In [1]:

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline
import numpy as np
from math import sqrt
from array import *
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import matplotlib.ticker as ticker
from pylab import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

1. Задание (на листочке)

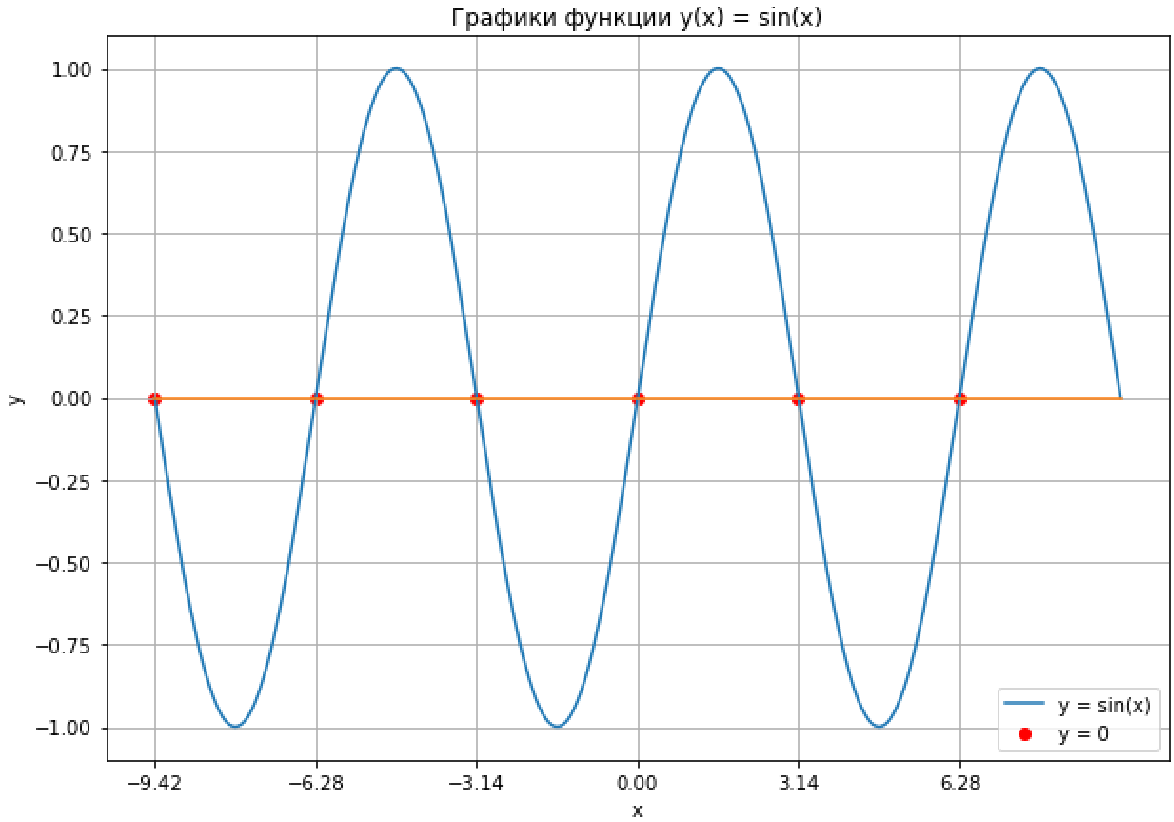
Решите уравнение sin(x)/x=0.

$$\frac{sin(x)}{x} = 0$$
$$sin(x) = 0$$
$$x = \pi * n,$$

где n - целое число

In [2]:

```
x = np.linspace(-3*np.pi, 3*np.pi, 300)
plt.subplots(figsize=(10, 7))
plt.grid(True)
y = np.sin(x)
y2 = x*0
x3 = np.arange(-3*np.pi, 3*np.pi, np.pi)
y3 = x3*0
plt.xticks(np.arange(-3*np.pi, 3*np.pi, np.pi))
plt.plot(x,y, label = 'y = sin(x)')
plt.scatter(x3,y3, label = 'y = 0', color = "red")
plt.plot(x,y2)
plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Графики функции y(x) = sin(x)", size=12)
plt.show()
```



Действительно видим, что график функции пересекает ось x в точках кратных Пи

2. Задание (на листочке)

Даны три прямые

$$y = k_1 * x + b_1,$$
$$y = k_2 * x + b_2,$$
$$y = k_3 * x + b_3$$

Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?

