1. **Основные понятия теории ДУ**

Уравнения, в которые входят производные неизвест-ных функций, будем называть дифференциальными. Если неизвестные функции зависят от одной независи-мой переменной (аргумента), то будем говорить об обыкновенных ДУ, в противном случае о ДУ с частны-ми производными.

Обыкновенное ДУ: F(t, x, , …, ) = 0 (1). Поря-док n∈**N** старшей производной в (1) будем называть порядком ДУ. Таким образом, (1) явл. обыкновенным ДУ n–го порядка.

Опр. Решение ДУ (1) на некотором промежутке I⊆IR числовой прямой IR будем называть n раз непрерывно дифф.(гладкую) на этом промежутке ф-ю x(t), удовлет-воряющую при этому уравнению.

Если в (1) n=1, то имеем ОДУ первого порядка F(t, x, )=0. Во многих случаях его удается записать в виде: =f(t,x) (2). Тогда его называют ОДУ первого порядка разрешенным относительно производной. При n>1 получаем ОДУ высшего порядка. Вид (2) также явл. и записью в векторной форме нормальной системы ДУ.

Если система ОДУ 1-го порядка разрешена относите-льно производных: =fi (t, x1, . . . , xn), i=, (3), то ее называют нормальной системой ОДУ. В этом случае число n– число ДУ, входящих в систему (3), называют порядком нормальной системы ОДУ. Если правые части в (3) не зависят явно от t (т.е. ≡0, i=), то мы имеем автономную нормальную систему ОДУ, в противном

случае – неавтономную нормальную систему ОДУ.

Опр. Решением нормальной системы (2) ОДУ на некотором промежутке IIR будем называть векторную

ф-ю x(t), определенную и непрерывно дифф. на этом промежутке, при удовл. этой системе.

Процесс нахождения решения ОДУ будем называть интегрированием ДУ. Если решение ОДУ можно полу-чить при помощи конечного числа операций интегриро-вания и дифференцирования и выразить через элемента-рные ф-ии, то будем говорить, что решение ДУ получе-но в квадратурах.

Если начальные условия для ДУ порядка n состоят в задании значений решения и значений его производных до порядка n-1 включительно, то их назыв. условиями Коши. Начальную задачу с условиями Коши назыв. задачей Коши, а полученное решение – частным решением.

**2. Однородные линейные ДУ n-го порядка.**

Линейным ДУ n–го порядка будем называть ДУ (t)+(t)+…+(t)=f(t) (1). Если f (t)0, то ДУ (1) будем наз. линейным однородным ДУ, иначе – линейным неоднородным ДУ.

Пусть в ДУ (1) функция (t)≠ 0, ∀t∈I. Тогда, разделив обе его части на функцию (t), получим ДУ+(t)+…+(t)=g(t) (2).

Задача Коши для ДУ (2) формулируется таким обра-зом: найти решение x = x(t) этого ДУ, удовл. начальным условиям:)=, () = ,…,() = (3), где заданные числа таковы, что , k=, ∈ I.

**Теорема**. Пусть коэффициенты(t), k=, и правая часть g(t) ДУ (2) есть непр. на *I* ф-ии. Тогда:

1) решение задачи Коши (2), (3) ∃ на промежутке I;

2) если два решения (t) и (t) ДУ(2) удовлетворя-ют одним и тем же условиям, то(t) = (t),∀t ∈ I.

**Следствие**. Пусть коэффициенты ak(t), k=, есть непрерывные на I функции и x(t) есть решение ли-нейного однородного ДУ n–го порядка x(n)+an−1(t)x(n−1)+ +…+a0(t)x=0 (4), удовлетворяющее нулевым (тривиаль-ным) начальным условиям x(t0)=x′(t0)=…=x(n−1)(t0)=0 (5). Тогда x(t)=0, ∀t∈I.

ДУ L[x] = + (t) + . . . + (t) (4) – лине-йный дифф. оператор.

**Св-во 1** (аддитивность). L[+]=L[]+L[] (5)

**Св-во 2** (однородность). L[Cx]=CL[x], ∀C∈IR (6)

**Св-во 3.** Пусть (t) и (t) - решения ДУ L[x]=0.

Тогда:

1) сумма (t) + (t) есть решение ДУ L[x] = 0;

2) для ∀ постоянной C и любого решения x(t) ДУ L[x]=0 произведение Cx(t) также есть решение этого ДУ.

**Св-во 4**. Если (t)и (t) есть решения неоднород-

ного ДУ L[x] = g(t), то разность (t)−(t) есть решение

однородного ДУ L[x] = 0.

**Св-во 5.** Если комплекснозначная функция веществе-нного переменного x(t)=u(t)+iv(t), есть решение одноро-дного ДУ L[x] = 0, то действительная часть u(t) и мни-мая часть v(t) решения x явл. решениями этого ДУ.

Совокупность n ЛНЗ частных решений линейного однородного ДУ n–го порядка L[x]=0 будем называть фундаментальной системой решений.

Пусть система функций x1(t), . . . , xn(t) определена на некотором интервале (a, b). Будем говорить, что эта система ЛЗ на (a, b) по t, если ∃ постоянные α1,…, αn, такие, что на (a, b) имеет место тождество α1x1(t) +…+ αnxn(t) ≡ 0, причем хотя бы одно из чисел α1,…, αn, отлично от нуля. Если же это тождество имеет место только при α1=…=αn=0, то будем говорить, что система функций x1(t), . . . , xn(t) ЛНЗ на (a, b).

**Теорема** 2. Всякое линейное однородное ДУ L[x] = 0 имеет на интервале (a, b) ровно n ЛНЗ решений (t),…, (t). Общее решение этого ДУ имеет вид x(t)=(t), где , k=, есть произвольные постоянные.

**3. Однородные линейные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами**

ДУ ++…+=0 (1) будем называть линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэфф. Чтобы найти общее решение ДУ (1) нужно найти его n независимых частных решений. Будем искать эти частные решения в виде x=(2), где λ есть некоторое пока неизвестное число (вообще говоря, комплексное). Последовательно дифференцируя ф-ю (2), получаем ,…, (3)

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получаем (++…++)=0, а после сокращения на – выражение L(λ)≡++ +…++=0 (4).

Многочлен L(λ) ++…++ (5) бу-дем называть характеристическим многочленом, соот-ветствующим линейному дифференциальному операто-ру L[x], или просто характеристическим многочленом ДУ (1).

Таким образом, функция тогда и только тогда является частным решением ДУ (1), когда λ есть корень уравнения (4), называемого характеристическим уравне-нием для ДУ (1).

Для нахождения частного решения ДУ (1) в виде x=eλt нужно составить характеристическое уравнение (4) и найти его корни λ1,…, λn. Каждому такому корню λk соответствует частное решение xk=, k=. При этом возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения (4) вещест-венные и различные;

2) корни характеристического уравнения (4) различ-ные, но среди них имеются комплексные;

3) среди корней характеристического уравнения (4) имеются кратные.

**Случай** 1. Пусть λ1,…, λn есть вещественные и разли-чные корни характеристического уравнения (4). Им, сог-ласно (2), соответствуют n частных решений ДУ (1): x1=,…, xn=. Нетрудно показать, что данные ф-ии явл. ЛНЗ на любом интервале (a, b)⊂IR. Поэтому они образуют фундаментальную систему решений ДУ (1). Общее решение ДУ (1) имеет вид x=C1+…+Cn (6), где C1,…,Cn есть произвольные постоянные.

**Случай** 2. Пусть среди различных корней хар-ристи-ческого уравнения (4) имеется комплексный простой ко-рень λ=α+iβ, β≠0. Так как коэффиц. характеристического уравнения (4) есть вещественные числа, то сопряженное комплексное число λ=α−iβ также явл. его корнем. Согла-сно (2) корню λ=α+iβ соответствует комплекснозначное решение x=e(α+iβ)t=eαteiβt, преобразуемое по формуле Эй-лера eiβt=cosβt+isinβt к виду x=eαtcosβt+ieαtsinβt (8). По св-ву 5 приходим к выводу, что вещественные ф-ии x1= =eαtcosβt, x2=eαtsinβt(10)явл. частными решениями ДУ(1).

**Случай** 3. Если λ есть корень кратности k хар-ристи-ческого уравнения (4), то частными решениями ДУ (1) явл. k ЛНЗ функций eλt, teλt, t2eλt,…, tk−1eλt (14). Поэтому линейная комбинация функций (14) x=C1eλt+C2teλt+…+ +Cktk−1eλt (15) также является решением ДУ (1). Оно вой-дет в общее решение этого ДУ отдельным слагаемым.

**4. Фазовая плоскость однородного линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэфф.**

Рассмотрим однородное линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэфф. = 0 (1) в зависи-мости от корней хар-ристического уравнения = 0 (2) общее решение ДУ (1) будем иметь вид:

1)IR, IR, x=+ (3)

2)=λIR x=+ (4)

3)=α±βi, β≠0 x=+ (5)

Евклидову плоскость =Oxy будем называть фазо-вой для ДУ (1), если решение x=x(t) этого уравнения изображается на ней в виде фазовых графиков x=x(t), y=y(t)=, tIR.

Фазовый график стационарного решения состоит только из одной точки – точки покоя (ξ,0).

**Теорема**. Два фазовых графика ДУ (1) либо не имеют общих точек, либо совпадают.

**Теорема**. Если ≠0, то тип точки покоя O ДУ (1) определяется видом корней характеристического уравнения (2), а именно:

1)IR, => седло

2)IR, , =>бикритический узел

3)IR, , =>монокритический узел

4)= α+βi, β≠0,α≠0 =>фокус

5)= α+βi, β≠0,α=0 =>центр

Рассмотрим теперь случай = = 0. В этом случае ДУ (1) принимает вид = 0 (6).

При любом ξIR ф-я x=x(t)= ξ, для любых tIR явл. стационарным решением ДУ(6). Поэтому вся ось y = 0 состоит из точек покоя, т.е. является прямой покоя.

Если у хар-ристического ур. (2) корни λ1<λ2=0, то фазовые графики x=C1+C2, y=λ1C2, расположе-ны на лучах y=λ1(x−C1), y>0, или y=λ1(x−C1), y<0, и нап-равлены к оси y=0.

Случай λ1>λ2>0 сводится к замене t на −t.

Если же корни λ1=λ2=0, то a1=0 и ДУ (12) явл. ур. x′′=0 с фазовыми графиками x=C1+C2t, y=C2.

**5. Неоднородные линейные ДУ n -го порядка.**

Рассмотрим неоднородное линейное ДУ n–го порядка ++…+=f(t) (1), где (t), k=, f(t) есть непрерывные на (a,b) ф-ии. ДУ (1) можно записать в виде L[x]=f(t) (2), где L[x] есть линейный дифф. оператор.

