

In [1]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
from math import log, sqrt
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [2]:

```
#pip install nbconvert
```

In [3]:

```
#pip install pandoc
```

Урок 2

1. Задание

Напишите уравнение параболы, проходящей через три точки (х,у): (1,2), (3,10), (5,1)

Уравнение параболы имеет общий вид:

$$ax^2 + bx + c = y$$

Нам известны х и у в трех точках. Можем составить систему уравнений и решая ее найти коэффициенты а, b и c:

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ 9a + 3b + c = 10, \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases}$$

Решим систему

$$\begin{cases} a = 2 - b - c, \\ 9(2 - b - c) + 3b + c = 10, \\ 25(2 - b - c) + 5b + c = 1 \end{cases}$$

Выразим b из второго уравнения:

$$\begin{aligned} 18 - 9b - 9c + 3b + c &= 10, \\ -6b - 8c &= -8, \\ 6b + 8c &= 8, \\ 6b &= 8 - 8c, \\ b &= \frac{8 - 8c}{6} \end{aligned}$$

Преобразуем третье уравнение, подставим него b и найдем c:

$$\begin{aligned}
50 - 25b - 25c + 5b + c &= 1, \\
-20b - 24c &= -49, \\
20b + 24c &= 49, \\
20 \left(\frac{8 - 8c}{6} \right) + 24c &= 49, \\
\frac{160 - 160c}{6} + 24c &= 49, \\
160 - 160c + 144c &= 294, \\
-16c &= 294 - 160, \\
16c &= -134, \\
c &= -8,375
\end{aligned}$$

Найдем b:

$$b = \frac{8 - 8c}{6} = \frac{8 + 8 * 8,375}{6} = 12,5$$

Найдем a:

$$a = 2 - b - c = 2 - 12,5 + 8,375 = -2,125$$

Ответ: Искомое уравнение имеет вид:

$$-2,125x^2 + 12,5x - 8,375 = y$$

Проверим, действительно ли данная парабола проходит через точки (1,2), (3,10), (5,1)

In [4]:

```
x = [1, 3, 5]
for x in x:
    y = -2.125*x**2 + 12.5*x - 8.375
    print(y)
```

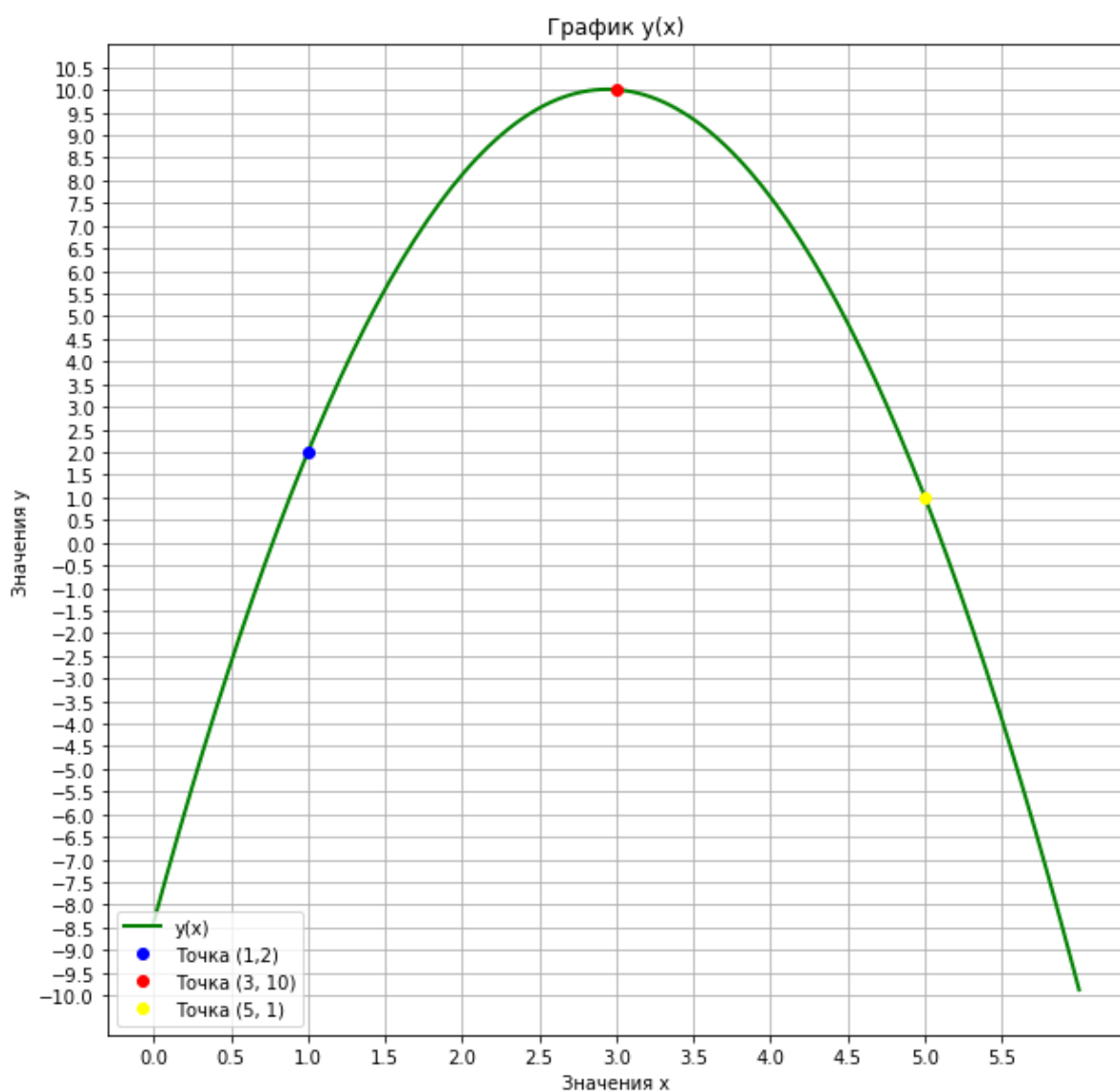
```
2.0
10.0
1.0
```

Видим, что мы определили уравнение параболы верно

На графике это тоже видно

In [5]:

```
x = np.linspace(0, 6, 150)
y = -2.125*x**2 + 12.5*x - 8.375
plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.plot(x, y, color='green', label="y(x)", linewidth = 2)
plt.plot(1, 2, "o", color='blue', label="Точка (1,2)", linewidth = 4)
plt.plot(3, 10, "o", color='red', label="Точка (3, 10)", linewidth = 4)
plt.plot(5, 1, "o", color='yellow', label="Точка (5, 1)", linewidth = 4)
plt.title('График y(x)')
plt.xlabel('Значения x')
plt.ylabel('Значения y')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='lower left')
plt.xticks(np.arange(0, 6, 0.5))
plt.yticks(np.arange(-10, 11, 0.5))
plt.show()
```



2. Задание

Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что огурцов ровно 100 кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

Если свежие огурцы на 99% состоят из воды, то масса сухого вещества составляет 1%, т.е. 1 кг. При засыхании масса сухого вещества так и останется 1 кг., но она уже будет составлять 2%. Можно составить пропорцию:

2% сосавляют 1 кг.

100% сставляют x кг.

отсюда:

$$x = \frac{100 * 1}{2} = 50$$

Ответ: масса огурцов составляет 50 кг.

3. Задание

Определение логарифма. Решить уравнения:

1. $2^x = 256$

2. $2^x = 300$

3.* $\log_8 2^{8x-4} = 4$

4.* $3^{\log_9(5x-5)} = 5$

5.* $x^{\log_3 x+1} = 9$

In [6]:

```
5**log(6, 3)
```

Out[6]:

13.802920192296023

3.1.

$$2^x = 256$$
$$x = \log_2 256 = 8$$

Проверим:

In [7]:

```
log(256, 2)
```

Out[7]:

8.0

3.2.

$$2^x = 300$$
$$x = \log_2 300$$

3.3.

$$\log_8 2^{8x-4} = 4$$
$$(8x - 4) \log_{2^3} 2 = 4$$
$$(8x - 4) \frac{1}{3} \log_2 2 = 4$$
$$(8x - 4) \frac{1}{3} = 4$$
$$8x - 4 = 12$$
$$8x = 16$$
$$x = 2$$

Проверим:

In [8]:

```
log(2**(8*2-4), 8)
```

Out[8]:

4.0

3.4.

$$3^{\log_9(5x-5)} = 5$$

По основному логарифмическому тождеству:

$$\log_9(5x - 5) = \log_3 5$$

Преобразовываем дальше:

$$\log_3(5x - 5) = \log_3 5$$

$$\frac{1}{2}\log_3 5(x - 1) = \log_3 5$$

$$\frac{1}{2}\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3(x - 1) = \log_3 5$$

$$\frac{1}{2}\log_3(x - 1) = \log_3 5 - \frac{1}{2}\log_3 5$$

$$\frac{1}{2}\log_3(x - 1) = \frac{1}{2}\log_3 5$$

$$\log_3(x - 1) = \log_3 5$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

Проверим:

In [9]:

```
3**log(5*6-5, 9)
```

Out[9]:

4.999999999999998

3.5.

$$x^{\log_3 x + 1} = 9$$

$$x^{\log_3 x} x^1 = 9$$

$$x^{\log_3 x} x = 9$$

$$x^{\log_3 x} = \frac{9}{x}$$

По основному логарифмическому тождеству:

$$\log_x \frac{9}{x} = \log_3 x$$

$$\log_x 9 - \log_x x = \log_3 x$$

$$\log_x 9 - 1 = \log_3 x$$

$$\log_x 9 - \log_3 x = 1$$

Переходим к новому основанию:

$$\frac{\log_3 9}{\log_3 x} - \log_3 x = 1$$

$$\frac{2}{\log_3 x} - \log_3 x = 1$$

Введем новую переменную y :

$$y = \log_3 x$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{2}{y} - y = 1$$

$$2 - y^2 = y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$D = 9, a_1 = 1, a_2 = -2$$

Ищем x:

$$\log_3 x_1 = 1$$

$$x_1 = 3$$

$$\log_3 x_2 = -2$$

$$x_2 = \frac{1}{9}$$

Проверим:

In [10]:

```
3**(log(3, 3)+1)
```

Out[10]:

9.0

In [11]:

```
1/9**(log(1/9, 3)+1)
```

Out[11]:

9.0

4. Задание

Задание Свойства логарифмов. Вычислить:

6. $\log_4 16 =$

7. $\log_5 \frac{1}{25} =$

8. $\log_{25} 5 =$

9. $\log_3 \sqrt{27} =$

10. $\log_2 12 - \log_2 3 =$

11. $\log_6 12 + \log_6 3 =$

12. $e^{\ln 5} =$

13. $\frac{\log_2 225}{\log_2 15} =$

14. $\log_4 32 + \log_{0.1} 10 =$

15.* $9^{\log_3 \sqrt{5}} =$

Решения

$$\log_4 16 = 2$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = -2$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 (\sqrt{9} * \sqrt{3}) = \log_3 \sqrt{9} + \log_3 \sqrt{3} = 1 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} = 1,5$$

Проверка:

In [12]:

```
log(sqrt(27), 3)
```

Out[12]:

1.5

$$\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

Проверка:

In [13]:

```
log((12), 2)-log((3), 2)
```

Out[13]:

2.0

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 * 3) = \log_6 36 = 2$$

Проверка:

In [14]:

```
log((12), 6)+log((3), 6)
```

Out[14]:

2.0

$$e^{\ln 5} = e^{\log_e 5} = 5$$

$$\frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \frac{\log_2 15^2}{\log_2 15} = 2 \frac{\log_2 15}{\log_2 15} = 2$$

Проверка:

In [15]:

```
log((225), 2)/log((15), 2)
```

Out[15]:

2.0

$$\log_4 32 + \log_{0.1} 10 = \log_{2^2} 2^5 - 1 = \frac{5}{2} - 1 = 1,5$$

Проверка:

In [16]:

```
log((32), 4)+log((10), 0.1)
```

Out[16]:

1.4999999999999998

$$9^{\log_3 \sqrt{5}} = 3^{2 \cdot \log_3(\sqrt{5})} = 3^{\log_3(\sqrt{5})^2} = 3^{\log_3 5} = 5$$

Проверка:

In [17]:

```
9**(log((sqrt(5))), 3))
```

Out[17]:

4.9999999999999999