**Вопросы к экзамену по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения»**

1. Определение метрического пространства. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в метрическом пространстве. Полные метрические пространства.
2. Примеры метрических пространств (примеры 1–10).
3. Примеры метрических пространств (примеры 11–16).
4. Открытые множества метрического пространства. Определение топологии. Замкнутые множества и их свойства.
5. Точки прикосновения. Характеризация точек прикосновения. Критерий замкнутости множества.
6. Непрерывные отображения метрических пространств. Секвенциальный критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных отображений.
7. Определение сжимающего отображения. Непрерывность сжимающего отображения. Теорема о единственности неподвижной точки. Теорема о существовании неподвижной точки.
8. Обобщенно сжимающее отображение. Пример. Обобщенный принцип неподвижной точки. Применение принципа неподвижной точки к интегральным уравнениям.
9. Векторные пространства. Линейно независимые системы и базисы. Подпространства и фактор-пространства.
10. Определение нормированного пространства. Каноническая метрика нормированного пространства. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в нормированных пространствах. Банаховы пространства.
11. Примеры нормированных пространств (примеры 0 –6).
12. Примеры нормированных пространств (примеры 7 – 12).
13. Ряды в нормированных пространствах. Абсолютно сходящиеся ряды. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда.
14. Ограниченные множества в нормированном пространстве. Свойства ограниченных множеств. Сравнение норм. Эквивалентные нормы.
15. Непрерывные линейные операторы и функционалы в нормированном пространстве. Сопряженное пространство.
16. Ограниченные операторы и функционалы в нормированном пространстве. Критерий ограниченности оператора. Теорема о связи между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора. Свойства ограниченных линейных операторов.
17. Норма линейного непрерывного оператора. Теорема о вычислении нормы. Пространство линейных непрерывных операторов. Свойства операторной нормы.
18. Теорема о полноте пространства линейных непрерывных операторов. Следствие о полноте сопряженного пространства.
19. Слабая сходимость элементов нормированного пространства. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Виды сходимостей последовательностей линейных непрерывных операторов.
20. Обратные операторы к линейным непрерывным операторам. Операторный ряд Неймана.
21. Резольвентное множество, спектр оператора и их свойства. Примеры. Свойства спектра и резольвенты.
22. Определение и свойства евклидовых пространств над полем  . Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Примеры.
23. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств.
24. Определение и свойства евклидовых пространств над полем  . Неравенство Коши-Буняковского-Шварца в комплексном пространстве. Примеры.
25. Ортогональные системы и их свойства. Процесс Гильберта-Шмита ортогонализации. Теорема Пифагора.
26. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Неравенство Бесселя. Сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
27. Полные ортонормированные системы. Теорема о сходимости ряда Фурье. Равенство Парсеваля.
28. Теорема об изоморфности всех сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры ортонормированных базисов.
29. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Следствие.
30. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры.
31. Классификация линейных интегральных уравнений.
32. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами.

**1. Определение метрического пространства. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в метрическом пространстве. Полные метрические пространства.**

**Определение**. Пусть любым двум элементам х и у множества Х сопоставлено неотрицательное число называемое расстоянием между х и у, удовлетворяющее следующим условиям:

**1.** (аксиома треугольника) тогда и только тогда, когда х=у;

**2**. (аксиома симметрии)

**3**. (аксиома треугольника)

Тогда отображение называется **метрикой**, а множество Х вместе с заданной метрикой – **метрическим пространством**. Элементы метрического пространства часто называют точками.

**Определение**. Пусть - последовательность в метрическом пространстве Х. Говорят, что последовательность **сходится** к точке , если при , т.е. для любого числа найдется такое натуральное число , что для каждого натурального числа выполняется неравенство

**Определение.** Последовательность в метрическом пространстве называют **фундаментальной,** если для любого числа существует такое натуральное число , что для любых натуральных чисел выполняется неравенство .

Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

**Определение.** Метрическое пространство Х называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность в пространстве Х сходится к точке этого пространства.

**2. Примеры метрических пространств (примеры 1–10)**

1) Пространство всех действительных чисел с метрикой

2) Пространство всех комплексных чисел с метрикой

3) Произвольное непустое множество Х с метрикой

Это пространство называется пространством изолированных точек и обозначается

4) Пространство (n-фиксированное натуральное число) всех конечных последовательностей, состоящих из n чисел, с классической евклидовой метрикой

5) Пространство всех конечных, состоящих из n чисел, с метрикой

6) Пространство всех конечных последовательностей, состоящих из n чисел, с метрикой

7) Пространство всех числовых последовательностей, суммируемых в р-ой степени, т.е. таких числовых последовательностей , что ряд

сходится с метрикой

8) Пространство всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

,

9) Пространство всех сходящихся числовых последовательностей с метрикой, определяемой формулой

,

10) Пространство всех бесконечно малых числовых последовательностей с метрикой, определяемой формулой

,

**3. Примеры метрических пространств (примеры 11–16).**

11. Пространство S всех числовых последовательностей с метрикой

\* , (x=(xn), y =(yn) € S).

12. Пространство C[a,b] всех непрерывных на отрезке [a,b] функций с метрикой

, (x,y € C[a,b]).

Эта метрика называется Чебышевской.

13. Пространство Ck[a,b] всех k раз непрерывно дифференцируемо на отрезке [a,b] функций с метрикой

, (x,y € Ck[a,b]).

14. Пространство C∞[a,b] всех бесконечно дифференцируемых на отрезке [a,b] функций с метрикой

, (x,y € C∞[a,b]).

15. Пространство C(R) всех непрерывных функций на числовой оси R с метрикой

, (x,y € C(R)).

16. Пространство Е всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси R функций с метрикой

, (x,y € E).