Ответ:

Найдем точку пересечения первой и второй прямой и найдем условие, при котором эта точка лежит на третьей прямой. Для поиска пересечения первой и второй прямой решим систму уравнений:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

$$k_1x + b_1 = k_2x + b_2$$

$$k_1x - k_2x = b_2 - b_1$$

$$x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1$$

$$x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$$

Найдем y:

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_1(\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}) + b_1$$

$$y(k_1 - k_2) = k_1(b_2 - b_1) + b_1(k_1 - k_2)$$

$$y(k_1 - k_2) - b_1(k_1 - k_2) = k_1(b_2 - b_1)$$

$$(k_1 - k_2)(y - b_1) = k_1(b_2 - b_1)$$

$$y - b_1 = \frac{k_1(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2}$$

$$y = b_1 + \frac{k_1(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2}$$

Значит, точка пересечения первой и второй прямой имеет координаты:

$$(\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}; b_1 + \frac{k_1(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2})$$

Подставляем эти координаты в третье уравнение:

$$b_1 + \frac{k_1(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2} = \frac{k_3(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2} + b_3$$

$$\frac{k_1(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2} - \frac{k_3(b_2 - b_1)}{k_1 - k_2}) = +b_3 - b_1$$

$$\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}(k_1 - k_3) = b_3 - b_1$$

$$\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_3 - b_1}{k_1 - k_3}$$

Если последнее равенство будет верным, то это значит, что третья прямая тоже проходит через эту точку пересечения первой и второй прямой.

Проверим указанный способ. Предположим есть три прямые пересекающиеся в одной точке:

$$y = 2x + 1$$

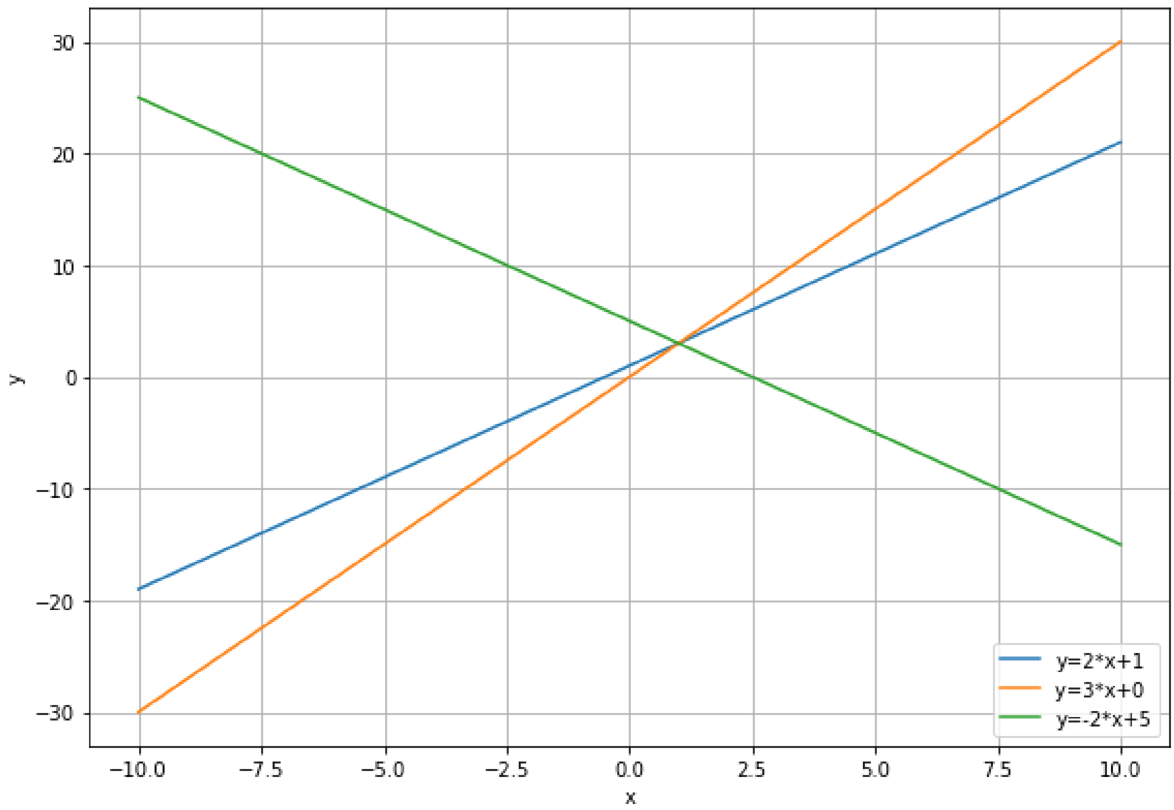
$$y = 3x$$

$$y = -2x + 5$$

Построим их график

In [3]:

```
x = np.linspace(-10, 10, 30)
plt.subplots(figsize=(10, 7))
plt.grid(True)
y=2*x+1
y2=3*x+0
y3=-2*x+5
plt.plot(x,y, label = 'y=2*x+1')
plt.plot(x,y2, label = 'y=3*x+0 ')
plt.plot(x,y3, label = 'y=-2*x+5')
plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.show()
```