Теорема. Общее решение неоднородного линейного ДУ n–го порядка L[x]=f(t) представляет собой сумму некоторого его частного решения (t) и общего реше-ния(t) соответствующего однородного линейного ДУ n–го порядка L[x] =0.

Если и есть два решения однородного линейно-го ДУ n–го порядка L[x] = 0, то любая их линейная ком-бинация + также есть решение этого уравнения. Кроме того, если есть решение однородного линейно-го ДУ n–го порядка L[x]=0, а есть решение неодноро-дного линейного ДУ n–го порядка L[x] = f(t), то их сум-ма x1+x2 есть решение последнего неоднородного ДУ.

Покажем теперь, что если есть решение ДУ L[x]= =(t), есть решение ДУ L[x]= (t), то сумма + есть решение ДУ L[x] = (t) + (t). В самом деле, имеем, что L[+]==(t) + (t).

Аналогичным образом доказываем, что если компле-кснозначная ф-ия вещественного переменного u(t)+iv(t) есть решение ДУ L[x]=(t)+(t), где (t) и (t) есть вещественные ф-ии, то ф-ии u(t) и v(t) явл. решениями ДУ L[x] = (t) и L[x] = (t),соответственно.

Данные утверждения составляют основу принципа суперпозиции решений неоднородных лин. ДУ. Он спра-ведлив для любого конечного числа k частных решений.

Пусть известна фундаментальная система решений однородного линейного ДУ n–го порядка L[x]=0: ф-ии x1,…, xn. Тогда общее решение однородного линейного ДУ есть x=C1x1+…+Cnxn (3). Метод Лагранжа позволяет найти общее решение неоднородного лин. ДУ L[x]=f(t), если известна фундаментальная система решений соот-ветствующего однородного лин. ДУ L[x]=0. В соответс-твии с этим методом общее решение ДУ L[x] = f(t) ищет-ся в виде x = +…+ (4), где ф-ии непрерывны на (a,b), k=. Нетрудно показать, что неизвестные ф-ии , k=,есть решения системы

(5)

Это есть неоднородная лин.система алгебраических уравнений относительно неизвестных ф-ий (t), k= с определителем Вронского W[], ≠0,т.к. ,..., есть фундаментальная система решений однородного лин. ДУ L[x] =0. Поэтому система (5) имеет единствен-ное решение (t)=(t), k=, откуда Ck(t)=+ +Ck, k=где Ck, k=,есть произвольные постоян-ные.При этом система (5) наз. системой Лагранжа для неоднородного линейного ДУ L[x]=f(t).

**6. Неоднородные линейные ДУ n -го порядка с постоянными коэфф. и правой частью спецю вида.**

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ n–го порядка с постоянными коэффициентами R, k=: ++…+=f(t) (1), где f(t) есть непрерыв-ная на (a,b) ф-я. Его общее решение имеет вид x=+ ++…+, где есть частное решение ДУ (1), … есть фундаментальная система решений одноро-дного линейного ДУ n–го порядка L[x] = 0.Поэтому для нахождения общего решения достаточно найти частное решение ДУ (1). Для специального вида правых частей f(t) ДУ(1) эта задача решается операциями дифференци-рования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод называется методом неопределе-нных коэфф. Правая часть ДУ (1), для которой приме-ним метод неопределенных коэффициентов, имеет вид f(t)={cosβt+sinβt}, α,β∈IR (2), где и есть многочлены степеней m и l, соответственно.

Рассмотрим теперь частные случаи правых частей (2) и покажем, как к ним применяется метод неопределен-ных коэффициентов.

**Случай1**. Правая часть ДУ (1) имеет вид

f(t)=+ ++…++ (3), где и λ=0 не явл. корнем хар-ристического уравнения. В этом случае будем искать частное решение ДУ (1) в виде многоч-лена той же m–й степени =++…++ + (4) с неопределенными пока коэфф. , k=. Для их отыскания подставляем функцию (4) в ДУ (1). После этого, сравнив коэффициенты при одинаковых степенях переменной t в правой и левой частях, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов , k=.

Пусть теперь λ = 0 явл. корнем кратности k хар-рис-тического уравнения. Этот случай наз. резонансным и частное решение надо искать в виде =+ ++…++ (5).

**Случай2**. Пусть теперь правая часть ДУ (1) имеет вид f(t)=++…++ (6), где .

Если α не яв. корнем хар-ристического уравнения, то частное решение ДУ(1) с правой частью (6) ищется в виде =++…++ (7), где , k= неизвестные пока коэфф. Резонансный случай (если α есть корень кратности k хар-ристического урав-нения): =++…++(8)

Случай3. Правая часть ДУ (1) имеет вид f(t)={cosβt+sinβt}, β≠0 (9)

Если α+iβ не явл. корнем хар-ристического уравне-ния, то частное решение ДУ (1) с правой частью (9) ищется в виде ={cosβt+sinβt}, где и есть многочлены степени s=max{m, l} с неопреде-ленными пока коэффициентами.

Если же α+iβ есть корень кратности k хар-ристичес-кого уравнения, то частное решение x∗ ДУ (1) с правой частью (9) ищется в виде ={cosβt+ +sinβt}, гдеи есть многочлены степени s=max{m, l} с неопределенными коэффициентами.

**7. Исследование лин. ДУ с постоянными коэфф.**

Функция f из ДУ++…+=f(t) (1) непрерывна на некотором промежутке I. Обозначим че-рез x=x(t; x0,…, xn−1) решение ДУ (1) с начальными условиями x(k)(t0)=xk, k=, t0∈I.

**Теорема**. Если функция f m раз непрерывно диффере-нцируема, то решение x=x(; ,…, ) ДУ (1) n + m раз непрерывно дифференцируемо по своим аргументам на множестве определения.

Отклонением решений x=x(; ,…, ) и x=x(t; +,…, ) будем называть величину (t, ,…,)= .

**Решение** x=x(t; ,…, ) ДУ (1) будем наз. непре-рывно зависящим от начальных значений на промежутке I1⊂I, t0∈I1, если , : , , =>(t, ,…,).

Указанная непрерывная зависимость решений ДУ (1) означает, что при достаточно малых возмущениях начальных значений отклонение решений на всем промежутке можно сделать сколь угодно малым. Если решение x = x(; , . . . , ) непрерывно зависит от начальных данных на любом компактном промежутке I1⊂I, t0∈I1, то его будем называть интегрально непрерывным на промежутке I.

**Теорема**. Пусть функция f непрерывна на промежутке I. Тогда решения ДУ(1) интегрально непрерывны на I.

Решение x = x(t; ,…,) ДУ (1) будем называть устойчивым по Ляпунову в положительном направле-нии, если оно непрерывно зависит от начальных значе-ний на всем луче [s,+∞), α≤s.

**Теорема**. ДУ(1) устойчиво ⇔ действительные части характеристических корней характеристического урав-нения неположительны и все характеристические числа с нулевой действительной частью имеют кратность, равную единице.

**Теорема**. Для асимптотической устойчивости ДУ (1) необходимо и достаточно, чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательны.

**Теорема5** (критерий Гурвица). Действительные части всех корней характеристического уравнения отрицате-льны⇔ все главные миноры определителя n–го порядка

положительны.

**Замечание**. Устойчивость ДУ (1) означает, что достаточно малые возмущения начальных значений вызывают отклонения решений, лежащие в заданных сколь угодно тесных границах. Асимптотическая устойчивость, кроме того, обеспечивает погашение отклонения при t → +∞.

**8. Системы линейных ДУ**

Однородная линейная система ОДУ первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид (1)

Однородная линейная система ОДУ в векторной форме x′=A(t)x (2).

**Теорема**. У системы (1) с непрерывными на (a, b) коэффиц. (t), i=, j=, для любого начального условия ()=, ()=, . . . , ()=, ∈(a, b) (3) ∃ единственное решение задачи Коши (1), (3) на (a,b).

**Св-во 1**. Если решение x системы (2) обращается в нуль хотя бы в одной точке ∈(a, b), то x=0, ∀t∈(a,b).

**Св-во 2.** Если x1,…, xk, есть решения системы (2), то и их линейная комбинация x=C1x1+…+Ckxk, где C1,…,Ck, есть произвольные постоянные, также является решени-ем этой системы.

**Теорема.** Система (2) имеет ровно n ЛНЗ решений , . . . , . При этом общее решение этой системы имеет вид =+…+, (4) где , . . . ,, есть произвольные постоянные.

Фундаментальная м-ца системы (2) X(t)= (5).

**Теорема.** Для любой м-цы (5) имеет место формула Лиувилля-Остроградского detX(t)=detX(\* \*exp() ,где trA - след м-цы A.

**Теорема.** Пусть x1,…, xn, есть решения на (a, b) системы (2). Тогда:

1) если det X(t)≠0 хотя бы в одной точке t0∈(a, b), то решения x1,…, xn ЛНЗ на t0∈(a, b), ∀t ∈ (a, b);

2) если ∃ точка t0∈(a, b), в которой det X(t)=0, то ре-шения x1,…, xn, ЛЗ на t0∈(a, b), ∀t ∈ (a, b).

Совокупность n ЛНЗ решений , . . . , системы (2) будем называть фундаментальной системой решений этой системы.

Матрица Коши: K(t,) = X(t)(

Неоднородная линейная система ОДУ первого порядка, записанная в векторной форме x′=A(t)x + f(t) (6)

**Теорема**. Общее решение системы (6) представляет собой сумму частного решения этой системы и обще-го решения соответствующей ей однородной системы (2), т.е. x=++…+(7)

Общим методом построения решений неоднородной линейной системы обыкновенных ДУ *=*A(t)x+ +(t)+…+(t) (8) явл. метод Лагранжа.

Интегралом от матрицы (5) будем называть матрицу =

Формула Коши: x= X(t)(+ +X(t)

**9. Системы линейных ДУ с постоянными коэфф.**

Систему линейных ДУ (1)

будем наз. однородной линейной системой ОДУ с постоянными коэффиц..Система (1) записывается в векторном виде =Ax (2).

Метод Эйлера: нетривиальное решение системы (1) ищется в виде =,…,= (3).

Для отыскания собственных значений матрицы A необходимо решить ур-ние A-λI=0. (4) называемое характеристическим уравнением системы (2).В его левой части стоит многочлен n–ой степени с вещ. коэффиц.. Он наз. характеристическим многочленом системы (2).

Характеристическое уравнение (4) имеет ровно nкор-ней (с учетом их кратности). При этом возможны следу-ющие случаи: 1) корни характеристического уравнения вещественны и различны; 2) корни характеристического уравнения различные, но среди них имеются комплекс-ные; 3) среди корней характеристического уравнения имеются кратные.

**Случай 1.** В этом случае м-ца A имеет n ЛНЗ собст-венных векторов ,…,. Решением системы явл. вектор-ф-ии =, которые явл. ЛНЗ, т.е.образуют фундаментальную систему решений системы (2).Тогда общее решение этой системы имеет вид x=+…+ +.