**4. Открытые множества метрического пространства. Определение топологии. Замкнутые множества и их свойства**

Рассмотрим подмножество М метрического пространства Х. Точка называется внутренней точкой множества М, если найдется тако й открытый шар , что

Совокупность всех внутренних точек множества М называется **внутренностью** множества М и обозначается М0

Подмножество М метрического пространства Х будем называть **открытым**, если каждая точка-внутренняя. Ясно, что М **открыто** тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

Совокупность всех открытых точек подмножества в метрическом пространстве Х называется **топологией** пространства Х и обладает следующими фундаментальными свойствами

G1. т.е. пустое множество и все пространство Х-открытые множества

G2. Если , то , т.е. объединение любого семейства открытых множеств открыто

G3. Если , то , т.е. пересечение любых двух открытых множеств открыто

**Определение**. Подмножество М метрического пространства Х называется **замкнутым** в Х, если его дополнение открыто в Х.

В силу свойств G1-G3 получаем, что совокупность всех замкнутых подмножеств метрического пространства Х обладает следующими фундаментальными свойствами:

F1. Пустое множество и все пространства Х – замкнутые множества

F2. Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто

F3. Объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто

**5. Точки прикосновения. Характеризация точек прикосновения. Критерий замкнутости множества.**

**Определение.** Пусть М-подмножество метрического пространства Х. Точка называется **точкой прикосновения** множества М, если для любого r>0 пересечение содержит хотя бы одну точку, т.е.

Совокупность всех точек прикосновения множества М называется замыканием множества М и обозначается

**Теорема**. (***Характеризация точек прикосновения***) Пусть М-множество метрического пространства, точка х пространства Х является точкой прикосновения множества М тогда и только тогда, когда существует плотность точек из М, сходящаяся к точке х.

**Доказательство**.

1. Пусть х-точка прикосновения множества М. Тогда для любого r>0 пересечение содержит хотя бы одну точку. Возьмем . Получим, что для любого натурального числа n найдется точка , принадлежащая множеству . Таким образом, мы построили последовательность точек множества М, сходящуюся к точке х.

**2**. Пусть –последовательность точек из М, сходящаяся к точке х. Тогда по определению сходящейся последовательности для любого числа r>0 найдется такое натуральное число n ., что для каждого натурального числа выполняется неравенство т.е. . Следовательно, для любого r>0 множество не пусто

**Теорема.** (***Критерий замкнутости множества***) Подмножество М метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т.е.

**Доказательство**.

1) Пусть М замкнуто. Тогда  открыто, и, значит, если , то существует такое r>0, что, что равносильно следующей импликации:

откуда следует включение   
2) Пусть выполняется условие , откуда следует (2), что равносильно следующей импликации:

,

откуда получаем, что  открыто, т.е. M замкнуто и т.д.

**6. Непрерывные отображения метрических пространств. Секвенциальный критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных отображений.**

Рассмотрим отображение F метрического пространства Х с метрикой в метрическое пространство Y с метрикой и определим непрерывность отображения F в фиксированной точке

**Определение**. Отображение F называется непрерывным в точке , если для любого числа найдется такое число , что из условия следует неравенство .

**Теорема 1.** (Секвенциальный критерий непрерывности) Отображение непрерывно в точке тогда и только тогда, когда для любой последовательности ,сходящейся в Х к точке , а последовательность сходится в пространстве Y к точке .

**Доказательство**.

1. Пусть отображение F непрерывно в точке . Тогда по опр. для любого числа найдется такое число , что из условия следует неравенство . Рассмотрим теперь произвольно выбранную последовательность , сходящуюся к точке в пространстве Х. Тогда найдем такое натуральное число , что для каждого натурального числа выполняется неравенство и, следовательно , откуда получаем, что последовательность сходится к точке в пространстве Y.

**2.**Пусть условие теоремы выполнено. Будем доказывать способом от противного, т.е. предположим, что отображение F не непрерывно в точке . Тогда найдутся такие и ; , что . Таким образом, мы построили последовательность , однако, , что противоречит условию.

**Теорема 2**. (о композиции непрерывных отображений) Пусть - метрические пространства и пусть отображения и непрерывны в каждой точке множества М

**Док**-во. Зафиксируем произвольную точку и последовательность . Тогда в силу теоремы 1 получим , и далее, , т.е. , откуда, применяя еще раз теорему 1, получаем, что композиция G∙F непрерывна в точке , откуда в силу произвольности выбора точки , следует непрерывность отображения G∙F на всем пространстве Х.

**7. Определение сжимающего отображения. Непрерывность сжимающего отображения. Теорема о единственности неподвижной точки. Теорема о существовании неподвижной точки**

Пусть Х – метрическое пространство с метрикой . Рассмотрим отображение .

**Определение.** Отображение F называется **сжимающим**, если найдется такое положительное число , что для всех  выполняется неравенство: .

Отметим, что сжимающее отображение непрерывно. В самом деле, зафиксируем  и , и возьмем произвольную точку , такую, что , где . Тогда из неравенства  получаем  .

Если положить, то получим .

Точка  называется **неподвижной точкой отображения *F***, если *Fa=a*.

**Теорема 1** *(О единственности неподвижной точки).*

Сжимающее отображение не может иметь более одной неподвижной точки.

**Теорема 2** *(О существовании неподвижной точки).*

Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет неподвижную точку.

**8. Обобщенно сжимающее отображение. Пример. Обобщенный принцип неподвижной точки. Применение принципа неподвижной точки к интегральным уравнениям.**

**Определение.** Отображение  называется **обобщенно сжимающим**, если некоторая его степень является сжимающим отображением, т.е. существует такое натуральное число k, что отображение  сжимающее.

**Теорема** *(Обобщенный принцип неподвижной точки).*

Обобщенно сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.

Применение принципа неподвижной точки к нелинейному интегральному уравнению. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

где  – известная непрерывная на отрезке  функция, называемая свободным членом уравнения (2),  действительный или комплексный параметр, а  – известная непрерывная функция трех действительных переменных, называемая ядром интегрального уравнения (2). Будем предполагать, что ядро удовлетворяет условию Липшица по третьей переменной, т.е. существует c>0, что выполняется неравенство

.

Решением интегрального уравнения (2) называется непрерывная на отрезке  функция , которая, будучи подставленной в (2), превращает его в верное функциональное тождество, т.е. тождество, верное для всех .

Рассмотрим отображение

,

которое, очевидно, действует из пространства  в .

Тогда интегральное уравнение (2) можно записать в стандартном виде: , и вопрос о существовании и единственности решения уравнения (2) сводится к вопросу о существовании и единственности неподвижной точки отображения F.

Выясним, при каких условиях отображение F будет сжимающим. Для любых  имеем

откуда следует, что отображение *F* будет сжимающим при условии

т.е. если

**9.Векторные пространства. Линейно независимые системы и базисы. Подпространства и фактор-пространства.**

Пусть поле - поле чисел.

Векторное пространство – пространство на ∏ с операциями + и ∙.



При этом выполняются свойства:

**Определение.** Система векторов ЛНЗ, если выполняется условие:

.

В противном случае ЛЗ.

**Определение.** Множество называется порождающим, если линейная оболочка этого множества совпадает c самим пространством X.

**Определение.** Базисом в векторном пространстве называется любое ЛНЗ и порождающее множество.

**Определение.** Множество называется подпространством вектора пространства X, если замкнуто относительно всех операций на X:

1.

*2.*

**Определение.** Множество всех классов эквивалентных называется фактор множеством пространства X по подпространству и обозначается – называется фактор-пространством.

**10. Определение нормированного пространства. Каноническая метрика нормированного пространства. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в нормированных пространствах. Банаховы пространства.**

**Определение.** Пусть X – векторное пространство над полем и пусть каждому элементу сопоставлено неотрицательное число , называется нормой элемента x, причем выполняется следующие свойства:

1) аксиома отделимости:

2) аксиома абсолютной однородности: ,

3) аксиома субаддитивности:

тогда X называют *нормированным* пространством над полем .

Если X – нормированное пространство, то в нем вводится *каноническая метрика* следующим образом:

.

**Определение.** Последовательность сходится к числу

( либо ),

если

,

другими словами,

.

**Определение**. Последовательность () в нормированном пространстве X называется *фундаментальной* если

либо

.

Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Нормированное пространство X, для которого любая фундаментальная последовательность сходится называется полным нормированным пространством (*банаховым пространством*).

**11. Примеры нормированных пространств (примеры 0 – 6).**

0) – конечномерное арифметическое пространство

более простая норма в этом пространстве

1),

**Теорема (о полноте пространства непрерывных функций):** Пространство С[a, b] –полное, т.е. является банаховым пространством.

2) Пространство – пространство непрерывно дифференцируемых функций в каждой точке .

3) – пространство всех k раз непрерывно-дифференцируемых функций т.е. .

4) - пространство всех абсолютно суммируемых последовательностей, т.е.

5) - пространство всех квадратично суммируемых числовых последовательностей

6), -пространство всех суммируемых в -ой ступени числовых последовательностей

**12. Примеры нормированных пространств (примеры 7 – 12).**

7) c - пространство всех сходящихся числовых последовательностей

- пространство всех сходящихся числовых последовательностей сходящихся к 0.

8) -пространство всех ограниченных числовых последовательностей

9)-пространство всех интегрируемых по Лебегу функций на интервале , т.е. таких функций, для которых существует интеграл Либега

10)-пространство всех квадратично интегрируемых функций, т.е.

11), -пространство функций p раз интегрируемых, т.е.

12)-пространство всех почти всюду ограниченных функций на (a,b)

такую функцию называют *существенно ограниченной*

**13. Ряды в нормированных пространствах. Абсолютно сходящиеся ряды. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда.**

Пусть - нормированное пространство над некоторым полем . Будем рассматривать ряды в нормированном пространстве .

**Определение.** Рядом называется упорядоченная пара последовательностей , для которых выполняется:

- последовательность частичных сумм.

Будем писать: ряд либо ряд

**Определение.** Если последовательность частичных сумм имеет предел,

в пространстве , тогда называется суммой ряда и обозначается

.

**Определение.** Ряд называется сходящимся в пространстве, если у него существует сумма, в противном случае называется расходящимся. Критерий сходимости знакопеременных рядов:

Для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы:

1)

2)

**Определение.** Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если числовой ряд .

Вместо термина «абсолютная сходимость» применяется термин «нормальная сходимость». Если ряд нормально сходится, то он просто сходится, но это не всегда справедливо для общего случая.

**Теорема (о сходимости нормально сходящегося ряда).**

Если ряд нормально сходится в банаховом пространстве, то он просто сходится в этом пространстве.

Сходимость в и есть равномерная сходимость фундаментального ряда.

**14. Ограниченные множества в нормированном пространстве. Свойства ограниченных множеств. Сравнение норм. Эквивалентные нормы.**

**Определение.** Пусть X - нормированное пространство над полем . Множество называется ограниченным, если

**Определение.** Пусть X – векторное пространство над полем Π, на котором заданы две нормы ||x1|| и ||x2||. Говорят, что норма ||x1|| слабее нормы ||x2|| если сущ. такое число c > 0, что ||x1|| < ||x2||

Отметим, что если последовательность сходится по сильной норме, то она сходится и по слабой.

Если множество ограничено по сильной норме, то оно ограничено и по слабой норме.

Если норма ||x||1 слабее нормы ||x||2, будем писать ||◦||1<||◦||2

**Определение.** Пусть X – векторное пространство над полем Π, на котором заданы две нормы ||x||1 и ||x||2. Говорят, что нормы эквивалентны, если ||◦||1<||◦||2 и ||◦||1>||◦||2 , т.е. существуют такие числа с`, с`` > 0, что ||x||1≤с`||x||2 и ||x||2≤с``||x||1

**Примеры** эквивалентных норм:

1. На все нормы эквивалентны
2. Пусть X-ЛНП. Тогда нормы ||x1||,||x2||);||x1||+||x2||;(||x1||2+||x2||2)1/2 эквивалентны.

Свойства ограниченных множеств:

1) любой шар в нормированном пространстве является ограниченным множеством.

Рассмотрим

*.*

Это значит, что шар – ограниченное множество.

2) любое конечное множество *F* в нормированном пространстве ограничено. Т.к. *F*-конечное множество, то Пусть

множество *F* является ограниченным.

3) подмножество ограниченного множества ограничено.

4) пересечение любого числа ограниченных множеств ограничено.

5) объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено. Докажем для двух множеств.

Пусть

применяя метод математической индукции, получим, что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.

6) алгебраическая сумма конечного числа ограниченных множеств ограничено.

Пусть – ограниченные множества, тогда рассмотрим

*M* – ограниченное множество.

Методом математической индукции доказанное переносится на любое конечное число множеств.

Методом математической индукции доказанное переносится на любое конечное число множеств.

7) гомотетия ограниченных множеств ограничена.

Пусть *М*-ограниченное множество, тогданазывается гомотетией множества *М*, а называется коэффициентом гомотетии.

8) линейная комбинация ограниченных множеств ограничена. Если *М1*, *М2*– ограниченные множества, тогда – ограничено, ограничено в силу свойства 7, ограничена в силу того же свойства, а их сумма ограничена по свойству 6.

9) любая сходящаяся последовательность ограничена.

10) любая фундаментальная последовательность ограничена.

**15. Непрерывные линейные операторы и функционалы в нормированном пространстве. Сопряженное пространство**

Пусть дано отображение , где *X, Y* - нормированные пространства над полем Π.

**Определение.** Отображение называется

1) однородным, если

2) аддитивным, если

При выполнении двух этих условий отображение называется линейным

Пусть *X* - нормированное пространство над полем Π.

**Определение.** Функционал – это отображение .

**Определение.** Функционал называется

1) однородным, если

2) аддитивным, если

3) при выполнении двух этих условий функционал называется линейным

.

Множество всех линейных операторов, действующих из *X* в *Y*, обозначают , а множество всех линейных функционалов на векторном пространстве *X* называют алгебраически сопряженным пространством к *X* и обозначается *X*\*.

**Определение.** Пусть *A*-линейный оператор: и пусть точка . Оператор *A* называется непрерывным в точке *x0*, если

.

В силу того, что *A*-линейный оператор, можем записать:

.

Обозначим *x - x0 = a*, тогда получим эквив.

Это значит, что *A*-непрерывный в нуле оператор, тем самым, *A*-непрерывен в любой точке тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.

**16. Ограниченные операторы и функционалы в нормированном пространстве. Критерий ограниченности оператора. Теорема о связи между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора. Свойства ограниченных линейных операторов.**

**Определение.** Пусть *X, Y* - норм. пространства над одним и тем же полем Π. Рассмотрим линейный оператор . Оператор *A* называется *ограниченным*, если образ любого ограниченного множества при отображении *A* является ограниченным множеством, т.е.

- образ множества *M*.

Совокупность всех ограниченных операторов, действующих из X в Y будем обозначать *B(X, Y).*

**Определение.** Пусть X-нормированное пространство над полем Π, *f*-линейный функционал на X. Линейный функционал называется *ограниченным*, если образ любого ограниченного множества при действии этого функционала является ограниченным числовым множеством, т.е.

.

Совокупность всех линейных ограниченных функционалов на нормированном пространстве X обозначается Xb.

**Теорема (критерий ограниченности оператора).**

Линейный оператор , где *X, Y* - нормированные пространства, ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие:

В частности? для функционалов: линейный функционал *f*, определенный на нормированном пространстве X, ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие:

Для того, чтобы линейный оператор был бы ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он был бы непрерывным.

Свойства ограниченных операторов:

1. Произведение любого ограниченного оператора на любое число является ограниченным оператором. *А* – ограниченный оператор,

– также ограниченный оператор. Действительно,

Итак, – ограниченный оператор.

1. Сумма ограниченных операторов является ограниченным оператором, т.е. если *А, В –* ограничены, то *А+В* - ограниченный оператор.

с, тогда – ограниченный оператор.

1. Линейная комбинация ограниченных операторов является

ограниченным оператором, т.е. если *А, В* – ограничены, , то

– огран. оператор, следовательно, множество ограниченных операторов является векторным пространством над полем , т.е. *L(X, Y)* – векторное простр-во над полем .

1. Произведение ограниченных операторов является ограниченным оператором, т.е. если *А, В* – ограничены, то *ВА* – ограниченный оператор. Т.к. *А* ограничен, то B ограничен, то .

Рассмотрим

Таким образом, показали, что *ВА* – ограниченный оператор. Если , , то и можем сказать, что *L(X, X) = L(X)* – векторное пространство и полугруппа с единицей относительно операции умножения. Таким образом, *L(X)* – алгебра с единицей, где единицей является тождественный оператор *I:IA=AI=A.*

**17. Норма линейного непрерывного оператора. Теорема о вычислении нормы. Пространство линейных непрерывных операторов. Свойства операторной нормы.**

Пусть , т.е. *A*-линейный непрерывный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Определим норму этого оператора.

**Определение.** Нормой оператора A будем называть число

т.к. множество A ограничено снизу нулем и оно не пусто.

**Теорема (о вычислении нормы)**

Пусть А-линейный непрерывный оператор, тогда его норма удовлетворяет равенству

*.*

***Свойства операторной нормы.***

1)

Норма произведения операторов не превосходит произведения норм операторов.