Подставим коэффициенты в полученное уравнение:

$$\frac{0-1}{2-3} = \frac{5-1}{2+2}$$

$$\frac{-1}{-1} = \frac{4}{4}$$

$$1 = 1$$

Мы получили верное равенство для трех прямых, пересекающихся в одной точке. Значит вышеполученное равенство действительно позволяет орпределить пересекаются ли три прямые в одной точке.

3. Задание (в программе или на листочке)

На листе тетради «в линейку» (расстояние между линиями равно a) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x,y), игла лежит под углом alfa. Пересекает ли игла линию или нет?

Ответ:

Если угол alfa < 180 градусов, то игла перескает, (но не просто касется кончиком) линию в случае если:

$$a - y < l * sin(alfa)$$

Если угол alfa > 180 градусов, то игла перескает, (но не просто касется кончиком) линию в случае если:

$$y < l * sin(alfa - 180)$$

4. Задание** (задание делать по желанию)

Решите аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра a: sin(a*x)=0 при условии: 0.01<a<0.02, 100<x<500. Т.е. надо найти решение x как функцию параметра a - построить график x=x(a). Если численным методом не получается найти все ветви решения x(a), то отыщите хотя бы одну.

Ответ:

$$sin(\mathrm{a}x) = 0$$

$$\mathrm{a}x = \pi k, k \subset Z$$

$$x = \frac{\pi k}{a}$$

$$100 < \frac{\pi k}{a} < 500$$

$$100a < \pi k < 500a$$

$$\frac{100a}{\pi} < k < \frac{500a}{\pi}$$

Поскольку

$$0.01 < a < 0.02,$$

то

$$\frac{1}{\pi} < k < \frac{10}{\pi}$$

А поскольку k принадлежит множеству целых чисел, то получаем, что этом интервале к может принимать значения 1, 2 или 3. Из этого получаем, что:

$$x_1 = \frac{\pi}{a}, \Rightarrow \frac{\pi}{0.02} < x < \frac{\pi}{0.01}, 0.01 < a < 0.02$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{a}, \Rightarrow \frac{2\pi}{0.02} < x < \frac{2\pi}{0.01}, \frac{2\pi}{a} < x \Rightarrow \frac{\pi}{250} < a < 0.02$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{a}, \Rightarrow \frac{3\pi}{0.02} < x < \frac{3\pi}{0.01}, \frac{3\pi}{a} < x \Rightarrow \frac{3\pi}{500} < a < 0.02$$

Опредеим решение численно. Очевидно, что x как функция параметра a имеет вид:

$$x = \frac{\pi k}{a}, k \subset Z$$

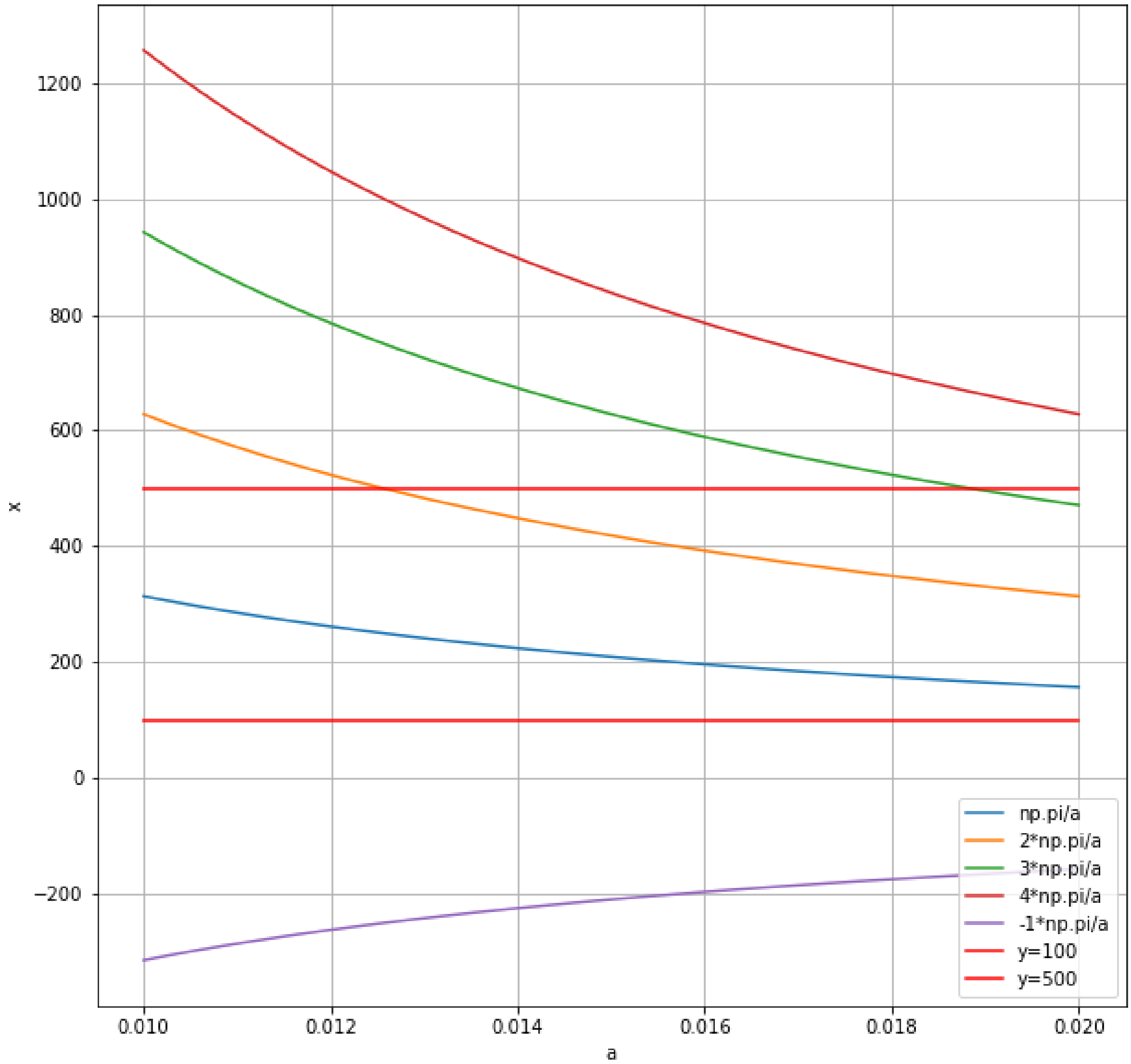
Посмотрим как рсположен график данной функции при

$$0.01 < a < 0.02, k \subset [-1, 1, 2, 3, 4]$$

In [4]:

```
a = np.linspace(0.01, 0.02, 100)
plt.subplots(figsize=(10, 10))
plt.plot(a, np.pi/a, label = 'np.pi/a')
plt.plot(a, 2*np.pi/a, label = '2*np.pi/a')
plt.plot(a, 3*np.pi/a, label = '3*np.pi/a')
plt.plot(a, 4*np.pi/a, label = '4*np.pi/a')
plt.plot(a, -1*np.pi/a, label = '-1*np.pi/a')
a1 = (0.01, 0.02)
plt.plot((0.01, 0.02), (100, 100), color = "red", label = 'y=100')
plt.plot((0.01, 0.02), (500, 500), color = "red", label = 'y=500')
plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('x')

plt.grid(True)
plt.show()
```



Видим, что данная функция имеет решения в диапазоне 100<x<500 только при k=1, 2 и 3. Следовательно:

$$x_1 = \frac{\pi}{a}$$
$$x_2 = \frac{2\pi}{a}$$
$$x_3 = \frac{3\pi}{a}$$

17.6.2. Найти угол a между прямыми 4y - 3x + 12 = 0 и 7y + x - 14 = 0

Перепишем уравнения прямых:

$$-3x + 4y + 12$$
$$x + 7y - 14$$

Помним, что

$$\tan\alpha = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Поэтому

$$\tan\alpha = \frac{4 * 1 - 7 * (-3)}{(-3) * 1 + 4 * 7} = \frac{25}{25} = 1 = 45^{\circ}$$