**Случай** 2. Пусть одним из комплексных корней явл. λ=α+iβ, β≠0.Так как коэфф. Хар-ского уравнения есть вещественные числа, то и = α− iβ также будет корнем этого уравнения. Отвечающие этим двум корням λ и соответствующие собственные векторы также имеют комплексно сопряженные координаты, что следует из равенств A=λ, A=.

Пусть γ=u+iv есть собственный вектор, соответству-ющий собственному значению λ=α+iβ. Тогда вектор–функция x=γ=(u+iv) явл. решением с-мы (2).

Паре комплексно сопряженных корней = α ± i β хар-ристического уравнения соответствует пара вещест-венных вектор–решений системы (2):

= (u cos βt − v sin βt),

= (v cos βt + u sin βt)

**Случай 3**. Пусть среди корней хар-ристического урав-нения имеется k–кратный корень λ (вещественный или комплексный). Ему соответствует решение x=(t)eλt= =((t),..,(t)).

Рассмотрим линейную неоднородную систему ДУ со специальной правой частью =Ax+f(t) (5), где вектор–функция f(t) = ( (t) cosβt + (t) sinβt) (6), α и β есть заданные вещественные числа, P***l***(t) и Qm(t) есть вектор–функции, компонентами которых явл. многочле-ны по переменной t со степенями, равными или меньши-ми,соответственно, ***l*** и m. В этом случае частное решение неоднородной системы (5) нужно искать в виде = ((t) cosβt + (t) sinβt).

**10. Фазовая плоскость однородного линейного векторного уравнения размерности 2**

На фазовой плоскости O решения дифф. системы

(1) изображаются фазовыми графиками (траекториями) =, = (t). В частном случае

(2). Tраектории системы (2) в силу соотношения совпадают с фазовыми гра-фиками ДУ -=0.

Рассмотрим случай, когда дифф. система (1) имеет вид (3). Общее решение дифф. системы (3) таково: =, =.

Если λ≠0 то траектории дифф. системы (3) явл. либо точкой покоя (при = = 0), либо лучами прямых, примыкающими к точке покоя. Такое расположение траекторий называют дикритическим узлом.

При λ = 0 каждая точка фазовой плоскости является точкой покоя дифференциальной системы (3).

**11. Интегралы систем линейных ДУ с постоянны-ми коэффициентами.**

Рассмотрим линейную относительно , . . . , невырожденную форму l(= (1) tI, i=. Форму l( будем называть первым интегралом системы =Ax + f(t) (2).

Если форма (1) есть первый интеграл системы (2), то график удовлетворяющего начальным условиям ()= =, i= решения этой системы при всех t ∈ I лежит в пространстве =( на поверхности = (3).

Совокупность первых интегралов = =, j= будем называть интегралом сис-темы (2), если при некоторых постоянных система = (4) задает решение =,…,= = системы (2).

Если же система (4) определяет решение системы (2)

при любых постоянных= из некоторого множества

Γ = {(, . . . , ⊂, то совокупность первых интегра-лов , j=, будем называть общим интегра-лом системы (2). Общий интеграл будем называть пол-ным интегралом, если он задает все решения системы(2).

Теорема1. Совокупность лин. форм , j=, образует нормированный при t= полный интег-рал системы (2) ⇔ м-ца ψ(t)=явл. фундамен-тальной нормированной при t= м-цей системы

= -ATy, а g(t)=-f(.

Кроме того, отметим, что разрешение системы (2)

равносильно построению ее полного интеграла.

**12. Устойчивость систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами.**

Пусть x(t;x0)есть решение задачи Коши x′=Ax+f(t), x(t0) =x0,t∈I (1), а x(t;x0+∆x) есть решение задачи Коши x′=Ax+f(t), x(t0) =x0+∆x, t∈I (2), где A есть постоянная квадратная м-ца порядка n, f(t) есть непрерывная на I⊂IR вектор–функция, x∈IRn. Отклонением решений x(t;x0) и x(t;x0+∆x)будем называть величину ρ(t;∆x)= =||x(t;x0+∆x)−x(t;x0)|| (3).

Отклонение не зависит от функции f и определяется только матрицей A и приращением ∆x. Поэтому при исследовании устойчивости неоднородных систем мож-но рассматривать только линейные системы x′=Ax (4).

Если I=[t0,+∞) и ∀ε >0, ∃δ=δ(ε): ∀t∈I,||∆x||≤δ⇒ρ(t;∆x)≤ε (5),то решение x(t;x0) системы (1) будем назы-вать устойчивым по Ляпунову.

Решение x(t;x0) системы (1) будем называть асимпто-тически устойчивым, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2)∀δ >0, ∃∆x: ||∆x|| ≤ δ⇒=0.

**Теорема**. Для устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы Re λj≤0, j=, где λj есть собственные значения м-цы A, причем тем собственным значениям λj, для которых Re λj=0, соответствуют простые элементарные делители.

**Теорема**. Для асимптотической устойчивости системы(13.1)необходимо и достаточно выполнение неравенств Re λj<0, j=, где λj есть собственные значения матрицы A. Последнее равносильно тому, чтобы характеристический многочлен матрицы A был гурвицевым.

**13. ДУ с разделенными переменными.**

ДУ с разделенными переменными будем называть ДУ вида p(x)dx+q(y)dy= 0 (1), где функция p(x) непрерывна на (a,b), функция q(y) непрерывна на (c,d), область a<x<b, c<y<d, не содержит особых точек ДУ (1). Если ∃ параметрическое решениеx=φ(t), y =ψ(t), t ∈I, ДУ (1), то подставив его в это ДУ, получим тождество (φ(t))dφ(t)+ +q(ψ(t))dψ(t) = 0, ∀t∈I (2).

Пусть P(x)=∫p(x)dx есть какая–либо первообразная функции p(x), а Q(y) =∫q(y)dy есть некоторая первообразная функции q(y). Тогда интегрирование тождества (2) приводит к соотношению P(φ(t)) +Q(ψ(t)) =C,∀t∈I, где C есть произвольная постоянная. Поэтому всякое параметрическое решение ДУ (1) удовлетворяет соотношению ∫p(x)dx+∫q(y)dy=C (3)при некотором значении параметра C.

Нетрудно видеть, что если x=φ(t), y=ψ(t), t ∈I, есть параметрическое задание гладкой кривой, удовлетворяющей на промежутке I уравнению (2) при некотором значении постоянной C, то оно определяет параметрическое решение при некотором значении ДУ (1). Таким образом, если формула (3), где C есть произвольная постоянная, задает гладкую кривую при некотором значении C, то эта формула определяет некоторое параметрическое решение ДУ (1) и содержит все параметрические решения этого ДУ. В итоге приходим к выводу, что ф-ла (3) определяет общий интеграл ДУ (1).

Если необходимо найти интегральную кривую ДУ (1), проходящую через точку (x0,y0), где x0∈(a,b),y0∈(c,d), то в силу формулы (3) такая кривая однозначно

задается формулой=0.

**14. ДУ с разделяющимися переменными.**

ДУ с разделяющимися переменными будем называть ДУ видаp1(x)q1(y)dx+p2(x)q2(y)dy=0 (1), где функции p1(x) и p2(x) непрерывны на(a,b), а функции q1(y) и q2(y) непрерывны на(c,d), область G: a<x<b, c<y<d, не содержит особых точек ДУ (1).

Если ∃ параметрическое решение x=φ(t), y=ψ(t), t∈I, ДУ (1), то подставив его в это ДУ, получим тождествоp(φ(t))dφ(t)+q(ψ(t))dψ(t)=0, ∀t∈I (2).

Пусть P(x)=∫p(x)dx есть какая–либо первообразная ф-ии p(x), а Q(y)=∫q(y)dy есть некоторая первообразная ф-ии q(y). Тогда интегрирование тождества (2)приводит к соотношению P(φ(t))+Q(ψ(t))=C, ∀t∈I, где C есть произ-вольная постоянная. Поэтому всякое параметрическое решение ДУ (1)удовлетворяет соотношению ∫p(x)dx+ +∫q(y)dy=C (3)при некотором значении параметра C.

Нетрудно видеть, что если x=φ(t), y=ψ(t), t∈I, есть параметрическое задание гладкой кривой, удовлетворяющей на промежутке I уравнению (2) при некотором значении постоянной C, то оно определяет параметрическое решение при некотором значении ДУ (1). Таким образом, если формула (3), где C есть произвольная постоянная, задает гладкую кривую при некотором значении C, то эта формула определяет некоторое параметрическое решение ДУ (1)и содержит все параметрические решения этого ДУ. В итоге приходим к выводу, что формула(3) определяет общий интеграл ДУ (1).

Если необходимо найти интегральную кривую ДУ (1), проходящую через точку (x0, y0),где x0∈(a,b), y0∈(c,d), то в силу формулы (3) такая кривая однозначно

задается формулой+=0.

**15. Однородные уравнения.**

ДУ вида =f(t,x) будем называть однородным ДУ первого порядка, если при x≠0 ее можно записать в виде y'=f() (1), где f(z) есть заданная непрерывная на некото-ром промежутке своего аргумента z функция.

Непосредственными вычислениями получаем, что ДУ (1) заменой y=xu, где u=u(x) есть новая неизвестная функция, сводится к эквивалентномуДУ xu′+u=f(u) (2).

При решении ДУ (2) будемотдельно рассматривать следующие три случая: 1) f(u) ̸≡ 0; 2) f(u) ≡ 0; 3) f(uk)=uk для некоторых точек uk.

В первом случае ДУ (2) эквивалентно ДУ с разделен-ными переменными = .

В втором случае ДУ (2) эквивалентно ДУ xu′=0.

В третьем случае непосредственной проверкой убеж-даемся, что u(x) = uk есть частные решения ДУ (2).

Рассмотрим теперь ДУ y′=f (3), где f(z) есть заданная непрерывная на некотором промежутке своего аргумента z функция, вещественные числа a1, b1, c1, a2, b2, c2, таковы, что |a1|+|b1|>0, |a2|+|b2|>0.

Рассмотрим на плоскости две прямые: a1x+b1y+c1=0, a2x+b2y+c2=0. Если эти прямые имеют точку пересече-ния (x0, y0), то замена x=ξ+x0, y=η+y0 приводит ДУ (3) к однородномуДУ = f. Если же эти прямые параллельны, то найдется такое вещественное число k≠0, что a2x+b2y≡k(a1x+b1y). Поэтому ДУ (3) может быть представлено в видеy′= и затем заменой z=a1x+b1y приведено к ДУс разделяющимися перемен-ными.

**16. Линейные уравнения первого порядка.**

ДУ вида y′+p(x)y=f(x) (1), где p(x) и f(x) есть ф-ии, непрерывные на (a, b), называется линейным ДУ первого порядка. Если в ДУ (1) f(x) /≡ 0 на (a, b), то данное ДУ называется неоднородным, а если f(x)≡0 на (a, b), – то однородным.