A: X, B: Y => BA: X, BAx=B(Ax)

.

В последнем неравенстве применили два раза нормативно неравенство. Т.к. , то в качестве c можем взять Если Y=Z=X, то получаем алгебру L(X) и операция умножения является внутренней. По данному свойству умножение является непрерывной операцией в алгебре L(X). Пусть

, т.к. x =1 => =1.

Cходимость по операторной норме называется равномерной сходимостью оператора, т.е. если последовательность сходится к оператору A в пространстве L(X, Y), то говорят, что равномерно сходится к A и пишут A. Предел линейных непрерывных операторов по операторной норме является линейным непрерывным оператором, т.е. равномерный предел последовательностей линейных операторов является линейным непрерывным оператором. A.

Это значит : .

Пусть , тогда :

*+*

Обозначим , тогда , следовательно, A - ограничено, значит A– линейный непрерывный оператор.

**18. Теорема о полноте пространства линейных непрерывных операторов. Следствие о полноте сопряженного пространства.**

**Теорема.** Пусть L(X,Y) -пространство линейных непрерывных операторов, где X-нормированное пространство, Y – банахово пространство, тогда L(X,Y) также является банаховым пространством.

**Доказательство**. Рассмотрим фундаментальную последовательность () из пространства L(X, Y) . Это значит, что

: => **(4)**

следовательно, последовательность () является фундаментальной в пространстве Y. Т.к. Y-полно, то () сходится, таким образом, для () сходится.

Обозначим через A оператор, который каждому x сопоставляет предел, т.е. A:x. Т.к. операторы () линейны, то и A - линейный оператор. Докажем ограниченность этого оператора: переходя к пределу при m в (4), получаем:

(5).

Пусть n = , тогда из (5) получим, что

=>== .

Обозначим c, следовательно, можем записать

.

Это значит, что A - ограниченный оператор, следовательно, A -непрерывный оператор. Рассмотрев (5), получим:

: ,

а это значит, что последовательность () равномерно сходится к A.

Таким образом, рассмотрели произвольную фундаментальную последовательность и построили оператор A, к которому эта последовательность сходится, т.е.

AL(X ,Y ) => L(X,Y) -полно.

**Следствие**. Сопряженное пространство к нормированному пространству X является полным.

**19. Слабая сходимость элементов нормированного пространства. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Виды сходимостей последовательностей линейных непрерывных операторов.**

Пусть X - нормированное пространство, () - последовательность элементов из X.

**Определение**. Говорят, что последовательность () слабо сходится, если для , т.е. для линейного непрерывного функционала, числовая последовательность *f*() сходится . В этом случае пишут: , что значит, что слабо сходится при .

Если, то говорят, что последовательность () слабо сходится к элементу x , т.е. .  
Исходная сходимость: последовательность () сходится к x , т.е.⬄. Чтобы исходная сходимость отличалась от слабой сходимости, ее называют сильной сходимостью.

**Утверждение**. Из сильной сходимости следует слабая сходимость, т.е. если , то, где в обоих случаях x - один и тот же элемент.

**Определение.** Пусть последовательность линейных непрерывных функционалов, заданных на нормированном пространстве X, т.е. . Говорят, что последовательность слабо сходится к элементу, если для .

Тот факт, что последовательность слабо сходится, записывается

.

Т.к. - нормированное пространство, то там есть сходимость функционала по норме:

= inf{c > 0 *|* }.

Сходимость по этой норме означает, что =>то означает сильную сходимость.

**Утверждение.** Из сильной сходимости функционалов следует их слабая сходимость.

**Виды сходимостей:**

Пусть X, Y - нормированные пространства. Рассмотрим

L(X, Y) и последовательность () L (X, Y) n , т.е. последовательность линейных непрерывных операторов. AL (X, Y), это означает

0 (1).

Исходная сходимость называется равномерной.

**Определение**. Будем говорить, что последовательность ()

сильно сходится к оператору A, если для последовательность Ax. В таком случае пишут

A.

Из равномерной сходимости следует сильная сходимость. Если

A, то выполняется (1).

Рассмотрим: =: 0.

Это значит, что Ax, ⬄A.

**Определение.** Будем говорить, что () - последовательность

линейных непрерывных операторов слабо сходится к оператору

A, если для и , *f*(. Вэтом случае пишут

Из определения видно, что слабая сходимость последовательности операторов есть слабая сходимость

последовательности , т.е.

Из равномерной сходимости следует сильная сходимость, а из сильной сходимости следует слабая сходимость. Обратное не верно.

**20. Обратные операторы к линейным непрерывным операторам. Операторный ряд Неймана.**

Рассмотрим операторное уравнение Ax = y, **(1)** где x, y X - нормированное пространство. Для решения этого уравнения построим обратный к оператору A оператор, т.е. B:

1) *BA = I*

2) *AB = I*

тогда B называется обратным оператором к оператору A, т.е. B = , следовательно, x = y. Найдем единственное решение.

Необходимо, чтобы B был бы также линейным непрерывным оператором. Это необходимо для устойчивости найденного решения.

**Теорема Банаха об обратном операторе.** Пусть X, Y – банаховы пространства. Если *A: X→Y* – линейный непрерывный оператор и существует обратный оператор A-1, то оператор A-1 также непрерывен.

Вместо (1) в функциональном анализе часто рассматривается уравнение

*x = Ax + y* (2)**,**

которое можно записать *(I - A) x = y*. Необходимо строить обратный оператор к оператору *I –A*, что гораздо легче, т.к.

= = 1+ A+ +…  
Конечное равенство записано по определению суммы геометрической прогрессии для чисел.

Для операторов = I+ A+ +…

**Определение**. Операторный ряд I+ A+ +… называется *операторным рядом Неймана*. Чтобы сумма существовала нужно, чтобы ряд сходился. Для случая, когда X – банахово пространство для этого достаточно следующего условия:

Действительно, если X – банахово пространство, то L(X) – банахово пространство, и тогда для сходимости ряда Неймана достаточно сходимости числового ряда.