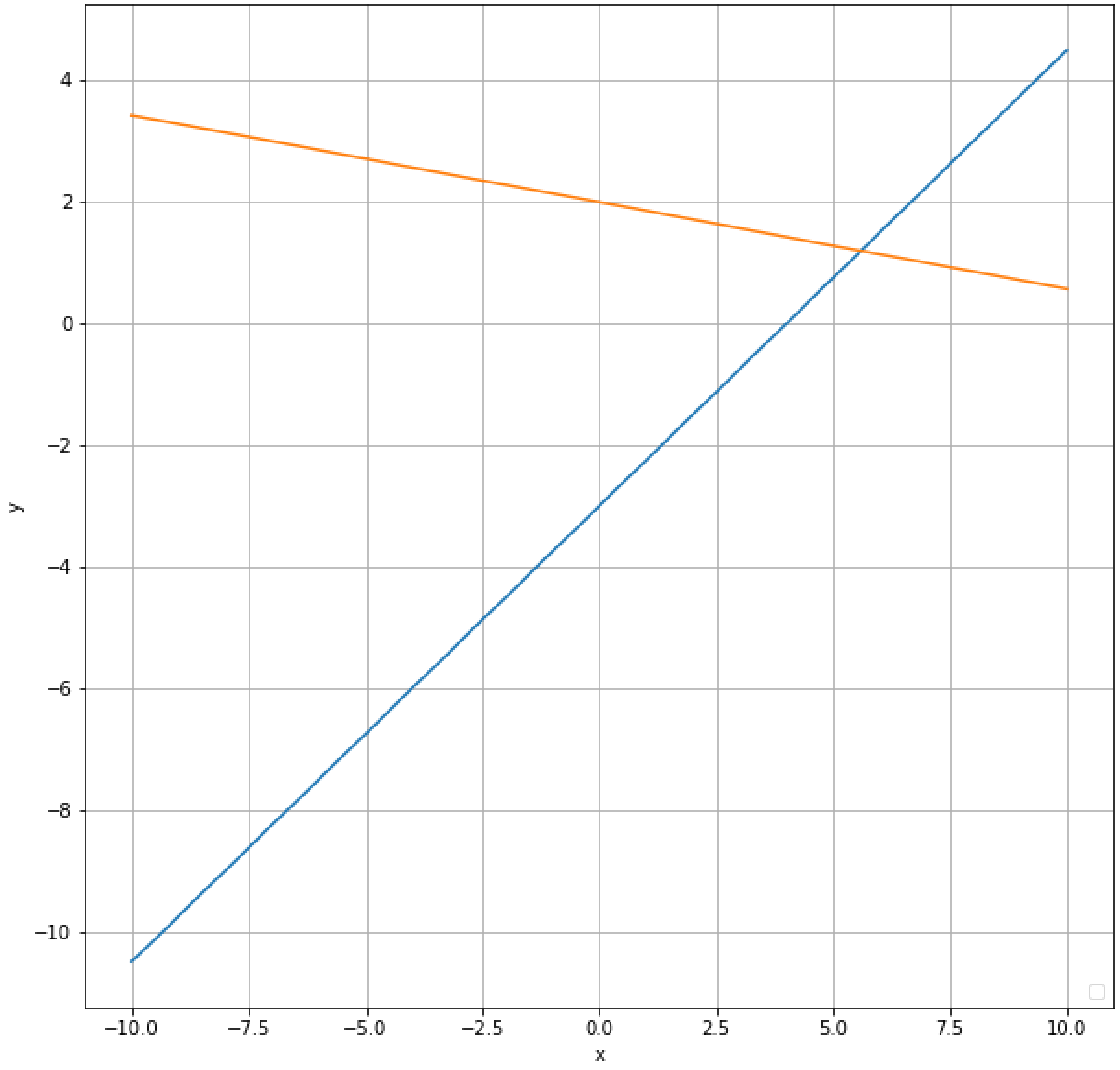
Прямые имеют следующий вид

In [5]:

```
x = np.linspace(-10, 10, 21)
plt.subplots(figsize=(10, 10))
plt.plot(x, (3*x-12)/4)
plt.plot(x, (14-x)/7)
plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No handles with labels found to put in legend.
```



Проверим правильно ли мы нашли угол, через вычисление угла между направляющими векторами прямых

In [6]:

```
from numpy import (array, dot, arccos, clip)
from numpy.linalg import norm

u = array([-3, -4])
v = array([1, -7])
c = dot(u,v)/norm(u)/norm(v) # -> cosine of the angle
angle = arccos(clip(c, -1, 1))
print(f"Угол между прямыми в градусах равен {angle*180/np.pi}")
```

```
Угол между прямыми в градусах равен 45.00000000000001
```

