# Домашние задание №2

# In [2]:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams.update({'font.size': 14})
```

#### In [3]:

```
def calc_mse(y, y_pred):
    err = np.mean((y - y_pred)**2)
    return err
```

# In [4]:

```
1
2
  X = np.array([[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
                 [1, 1, 2, 1, 3, 0, 5, 10, 1, 2],
3
                                                   # стаж
                 [500, 700, 750, 600, 1450,
4
                                                   # средняя стоимость занятия
5
                  800, 1500, 2000, 450, 1000],
6
                 [1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2]]) # квалификация репетитора
7
  у = [45, 55, 50, 59, 65, 35, 75, 80, 50, 60] # средний балл ЕГЭ (целевая переменная)
8
9
  n = X.shape[1]
```

# 1. Постройте график зависимости весов всех признаков от lambda в L2регуляризации (на данных из урока).

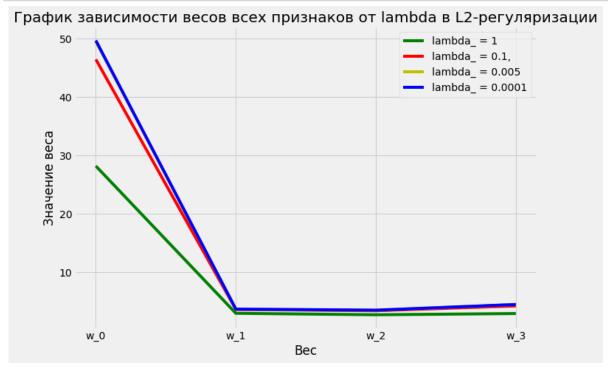
# In [5]:

```
# Стандартизируем признаки
 1
   X st = X.copy()
 3
   X_{st} = X_{st.astype}(np.float64)
 4
 5
    for i in range(1, 4):
        X_{st[i]} = (X_{st[i]} - X_{st[i].mean()) / X_{st[i].std()}
 6
 7
8
    # Напишем функцию градиентного спуска с L2 решуляризацией
9
    def eval_model_reg2(X, y, iterations, lambda_, alpha=1e-4):
        np.random.seed(42)
10
        W = np.random.randn(X.shape[0])
11
12
        n = X.shape[1]
        for i in range(1, iterations + 1):
13
            y_pred = np.dot(W, X)
14
            err = calc_mse(y, y_pred)
15
            W = alpha * (1/n * 2 * np.dot((y_pred - y), X.T) + 2 * lambda_ * W)
16
17
        return W
```

#### In [6]:

#### In [7]:

```
# Нарисуем график зависимости весов всех признаков от Lambda в L2-регуляризации (на дан
   plt.style.use('fivethirtyeight')
3
   plt.figure(figsize=(10, 7))
   color = ["g","r","y","b"]
   label = ["lambda_ = 1", "lambda_ = 0.1,", "lambda_ = 0.005", "lambda_ = 0.0001"]
5
6
   for i in range(4):
7
        plt.plot(W_all_2.loc[i], color = color[i], label=label[i])
8
       plt.xlabel('Bec')
       plt.ylabel('Значение веса')
9
10
       plt.title("График зависимости весов всех признаков от lambda в L2-регуляризации")
       plt.legend()
11
```



# 2. Можно ли к одному и тому же признаку применить сразу и нормализацию, и стандартизацию?

#### In [8]:

```
1 n = X.shape[1]
2 X = np.array([[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
3 [1, 1, 2, 1, 3, 0, 5, 10, 1, 2], # стаж
4 [500, 700, 750, 600, 1450, # средняя стоимость занятия
5 800, 1500, 2000, 450, 1000]])
6
7 y = [45, 55, 50, 59, 65, 35, 75, 80, 50, 60] # средний балл ЕГЭ (целевая переменная)
```

```
In [9]:
```

```
1  w = np.linalg.inv(X @ X.T) @ X @ y
2  w
```

#### Out[9]:

```
array([4.25569284e+01, 2.62631471e+00, 8.22015726e-03])
```

#### In [10]:

```
1 y_pred = np.dot(w, X)
2 calc_mse(y, y_pred)
```

#### Out[10]:

#### 42.983380986418894

Попробуем последовательно применить стачало нормализацию, а затем стандатризацию. Потом, наоборот и посмотрим, что будет происходить с данными, коэффициенами и ошибкой обучения.

#### Проведем нормализацию исходных признаков

```
In [11]:
```

```
1  X_norm = X.copy()
2  X_norm = X_norm.astype(np.float64)
3  X_norm
```

#### Out[11]:

```
array([[1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00], [1.00e+00, 1.00e+00, 2.00e+00, 1.00e+00, 3.00e+00, 0.00e+00, 5.00e+00, 1.00e+01, 1.00e+00, 2.00e+00], [5.00e+02, 7.00e+02, 7.50e+02, 6.00e+02, 1.45e+03, 8.00e+02, 1.50e+03, 2.00e+03, 4.50e+02, 1.00e+03]])
```

# In [12]:

```
1  X_norm[1] = (X_norm[1] - X_norm[1].min()) / (X_norm[1].max() - X_norm[1].min())
2  X_norm[1]
```

#### Out[12]:

```
array([0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0. , 0.5, 1. , 0.1, 0.2])
```

#### In [13]:

```
1 X_norm[2] = (X[2] - X[2].min()) / (X[2].max() - X[2].min())
2 X_norm[2]
```

# Out[13]:

```
array([0.03225806, 0.16129032, 0.19354839, 0.09677419, 0.64516129, 0.22580645, 0.67741935, 1. , 0. , 0.35483871])
```

```
In [14]:
    X_{norm[2]} = (X_{norm[2]} - X_{norm[2]}.min()) / (X_{norm[2]}.max() - X_{norm[2]}.min())
    X_norm[2]
 2
Out[14]:
array([0.03225806, 0.16129032, 0.19354839, 0.09677419, 0.64516129,
       0.22580645, 0.67741935, 1.
                                                    , 0.35483871])
                                      , 0.
In [15]:
    X_norm[1] = (X_norm[1] - X_norm[1].min()) / (X_norm[1].max() - X_norm[1].min())
    X_{norm[1]}
Out[15]:
array([0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0., 0.5, 1., 0.1, 0.2])
In [16]:
    w_norm = np.linalg.inv(X_norm @ X_norm.T) @ X_norm @ y
    print(f"Коэффициенты после нормализаци исходных признаков: {w_norm}")
    y_pred = np.dot(w_norm, X_norm)
    print(f"MSE после нормализаци исходных признаков: {calc mse(y, y pred)}")
Коэффициенты после нормализаци исходных признаков: [46.25599918 26.26314715 1
2.74124375]
MSE после нормализаци исходных признаков: 42.98338098641885
Проведем стандартизацию нормализованнных признаков
In [17]:
    X norm st = X norm.copy().astype(np.float64)
    X_{norm\_st[1]} = (X_{norm\_st[1]} - X_{norm\_st[1].mean()) / X_{norm\_st[1].std()
    X_norm_st[1]
Out[17]:
array([-0.57142857, -0.57142857, -0.21428571, -0.57142857, 0.14285714,
       -0.92857143, 0.85714286, 2.64285714, -0.57142857, -0.21428571])
In [18]:
    X_{norm_st[2]} = (X_{norm_st[2]} - X_{norm_st[2]}.mean()) / X_{norm_st[2]}.std()
  2
    X_norm_st[2]
Out[18]:
```

array([-0.97958969, -0.56713087, -0.46401617, -0.77336028, 0.97958969,

-0.36090146, 1.08270439, 2.11385144, -1.08270439, 0.05155735])

```
In [19]:
    w_norm_st = np.linalg.inv(X_norm_st @ X_norm_st.T) @ X_norm_st @ y
    print(f"Коэффициенты после стандартизации нормализованнных признаков: {w_norm_st}")
    y_pred = np.dot(w_norm_st, X_norm_st)
 4 print(f"MSE после стандартизации нормализованнных признаков: {calc_mse(y, y_pred)}")
Коэффициенты после стандартизации нормализованнных признаков: [57.4
```

3.98592874] 7.3536812

МЅЕ после стандартизации нормализованнных признаков: 42.98338098641888

#### Теперь проведем масштабирование в обратном порядке

#### Проведем стандартизацию исходных признаков

```
In [20]:
```

```
1 \mid X_{st} = X.copy()
2 X_st = X_st.astype(np.float64)
3 X_st
```

#### Out[20]:

```
array([[1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00,
        1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00, 1.00e+00],
       [1.00e+00, 1.00e+00, 2.00e+00, 1.00e+00, 3.00e+00, 0.00e+00,
        5.00e+00, 1.00e+01, 1.00e+00, 2.00e+00],
       [5.00e+02, 7.00e+02, 7.50e+02, 6.00e+02, 1.45e+03, 8.00e+02,
        1.50e+03, 2.00e+03, 4.50e+02, 1.00e+03]])
```

# In [21]:

```
X_{st[1]} = (X_{st[1]} - X_{st[1]}.mean()) / X_{st[1]}.std()
2 X_st[1]
```

# Out[21]:

```
array([-0.57142857, -0.57142857, -0.21428571, -0.57142857, 0.14285714,
       -0.92857143, 0.85714286, 2.64285714, -0.57142857, -0.21428571])
```

#### In [22]:

```
1 | X_st[2] = (X_st[2] - X_st[2].mean()) / X_st[2].std()
2
  X_st[2]
```

#### Out[22]:

```
array([-0.97958969, -0.56713087, -0.46401617, -0.77336028, 0.97958969,
       -0.36090146, 1.08270439, 2.11385144, -1.08270439, 0.05155735])
```

```
In [23]:
    w_st = np.linalg.inv(X_st @ X_st.T) @ X_st @ y
   print(f"Коэффициенты после стандартизацию исходных признаков: {w_st}")
    y_pred = np.dot(w_st, X_st)
    print(f"MSE после w_norm_st: {calc_mse(y, y_pred)}")
Коэффициенты после стандартизацию исходных признаков: [57.4]
                                                                     7.3536812
3.98592874]
MSE после w_norm_st: 42.98338098641888
Проведем нормализацию стандартизированных признаков
In [24]:
 1 X_st_norm = X_st.copy()
   X st norm
Out[24]:
                   , 1.
array([[ 1.
                                , 1.
                                             , 1.
                                                           , 1.
                                , 1.
                   , 1.
                                               1.
                                                                        ],
       [-0.57142857, -0.57142857, -0.21428571, -0.57142857, 0.14285714,
        -0.92857143, 0.85714286, 2.64285714, -0.57142857, -0.21428571],
       [-0.97958969, -0.56713087, -0.46401617, -0.77336028, 0.97958969,
        -0.36090146, 1.08270439, 2.11385144, -1.08270439, 0.05155735]])
In [25]:
    X_{st_norm[1]} = (X_{st_norm[1]} - X_{st_norm[1]}.min()) / (X_{st_norm[1]}.max() - X_{st_norm[1]}
   X st norm[1]
Out[25]:
array([0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0. , 0.5, 1. , 0.1, 0.2])
In [26]:
 1 X \text{ st norm}[2] = (X \text{ st norm}[2] - X \text{ st norm}[2].min()) / (X \text{ st norm}[2].max() - X \text{ st norm}[2]
 2 | X st norm[2]
Out[26]:
array([0.03225806, 0.16129032, 0.19354839, 0.09677419, 0.64516129,
       0.22580645, 0.67741935, 1.
                                   In [27]:
    w_st_norm = np.linalg.inv(X_st_norm @ X_st_norm.T) @ X_st_norm @ y
```

```
Коэффициенты после нормализации стандартизированных признаков: [46.25599918 2 6.26314715 12.74124375]
МSE после нормализации стандартизированных признаков: 42.98338098641885
```

print(f"Коэффициенты после нормализации стандартизированных признаков: {w st norm}")

print(f"MSE после нормализации стандартизированных признаков: {calc\_mse(y, y\_pred)}")

носле пормализации стандартизированных признаков. 42.3033003004100

Сравним коэффициенты при разных комбинациях масштабирования

y\_pred = np.dot(w\_st\_norm, X\_st\_norm)

#### In [28]:

```
рrint(f"Коэффициенты после нормализаци исходных признаков: {w_norm}")
рrint(f"Коэффициенты после нормализации стандартизированных признаков: {w_st_norm}")
рrint(f"Коэффициенты после стандартизацию исходных признаков: {w_st}")
рrint(f"Коэффициенты после стандартизации нормализованнных признаков: {w_norm_st}")

Коэффициенты после нормализации исходных признаков: [46.25599918 26.26314715 1
2.74124375]
Коэффициенты после нормализации стандартизированных признаков: [46.25599918 2
6.26314715 12.74124375]
Коэффициенты после стандартизацию исходных признаков: [57.4 7.3536812
3.98592874]
Коэффициенты после стандартизации нормализованнных признаков: [57.4
7.3536812 3.98592874]
```

Сравним признаки при разных комбинациях масштабирования

#### In [29]:

```
0.67741935 1. 0. 0.35483871]
[0.03225806 0.16129032 0.19354839 0.09677419 0.64516129 0.22580645
0.67741935 1. 0. 0.35483871]
[-0.97958969 -0.56713087 -0.46401617 -0.77336028 0.97958969 -0.36090146
1.08270439 2.11385144 -1.08270439 0.05155735]
[-0.97958969 -0.56713087 -0.46401617 -0.77336028 0.97958969 -0.36090146
1.08270439 2.11385144 -1.08270439 0.05155735]
```

#### Вывод

Смысла в одновременом применении нормализации и стандартизации нет, так как после нормализации стандартизированных признаков мы получаем те же признаки, что и после нормализации исходных признаков. Тот же принцип действует и в обратном случае. После стандартизации нормализизированных призаков, мы получаем теже признаки, что и после стандартизации исходных. Поэтому нужно просто применять либо нормализацию либо стандартизацию.

# 3. \*Напишите функцию наподобие eval\_model\_reg2, но для применения L1регуляризации.

# In [186]:

```
1
  n = X.shape[1]
2
  X = np.array([[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
3
                 [1, 1, 2, 1, 3, 0, 5, 10, 1, 2],
                                                   # стаж
                 [500, 700, 750, 600, 1450,
4
                                                   # средняя стоимость занятия
5
                 800, 1500, 2000, 450, 1000],
6
                 [1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2]]) # квалификация репетитора
7
  y = [45, 55, 50, 59, 65, 35, 75, 80, 50, 60]
                                                  # средний балл ЕГЭ (целевая переменная)
```

#### In [187]:

```
# Стандартизируем признаки
 1
   X st = X.copy()
 3
   X_{st} = X_{st.astype}(np.float64)
4
 5
    for i in range(1, 4):
        X_{st[i]} = (X_{st[i]} - X_{st[i].mean()}) / X_{st[i].std()}
 6
 7
 8
    # Напишем функцию градиентного спуска с L1 регуляризацией
9
    def eval_model_reg1(X, y, iterations, lambda_, alpha=1e-4):
10
        np.random.seed(42)
        W = np.random.randn(X.shape[0])
11
        n = X.shape[1]
12
13
        for i in range(1, iterations + 1):
14
            y_pred = np.dot(W, X)
15
            err = calc_mse(y, y_pred)
16
            W -= alpha * (1/n * 2 * np.dot((y_pred - y), X.T) + lambda_ * np.sign(W))
17
        return W
```

#### In [188]:

```
1 # Посчитаем коэффициенты
2 w_L1 = eval_model_reg1(X_st, y, iterations=10000, alpha=1e-3, lambda_= 0.001)
```

#### In [189]:

```
1 # Посчитаем MSE
2 y_pred = np.dot(w_L1, X_st)
3 calc_mse(y, y_pred)
```

#### Out[189]:

39.80711256982036

# 4. \*Сравните на графиках изменение весов признаков от lambda в L1регуляризации и L2-регуляризации (на данных из урока).

#### In [208]:

#### In [209]:

#### In [210]:

```
# Получим коэффициенты при разных Lambda

W_all = []

for i in (1, 0.1, 0.005, 0.0001):

W_all.append(list(eval_model_reg1(X_st, y, iterations=1000, alpha=1e-3, lambda_= i)

W_all_1 = pd.DataFrame(W_all, columns = ("w_0", "w_1", "w_2", "w_3"))
```

#### In [211]:

```
# Получим коэффициенты при разных Lambda
W_all = []
for i in (1, 0.1, 0.005, 0.0001):
    W_all.append(list(eval_model_reg2(X_st, y, iterations=1000, alpha=1e-3, lambda_= i)
    W_all_2 = pd.DataFrame(W_all, columns = ("w_0", "w_1", "w_2", "w_3"))
```

#### In [214]:

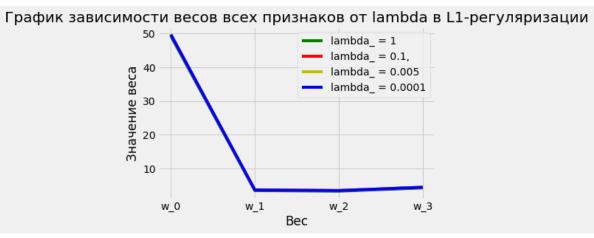
```
1 W_all_1[["w_1", "w_2", "w_3"]]
```

# Out[214]:

	w_1	w_2	w_3
0	3.490986	3.303796	4.272869
1	3.647092	3.463727	4.442508
2	3.663570	3.480608	4.460414
3	3.664420	3.481479	4.461338

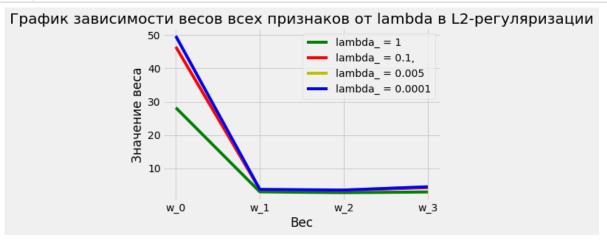
#### In [221]:

```
# Нарисуем график зависимости весов всех признаков от Lambda в L1-регуляризации (на дан
   plt.style.use('fivethirtyeight')
 2
   plt.figure(figsize=(6, 4))
4
   color = ["g","r","y","b"]
   label = ["lambda_ = 1", "lambda_ = 0.1,", "lambda_ = 0.005", "lambda_ = 0.0001"]
 5
 6
   for i in range(4):
 7
        plt.plot(W_all_1.loc[i], color = color[i], label=label[i])
        plt.xlabel('Bec')
8
9
       plt.ylabel('Значение веса')
10
       plt.title("График зависимости весов всех признаков от lambda в L1-регуляризации")
11
       plt.legend()
```



#### In [216]:

```
1
    # Нарисуем график зависимости весов всех признаков от Lambda в L2-регуляризации (на дан
 2
    plt.style.use('fivethirtyeight')
 3
   plt.figure(figsize=(6, 4))
   color = ["g","r","y","b"]
 4
    label = ["lambda_ = 1", "lambda_ = 0.1,", "lambda_ = 0.005", "lambda_ = 0.0001"]
 5
 6
    for i in range(4):
        plt.plot(W_all_2.loc[i], color = color[i], label=label[i])
 7
        plt.xlabel('Bec')
 8
 9
        plt.ylabel('Значение веса')
        plt.title("График зависимости весов всех признаков от lambda в L2-регуляризации")
10
11
        plt.legend()
```



#### Вывод:

На существующем наборе данных мы не видим существенного отличия на графиках изменение весов признаков от lambda в L1-регуляризаци, как это наблюдается при L2 регуляризации.

# 5. \*Постройте графики зависимости весов двух признаков (стаж и стоимость занятия) от количества итераций для градиентного спуска и для стохастического градиентного спуска (на данных из урока).

#### In [117]:

# In [61]:

#### In [62]:

```
1
    def eval_model_GD(X, y, iterations, lambda_, alpha=1e-4):
 2
        W_all_GD = []
 3
        np.random.seed(42)
        W = np.random.randn(X.shape[0])
 4
 5
        n = X.shape[1]
        for i in range(iterations + 1):
 6
 7
            y_pred = np.dot(W, X)
 8
            err = calc_mse(y, y_pred)
9
            W = (alpha * 1/n * 2 * np.dot(X, (np.dot(W, X) - y)))
10
            W_all_GD.append(list(W[[1, 2]]))
11
        return W_all_GD
```

# In [63]:

```
# Метод стохастического градиентного спуска (mini-batch SGD)
 2
    def eval_model_SGD(X, y, iterations, qty_in_batch, alpha=1e-4):
 3
        np.random.seed(42)
 4
        W_all_SGD = []
 5
        W = np.random.randn(X.shape[0]) # начальное приближение весов
 6
        n = X.shape[1] # число наблюдений
 7
        n_batch = n // qty_in_batch
        if n % qty_in_batch != 0:
 8
 9
            n_batch += 1
10
        for i in range(1, iterations + 1):
            for b in range(n_batch):
11
12
                start_ = qty_in_batch * b
13
                end_ = qty_in_batch * (b + 1)
14
                X_tmp = X[:, start_ : end_]
15
                y_tmp = y[start_ : end_]
16
                y_pred_tmp = np.dot(W, X_tmp)
17
                err = calc_mse(y_tmp, y_pred_tmp)
18
                W -= alpha * (1/n * 2 * np.dot((y_pred_tmp - y_tmp), X_tmp.T))
                W_all_SGD.append(list(W[[1, 2]]))
19
20
        return W_all_SGD
```

#### In [149]:

```
1
    def mserror(X, w, y_pred):
 2
        y = X.T.dot(w)
 3
        return (sum((y - y_pred)**2)) / len(y)
 4
   # инициализируем начальный вектор весов
    w = np.zeros(X.shape[0])
 5
   # список векторов весов после каждой итерации
 7
   w_list = []
   # список значений ошибок после каждой итерации
 9
   errors = []
10 | # шаг градиентного спуска
11 eta = 5e-2
12
   # максимальное число итераций
13 | max_iter = 1e6
14 | # критерий сходимости (разница весов, при которой алгоритм останавливается)
15 | min_weight_dist = 1e-4
16 # зададим начальную разницу весов большим числом
17 | weight_dist = np.inf
18 | # счетчик итераций
19 | iter_num = 0
20 np.random.seed(1234)
21 \mid W_all_SGD_2 = []
22 # ход градиентного спуска
23
   while weight_dist > min_weight_dist and iter_num < max_iter:</pre>
24
        # генерируем случайный индекс объекта выборки
25
        train ind = np.random.randint(X.shape[1])
26
        new_w = w - 2 * eta * np.dot(X_st[:,train_ind], (np.dot(X_st[:,train_ind], w) - y[1
27
        weight_dist = np.linalg.norm(new_w - w, ord=2)
28
        w list.append(new w.copy())
29
        errors.append(mserror(X_st, new_w, y))
30
        iter num += 1
31
        w = new_w
32
          if iter num % 50 == 0:
        W_all_SGD_2.append(list(w[[1, 2]]))
33
34
35 | w list = np.array(w list)
36 print(f'B случае использования стохастического градиентного спуска функционал ошибки с
    print(f'Количество итераций - {iter_num}')
```

В случае использования стохастического градиентного спуска функционал ошибки составляет 44.4301 Количество итераций - 5289

#### In [143]:

```
# Получим коэффициенты для градиентого спуска на разных итерациях
U_all_GD = eval_model_GD(X_st, y, iterations=5000, alpha=1e-3, lambda_= 0.001)
U_all_GD = pd.DataFrame(W_all_GD, columns = ("w_1", "w_2"))
```

#### In [144]:

```
# Получим коэффициенты для стохастического градиентого спуска с батчами на разных итеро w_all_SGD = eval_model_SGD(X_st, y, iterations=5000, qty_in_batch = 2, alpha=1e-3) w_all_SGD = pd.DataFrame(W_all_SGD, columns = ("w_1", "w_2"))
```

#### In [155]:

```
# Получим коэффициенты для классического стохастического градиентого спуска на разных и
W_all_SGD_2 = pd.DataFrame(W_all_SGD_2, columns = ("w_1", "w_2"))
```

#### In [145]:

```
# Построим график для градиентого спуска на разных итерациях

plt.style.use('fivethirtyeight');

plt.figure(figsize=(6, 4));

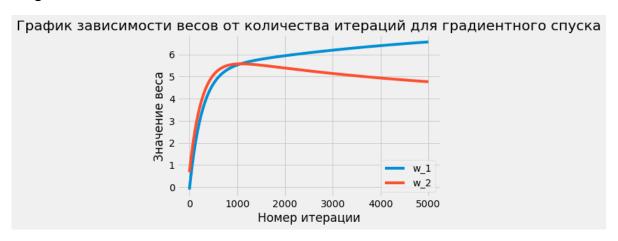
W_all_GD.plot();

plt.xlabel('Номер итерации');

plt.ylabel('Значение веса');

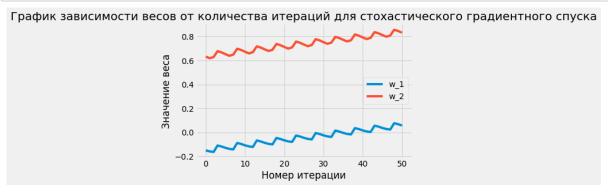
plt.title("График зависимости весов от количества итераций для градиентного спуска");
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



#### In [156]:

```
# Построим график для стохастического градиентого спуска с батчами на разных итерациях W_all_SGD.loc[:50].plot();
plt.xlabel('Номер итерации')
plt.ylabel('Значение веса')
plt.title("График зависимости весов от количества итераций для стохастического градиент
```



#### In [162]:

```
# Построим график для классическтго стохастического градиентого спуска на разных итерац W_all_SGD_2[["w_1", "w_2"]][:100].plot(); plt.xlabel('Номер итерации') plt.ylabel('Значение веса') plt.title("График зависимости весов от количества итераций для классического стохастиче
```



# Вывод:

Видим, что при стохастическом градиентном спуске изменения весов носят неровный характер, в отличие от простого градиетого спуска