*I + A +* + …

Этот ряд оценивается через

*1 + q +* + …, т.е.

*||I|| + ||A|| +* || + … ≤ *1 + q +* + …

Так как q < 1, то ряд *I + A +* + … абсолютно сходится, а так как L(X) – банахово пространство, то он просто сходится.

Обозначим через B сумму этого ряда в пространстве L(X):

*B = I + A +* + …

Проверим, что B – обратный к оператору *(I - A)*, т.е. проверим выполнение равенств 1) и 2)

Из (1) и (2) получаем, что B – обратный к оператору *(I - A)*.

**21. Резольвентное множество, спектр оператора и их свойства. Примеры. Свойства спектра и резольвенты.**

Пусть A∈L(X), где A – линейный непрерывный оператор. Рассмотрим оператор λI−A.

**Определение**. Точка λ∈C называется регулярной точкой оператора A, если оператор λI−A имеет обратный, который принадлежит L(X). Определение. Совокупность всех регулярных точек оператора A называется резольвентным множеством оператора A и обозначается ρ(A).

**Определение**. Дополнение резольвентного множества называется спектром оператора A и обозначается σ(A). Таким образом, по определению σ(A)=C\ρ(A). **Определение**. Оператор называется резольвентой оператора A.

**Пример.**

*–* этот оператор называется оператором умножения на независимую переменную.

Имеем

Где следовательноб оператор *А* непрерывен, т.е

Рассмотрим

Для функция непрерывна на отрезке . Тогда

где .

при

Если , то функция не непрерывна и оператор ограничен, следовательно,

Свойства резольвентного множества, спекта и резольвенты:

1. Резольвентное множество оператора является открытым множеством комплексной плоскости.
2. Спектр является замкнутым множеством. В самом деле, по определению
3. Спектр является компактным множеством.
4. Резольвента является аналитической функцией на множестве .

**22. Определение и свойства евклидовых пространств над полем R. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.** **Примеры.**

**Определение.** Векторное пространство *X* называется *евклидовым пространством*, если любому сопоставлено единственное число *(x, y)*, называемое *скалярным произведением* элемента *x* на элемент *y*, причем выполняются аксиомы евклидового пространства:

1) причем

2)

3) аксиома аддитивности

4) аксиома симметричности

Условия 2) и 3) можно объединить в

5) линейность по первому аргументу

В силу выполнения 4) получаем

6) линейность по второму аргументу

**Теорема (неравенство Коши-Буняковского-Шварца ).** Для любых , *X*- евклидово пространство, имеет место неравенство

,

которое называется неравенством Коши-Буняковского-Шварца.

Примеры:

1. Пусть *X = Rn.* Если

То скалярное произведение

1. *X = l2*

Рассмотрим и определим скалярное произведение

Этот ряд сходится, т.к. удовлетворяет неравенство Коши-Буняковского-Шварца. *l2 –* полно, следовательно, оно является гильбертовым пространством.

1. *X = L2 (a, b)*

Для определяем скалярное произведение как

**23. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств.**

**Определение.** Полное, по канонической норме , евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

**Примеры.**

**0)** Пусть *X=Rn*. Если

, то скалярное произведение .

**1)** *X=l2*

Рассмотрим

и определим скалярное произведение .

Этот ряд сходится, т.к. удовлетворяет неравенству Коши-Буняковского-Шварца.

*l2*-полно, следовательно, оно является гильбертовым пространством.

**2)** *X = L2 (a, b)*

Для *L2 (a, b)* определяем скалярное произведение как

Проверим аксиомы евклидового прост-ва.

1) , т.к.

2)

Т.е.

3)

Т.е.

4)

5)

Показали, что *L2(a, b)* - евклидово пространство, а т.к. оно явл. банаховым, то получаем, что *L2(a, b)* - гильбертово пространство.

**24. Определение и свойства евклидовых пространств над полем C. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца в комплексном пространстве. Примеры**.

**Определение.** Пусть X- векторное пространство над полем R или C, т.е над полем П - вещественных чисел или полем комплексных чисел. поставлено в соответствие число , причем выполнены аксиомы:

**1)** . Это значит *(x, x)* - действительное число, которое неотрицательно, причем .

**2)**

**3)**

**4)** эрмитовость скалярного произведения

В силу аксиом 2) и 3) имеет место

**5)** линейность по 1-ому аргументу

В силу выполнения 2), 3) и 4) получаем

**6)** антилинейность

**Теорема (неравенство Коши-Буняковского-Шварца в комплексном случае ).**

Для любых , Х - евклидово пространство над полем П, имеет место неравенство , которое называется неравенством Коши-Буняковского-Шварца***.***

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

**25. Ортогональные системы и их свойства. Процесс Гильберта-Шмита ортогонализации. Теорема Пифагора.**

**Определение.** Элементы, где X- евклидово пр-во, наз-ся *ортогональными*, если. Будем обозначать . Легко доказать, что . В силу этого говорят, что вектора и ортогональны.

**Свойства ортогональных векторов.**

**1.** Если и , то .

**2.** Если и , то .

**3.** Любой нулевой вектор ортогонален любому вектору

**4.** Если , то *x = 0*.

**Определение.** Элементы векторного пр-ва наз. *векторами*. Если евклидово пр-во явл. векторным, то и его элементы наз. векторами.

**Определение.** Последовательность векторов евклидового пространства называется *системой векторов*.

**Определение.** Система векторов *(en)* называется *ортогональной системой*, если любые два различные вектора из этой системы ортогональны друг другу, т.е.

.