Получилчись те же самые 45 градусов

17.6.4. Найти угол a между прямыми $$x = \sqrt{2}$$ и $$x = -\sqrt{3}$$

Перепишем уравнения прямых в общем виде:

$$1 * x + 0 * y - \sqrt{2} = 0$$

$$1 * x + 0 * y + \sqrt{3} = 0$$

Помним, что

$$\tan \alpha = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Поэтому

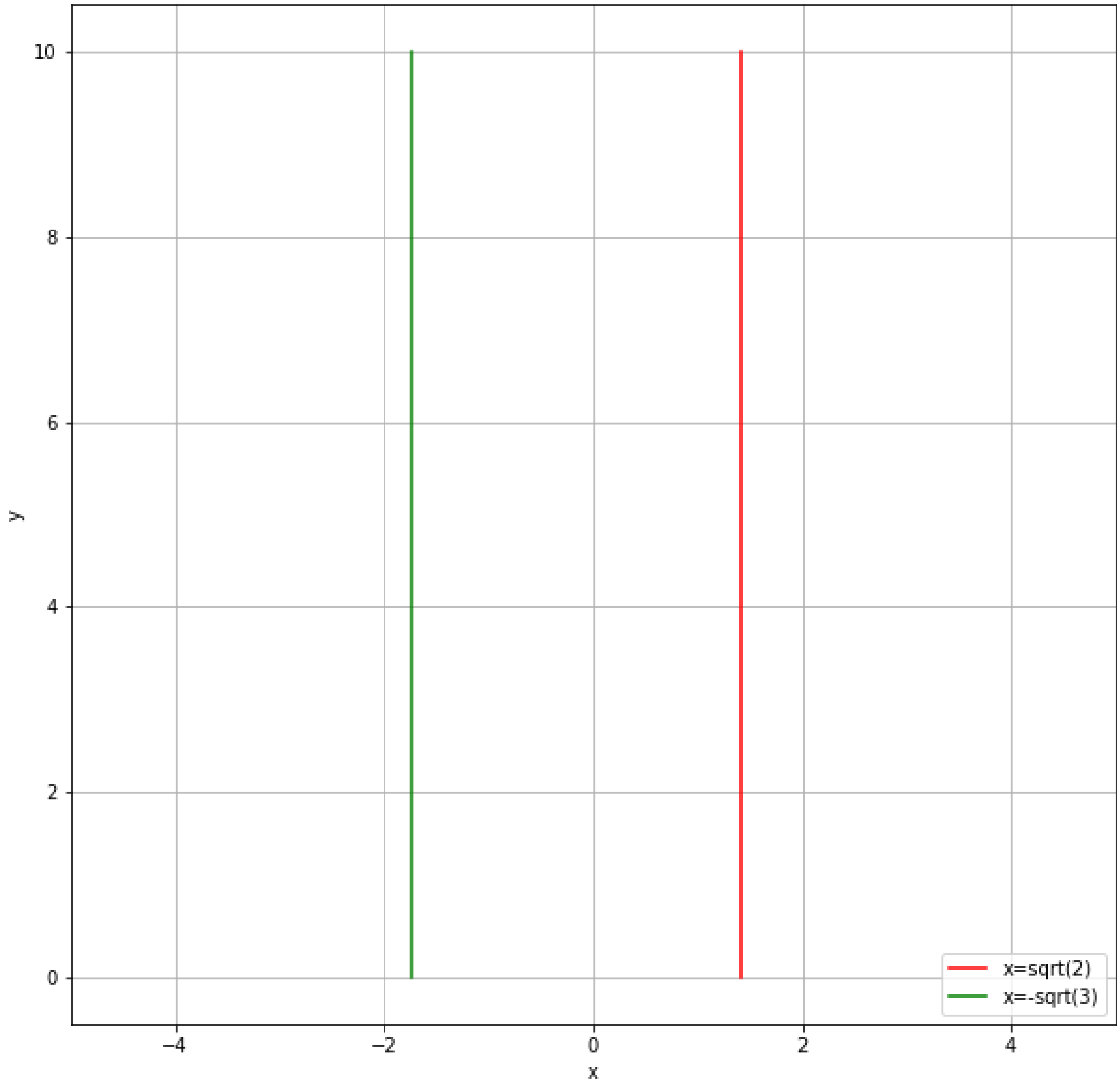
$$\tan \alpha = \frac{0}{1} = 0 = 0^{\circ}$$

Прямые имеют следующий вид

In [7]:

```
x = sqrt(2)
plt.subplots(figsize=(10, 10))
plt.xlim(-5,5)
plt.plot((sqrt(2), sqrt(2)), (0, 10), color = "red", label = 'x=sqrt(2)')
plt.plot((-sqrt(3), -sqrt(3)), (0, 10), color = "green", label = 'x=-sqrt(3)')
plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```



Мы видим, что эти прямые паралельны, а угол между параллельными прямыми равен 0 градусов

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими уравнениями

17.6.5.

$$y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$$

Ответ:

$$y^2 - 2y + 1 - 1 = 2x + 5$$
$$(y + 1)^2 = 2x + 6$$
$$(y + 1)^2 = 2(x + 3)$$

График полученного уравнения имеет вид параболы. Посмотрим на этот график.

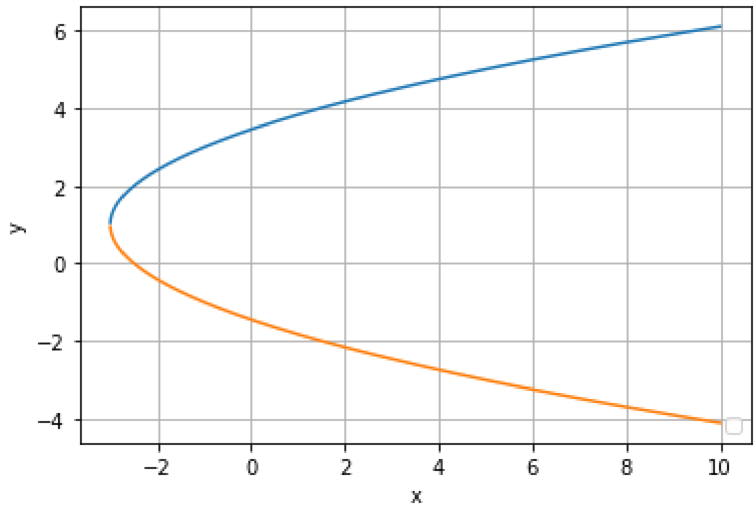
In [8]:

```
x = np.linspace(-10, 10, 5000)
plt.plot(x, 1+sqrt(2*x+6))
plt.plot(x, 1-sqrt(2*x+6))

plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No handles with labels found to put in legend.
```



Действительно, это парабола

17.6.6.

$$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$$

Ответ:

$$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$$
$$3x^2 + 12x + 5y^2 - 30y + 42 = 0$$
$$3(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5(y^2 - 6y + 9 - 9) + 42 = 0$$
$$3(x + 2)^2 - 12 + 5(y - 3)^2 - 45 + 42 = 0$$
$$3(x + 2)^2 + 5(y - 3)^2 = 15$$
$$\frac{(x + 2)^2}{5} + \frac{(y - 3)^2}{3} = 1$$

График полученного уравнения имеет вид элипса. Посмотрим на этот график.

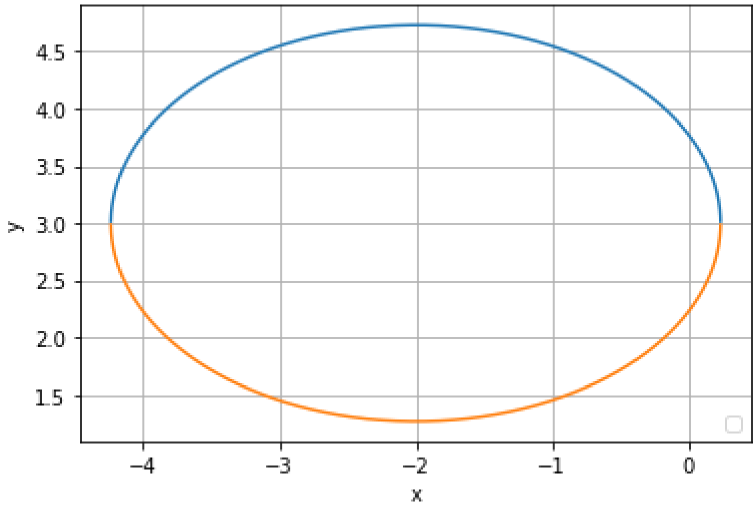
In [9]:

```
x = np.linspace(-6, 2, 50000)
plt.plot(x, 3+sqrt(3-(3*(x+2)**2)/5))
plt.plot(x, 3-(sqrt(3-(3*(x+2)**2)/5)))


plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No handles with labels found to put in legend.
```



Действительно, это элипс

17.6.7.

$$2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$$

Ответ:

$$-y^2 + 6y - 7 = -2x^2$$
$$y^2 - 6y + 7 = 2x^2$$
$$y^2 - 6y + 9 - 9 + 7 = 2x^2$$
$$(y-3)^2 = 2x^2 + 2$$
$$(y-3)^2 = 2(x^2 + 1)$$
$$\frac{(y-3)^2}{2} - x^2 = 1$$
$$x^2 - \frac{(y-3)^2}{2} = -1$$

График полученного уравнения имеет вид гиперболы. Посмотрим на этот график.

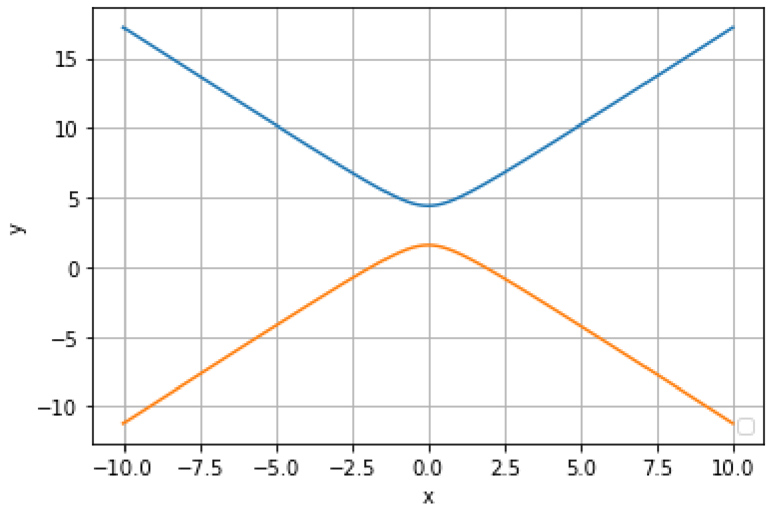
In [10]:

```
x = np.linspace(-10, 10, 500)
plt.plot(x, 3+sqrt(2*(x**2+1)))
plt.plot(x, 3-sqrt(2*(x**2+1)))


plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No handles with labels found to put in legend.
```



Действительно, это гипербола

17.6.8.

$$2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$$

Ответ:

$$2x^2 - 28x - 3y^2 - 42y - 55 = 0$$
$$2(x^2 - 14x + 49 - 49) - 3(y^2 + 14^y + 49 - 49) - 55$$
$$2(x-7)^2 - 98 - 3(y+7)^2 + 147 - 55$$
$$2(x-7)^2 - 3(y+7)^2 = 6$$
$$\frac{(x-7)^2}{3} - \frac{(y+7)^2}{2} = 1$$

График полученного уравнения имеет вид гиперболы. Посмотрим на этот график.

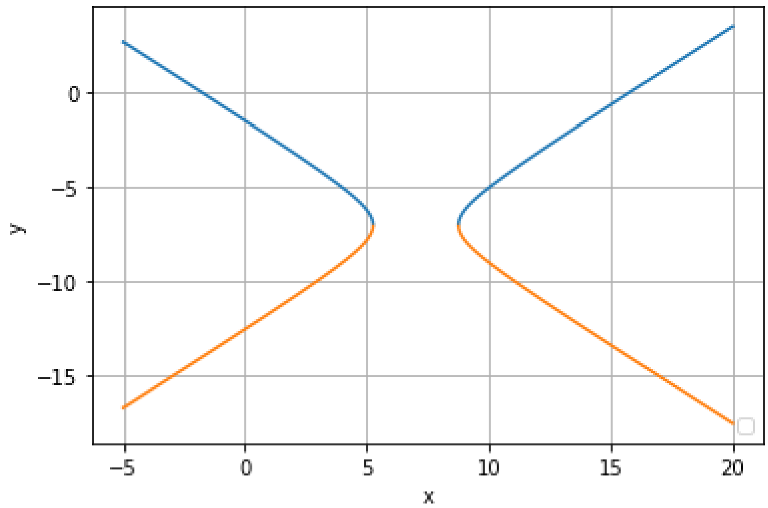
In [11]:

```
x = np.linspace(-5, 20, 5000)
plt.plot(x, sqrt((2*(x-7)**2-6)/3)-7)
plt.plot(x, -sqrt((2*(x-7)**2-6)/3)-7)


plt.legend(loc = 4)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No handles with labels found to put in legend.
```



Действительно, это гипербола