Рассмотрим сначала линейное однородное ДУ первого порядка y′+p(x)y=0 (2). Нетрудно видеть, что y=0 явл. решением этого ДУ. Если же y≠0, то ДУ (2) эквивалентно ДУ = -p(x)dx. Данное уравнение явл. ДУ с разделе-нными переменными, а его решения определяются формулойln |y|= - ,где x0, x∈(a, b), а C1 есть произвольная положительная постоянная. Вводя вспомогательное условное обозначениеP(x)=и учитывая наличие решения y=0, приходим к выводу, что все решения ДУ (2) записываются формулой y=Ce−P(x) (3), где C есть произвольная постоянная.

Для решения линейного неоднородного ДУ (1) будем применять метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Опишем его.

Сначала в ДУ (1) выполним замену y=C(x)e−P(x) (4), где C(x) есть новая неизвестная непрерывно дифферен-цируемая на (a, b) функция. Подстановка выражения (4) в ДУ (1) определяет искомую функцию C(x). Имеем та-кую цепочку соотношений:C′(x)e−P(x)+C(x)e−P(x)(−p(x))+ +p(x)C(x)e−P(x)=f(x) ⇒ C′(x)=eP(x)f(x) ⇒ C(x)=+C2, где x0, x∈(a, b), а C2 – произво-льная постоянная. Далее подставляя полученную ф-июC(x) в выражение (3), получаем формулу решений ДУ (1) ∀x∈(a, b):y=Ce−P(x)+e−P(x)(5)(здесь мы произвольную постоянную C2 обозначили через C). Из формулы (5) имеем, что решением ДУ (1), удовлетворяющим начальному условиюy (x0)=y0 (6), где y0 есть некоторое заданное число, явл. ф-ия y=+ +. Непосредственным образом убеждаемся, что данная функцияявл. единственным решением задачи Коши (1), (6).

Общее решение линейного неоднородного ДУ (1) представляет собой сумму общего решения линейного однородного ДУ (2) и частного решения линейного неоднородного ДУ (1).

**17. Уравнение Бернулли.**

ДУ вида y′+p(x)y=q(x)ym (1), где p(x) и q(x) есть зада-нные непрерывные функции на (a, b), m≠0≠1 есть неко-торое вещественное число, будем называть уравнением Бернулли.

Нетрудно видеть, что при m > 0 ДУ (1) имеет частное решение y=0.

Если y≠0, то, разделив ДУ (1) на ym и введя новую неизвестную функцию z=y1−m,получаем линейное ДУ относительно функции z:z′+(1−m)p(x)z=(1−m)q(x).

Замечание. Отметим, что для решения ДУ (1) можно также использовать методБернулли, состоящий в замене y(x)=u(x)v(x).

**18. Уравнения в полных дифференциалах**

Рассмотрим ДУ 1-го порядка в симметрич. форме P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 (1), где функции P(x,y) и Q(x,y), , непрер. на некоторой области G пл-ти IR2 и область G не содержит особых точек ДУ (1).

**Опр**. ДУ (1) будем наз. ур. в полных дифференциа-лах, если ∃ такая однозначная непрер. дифф. на области G функция u(x,y), что на этой области du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy∀(x,y)∈G.

Пусть ДУ (1) явл. ур. в полных дифф. Если x=ϕ(t), y=ψ(t), t∈I, если некоторое параметрич. решение этого ДУ, то du[ϕ(t), ψ(t)]=P[ϕ(t), ψ(t)]dϕ(t)+Q[ϕ(t), ψ(t)]dψ(t)=0, ∀t∈I.

Поэтому u[ϕ(t), ψ(t)]=C, ∀t∈I. Очевидно и обратное: если u[ϕ(t), ψ(t)]=C, ∀t∈I, то соотнош. x=ϕ(t), y=ψ(t), t∈I, задает параметрич. решение ДУ (1).

Итак, мы получили, что соотношение u(x,y)=C, где С-произвольная постоянная, содержит все решения ур. в полных дифф. При этом интегр. кривая ур. в полных дифф., проходит через точке (x0,y0), единственным образом определяется ф-лой: u(x,y)=u(x0,y0).

Поставим теперь задачу: как по коэфф. P(x,y) и Q(x,y) установить, явл. ли ДУ(1) ур. в полных дияя. Пусть u(x,y) есть дважды непрер. дифф. на области G функция. Тогда если ДУ (1) есть ур. в полных дифф., то на этой области P(x,y)=, Q(x,y)=, ∀(x,y)∈G (2). Поэтому имеют место тождества: =, =, ∀(x,y)∈G. Далее в силу равенства смешанных частных производных дважды непрер. дифф. функций получаем необходимое условие того, что ДУ (1) явл. ур. в полных дифф.: =, ∀(x,y)∈G (3).

Если область G явл. Оно связной, то в курсе матана доказывается, что усл. (3) явл. и достаточным. При этом функция u(x,y) находится из системы ур. (2) или с помощью Кри-2.

**Замечание**. Тот факт, что ДУ (1) явл. ур. в полных дифф. означает, что векторное поле (P(x,y), Q(x,y)) явл. потенциальным на области G, а функция u(x,y) явл. потенциалом этого векторного поля. Поэтому функцию u(x,y) наз. потенциалом ДУ (1).

**19. Интегрирующий множитель**

Рассмотрим ДУ P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 (1), для которого на области G⊂IR2 выполняется неравенство: ≠.

Опр. Непрер. дуфф. и не обращающуюся в нуль на области G функцию μ(x,y) будем наз. интегрир. множителем ДУ (1), если ДУ μ(x,y)(P(x,y)dx+ +Q(x,y)dy)=0 явл. ур. в полных дифф. на этой области.

Если для ДУ (1) ∃ интегрир. множитель μ(x,y), то в силу=он должен удовлетворять соотношению (2). Оно даст для функции μ ДУ в частных производных первого порядка: Q(x,y)-P(x,y)=( - )μ (3). Интегрирование данного ур. не проще, чем интегрир. исходного ДУ (1). Однако нас будет интересовать лишь какое-либо одно решение ДУ (3). На практике его можно найти, используя какие-либо из особенностей задания функций P и Q. Иногда его ищут в виде μ=μ(х) или в виде μ=μ(у). Тогда (3) для искомой функции μ упрощается.

Если ДУ (1) можно выделить полный дифф. некоторой функции ϕ(x,y), то иногда данное ДУ упрощается, если от переменных (x,y) перейти к переменным (x,z) или (z,y), где z=ϕ(x,y).

**20.Огибающие и С-дискриминантные кривые.**

Из геометрич. смысла ДУ вида =f(t,x) вытекает, что его интегральная кривая в каждой своей точке имеет касательную с направлением векторного поля, порожденного этим уравнением. Это означает, что все интегральные кривые (если они ∃), проходящие через данную точку, должны касаться друг друга.

**Опр**. Решение ДУ F(x,y,yl)=0 (1) будем называть особым, если в каждой его точке нарушается единственность решения.

**Опр**. График особого решения ДУ (1) будем наз. особой интегральной кривой этого уравнения.

Геометрич. особое решение ДУ есть огибающая L семейства интегральных кривых данного ур., определяемого его общим интегралом Ф(x,y,C)=0.

Пусть L – огибающая семейства кривых Ф(x,y,C)=0, заданная параметрич. в виде x=x(t), y=y(t), t∈I. Тогда вектор =(xl­(t), yl(t)) направлен по касательной к огибающей в данной точке (x,y), а значит, и по касательной к кривой семейства Ф(x,y,C)=0, проходящей через эту точку. Пусть точка (x,y)∈L принадлежит одновременно и кривой семейства, для которой постоянная С=С0. Тогда вектор =(Фlх, Фly)=gradФ ортоганален (⊥) огибающей L в точке (x,y), т.е. (, )=0 или xl(t)+yl(t)=0 (2). При изменении параметра t точка(x,y) огибающей перемещается по ней, переходя с одной кривой семейства Ф(x,y,C)=0 на другую, т.е. при такой смене кривых постоянная С в общем интеграле ДУ явл. функцией С=С(t). Поэтому вдоль огибающей выполнено равенство Фl(x(t),y(t),C(t))=0 откуда xl(t)+yl(t)+Сl(t)=0. Откуда с учетом (2) имеем =0.

Таким образом, если семейство кривых Ф(x,y,C)=0 имеет огибающуюL, то выполняются условия Ф(x,y,C)=0, =0 (3).

**Опр**. Кривую, удовлетворяющую системе (3), будем наз. С-дискриминантной кривой.

Условие (3) явл. необходимым условием существования огибающей семейства Ф(x,y,C)=0, т.е. если это семейство имеет огибающую, то ее уравнение задается системой (3). Однако если рушить эту систему, то ее решение не обязательно доставляет огибающую.

**21. Дифференц. ур. 1-го порядка в общей форме**

Рассмотрим общей случай обыкновенного ДУ 1-го порядка F(x,y,yl)=0 (1) не разрешенного относительно производной. Если же ДУ (1) удается разрешить относительно yl, то получаем ДУ вида yl=fi(x,y) i=1,2,… которые могут быть проинтегрированы.

Предположим, что ДУ (1) в окрестности точки (x0,y0) может быть разрешено относительно производной и распадается на ДУ yl=fi(x,y) i=. Пусть каждое из этих уравнений имеет общее решение y=ϕi(x,C) i= (2) или общий интеграл Фi(x,y,C)=0 i= (3).

Тогда совокупность общих решений (2) (или общих интегралов (3)) будем наз. общим решением (общим интегралом) ДУ (1).

Однако ДУ (1) не всегда разрешимо относительно производной yl и еще реже полученные после этого ДУ интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим интегрирование некоторых классов ДУ (1), не разложенных относительно производных:

1. **Ур, разрешенные относит.перем. у и не сод. перем х**

Эти ДУ имеют вид y=ϕ(yl) (4). Для интегрирования ДУ (4) применим так называемый метод введения параметра. Положим yl=p, где р-параметр. Тогда ДУ (4) примет вид y=ϕ(p) (5). Осталось получить еще ур., выражающее х через р и С. Т.к. yl=p, то имеем, что dx=⇒x= +C. Применяя к последнему интегралу метод интегрирования по частям, с учетом (5) имеем, что = + dp. Поэтому x= + dp+C (6). Таким образом, мы получаем систему ур. (5) и (6), которая явл. общим решением ДУ (4) в параметрич. форме. Исключив, если это возможно, из этой системы параметр р, получаем общий интеграл ДУ (4) в виде Ф(x,y,C)=0.

1. **Ур, разрешенное относит.перем. х и не сод. перем у.**

Данные ДУ имеют вид x=ϕ(yl) (7). В данном случае положим, что yl=p. Тогда x=ϕ(p) (8). Далее используем соотношение yl=p и ф-лу интегрирования по частям dy=pdx =>y==px- =>y=pϕ(p)-+C (9). Система соотношений (8) и (9) и является общим решением ДУ (7) в параметрич. форме. Если удается исключить из этой системы параметр р, то получим общий интеграл Ф(x,y,C)=0 исходного ДУ.

1. **Ур., разрешенные относительно переменной у.**

Эти ДУ имеют вид y=ϕ(x,yl) (11). ДУ (11) допускает параметрическое представление y=ϕ(x,p), yl=p (12). С учетом соотношения dy=yldx=pdx из (12) получаем ДУ, связывающее р и х: ϕlxdx+ϕlpdp=pdx (13).

Если ДУ (13) удается проинтегрировать в квадрату-рах, считая р функцией х, то подставив общее решение р=а(x,C) в соотношение y=ϕ(x,p) получим общее реше-ние ДУ (11) в виде y=ϕ(x,a(x,C)).

1. **Ур., разрешенные относительно переменной х.**

Данные ДУ имеют вид х=ϕ(y,yl) (14). Оно допускает параметрическое представление в виде x=ϕ(y,p), yl=p (15). С учетом того, что dy=yldx=pdx, из (15) имеем dy=p(ylydy+ϕlpdp) (16). Если ДУ (16) интегрируется в квадратурах, то ДУ (14) аналогично предыдущему случаю, также может быть проинтегрировано в квадратурах.

**22.Уравнения Лагранжа и Клеро.**

**Уравнение** Лагранжа имеет вид y=xϕ(yl)+ψ(yl) (1). Оно линейно относительно х и у, а ϕ и ψ есть заданные гладкие функции, причем ϕ(yl)≠yl, y=ϕ(x).

Интегральные кривые этого ДУ будем искать в параметрической форме х=x(p), y=y(p), где р-параметр, в качестве которого возьмем yl=p=p(x). Тогда из (1) име-ем, что y=xϕ(p)+ψ(p) (2). Для нахождения зависимости x=x(p) про дифференцируем соотношение (2) по х: р=ϕ(p)+xϕl(p)+ψl(p) =>p-ϕ(p)=(xϕl(p)+ψl(p)) (3) откуда (p-ϕ(p))= xϕl(p)+ψl(p) (4). ДУ (4) явл. линейным относительно х. Решив его, получим общее решение в виде x=x(p,C).

Таким образом, интегральные кривые ур. Лагранжа (1) параметрически определяются системой (5).

При переходе от ДУ (3) и (4) пришлось делить на . При этом могут теряться решения, для которых р постоянно, а значит =0. Считая р постоянны, получаем, что ДУ (3) удовлетворяется лишь в том случае, если р-корень уравнения р-ϕ(p)=0 (6).

Таким образом, если р=рi есть вещественные корни уравнения (6), то к найденным выше решениям (5) надо добавить решения y=xϕ(p)+ψ(p), p=pi =>y=xϕ(pi)+ψ(pi).

**Уравнение Клеро** имеет вид y=xyl+ψ(yl). Уравне-ние Клеро явл. частным случаем уравнения Лагранжа.

Положим yl=p. Тогда y=xp+ψ(p). Дифференцируя это соотношение по х, получаем что p=p+x+ψl => (x+ψl(p))=0. Отсюда или =0, а значит р=Сi или x+ψl(p)=0.

В первом случае получаем однопараметрическое семейств y=Cx+ψ(C) являющееся общим решением ур. Клеро. Оно найдено без квадратур.

Во втором случае решение определяется в параметрическом виде соотношениями.

**23. Уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка уравнения.**

Рассмотрим некоторые классы ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.

1. **ДУ вида y(n)=f(x).** Будем считать, что функция f непрерывна на (a,b). Интегрируя последовательно данное ДУ, получаем: y(n-1)=+C1; y(n-2)=+C1x+C2;…
2. **ДУ вида F(x,y(n))=0**. Если данное ДУ удается разрешить в элементарных функциях относительно y(n). Проинтегрировав все эти ур., найдем общий интеграл исходного ДУ.

Пусть исходное ДУ, неразрешенное относительно y(n), допускает параметрическое представление x=ϕ(t), y(n)=ψ(t) (1). В этом случае можно найти общее решение в параметрической форме.

Так как перем. х выражена через параметр t, то задача сводится к проблеме выражения у через t. Согласно (1) имеем: dy(n-1)=y(n)dx=ψ(t)ϕl(t)dt =>y(n-1)=≡≡ψ1(t,C1). Аналогично находится выражение для y(n-2). Продолжив этот процесс далее, для переменной у получим выражение вида y=ψn(t,C1,…,Cn). Поэтому x=ϕ(t), y=ψn(t,C1,…,Cn) (2). Ур. (2) наз. общим решением исходного ДУ в параметрической форме.

1. **ДУ, не сод.искомой функции.** Данное ДУ имеет вид F(x,yl,…,y(n))=0 (3). Оно явл. частным случаем ДУ F(x,y(k),y(k+1),…,y(n))=0 (4). Рассмотрим интегрирование ДУ (4).

Выполним замену y(k)=z(x). Тогда y(k+1)=zl, y(k+2)=zll, …, y(n)=z(n-k), и ДУ (4) сводится к ДУ F(x,z,zl,…,z(n-k))=0, порядок которого равен n-k. Решив его, найдем функ-циюz(x)=y(k), т.е. получим ДУ из первого пункта.

1. **ДУ, не сод.независимой переменной.** Данное ДУ имеет вид F(y,yl,…,y(n))=0 (5). Покажем, что замена yl=p, где p=p(y), понижает порядок этого ДУ на единицу. Непосредственными вычислениями получаем соотношения yl==p=p(y), yll===p, … (6). В правой части каждого из этих равенств максимальный порядок производных функции р на единицу меньше порядка производной функции у в левой части каждого из этих равенств. Подставив производные (6) в ДУ (5), придем к ДУ вида Ф(y,p,,…,)=0, порядок которого на единицу меньше порядка исходного ДУ (5).

Отметим, что принимая уза независимую переменную, мы могли потерять решения вида y=const. Непосредственной подстановкой y=a=const в ДУ (5) можно выяснить, имеет ли оно решения такого вида.

1. **ДУ, однородное относительно искомой функции и ее производных.** ДУ F(x,y,yl,…,y(n))=0 (7) будем назы-вать однородным порядка m относительно y,yl,…,y(n), **23.** если F(x,ty,tyl,…,ty(n))=tmF(x,y,yl,…,y(n)) (8). Покажем, что данное ДУ допускает понижение порядка, если положить yl=yu (9), где u=u(x) есть новая неизвестная функция.

В самом деле, из (9) найдем выражения для yll,ylll,…,y(n). При этом при дифференцировании заменяем каждый раз yl на yu: yll=ylu+yul=yu2+yul= =y(u2+ul), ylll=(y(u2+ul))l=yl(u2+ul)+y(2uul+ull)= =y(u3+3uul+ull), …, y(n)=yv(u,ul,…,u(n-1)) (10), где v есть некоторая функция переменных u,ul,…,u(n-1).

Подставим (10) в ДУ (7): F(x,y,yu,y(u2+ul),…, yv(u, ul, …,u(n-1)))=0. Данное ДУ в силу однородности (8) функции F можно записать так: ymF(x,1,u,u2+ul,…,v(u,ul, …, u(n-1)))=0. Разделив на ym, получим ДУ (n-1) - го порядка F(x,1,u,u2+ul,…,v(u,ul, …, u(n-1)))=0. Найдя его общее решение u=ϕ(x,C1,…,Cn-1) и заменив uна, получим =ϕ(x,C1,…,Cn-1) =>y=Cnexp(). Это и есть общее реше-ние ДУ (7). Отметим, что деля на ym, мы не потеряли ре-шение y=0 (оно получается из общего решения при Сn=0).

1. **ДУ, левая часть которого есть точная производная.** Пусть в ДУ F(x,y,yl,…,y(n))=0 (11), левая часть F есть точная производная от некоторой функции Ф(x,y,yl,…,y(n-1)), т.е. F(x,y,yl,…,y(n))= Ф(x,y,yl,…,y(n-1)). Тогда выражение Ф(x,y,yl,…,y(n-1))=С1 (12) явл. первым интегралом ДУ (11).

Если ДУ (11) не явл. ур. в точных производных, то

можно попытаться подобрать такую функцию μ=μ(x,y,yl,…,y(n-1)), называемую интегрирующим множителем ДУ (11), чтобы после умножения на нее данное ДУ стало ур. в точных производных.

**24. Существование и единственность решения задачи Коши.**

Нормальная система обыкновенных ДУ 1-го порядка имеет вид =fi(t,x1,…,xn), i= (1), где функция fi:G→IR непрерывны на области G⊂IRn+1, i=. В векторном виде система (1) записывается след.образом: =f(t,x) (2), где x=(x1,…,xn)T, (t,x)=(t, x1,…,xn)T, f=(f1,…,fn)T.

Решением дифф. системы (2) мы называем такую гладкую векторную функцию x:I→IRn, I⊂IR, что =f(t,x(t)), ∀t∈I (3) и (t,x(t))∈G, ∀t∈I. Если, кроме того, x(t0)=x0, то функция х разрешает задачу Коши =f(t,x(t)), (t,x(t))∈G, x(t0)=x0, х0∈I (4).

**Теорема (интегральный критерий)**. Для того, чтобы функция х:I→IRn была решением задачи Коши (4), необ-ходимо и достаточно выполнение векторного интеграль-ного тождества x(t)=x0+, ∀t∈I (5).

**Док-во.** *Необх*. Пусть функция х явл. решением задачи Коши (4). Тогда выполняется тождество (3). Интегрируя его в пределах от t0 до t, получаем соотнош. x(t)-x(t0)=, ∀t∈I. А оно в силу x(t0)=x0 равносильно соотнош. (5).

*Достат*. При гладкой функции х сложная функциянепрерывна по τ. Поэтому векторный интеграл, а с ним правая и левая части соотнош. (5) дифференцируемы по t. Дифференцируя (5) по t, приходим к (3). Это означает, что функция х есть решение системы (2). Кроме того, из (5) вытекает, что x(t0)=x0+0=x0. Таким образом, х есть решение задачи Коши (5).

Правая часть f системы (2) удовлетворяет условию Липшица по переменной х на области G, если ||f(t,x)-f(t,y)||≤L||x-y||, ∀(t,x)∈G, ∀(t,y)∈G (6), где L есть некоторая постоянная (постоянная Липшица).

**Лемма (об условии Липшица).** Если на выпуклом по х множестве V⊂IRn+1∃ ограниченная по норме матрица, т.е. ≤K, ∀(t,y)∈V, то функция f удовлетворяет условию Липшица по х на V.

**Теорема (Пикара-Линделефа**). Пусть функция fнеп-рерывна на области G⊂IRn+1 и удовлетворяет условию Липшица по х в некоторой окрестности U⊂G точки (t0,x0). Тогда задача Коши (4) локально однозначно раз-решима. При этом ее решение х определено, по крайней мере, на отрезке [t0-h,t0+h], h>0 (h- достаточно мало), и может быть построено по методу последовательных приближений x0(t)=x0, xk(t)=x0+, x(t)==x0+.

**25. Сравнение решений и продолжимость.**

На множестве G⊂IRn+1 рассмотрим дифф. систему =f(t,x) (1). Возьмем решение x:I→IR дифф. системы (1). Каждое сужение х1 данного решения х на промежут-ок I1⊂I также явл. решением этой дифф. системы. При этом х будем называть продолжением решения х­1. Если же решение х не служит сужением ни одного решения, то решение х будем называть непродолжаемым или продолженным.

**Теорема**. Каждое решение дифф. системы (1) явл. сужением хотя бы одного продолженного решения этой системы.

Далее рассматриваем дифф. систему (1) в предполо-жении, что G⊂IRn+1 есть область.

**Теорема (критерий продолжимости решения).** Если вектор-функция fнепрерывна на G, то для продолжимости решения х:(α,β)→IRn дифф. системы (1) вправо отβ (влево от α) необходимо и достаточно, чтобы ∃ левый предел x(β-0)= и (β,x(β-0))∈G (∃ правый предел x(α+0)= и (α,x(α+0))∈G).

Будем говорить, что решение x : (α, β) → IRn дифф/ системы (1) стремится к границе ∂G области G при t → β − 0, если для любого наперед заданного компактного подмножества G0⊂ G ∃ β0, α < β0< β: ∀t ∈ (β0, β) точка (t, x(t))∉G0.

Аналогичным образом определяется стремление решения x : (α, β) → IRn дифф. системы (1) стремится к границе ∂G области G при t → α + 0.

**Теорема (критерий непродолжимости решения).** Если вектор–функция f непрерывна на области G, то решение x : (α, β) → IRn дифф. системы (1) непродолжимо вправо (влево) ⇔ оно стремится к границе ∂G при t → β −0 (при t → α + 0).

В частности, если область G ограниченная, то график непродолжимого решения целиком не лежит ни в одном замкнутом подмножестве из G.

**Теорема (сравнения Чаплыгина).** Пусть вещ. Фун. f1 и f2 определены в области G⊂IR2 и удовлетворяют неравенству f1(t, x) <f2(t, x), ∀(t, x) ∈G. Тогда, если функции x1[s, β] → IR, x2[s, β] → IR, явл., соответственно, решениями ДУ =f1(t,x), =f2(t,x), и удовлетворяют условию x1(s) = x2(s), то x1(t) <x2(t), ∀t∈ (s, β].

**Теорема (о промежутке существования непродолжи-мого решения).** Пусть вектор–функция f непрерывна в полосе G =<α, β> ×IRn и удовлетворяет неравенству |f(t,x)| <Φ(|x|), ∀(t, x) ∈G, где вещественная функция Φ непрерывна, Φ> 0, если u> 0 и =+∞. Тогда всякое непродолжимое решение задачи Коши =f(t,x), x(t0)=x0 (2), определено на промежутке <α, β>.

**26. Первые интегралы.**

**Опр**.Гладкую функцию H(t, x) : G → IR будем назы-вать первым интегралом дифф. системы =f(t,x) (1), если для любого ее решения φ(t) :< a, b >→ IRnимеет место тождество H(t, φ(t)) ≡ const, t ∈< a, b >.

Ур-ие H(t, x) = C определяет множество Γ в про-тве Otx1 . . . xn. Из определения следует, что интегральные кривые, проходящие через точки множества Γ, принадлежат Γ. Мн-во Γ явл. n–мерной поверхностью (гиперповерхностью), образованной интегральными кривыми. Такие поверхности будем наз. интегральными.

Пусть H(x, y) есть гладкая на области G функция. На множестве таких фун определим линейный оператор D: DH =+f (2) со значениями в мно-ве непрерывных на G фун. Фун. DH будем называть производной фун H в силу системы (1). Данное название объясняется формулой DH(t, φ(t)) =H(t,ϕ(t)) (3), где φ(t) есть любое решение системы (1). Для док-ва формулы (3) достаточно продифференцировать H(t, φ(t)) по t. Из (3) вытекает утверждение.

**Теорема**. Для того, чтобы гладкая функция H:G → IR была первым интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы DH = 0, ∀(t, x) ∈G.

**Опр**. Первые интегралы H1, . . . ,Hm:G0 →IR будем называть независимыми, если ранг rank=m в каждой точке области G0.

**Теорема**. Пусть матрицанепрерывна на области G. Тогда:

1) в некоторой окрестности точки (t0, x0)∃n независимых первых интегралов системы (1);

2) если H1, . . . ,Hn есть независимые первые интегралы системы (1), определенные в некоторой окрестности точки (t0, x0) ∈ G, то система(H1(t, x), . . . ,Hn(t, x)) = (H1(t0, x0), . . . ,Hn(t0, x0)) (4)имеет единственное решение y = φ(x), явл-ся решением задачи Коши =f(t,x(t)),(t,x(t))∈G, x(t0)=x0, х0∈I.

**Опр**. Если H1, . . . ,Hn: G0 → IR есть независимые первые интегралы, то соотнош. H1(t, x)=C1, . . . ,Hn(t, x)=Cn будем наз. общим интегралом системы (1) на обл. G0.

**Теорема. (об интегрируемой комбинации).** Пусть выр-ние φ1dx1 + . . . + φndxn явл. полным дифференциалом некоторой функции Φ и пусть φ1f1 + . . . + φnfn = 0, ∀(t, x) ∈ G.Тогда Φ : G → IR–1-ый интеграл системы(1).

**Док**-во. Т. к. dΦ=φ1dx1 + . . . + φndxn,то=ϕk, k=. Поэтомуf1+…+fn=ϕ1f1+…+ϕnfn= 0, ∀(t, x)∈G.

Рассмотрим теперь автономную систему=f(x) (5). Представим ее в виде=…==dt. Тогда систему=…=(6) будем наз. системой в симметричной форме. Отметим, что система (6) описывает гео-ские св-ва решений системы (5). Каждое ДУ k=, выявляет хар-р параметризации интегральных кривых.

**27. Системы лин. ур. с периодическими коэффиц.**

Рассмотрим сначала лин. однородную систему обык-

новенных ДУ с переменными коэффиц. =A(t)x (1), где квадратная м-ца порядка n непрерывна на промежутке I. Рассмотрим класс лин. дифф. систем, интегрируемых в квадратурах, впервые рассмотренный И. А. Лаппо–Да-нилевским.

Непрерывную м-цу A(t), t ∈ I, будем наз. перестановочной со своим интегралом на промежутке I, если ∃ t0∈I, что A(t)= , ∀t ∈ I.

**Теорема. (Лаппо–Данилевского).** Если м-ца коэффиц. дифф. системы (1) перестановочна со своим интегралом на промежутке I, то семейство всех решений этой дифф. системы доставляет формула x=C, где =.

Непрерывно дифференцируемую м-цу L, определен-ную на промежутке [t0,+∞), будем наз. м-цей Ляпунова, если: 1) матрицы L и ограничены на [t0,+∞);

2) |detL(t)| ≥m> 0, ∀t≥t0.

Линейное преобразованиеy = L(t)xс м-цей Ляпунова L будем наз. преобразованиемЛяпунова. Будем гово-рить, что дифф. система (1), заданная на промежутке [t0,+∞), приводима поЛяпунову, если ∃преобразованиеЛяпунова, приводящее данную дифф. системук дифф. системе=By с постоянной м-цей B.

**Теорема. (критерий приводимости Еругина).** Лин. дифф. система (1) приводима ⇔ некоторая ее фундамен-тальная матрица X(t) представима в виде X(t) = L(t)eBt, где L есть м-ца Ляпунова, B – постоянная м-ца.

Рассмотрим теперь дифф. систему (1) с непрерывной периодической м-цей A(t), т.е. когда A(t+T)=A(t), ∀t∈IR, T > 0.

**Теорема**. Каждую фундаментальную м-цу Φ(t) дифф. системы (28.1) можно представить в виде Φ(t) = G(t)etR (2), где G(t) есть T–периодическая на IR м-ца, R – посто-янная м-ца.

Постоянная м-ца B, определяемая ф-лой (3), наз. м-цей монодромии. Она определяется с помощью фунда-ментальной м-цы Φ(t), кот.не единственна. Поэтому и м-ца монодромии определяется не однозначно.

Пусть Φ1(t) есть другая фундаментальная м-ца дифф. системы (1). На ее основе определим м-цумонодромии B1:Φ1(t+T)=Φ1(t)B11, ∀t∈IR.Далее учитываем связь между двумя фундаментальными м-цами в видеΦ1(t)= =Φ(t)S, ∀t∈IR, detS≠0.Сравнивая последнее соотноше-ние с (3), получаем, чтоB = SB1S-1. Таким образом, мы получили, что все м-цы монодромии подобны. Отметим, что часто матрицей монодромииназывают м-цу, которая определяется нормированной приt = 0 фундаментальной м-цей Φ(t). Тогда из (3) имеем,чтоB = (T) (4). Собст-венные числа μ1,…,μn м-цы монодромии наз. мультип-ликаторами дифф.системы (1),а собственные числа λ1,…,λn м-цы R – хар-ристическими показателями. Из определениям-цы R имеем, чтоλj =Lnμj, j=.При этом простым мультипликаторам соответствуют прос-тыехар-ристические показатели, а кратным мультипли-каторам – хар-ристические показатели с элементарными **27.** делителями той же кратности. Отметим также, что хар-ристические показатели определены с точностью до 2πki, k∈**Z**. На основании (4) и формулы Лиувилля Остроградскогоимеем, чтоdetB = exp, илиμ1...μn=exp (5).

**Теорема**. Число μ является мультипликатором дифф. системы (1) ⇔∃ решение φ(t)≠0 этой дифф. системы, что φ(t + T) = μφ(t), ∀t ∈IR. (6)

**Следствие**. Для того, чтобы дифф. система (1) имела хотя бы одно T–периодическое решение,необходимо и достаточно, чтобы один из его мультипликаторов был равен 1.

**Теорема**.∃лин. замена переменных (9), где G(t), ∀t∈IR, есть неособая гладкая T–периодическая м-ца, переводящая дифф. систему (1) к лин. однородной дифф. системе спостоянной м-цей коэффиц., собствен-ные числакоторой есть хар-ристические показатели дифф. системы (1).

**28. Метод функций Ляпунова.**

Рассмотрим нормальную систему ОДУ n–го порядка =f(t,x) (1), с непрерывной правой частью f, определен-ной в полупространстве t≥s, удовлетворяющей услови-ям, обеспечивающим однозначную разрешимость любой задачи Коши (1) сначальным условиемx|t=s=ξ∈IRn (2), и бесконечную продолжимость вправо всех решений.

Если, кроме того, для достаточно малых Δξ:=0, то решение x(t)= =x(t; s, ξ) будем называть асимптотически устойчивым.

Для исследования устойчивости некоторого решения x(t) вдифф. системе (1) произведем заменуy=x−x(t).В результате получим дифф. систему=g(t, y) (3), где g(t,y)=f(t, y+x(t))−f(t, x(t)), g(t, 0)=0, ∀t≥s.В дифф.систе-ме (3) решению исходной дифф. системы (1) соответст-вует нулевое решение y = 0. Поэтому исследование усто-йчивости произвольного решения дифф.системы (1) сво-дится кисследованию устойчивости нулевого решения дифф. системы (3).

Пусть v:IRn→IR, w:IRn→IR, есть непрерывно диффе-ренцируемые скалярные функции, положительные при x≠0и нулевые при x = 0.

**Теорема (Ляпунова об устойчивости).** Если ∃ такая функция v, для которойgradv • f=f1+…+fn≤0,∀t≥s, ∀x, ||x||≤r (4), то нулевое решение дифф. системы (1) устойчиво.

**Теорема (Ляпунова об асимптотической устойчивос-ти).** Если ∃ функции v и w, такие, чтоgradv • f≤−w, ∀t≥s, ∀x, ||x||≤r (5), то нулевое решение дифф. системы (1) асимптотически устойчиво.

В следующей теореме функция v не обязательно положительна при x≠0, однако в любой окрестности нуля ∃ ξ≠0, такое, что v(ξ)>0. При этом предположения о

функции w остаются прежними.

**Теорема (Ляпунова о неустойчивости).** Если ∃функ-ции v и w, такие, чтоgradv • f≥w, ∀t≥s, ∀x, ||x||≤r (6), то нулевое решение дифф. системы (1) неустойчиво.

Дифф. систему (1) вида=Ax+g(t, x), (7), называют квазилинейной (системой с ведущей линейной частью), если равномерно по t≥s g(t, x)=o(||x||) при x → 0.При этом автономную линейную систему=Ax (8) называют линеаризацией дифф. системы (7)вдоль нулевого решения.

**. Теорема (об асимптотической устойчивости).**Если линеаризация (8) асимптотически устойчива, то асимптотически устойчиво и нулевое решение квазилинейной дифф. системы (7).

**Теорема (о неустойчивости).** Если хотя бы одно хар-ское число матрицы A имеет положительную действительную часть, то нулевое решение квазилинейной дифф. системы (7) неустойчиво.

В частности, нулевое решение дифф. системы (9) неустойчиво, если матрица Якоби f′(0) имеет покрайней мере одно хар-ское число с положительной действительной частью.

**29. Колеблемость решений лин. ур. 2-го порядка.**

Рассмотрим линейное скалярное ДУ 2-го порядка x′′+p(t)x′+q(t)x=0, t∈I=< a, b> (1), с непрерывными коэффиц. p и q.

По теореме об однозначной разрешимости всякая задача Коши для ДУ (1) имеет единственное решение, определенное на промежутке I. В частности, если реше-ние обращается в нуль вместе со своей производной в некоторой точке промежутка I, то это решение нулевое. В дальнейшем под решением будем понимать лишь ненулевое решение. Поэтому, если решение x обращается в нуль в точке t0∈I, то x′(t0)≠0 и поэтому для внутренней точки t0 решение x меняет знак при переходе через t0, а график решения пересекает ось t.

**Лемма (о нулях решений).** Никакое решение ДУ (1) не может иметь бесконечного числа нулей на ∀[α, β]⊂I (т.е. нули всякого решения изолированы).

**Док-во**. Если решение x имеет бесконечное множест-во нулей на отрезке [α, β], то в точке t∗, которая явл. пре-дельной для множества нулей, имеем x(t∗)=x′(t∗)=0. От-сюда делаем вывод, что решение x явл. нулевым. Полу-ченное противоречие и доказывает лемму.

**Лемма (о ЛЗ).** Если два решения ДУ (1), либо их пер-выепроизводные обращаются в нуль в некоторой точке промежутка I, то эти решения ЛЗ (т.е. отличаются друг от друга на постоянный множитель).

**Док-во.** Вронскиан W решений x1 и x2 равенx1x′2−x2x′1. По условию в некоторой точке t0∈I вронски-ан W(t0)≠0. Тогда на основании ф-лы Лиувилля–Остроградского имеем, что W(t)=0, ∀t∈I.А это означает, что решения x1 и x2ЛЗ.

Решение ДУ (1) будем наз.неколеблющемся на I1⊂I, если оноимеет на I1 не более одного нуля. В противном случае решение будем наз. колеблющемся на I1.

**Теорема (признак неколеблемости решений).**Всякое решение ДУ (1) явл. неколеблющемся на промежутке I1⊂I, если на этомпромежутке q(t)≤0.

Если ф-ия p непрерывно дифференцируема, а ф-ия q непрерывна, то заменаx = exp (3) прео-бразует ДУ (1) к ДУ (2) с непрерывным коэффиц. Q. ДУ (2) будем наз. канонической формой ДУ (1). Отметим, что преобразование (3) сохраняет нули соответствую-щих решений ДУ (1) и (2). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только каноническую форму.

Рассмотрим два ДУ в канонич. формеx′′+Q(t)x=0 (4)иx′′+Q1(t)x=0 (5)с непрерывными на промежутке I коэффиц. Q и Q1.

**Теорема (сравнения Штурма).** Если t1и t2, t1<t2- нули некоторого решения x ДУ (4) и Q(t)≤Q1(t), ∀t∈[t1,t2] (6), то всякое решение y ДУ (5) на[t1,t2] имеет по крайней мере один нуль. Более того,если t1 и t2 не явл. одновре-менно нулями решения y, тоy имеет нуль на (t1,t2).

**Следствие.** Всякое решение ДУ (4) явл.неколеблю-щимся на промежутке I,если Q(t)≤0 на I.

**30. Автономные системы на плоскости.**

Рассмотрим сначала автономную дифф. систему = =f(x) (1), с векторной правой частью f:G→IRn, удовлет-воряющей условию Липшица по x на области G⊂IRn, а поэтому непрерывной. При этом всякая задача Коши для дифф. системы (1) однозначно разрешима и решения интегрально непрерывны по начальным данным. Пред-положим, что все решения дифф. системы (1) бесконеч-но продолжимы в обе стороны. В дальнейшем будем рассматривать лишь продолженные решения.

Важное св-во дифф. системы (1) состоит в том, что сдвиг каждого решения x на произвольную постоянную c, т.е. ф-ия x=x(t+c), также явл. решением этой дифф. системы. Далее решение x,удовлетворяющее начально-му условию x(0)=ξ, будем обозначать как x=x(t; ξ).

**Лемма (о групповом свойстве).**

x(t1; x(t2; ξ))=x(t1 + t2; ξ), ∀t1∈IR, ∀t2∈IR, ∀ξ∈G.

**Док-во.** Ф-ииx1(t)=x(t; x(t2; ξ))иx2(t)=x(t + t2; ξ)явл. решениями дифф. системы (1), причемx1(0)=x2(0).На основании однозначной разрешимости задачи Коши получаем, чтоx1(t)=x2(t), ∀t∈IR.В частности,x1(t1)= =x2(t1),т.е. имеет место соотнош. из условия леммы.

Пространство IRn наз. фазовым пространством дифф. системы (1), если решения x этой системыизображают-ся на нем в виде линийx=x(t), t∈IR (2). Направленную линию ***l***, допускающую параметрич. задание в виде (2), наз. траекторией (фазовым графиком) дифф. системы (1) или траекторией решения x. Положительной полутраек-ториейрешения x наз. направленную линиюl+={x(t)|t≥0}.Аналогичным образом определяется отрицательная полутраектория l− решения x.

**Теорема (о траекториях).** Две траектории дифф.сис-темы (1) либо не имеют общих точек,либо совпадают.

**Теорема (о решениях).** Каждое решение x дифф.сис-темы (1) удовлетворяет одному из следующих условий:

1) x(t1)≠x(t2) при t1≠t2 (непериодическое решение);

2) ∃ T>0: x(t+T) = x(t), ∀t∈IR,и x(t1)≠x(t2) при 0<|t1−t2|<T (периодическое решение);

3) x(t)=const, ∀t∈IR, стационарное решение.

Траектории, отвечающие указанным в теореме о решениях видамрешений, называют, соответственно: 1) незамкнутой, 2) замкнутой или циклом; 3) точкой покоя (состоянием равновесия). При этом отметим, что точка x∈G явл. точкой покоя ⇔f(x) = 0.

Точку p∈IRn будем наз.ω–предельной точкой решения x, если ∃ такая последовательность (tn)→+∞, что x(tn)→p. Множество всех ω–предельных точек решения x будем называть Ω–предельным множеством и обозначать Ωx. В частности, для постоянного решения x=ξиме-ем Ωx=ξ. Для периодического решения x множество Ωxсовпадает с траекторией движения x.

Пусть M и N -∅ множества пространства IRn.Расстоянием между мн-вами M и N будем наз. величину d(M,N)=||x − y||.ЕслиM и N явл. комп-ми мно-вами и M∩N=⊘, то d(M,N)>0, что вытекает из непрерывности нормы и теоремы Вейерштрасса об экстремальных значениях.

Замкнутое множество M⊂IRn будем наз. связным,если его нельзя представить в виде объединения двух непустых, замкнутых, непересекающихся множеств.

**Теорема**. Если положительная полутраектория решения x расположена в компактном множестве G0⊂G,то предельное множество Ωx явл. непустым, замкнутым и связным.

**Теорема**. Множество Ωx состоит из целых траекторий (т.е., если p∈Ωx, то и вся траектория lp, проходящая через точку p, содержится в Ωx).

**31. Линейные уравнения Эйлера**

Уравнением Эйлера наз. линейное ДУ (t−α)nx(n)+ +an−1(t−α)n−1x(n−1)+ . . .+a0x=f(t), t∈I (1), где ak, k=, и α есть вещественные постоянные, а f есть непрерывная на I функция. Разделив на (t−α)n, имеем ДУ x(n)+ +x(n-1)+⋯+x=,t∈I (2). Точка t=α является особой для ДУ (2).

Теорема. Замена τ = ln|t − α| (3), приводит ДУ. Эйлера (1) на I± в равносильное автономное (стационарное) лин.ДУ x(n)+bn−1x(n−1)+…+b0x=g(τ ), τ∈Iτ (4), где g(τ)=f(α±eτ).

Рассмотрим однородное уравнение Эйлера(t−α)nx(n)+ +an−1(t−α)n−1x(n−1)+ . . .+a0x= 0, t∈I± (5). Замена (3) преоб-разуетДУ (5)к видуx(n)+bn−1x(n−1)+…+b0x=0, τ∈Iτ(6).

Характеристическое уравнение для ДУ (6) имеет видλn+bn−1λn−1+…+b0=0 (7)и может быть получено подста-новкойx = eλτв ДУ (6) с последующим сокращением полученного выражения на общий множитель eλτ ≠0.

Описанная процедура равносильна подстановкеx=|t−α|λ в ДУ (6) с последующим сокращением на общий множитель, что приводит к уравнению λ(λ−1)…(λ−n+1)+an−1λ(λ − 1)…(λ−n+2)+…+a0=0 (8).

Таким образом, алгебраические уравнения (7) и (8) равносильны. Уравнение (8) называют определяющимдля уравнения Эйлера (5). Используя определяющее уравнение (8), несложно получить ДУ (6), к которому приводится уравнение Эйлера (5).

Полное решение ДУ (6) представимо в виде x= (9), где кратность корня λk равна dk, а Pk, Qk, Rk есть многочлены степени dk−1 с произвольными коэффициентами. Замена аргумента (3) переводит общее решение ДУ (6) в общее решение ДУ (5).

**32. Линейные уравнения с голоморфными коэффициентами.**

Рассмотрим нормальную систему ОДУ = f(t, x) (1), где f есть голоморфная на области G⊂IRn+1 вектор–фун-кция. Тогда для каждой точки (s, ξ1,…, ξn)∈G ∃ такая ее окрестность |t−s|<ρ<R, в которой век-тор–функция f разлагается в сходящийся векторный сте-пенной ряд f(t, x)=, ∈IRn, k∈**N**∪{0}, jk∈**N**∪{0}, k=.

Введем вспомогательные обозначенияξ=(ξ1,…, ξn)T , j=(j1,…, jn), xj=. Тогда предыдущий векторный степенной ряд можно записать в виде = =. Для упрощения рассужде-ний выполним в исходной дифф. системе (1) замену t|→t+s, x|→x+ξ (это равносильно случаю s=0, ξ=0). Тогда правая часть дифф. системы (1) принимает видf(t, x)=, (t,k)∈П (2),где Π={(t, x)| |t|<ρ, <R.

**Опр**. Векторный степенной ряд будем наз. формаль-ным, если о его сходимости ничего не предполагается.

**Опр**.. Формальный векторный степенной ряд будем наз.формальным решением дифф. системы (1), если пос-ле подстановки данного формального векторного степе-нного ряда в эту дифф. систему получаем в правой и левой частях формальныевекторные степенные ряды с совпадающими соответствующими коэффициентами.

**Теорема**. Задача Коши (1) – (3) имеет (и притом единственное) формальное решение x(t)= (4), где Ak= Lk−1f|(t,x)=(0,0), k∈**N**.

**Опр**. Формальный векторный степенной ряд вида , будем называть рядом Ли ф-ии x=x(t).

**Опр**. Голоморфнуюдифф. систему =g(t, x), g(t, x)=, (t, x)∈Π, (5) будем называть мажорантой голоморфной дифф. системы (1), (2), если|(ak,j)i|≤≤(bk,j)i, k∈**N**∪{0}, j∈**N**∪{0}, i= (6), где (•)iестьi–компонента вектор-столбца (•), i=.

**33. Теорема Коши.**

**Теорема**. При любом начальном условии x|t=s=ξзада-ча Коши для голоморфной в окрестности точки (s, ξ) дифф. системы = f(t, x) имеет (и притом единствен-ное) решение, голоморфное на некотором интервале |t−s|<r, r>0.

**Док-во** (не умаляя общности) проведем для случая s=0, ξi=0, i=, ρ>1,R>1. По теореме о формальном решении задача Коши обладает единственным формаль-ным решением y. На основании следствиявекторный степенной ряд при |t|<1, |xi|<1, i=, явл. мажорантой векторного степенного ряда для голоморф-ной функции f. Поэтому модельная дифф. система = =F(t, x) (1) служит мажорантой для дифф. системы = f(t, x), f(t, x)=, (t,k)∈П.На основании св-в модельной дифф. системы (1) ∃ решениеz, z|t=0=0,голо-морфное при|t|<r1<1.

В силу теоремы векторный степенной ряд для реше-нияzявл. мажорантой векторного степенного ряда для формального решения x. Поэтому x есть голоморфное решениезадачи Коши на некотором интервале|t|<r, r>r1.

**34. Интегрирование уравнений с частными производными.**

Уравнение в частных производных 1-го порядка дляодной неизвестной функции u имеет видF(x,u,)=0, x=(x1,…, xn), = .

Решением, а также интегралом уравнения в частных производных первого порядка будем называть диффере-нцируемую функцию u:E→IR, E⊂IRn, обращающую данное уравнение в тождество на области E.

**Теорема (Коши–Ковалевской).** Пусть функции φ(x2, ,…, xn) и f(x, u, p2,…, pn) голоморфны соответственно в окрестностях точек (ξ2,…, ξn) и (ξ1,…, ξn, η, ρ2,…, ρn), причем η = φ(ξ2,…, ξn), ρi=(ξ2,…, ξn), i=. Тогда уравнение первого порядка, разрешенное относительно : = f(x, u,,…,) имеет (и притом единствен-ное) решение u=u(x), x∈E, голоморфное в окрестности (ξ2,…, ξn) с начальным значением u(ξ1, x1,…, xn)=φ(x2,…, xn).

Из теоремы о первом интеграле дифф. системы =f(x), x∈IRn (1), следует, что функция u=Φ(x) явл. решением однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка f(x)=0 (2) в том и толь-ко том случае, если она есть первый интеграл дифф. системы (1). Пусть функции Φ1,…, Φm явл.автономны-ми (стационарными) первыми интегралами дифф. систе-мы (1). Тогда каждая из функций u=H(Φ1,…, Φm) также служит первым интегралом для дифф. системы (1), и поэтому явл. решением ДУ (2).

Следовательно, знание совокупности первых интегралов дифф. системы (1), соответствующей ДУ (2), позволяет получить общее решение этого ДУ. Отметим, что вместо диффю системы (1) для интегрирования ДУ (2) можно использовать соответствующую дифф. систему в сим-кой форме =…= (3).

Рассмотрим линейное однородное ДУ (2) с начальным условиемu|x1=ξ = φ(x2,…, xn) (4). Пусть Φ1(x1,…, xn),…, Φn−1(x1,…, xn) - первые интегралы, образующие базис первых интегралов дифф. системы в сим-кой форме (3). Тогда общее решение ДУ (2) задается соотношениемu=H(Φ1,…, Φn−1)и для выполнения начального условия (4) функцию H следует подобрать таким образом, чтобы было выполнено соотношениеH(Φ1(ξ, x2,…., xn),…, Φn−1(ξ,x2,…., xn))=φ(x2,…., xn).

Составим систему функциональных уравнений

Φ1(ξ, x2,…., xn)=C1,

. . . . . . . . . . . . . . . .

Φn−1(ξ,x2,…., xn)=Cn−1(5)

Из этой системы находимxi=xi(ξ,C1,…,Cn−1), i=.Положим теперь H(C1,…,Cn−1)=φ(x2(ξ,C1,…,Cn−1),…,xn(ξ,C1,…,Cn−1)) (6). При таком определении ф-ии H ф-ияu=u(x1,…, xn)=H(Φ1(x1,…, xn),…, Φn−1(x1,…, xn)) (8), явл. решением ДУ (2),удовлетворяет и начальному условию (4), так какu(ξ, x2,…., xn)=H(Φ1(ξ, x2,…., xn),…, Φ(ξ, x2,…., xn))=H(C1,…,Cn−1)=φ(x2,…., xn).

1. Основные понятия теории ДУ.

2. Однородные линейные ДУ n -го порядка.

3. Однородные линейные ДУ n -го порядка с постоянны-ми коэффициентами.

4. Фазовая плоскость однородного линейного уравнения второго порядка с постояннымикоэффициентами.

5. Неоднородные линейные ДУ n -го порядка.

6. Неоднородные линейные ДУ n -го порядка с постоян-нымикоэффиц. и правой частью специального вида.

7. Исследование линейныхДУ с постоянными коэффициентами.

8. Системы линейныхДУ.

9. Системы линейныхДУ с постоянными коэффиц.

10. Фазовая плоскость однородного линейного вектор-ного уравнения размерности 2 .

11. Интегралы систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

12. Устойчивость систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

13. Уравнения с разделенными переменными.

14. Уравнения с разделяющимися переменными.

15. Однородные уравнения.

16. Линейные уравнения первого порядка.

17. Уравнение Бернулли.

18. Уравнения в полных дифференциалах.

19. Интегрирующий множитель.

20. Огибающие и C-дискриминантные кривые.

21. ДУ первого порядка в общей форме.

22. Уравнения Лагранжа и Клеро.

23. Уравнения высших порядков, допускающие пониже-ние порядка уравнения.

24. Существование и единственность решения задачи Коши.

25. Сравнение решений и продолжимость.

26. Первые интегралы.

27. Системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

28. Метод функций Ляпунова исследования устойчивос-ти решения нелинейных систем.

29. Колеблемость решений линейных уравнений второго порядка.

30. Автономные системы на плоскости.

31. Линейные уравнения Эйлера.

32. Линейные уравнения с голоморфными коэффиц.

33. Теорема Коши.

34. Интегрирование уравнений с частными производны-ми.

**1)**; уравнение с разделяющимися переменными

Заменим

;

;

**2) уравнение лагранжа**

;

;

;

;

Рассмотрим

;

;

;

**3) Уравнение лагранжа**

;

**Отв.**

;

**Отв. ;**

**Другой пример на эту тему:**

**3) y=xy’-(2+(y’)2) замена y’=p dy=pdx**

Y=xp-(2+p2)

Dy=pdx+xdp-2pdp

Pdx=pdx+xdp-2pdp

(x-2p)dp=0

1. X-2p=0

P=x/2

Y=x-x/2-(2+x2/4)

Y=x2/2-x2/4-2

1. Dp=0

P=C

Y=Cx-(2+C2)

**4) уравнение понижающее порядок**

;

;

Метод ляпунова

=0

D=-4

Уравнение ассимпотически устойчиво т.к. действительная часть отрицательная.

(Если встречается хотя бы один положительный то все неустойчивая!)

Постройте общее решение ЛОДУ с частными производными 1 порядка

Аналогично с получаем

Потом ищем производные по x1, X2, X3 выражения (1)

Производные по х1,х2,х3 выражения (2)

И записываем в матрицу, первая строка состоит из производных (1), а вторая строка состоит из производных (2).

Ищем определитель второго и третьего столбца, если определитель не равен тождественно 0, то ЛНЗ.

Является Общим решением уравнения.