**Процесс Гильберта-Шмита ортогонализации.**

Если есть ЛНЗ система векторов *a1, a2, …, an*, то построим ортонормированную бесконечную систему. Положим , тогда *||e1|| = 1*. Построим вектор . Нужно, чтобы . Для этого выпишем уравнение

Т.к. , то

. Если выберем число , то .

Обозначим , тогда .Обозначим . Определим коэффициенты из условий , т.е из условий и . Подставляя в последние равенства *c3*, получаем:

Итак, при таких получаем, что .

Нормируем *e3*: , с другой стороны, . Получаем, что система *e1, e2, e3* ортонормированна. Продолжая таким образом, получаем бесконечную систему *(en)*, которая будет ортонормированной в евклидовом пространстве. Этот процесс построения называется *процессом Гильберта-Шмита* или *процессом ортогонализации*.

**Теорема (Пифагора)**. Если вектор *х* является суммой конечного числа ортогональных векторов, то тогда квадрат нормы этого вектора равен сумме квадратов норм его слагаемых, т.е. если , где - ортогональная система, то

.

**26. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Неравенство Бесселя. Сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве.**

Пусть X – гильбертово пр-во, – ортонормированная система.

**Определение.** Пусть x∈X, для ∀k∈**N** определим, тогда называется *k-ым коэффициентом Фурье элемента x по ортонормированной системе*.

наз последовательностью всех коэффициентов Фурье элемента x*.*

По этим коэффициентам Фурье построили ряд , кот. наз. рядом Фурье элемента *х* по ортонормированной системе .

Т.о., каждому элементу x сопоставлен ряд Фурье, т.е. . Иногда пишут. Ряд Фурье по ортонормированной системе всегда сходится.

**Теорема (неравенство Бесселя).**

Пусть элементу x∈X, где X – гильбертово пространство, сопоставлен ряд Фурье по ортонормированной системе, т.е., тогда выполняется неравенство

которое называется неравенством Бесселя.

**Доказательство.** Обозначим через Sn n-ую частичную сумму ряда Фурье , и рассмотрим норму.

Итак, получили для∀n **(1)**

Т.к., то и

⇒**(2)**

Рассмотрим ряд - ряд с неотрицательными членами. В силу (2) все частичные суммы этого числового ряда ограничены одним и тем же числом, следовательно, ряд сходится.

неравенство Бесселя доказано.

**Следствие**.

Ряд Фурье для любого элемента *х* по любой ортонормированной системе в гильбертовом пространстве сходится.

**Теорема (о сходимости ряда Фурье).**

Пусть *(ek)* – полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве *Х,* тогда ряд Фурье любого элемента *х* по этой системе сходится к этому элементу *х*, т.е.

**27. Полные ортонормированные системы. Теорема о сходимости ряда Фурье. Равенство Парсеваля.**

**Теорема (о сходимости ряда Фурье).** Пусть - полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве X, тогда ряд Фурье любого элементы x по этой системе сходится к этому элементу x, т.е.

**Доказательство.** Пусть X - сепарабельное гильбертово пространство, это значит, что существует - счетная система такая, что .

Из этой системы: пусть b1=a1, далее если a2 - ЛНЗ, то b2=a2, если a2- ЛЗ, тоa2 - исключаем из рассмотрения и рассмотрим следующий элемент. На следующем шаге берем элементa3 и рассматриваем систему b1, b­2­, a3. Если эта система ЛНЗ, то b3=a3, а если ЛЗ, то a3 выводим из рассмотрения и переходим к следующему шагу.

Таким образом, получили последовательность b1,b­2­,…,bk, которая ЛНЗ.

Некоторые ak есть линейные комбинации элементов b1,b­2­,…,bk, поэтому

.

Итак, получили последовательность линейно независимых элементов, линейная оболочка которых всюду плотна в *Х*. Из этой линейно зависимой системы переходим к базису путем ортогонализации системы , т.е. к системе . Получаем . Т.к. всюду плотна, то и всюду плотна, т.е. .

Таким образом, построили полную ортонормированную систему, следовательно, в любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная ортонормированная система.

**Теорема (равенство Парсеваля).**

Пусть - полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве X и пусть элементу x соответствует ряд Фурье , т.е., тогда имеет место равенство**(1):**

которое называется равенством Парсеваля.

**Доказательство.** Обозначим через Sn n-ую частичную сумму ряда Фурье , и рассмотрим норму.

Итак, получили для∀n **(2)**

Т.к. доказали, что,⇒⇒,то, переходя в (2) к пределу при, получаем

**28. Теорема об изоморфности всех сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры ортонормированных базисов.**

**Теорема (об изоморфности всех сепарабельных прост-в).** Любые два сепарабельные гильбертовы прост-ва изоморфны (это значит, что существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение одного прост-ва на другое).

**Доказательство.** Пусть X, Y - сепарабельные гильбертовы прост-ва. Тогда каждое из них, как доказывали ранее, обладают полными ортонормированными сис-ами соответс-но.

Зафиксируем произвольные элементы x∈X, y∈Y. Пусть - коэффициенты Фурье элемента x по системе: , k=1,2,…, коэффициенты Фурье элемента y по системе: , k=1,2,…

Пусть, - последовательности чисел.

Получаем:

Из (1) следует, что пространство X изоморфно, т.е. , где изоморфизм обозначаем ^ , т.е. .

Из (2) следует, что, т.е. .

Получаем два пространства, которые изоморфны одному и тому же пространству , следовательно, X~Y, т.е. пространства X и Y изоморфны.

**Примеры ортонормированных базисов.**

**1)**

Стандартный базис

**2)**

Базис пространства:

**3)**

, где- нулевой член ряда Фурье.

Остальные члены делятся на четные и нечетные:

**29. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Следствие.**

**Теорема (об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве).**

Пусть *f*-линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве *Х*, тогда существует единственный

**Доказательство.**

*1. Существование.*

1) пусть , т.е.

Определим точку , тогда .

