Практическое задание 1.2

In [1]:

```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
```

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:
а) $x = (0, -3, 6),\ \ y = (-4, 7, 9)$;

$(x,\ y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 33$

In [2]:

```
a = np.array([0,-3, 6])
b = np.array([-4, 7, 9])
print(f'Скалярное произведение a и b: {a @ b}')
```

```
Скалярное произведение a и b: 33
```

б) $x = (7, -4, 0, 1),\ \ y = (-3, 1, 11, 2)$
$(x,\ y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$

In [3]:

```
a = np.array([7,-4,0,1])
b = np.array([-3,1,11,2])
print(f'Скалярное произведение a и b: {a @ b}')
```

```
Скалярное произведение a и b: -23
```

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.
Зададим вектор $a = (4, 2, 4)$
Зададим вектор $b = (12, 3, 4)$

In [4]:

```
a = np.array([4, 2, 4])
b = np.array([12, 3, 4])
```

Определим манхэттенскую норму вектора a:

$$\|x\|_1 = |4| + |2| + |4| = 10$$

In [5]:

```
print(f'l1 Манхетовская норма вектора a: {norm(a, ord=1)}')
```

```
l1 Манхетовская норма вектора a: 10.0
```

Определим манхэттенскую норму вектора b:

$$\|x\|_1 = |12| + |3| + |4| = 19$$

In [6]:

```
print(f'l1 Манхетовская норма вектора b: {norm(b, ord=1)}')
```

```
l1 Манхетовская норма вектора b: 19.0
```

Определим евклидову норму вектора a:

$$\|x\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6.$$

In [7]:

```
print(f'l2 Евклидова норма вектора a:\n{norm(a, ord=2)}')
```

```
l2 Евклидова норма вектора a:
6.0
```

Определим евклидову норму вектора b:

$$\|x\|_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

In [8]:

```
print(f'l2 Евклидова норма вектора b: {norm(b, ord=2)}')
```

```
l2 Евклидова норма вектора b: 13.0
```

В любом вещественном евклидовом пространстве можно ввести понятие *угла* между двумя произвольными элементами x и y. Углом $\varphi \in [0, \pi]$ между этими элементами является угол, косинус которого определяется соотношением

$$cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Исходя из этого, угол между векторами a и b будет равен:

$$cos\varphi = \frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{6 \cdot 13} \approx 0.9$$

In [9]:

```
cos_phi = np.dot(a, b) / norm(a) / norm(b)
print(f'Косинус угла между a и b: {cos_phi:.2f}')
print(f'Угол между a и b в радианах: {np.arccos(cos_phi):.2f}')
print(f'Угол между a и b в градусах: {np.arccos(cos_phi) * 180 / np.pi:.2f}')
```

```
Косинус угла между a и b: 0.90
Угол между a и b в радианах: 0.46
Угол между a и b в градусах: 26.18
```

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;

Из школьной программы известно, что в стандартном понимании в трехмерном пространстве скалярное произведение двух векторов определяется как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot cos\alpha.$$

Это справедливо касается любого n-мерного пространства. Из этого следует, что линейное пространство не будет евклидовым, если за скалярное произведение принять простое произведение длин векторов без дальнейшего произведения на косинус угла между ними.

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Посмотрим выполняются ли для данного утверждения следующие четыре аксиомы:
1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Проверим это на примере векторов $(4, 2, 4)$, $(12, 3, 4)$ b $(0, -3, 6)$
Зададим вектор $a = (4, 2, 4)$
Зададим вектор $b = (12, 3, 4)$
Зададим вектор $c = (0, -3, 6)$

In [10]:

```
a = np.array([4, 2, 4])
b = np.array([12, 3, 4])
c = np.array([0,-3, 6])
```

In [11]:

```
3 * (a @ b) == 3 * (b @ a)
```

Out[11]:

```
True
```

In [12]:

```
((3 * b) @ a) == (3 * (b @ a))
```

Out[12]:

```
True
```

In [13]:

```
3*((a + c) @ b) == 3 * (a @ b) + 3 * (c  @ b)
```

Out[13]:

```
True
```

In [14]:

```
3*(a @ a) >= 0
```

Out[14]:

```
True
```

Видим, что все четыре аксиомы справедливы для утроенного обычного скалярного произведение векторов. Следовательно, линейное пространство будет евклидовым, если за скалярное произведение принять утроенного обычного скалярного произведение векторов.

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:
а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$;
б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$;
в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$;
г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$?

Ответ:
Вариант а) не подходти так как там всего два вектора. А два вектора не могут образовывать базис трехмерного пространства.
Проверим вариант б)

В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0 \ \forall \ i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1 \ \forall \ i \in [1, n]$.

Проверим на эти свойства базис б)

In [15]:

```
a = np.array([1/2**(1/2), -1/2**(1/2), 0])
b = np.array([1/2**(1/2), 1/2**(1/2), 0])
c = np.array([0, 0, 1])
```

In [16]:

```
def scalar_product(a, b, c):
    print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ b}")
    print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {a @ c}")
    print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {b @ c}")
    print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {a @ a}")
    print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {b @ b}")
    print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {c @ c}")
```

In [17]:

```
scalar_product(a, b, c)
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 0.0
Скалярное произведение векторов a и c: 0.0
Скалярное произведение векторов b и c: 0.0
Скалярное произведение векторов b и c: 0.9999999999999998
Скалярное произведение векторов b и c: 0.9999999999999998
Скалярное произведение векторов b и c: 1
```

Видим, что базис б) удовлетворяет свойствам ортонормированного базиса. Соответственно является таковым.

Проверим на эти свойства базис в)

In [18]:

```
a = np.array([1/2, -1/2, 0])
b = np.array([0, 1/2, 1/2])
c = np.array([0, 0, 1])
```

In [19]:

```
scalar_product(a, b, c)
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: -0.25
Скалярное произведение векторов a и c: 0.0
Скалярное произведение векторов b и c: 0.5
Скалярное произведение векторов b и c: 0.5
Скалярное произведение векторов b и c: 0.5
Скалярное произведение векторов b и c: 1
```

Видим, что базис в) не удовлетворяет свойствам ортонормированного базиса. Соответственно не является таковым.

Проверим на эти свойства базис г)

In [20]:

```
a = np.array([1,0,0])
b = np.array([0,1,0])
c = np.array([0,0,1])
```

In [21]:

```
scalar_product(a, b, c)
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 0
Скалярное произведение векторов a и c: 0
Скалярное произведение векторов b и c: 0
Скалярное произведение векторов b и c: 1
Скалярное произведение векторов b и c: 1
Скалярное произведение векторов b и c: 1
```

Видим, что базис г) удовлетворяет свойствам ортонормированного базиса. