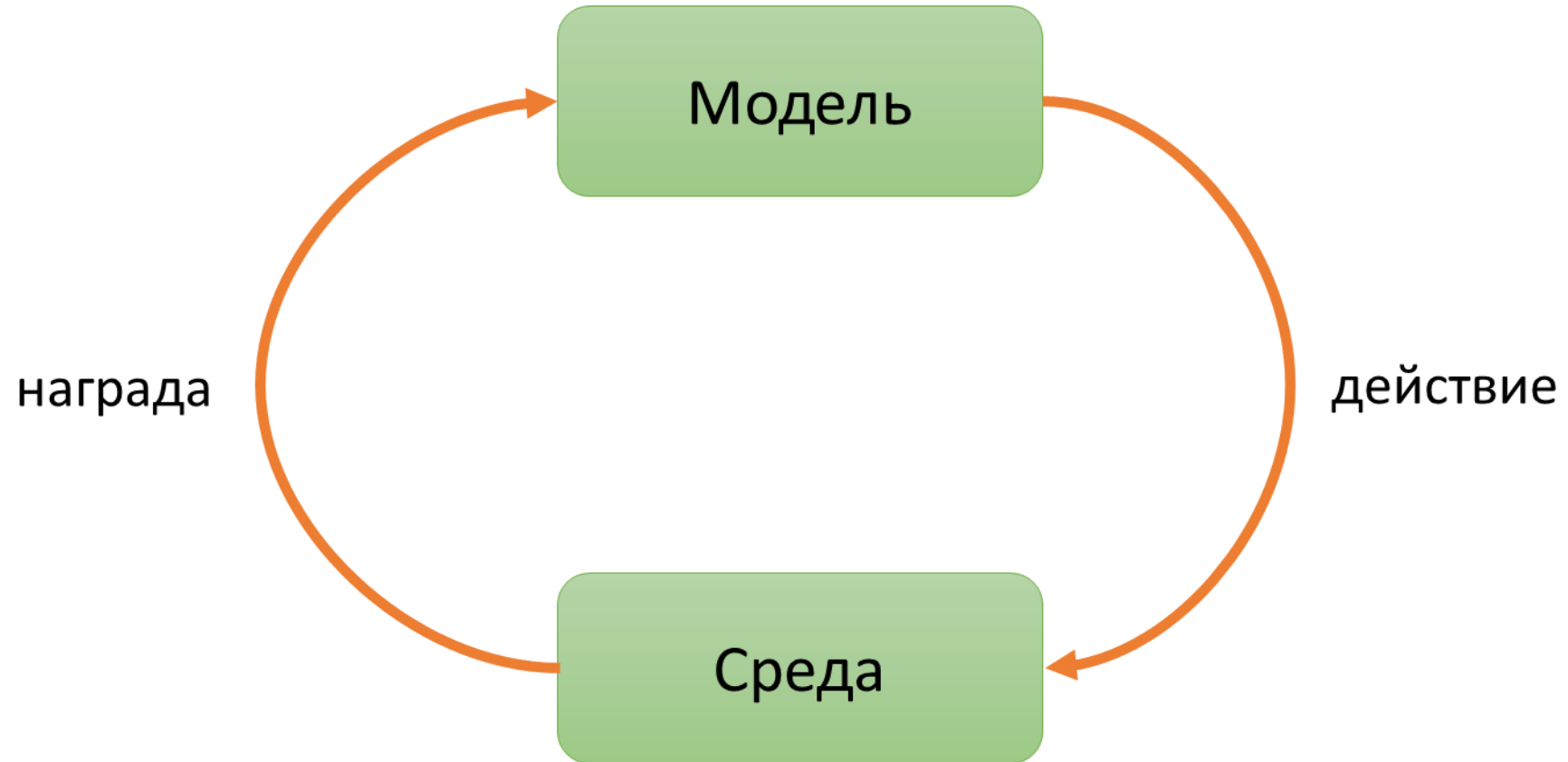
ТИПЫ ЗАДАЧ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

- Если нам известны значения целевой переменной, то есть алгоритм обучается так, чтобы правильно предсказывать целевую переменную – это **обучение с учителем**. Сюда относят классификацию, регрессию и ранжирование.

ТИПЫ ЗАДАЧ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

- Если нам известны значения целевой переменной, то есть алгоритм обучается так, чтобы правильно предсказывать целевую переменную – это **обучение с учителем**. Сюда относят классификацию, регрессию и ранжирование.
- Если нам неизвестны значения целевой переменной или целевая переменная вообще отсутствует, то есть алгоритм обучается только по признакам объектов, то это **обучение без учителя**. Примерами обучения с учителем являются кластеризация, понижение размерности и др.

Обучение с подкреплением



Типы признаков

Типы признаков

- D_j — множество значений признака

Бинарные признаки

- $D_j = \{0, 1\}$
- Доход клиента выше среднего по городу?
- Цвет фрукта — зеленый?

Вещественные признаки

- $D_j = \mathbb{R}$
- Возраст
- Площадь квартиры
- Количество звонков в колл-центр

Категориальные признаки

- D_j — неупорядоченное множество
- Цвет глаз
- Город
- Образование (может быть упорядоченным)
- Очень трудны в обращении

Порядковые признаки

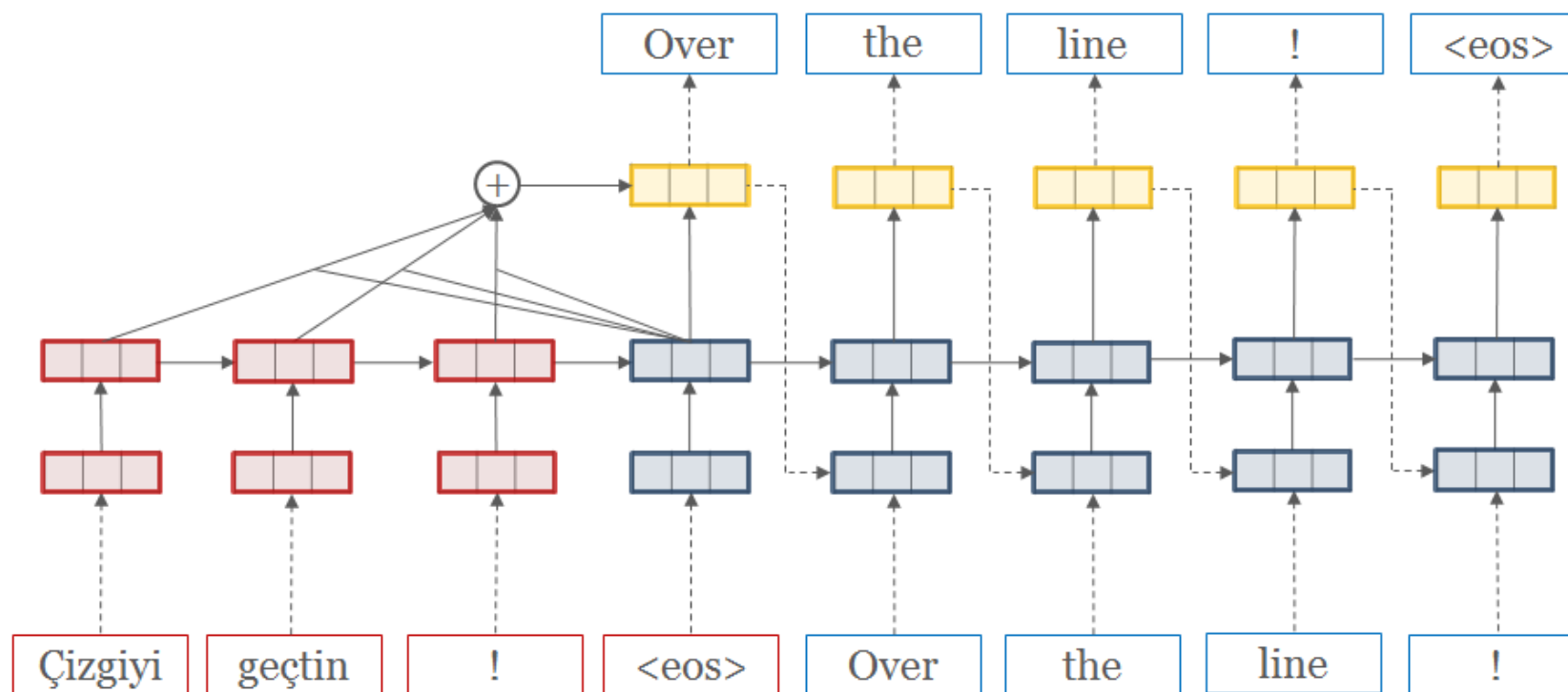
- D_j — упорядоченное множество
- Военское звание
- Роль в фильме (первого плана, второго плана, массовка)
- Тип населенного пункта

Типы признаков

- Бинарные
- Числовые
- Категориальные и порядковые
- Есть и более сложные: тексты, изображения, звук и т.д.

Зачем это нужно?

Машинный перевод

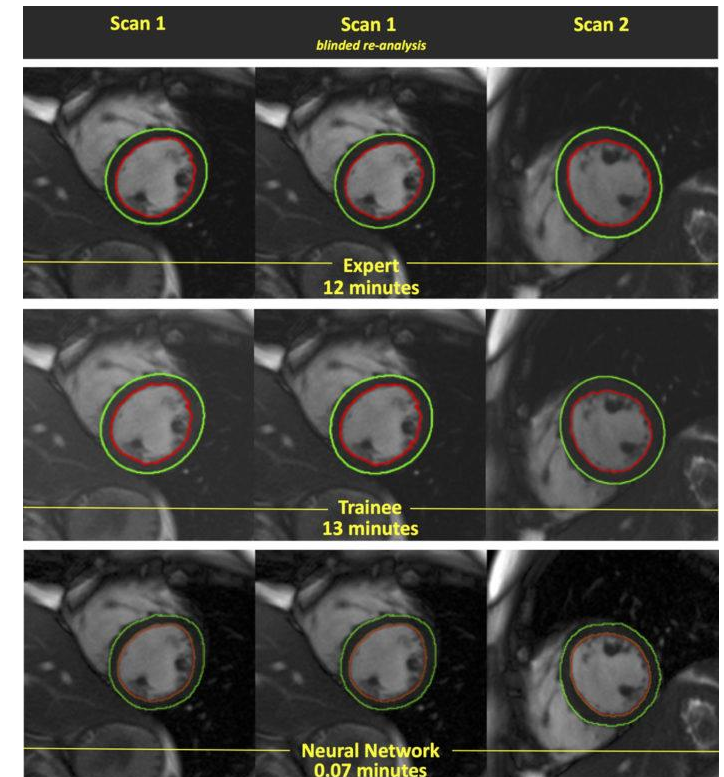


Генерация текста

- ChatGPT, YandexGPT, GigaChat и т.д.

Биоинформатика и медицина

- Поиск связей между ДНК и заболеваниями (23andme и другие)
- Таргетные лекарства
- Анализ медицинских снимков



Сельское хозяйство

- Робототехника
- Мониторинг посевов и почвы
- Прогнозирование болезней и урожайности



Рекомендательные системы

- Полки рекомендаций на Amazon генерируют 35% от всех покупок
- Рекомендации на основе машинного обучения и анализа больших объёмов данных

Frequently Bought Together

 +  + 

Price For All Three: \$86.01

[Add all three to Cart](#) [Add all three to Wish List](#)

[Show availability and shipping details](#)



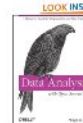
☒ **This item:** Machine Learning for Hackers by Drew Conway Paperback **\$33.87**

☒ Machine Learning in Action by Peter Harrington Paperback **\$25.75**

☒ Programming Collective Intelligence: Building Smart Web 2.0 Applications by Toby Segaran Paperback **\$26.39**

Customers Who Bought This Item Also Bought

Page 1 of 17

 Programming Collective Intelligence: Building ... Toby Segaran ★★★★☆ (84) Paperback \$26.39	 Machine Learning in Action Peter Harrington ★★★★☆ (10) Paperback \$25.75	 Mining the Social Web: Analyzing Data from ... Matthew A. Russell ★★★★☆ (19) Paperback \$26.36	 Data Analysis with Open Source Tools Philipp K. Janert ★★★★☆ (29) Paperback \$24.05	 R Cookbook (O'Reilly Cookbooks) Paul Teetor ★★★★☆ (18) Paperback \$32.43	 The Art of R Programming: A Tour of Statistical ... Norman Matloff ★★★★☆ (29) Paperback \$25.06
--	---	---	--	---	--

Are any of these items inappropriate for this page? [Let us know](#)

Зачем это нужно?

- Это круто
 - Сложные задачи
 - Движение к искусственному интеллекту (что бы это ни значило)
- Это полезно
 - Извлечение прибыли из данных
 - Data-driven companies

Как можно заниматься анализом данных?

- Data scientist
 - Работа с данными
 - Знание инструментов и методов
 - Опыт решения задач
- Менеджер
 - Понимание, как работает машинное обучение
 - Понимание узких мест, оценивание сроков
- Заказчик
 - Метрики качества
 - Требования к данным
 - Ограничения современных подходов

Гипотеза компактности и knn

Как отличить ель от сосны?



Как отличить ель от сосны?



Как отличить ель от сосны?



Ель:

- Ветки смотрят вверх
- Ствол не видно
- Густые иголки
- Цвет ближе к зелёному



Сосна:

- Ветки параллельны земле
- Ствол видно
- Иголки более редкие
- Цвет ближе к жёлтому

Как отличить ель от сосны?



Ветки вверх
Ствол не видно
Густые иголки
Цвет ближе к синему

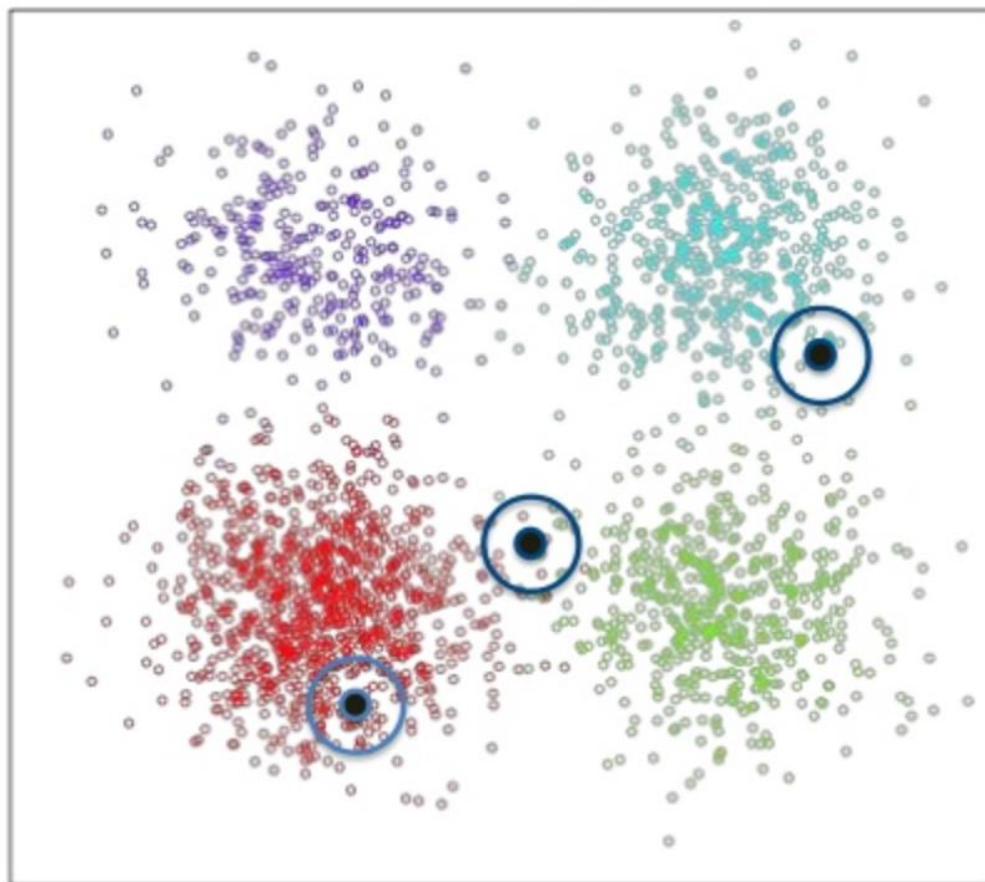


Скорее всего ель

Что такое обучение?

- Запоминаем примеры (объекты и ответы)
- Когда приходит новый объект, сравниваем с запомненными примерами
- Выдаём ответ от наиболее похожего примера

Гипотеза компактности



Гипотеза компактности

Если два объекта похожи друг на друга, то ответы на них
тоже похожи

kNN: обучение

- Дано: обучающая выборка $X = (x_i, y_i)_{i=1}^{\ell}$
- Задача классификация (ответы из множества $\mathbb{Y} = \{1, \dots, K\}$)
- Обучение модели:
 - Запоминаем обучающую выборку X

kNN: применение

Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сортируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Выдаём наиболее популярный среди них класс:

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k [y_{(i)} = y]$$

kNN: применение

Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сертируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Выдаём наиболее популярный среди них класс:

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k [y_{(i)} = y]$$

kNN: применение

Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сортируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Выдаём наиболее популярный среди них класс:

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k [y_{(i)} = y]$$

kNN: применение

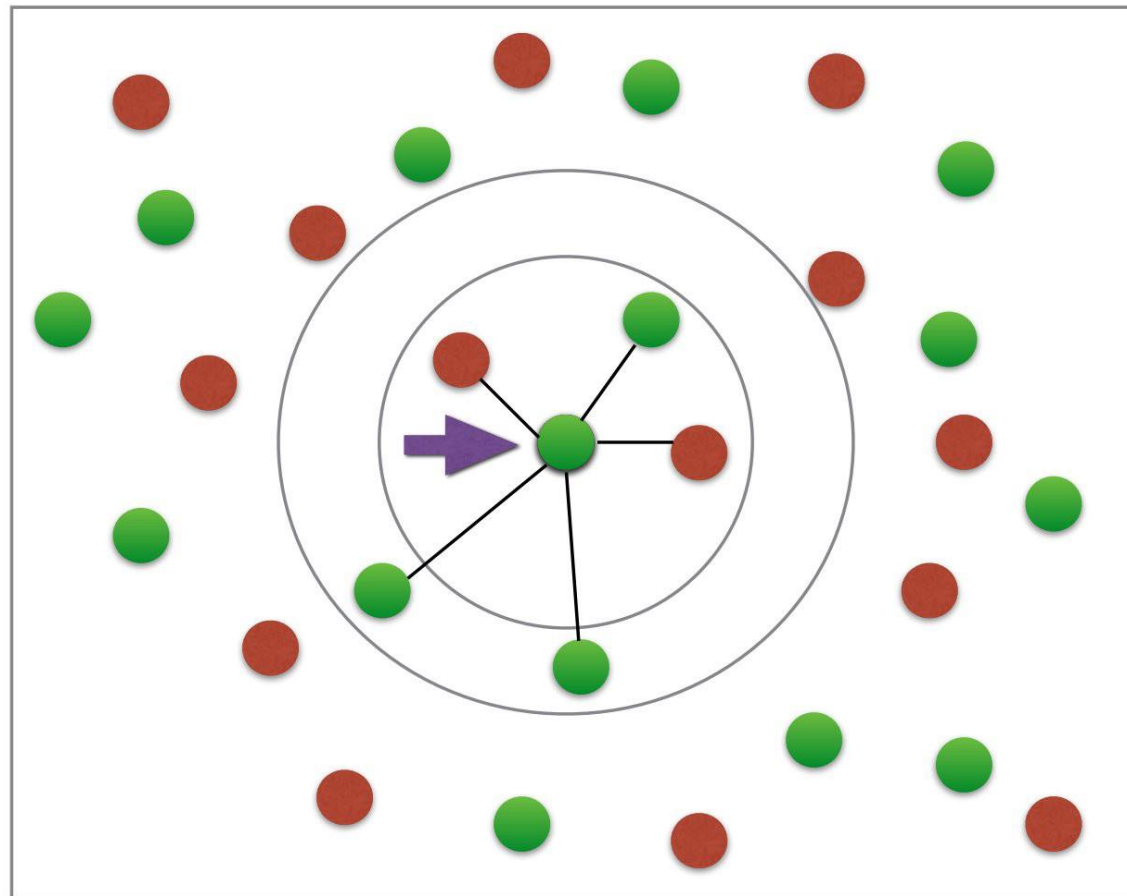
Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сортируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Выдаём наиболее популярный среди них класс:

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k [y_{(i)} = y]$$

kNN: применение



Сравнение объектов и метрики

Числовые данные

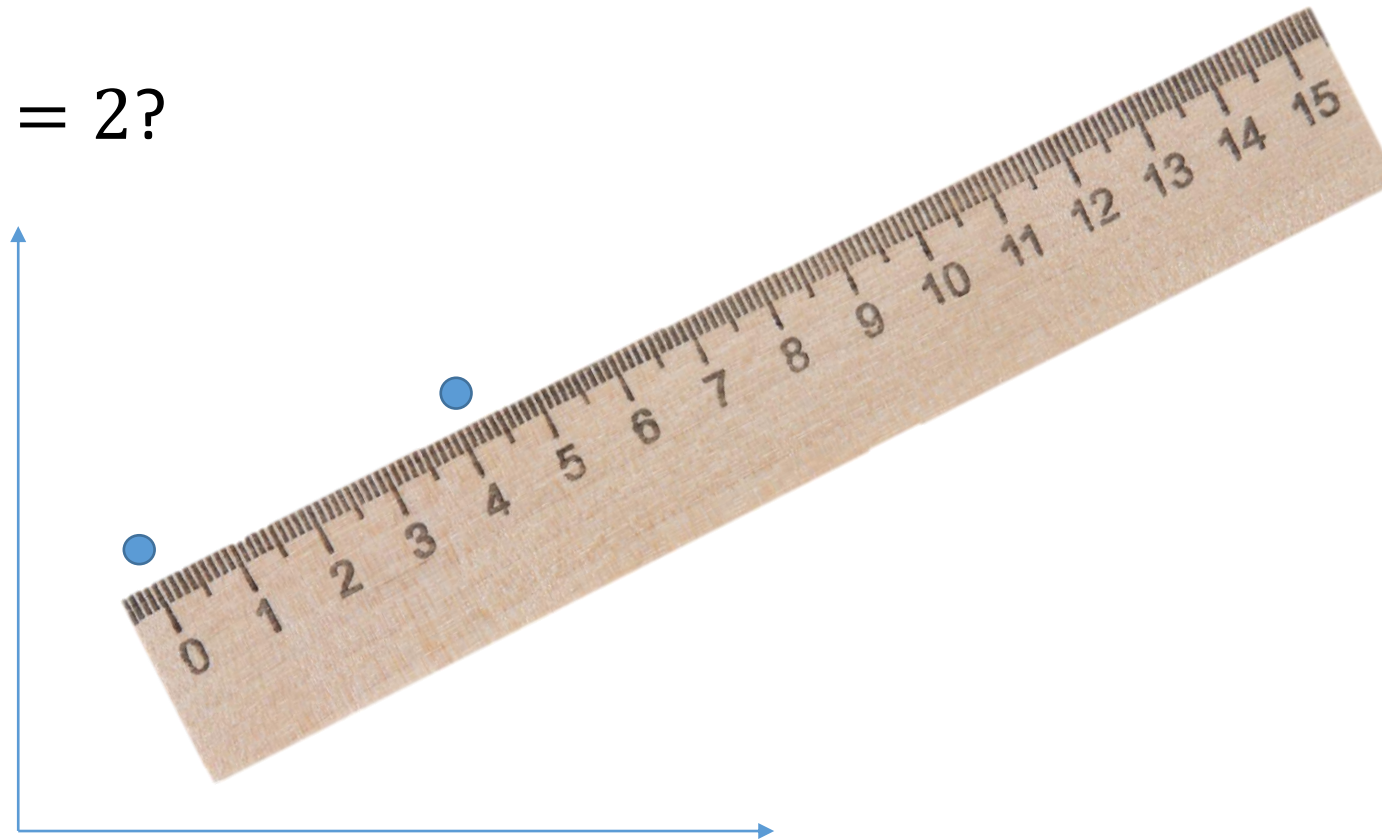
Сколько раз в день вызывает такси	Средние расходы на такси в день	Как часто вызывал комфорт	Возраст	Согласился повысить категорию?
2	400	0.3	29	да
0.3	80	0	28	нет
...

Числовые данные

- Каждый объект описывается набором из d чисел — **вектором**
- Если x — вектор, то x_i — его i -я координата
- Если x_i — вектор, то x_{ij} — его j -я координата

Числовые данные

- Каждый объект описывается набором из d чисел — **вектором**
- Что, если $d = 2$?



Метрика

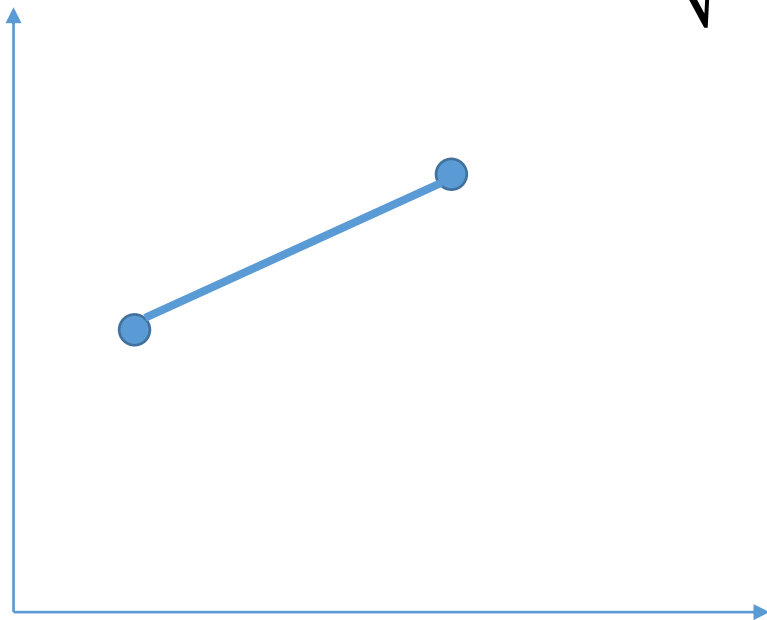
Метрика — обобщение расстояния на многомерные пространства

Метрика — это функция ρ с двумя аргументами, удовлетворяющая трём требованиям:

- $\rho(x, z) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = z$
- $\rho(x, z) = \rho(z, x)$
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, v) + \rho(v, z)$ — неравенство треугольника

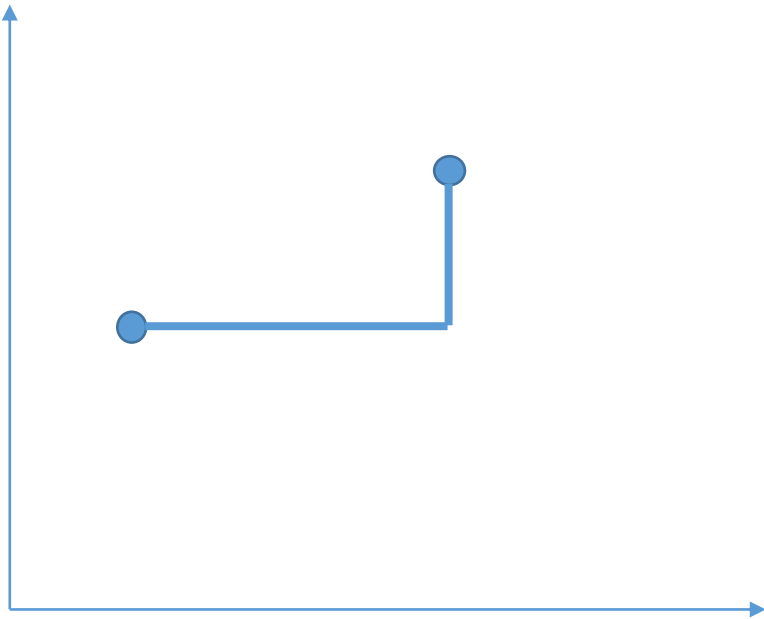
Евклидова метрика

$$\rho(x, z) = \sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j - z_j)^2}$$

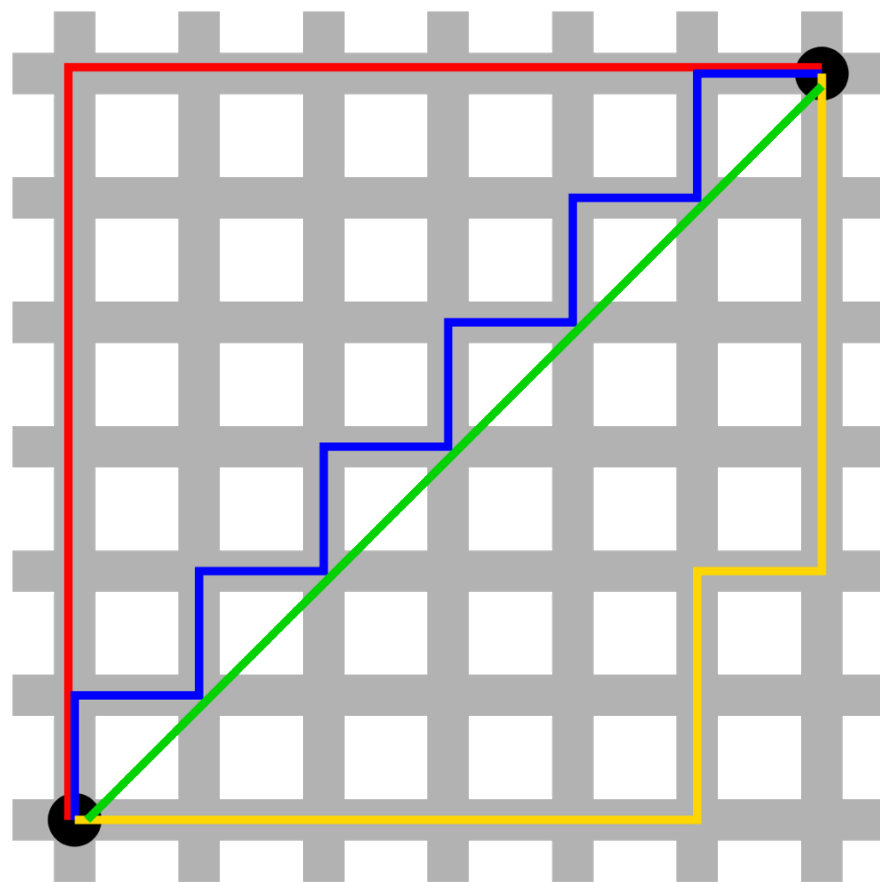


Манхэттенская метрика

$$\rho(x, z) = \sum_{j=1}^d |x_j - z_j|$$



Сравнение



Обобщение

$$\rho(x, z) = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j - z_j|^p}$$

- Метрика Минковского
- Можно подбирать p под конкретную задачу

Категориальные данные

На каком классе чаще всего ездит	Ближайшее к дому метро	Способ оплаты	Согласился повысить категорию?
Эконом	Таганская	Карта	да
Комфорт	Юго-Западная	Наличные	нет
...

Считающая метрика

- Простейшая метрика: подсчёт различий

$$\rho(x, z) = \sum_{j=1}^d [x_j \neq z_j]$$

Что ещё?

- Текстовые данные — чуть-чуть изучим в курсе, подробно потом
- Изображения — потом

Измерение ошибки модели

Вопросы

- Как сравнить две модели?
- Как подобрать k и метрику?

Функция потерь для классификации

- Частый выбор — бинарная функция потерь

$$L(y, a) = [a \neq y]$$

- Функционал ошибки — доля ошибок (error rate)

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} [a(x_i) \neq y_i]$$

- Нередко измеряют долю верных ответов (accuracy):

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} [a(x_i) = y_i]$$

Функция потерь для классификации

ВАЖНО

Accuracy — не точность!

Accuracy

$a(x)$	y
-1	-1
+1	+1
-1	-1
+1	-1
+1	+1

Accuracy

$a(x)$	y
-1	-1
+1	+1
-1	-1
+1	-1
+1	+1

Доля ошибок: 0.2

Доля верных ответов: 0.8

Accuracy

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} [a(x_i) \neq y_i]$$

Решаем задачу выявления редкого заболевания

- 950 здоровых ($y = +1$)
- 50 больных ($y = -1$)

Модель: $a(x) = +1$

Доля ошибок: 0.05

Accuracy

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} [a(x_i) \neq y_i]$$

- Всегда смотрите на баланс классов!
- Доля верных ответов не обязательно меняется от 0.5 до 1 для разумных моделей

Как выбрать к?

Обучающая выборка

На каком классе чаще всего ездит	Ближайшее к дому метро	Способ оплаты	Согласился повысить категорию?
Эконом	Таганская	Карта	да
Комфорт	Юго-Западная	Наличные	нет
Комфорт	Строгино	Карта	да

Применяем модель:

Эконом	Таганская	Карта	?
--------	-----------	-------	---

Как выбрать k ?

Обучающая выборка

На каком классе чаще всего ездит	Ближайшее к дому метро	Способ оплаты	Согласился повысить категорию?
Эконом	Таганская	Карта	да
Комфорт	Юго-Западная	Наличные	нет
Комфорт	Строгино	Карта	да

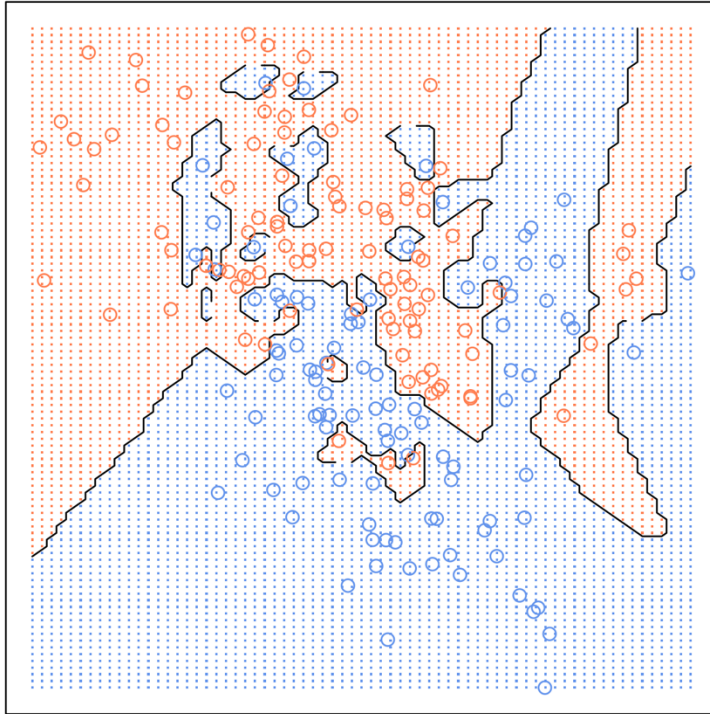
Применяем модель:

Эконом	Таганская	Карта	да
--------	-----------	-------	----

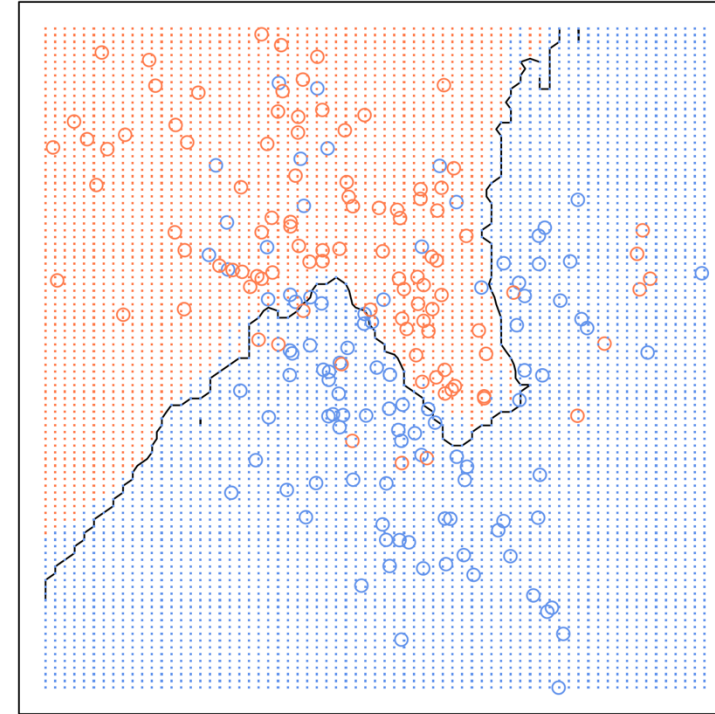
С точки зрения качества на обучающей выборке лучший выбор $k = 1$

Как выбрать k ?

1-nearest neighbours



20-nearest neighbours



<https://kevinzakka.github.io/2016/07/13/k-nearest-neighbor/>

Гиперпараметры

- Нельзя подбирать k по обучающей выборке — **гиперпараметр**
- Нужно использовать дополнительные данные

Обобщающая способность

Обобщающая способность

Как готовиться к экзамену?

Заучить все примеры с
занятий

Разобраться в предмете и
усвоить алгоритмы решения
задач

Обобщающая способность

Как готовиться к экзамену?

Заучить все примеры с
занятий

Разобраться в предмете и
усвоить алгоритмы решения
задач

Переобучение (overfitting)

Обобщение (generalization)

Обобщающая способность

Как готовиться к экзамену?

Заучить все примеры с
занятий

Переобучение (overfitting)

Хорошее качество на обучении
Низкое качество на новых данных

Разобраться в предмете и
усвоить алгоритмы решения
задач

Обобщение (generalization)

Хорошее качество на обучении
Хорошее качество на новых
данных

Отложенная выборка

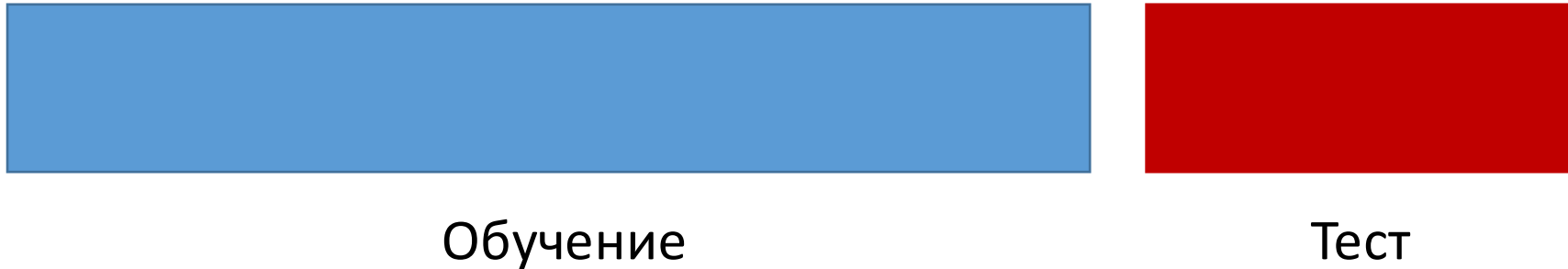


Обучение



Тест

Отложенная выборка



- Слишком большое обучение — тестовая выборка нерепрезентативна
- Слишком большой тест — модель не сможет обучиться
- Обычно: 70/30, 80/20

Кросс-валидация



Кросс-валидация

- Надёжнее отложенной выборки, но медленнее
- Параметр — количество разбиений n (фолдов, folds)
- Хороший, но медленный вариант — $n = \ell$ (leave-one-out)
- Обычно: $n = 3$ или $n = 5$ или $n = 10$

Чуть больше терминов

- После подбора всех гиперпараметров стоит проверить на совсем новых данных, что модель работает
- Обучающая выборка — построение модели
- Валидационная выборка — подбор гиперпараметров модели
- Тестовая выборка — финальная оценка качества модели

Метод k ближайших соседей с
весами

kNN: применение

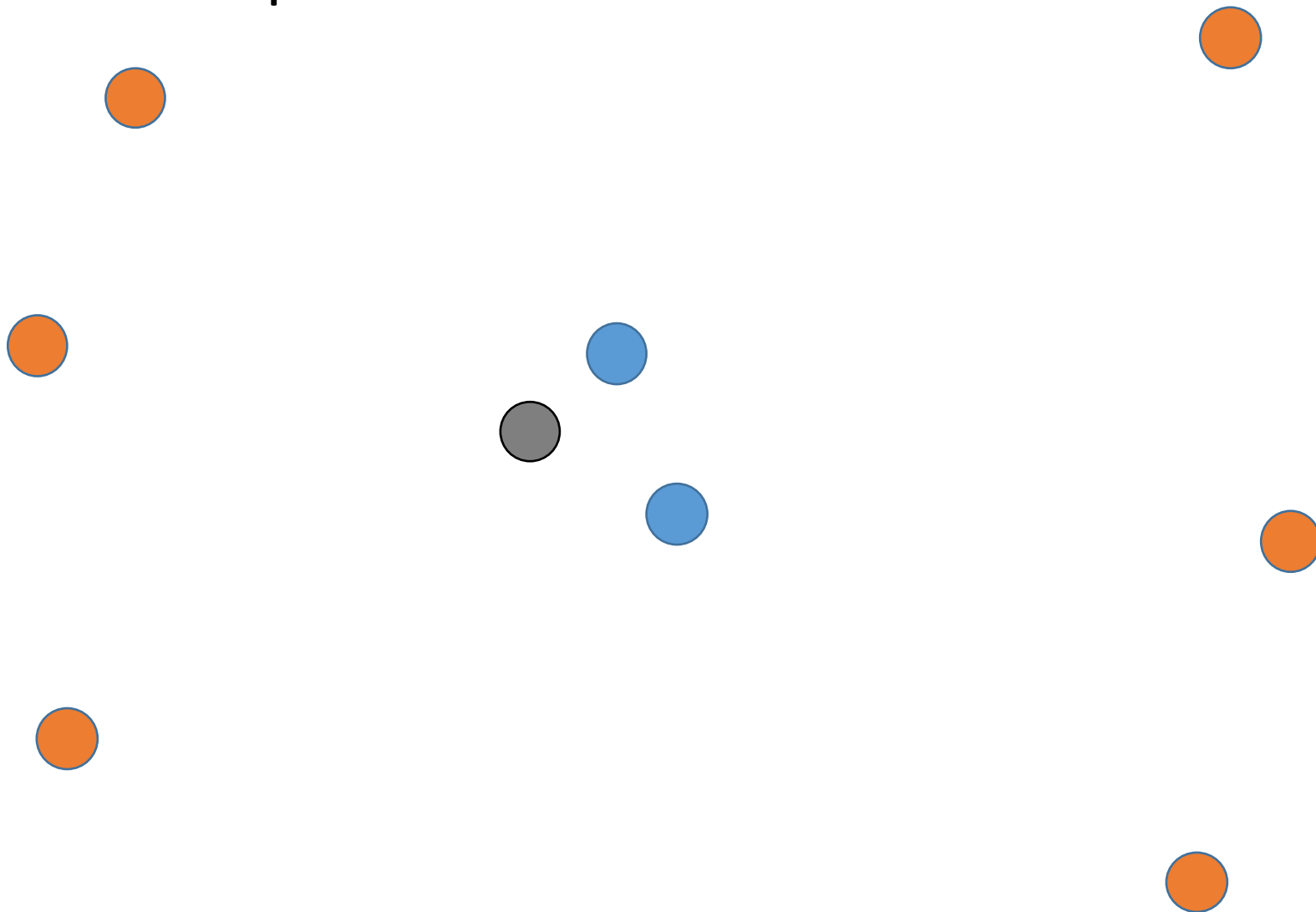
Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сортируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Выдаём наиболее популярный среди них класс:

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k [y_{(i)} = y]$$

Проблема с расстояниями



Взвешенный knn

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k w_i [y_{(i)} = y]$$

Варианты:

- $w_i = \frac{k+1-i}{k}$
- $w_i = q^i$
- Не учитывают сами расстояния

Взвешенный knn

$$a(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^k w_i [y_{(i)} = y]$$

Парзеновское окно:

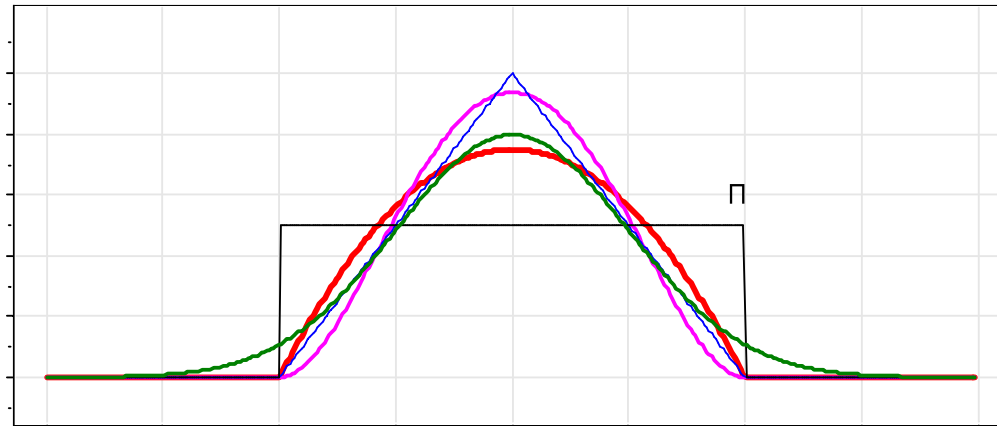
- $w_i = K \left(\frac{\rho(x, x_{(i)})}{h} \right)$
- K — ядро
- h — ширина окна

Ядра для весов

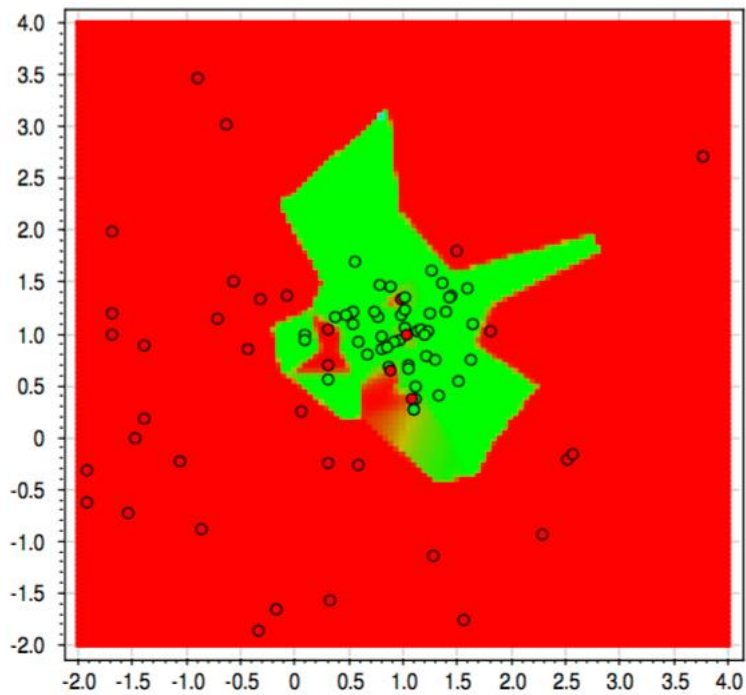
- Гауссовское ядро:

$$K(z) = (2\pi)^{-0.5} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

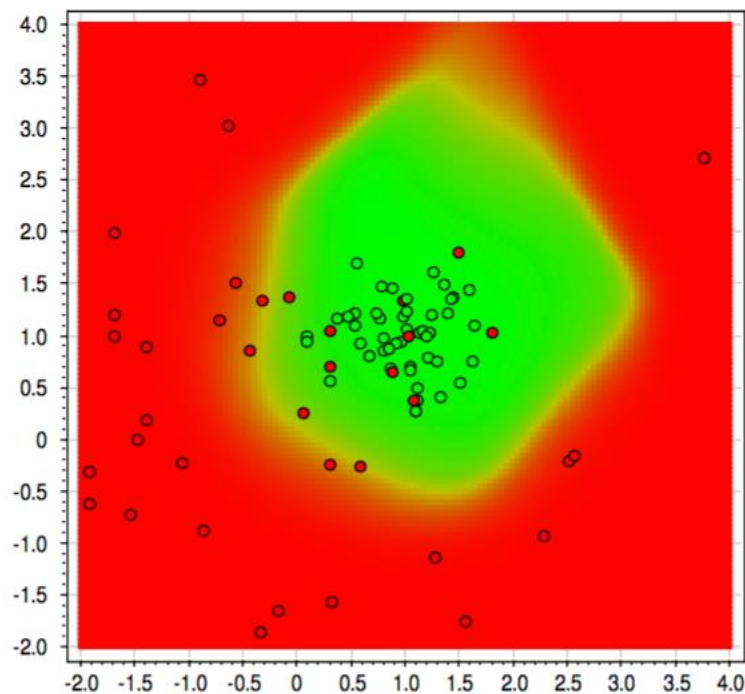
- И много других:



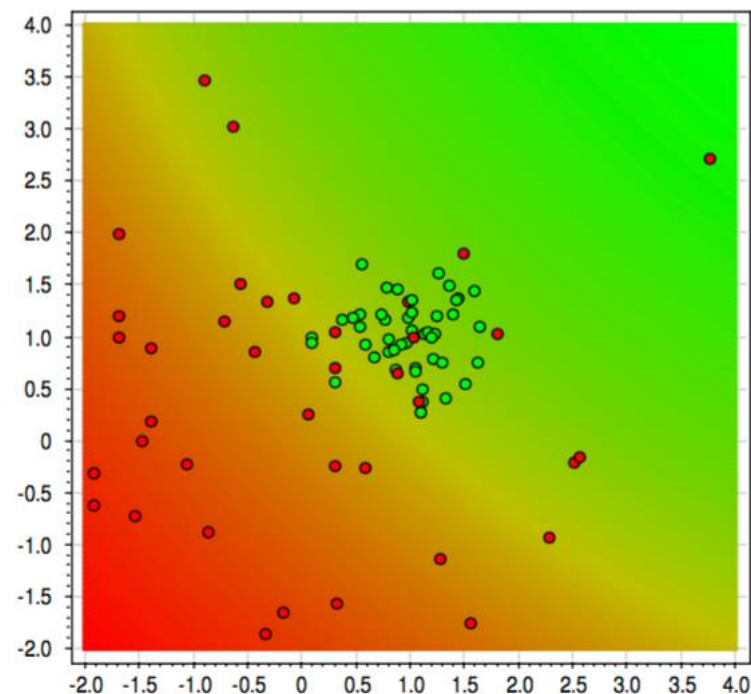
Ядра для весов



$h = 0.05$



$h = 0.5$



$h = 5$

kNN для регрессии

kNN: обучение

- Дано: обучающая выборка $X = (x_i, y_i)_{i=1}^{\ell}$
- Задача регрессии (ответы из множества $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$)
- Обучение модели:
 - Запоминаем обучающую выборку X

kNN: применение

Дано: новый объект x

Применение модели:

- Сортируем объекты обучающей выборки по расстоянию до нового объекта:
 $\rho(x, x_{(1)}) \leq \rho(x, x_{(2)}) \leq \dots \leq \rho(x, x_{(\ell)})$
- Выбираем k ближайших объектов: $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$
- Усредняем ответы:

$$a(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{(i)}$$

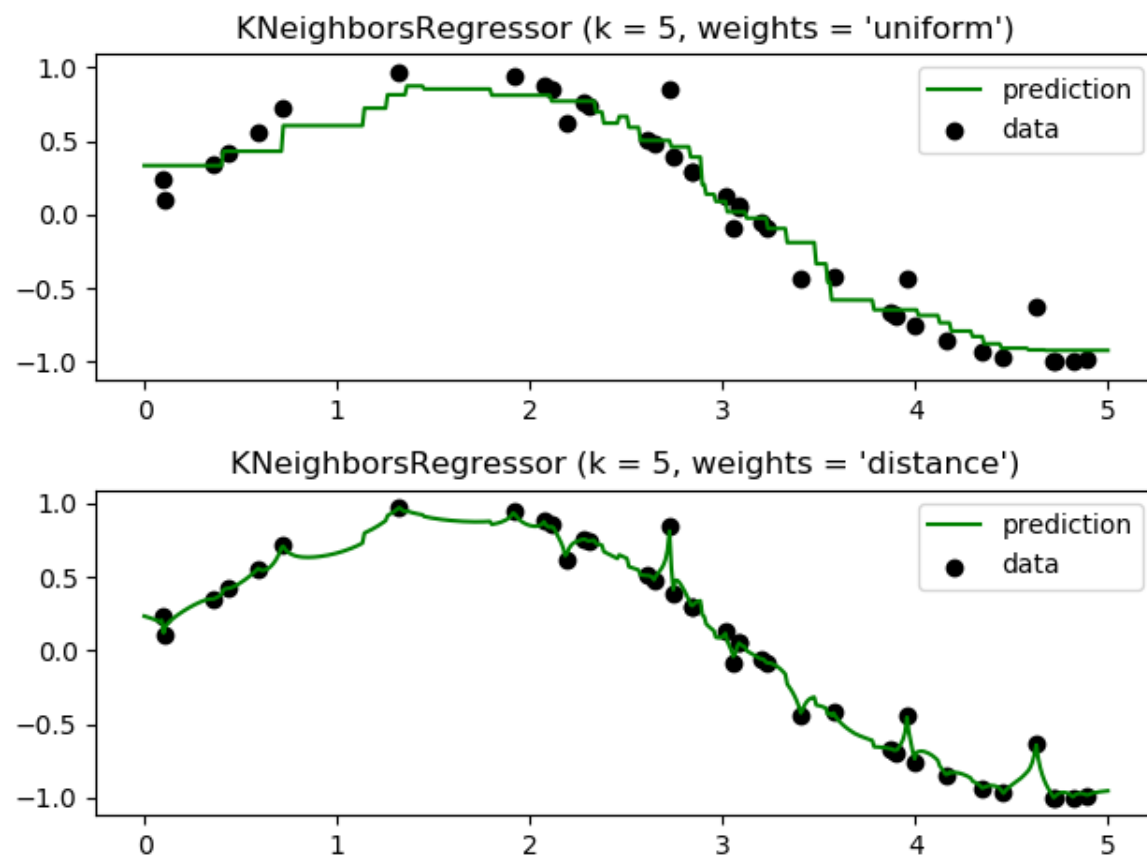
kNN: применение

- Можно добавить веса:

$$a(x) = \frac{\sum_{i=1}^k w_i y_{(i)}}{\sum_{i=1}^k w_i}$$

- $w_i = K \left(\frac{\rho(x, x_{(i)})}{h} \right)$
- Формула Надарая-Ватсона

kNN: применение



Функция потерь для регрессии

- Частый выбор — квадратичная функция потерь

$$L(y, a) = (a - y)^2$$

- Функционал ошибки — среднеквадратичная ошибка (mean squared error, MSE)

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2$$

Функция потерь для регрессии

- Ещё один вариант — средняя абсолютная ошибка (mean absolute error, MAE)

$$Q(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} |a(x_i) - y_i|$$

- Слабее штрафует за серьёзные отклонения от правильного ответа

Резюме

Плюсы kNN

- Если данных много и для любого объекта найдётся похожий в обучающей выборке, то это лучшая модель
- Очень простое обучение
- Мало гиперпараметров
- Бывают задачи, где гипотеза компактности уместна
 - Классификация изображений
 - Классификация текстов на много классов

Минусы kNN

- Часто другие модели оказываются лучше
- Надо хранить в памяти всю обучающую выборку
- Искать k ближайших соседей довольно долго
- Мало способов настроить модель