Рассмотрим подпространство

*{0} –* замкнутое множество, а прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут, следовательно, *L* – замкнутое множество.

Рассмотрим тогда по определению Обозначим и, кроме того,

Т.е. построили такой элемент .

Возьмем произвольный элемент и рассмотрим линейную комбинацию

Если рассмотреть *f(x0)*, то в силу линейности функционала *f* будем иметь: Получили , это значит, что Из соотношения (1) получаем, что любой элемент можно представить следующим образом: Умножим последнее равенство скалярно на *а*: , а т.к. Получаем:

Обозначим , тогда Таким образом доказали, что существует (построили) .

2) Пусть *f = 0*, т.е. . Предположим

Доказали, что для любого непрерывного линейного функционала *f*.

*2. Единственность.*

Предположим, что

Рассмотрим *,* тогда

Получили противоречие с выбором *y, y1,* таким образом доказали единственность*y*.

**Следствие**.

Любое гильбертово пространство самосопряжено, т.е. сопряженное к гильбертову пространству пространство *X,* т.е. *X’ = X*.

**Доказательство.**

Построим изоморфизм следующим образом: каждому сопоставим . Это сопоставление взаимно однозначно. Докажем, что - линейный непрерывный функционал , следовательно, - линейный ограниченный функционал, значит (по теореме о связи), этот функционал является непрерывным линейным.

**30. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры.**

Будем рассматривать линейные непрерывные операторы

**Определение.** Оператор , который определяется равенством для , называется сопряженным оператором к оператору А.

Докажем, что если оператор А непрерывен, то и А\* также непрерывный оператор.

Действительно,

Т.к. , то можем записать

, т.к. , то разделим последнее на *||x||*:

- конечное число, следовательно, также конечное число. Значит оператор А\*- ограниченный оператор, следовательно, по тереме о связи получаем, что оператор А\* линейный непрерывный:

**Определение.** Оператор , где Х- гильбертово пространство, называется самосопряженным, если

**31. Классификация линейных интегральных уравнений.**

Интегральным ур. наз. такое ур., в кот. неизвестная ф-ция находится под знаком интеграла. В общем виде интегральное ур. записывается в виде:

где – ядро (ф-ция от трех переменных),

- неизвестная ф-ция, – известная ф-ция.

Будем изучать лин. интегральные ур., такие, в кот. под интегралом стоит .

Классификация лин. интегральный ур. Типы интегральных ур.:

1. – ур. Вольтерра 1-го рода;

. – ур. Вольтерра 2-го рода;

3. – ур. Фредгольма 1-го рода;

4. – ур. Фредгольма 2-го рода.

Во всех ур. – известная ф-ция одной переменной, кот. наз. свободным членом интегрального ур, – известная ф-ция 2-х переменных, наз. ядром интегрального ур., – неизвестная ф-ция.

Решить интегральное ур. – это значит найти все такие ф-ции, кот при подстановке в интегральные ур. обращают их в функциональные тождества или доказать, что у данного интегрального ур. решений нет.

Различают классич. или С-теорию и неоклассич. или L2-теорию.

В С-теорию правая часть и ядро предполагаются непрер. ф-циями и решение ищется в пр-ве непрер. ф-ций. В L2-теории предполагается, что y∈ L2(a,b), K∈ L2(a,b)2, тогда решение ищется принадлежащим пр-ву L2(a,b), т.е. х∈ L2(a,b).

Ур. Вольтерра – частные случаи ур. Фредгольма.

Действительно, если имеем ур. Вольтерра 1-го или 2-го рода, то можно ввести по ядру К новое ядро :

Тогда интеграл и, добавляя этот интеграл к ур. 1 и 2, получим ур. 3 и 4, т.е. ур. Фредгольма 1-го и 2-го порядка с ядром .

Таким образом ур. Вольтерра – частные случаи соотв. ур. Фредгольма.

**Пример** интегрального ур. Фр. 2-го порядка, которое. показывает, что решение не существует:

.

Предположим, что решение существует:

; ;;

. **Противоречие!**

**32. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с** **вырожденными ядрами.**

Будем рассм. интегральные ур. Фредгольма 2-го рода:

, где ядро вырождено.

**Определение.** Ядро наз. вырожденным ядром, если функция может быть представлена, как конечная сумма:

**Примеры вырожденных ядер.** – полином. Т.к. полином состоит из мономов (выражения вида – произвольные функции, в кот. переменные разделены), следовательно, полином – конечная сумма мономов. С другой стороны, рассм. тригонометрич. полином , кот. представляет собой выражение:

– функции, в кот. переменные разделены. Т.е. – сумма таких функций, следовательно, явл. вырожденным ядром.

С другой стороны, любую непрер. функцию можно приблизить тригонометрич. полиномом, следовательно, можно использовать эти приближение. Любое ядро может быть сколь угодно точно приближено вырожденными ядрами.

Для решения интегральных ур. с вырожденным ядром необх. это ядро подставить в интеграл:

т.е. получили равенство:  **(\*)**

Зафиксируем произвольное i и рассм. , на кот. умножим (\*), получаем:

Проинтегрируем последнее по t:

Тогда . Получаем СЛАУ, состоящую из n ур. с n переменными.

Приведем последнее рав-во к канонич. виду. Для этого введем след. обозначения:

матрица принимает вид , тогда система ур. запишется в виде: .

Для того, чтобы записать в виде единой м-цы, введем обозначение: , тогда можем записать: **(1)**.

Если м-ца неособая, т.е. , то система (1) имеет единственное решение: .

Если , то м-ца особая, следовательно нужно считать ранг м-цы, т.е. и ранг расширенной м-цы: .

Если , тогда система (1) наз. **совместной** и имеет бескон. много решений, кот. линейно зависят от кол-ва , где .

Если же , то система (1) не имеет решений, следовательно, исходное интегральное ур. решений не имеет.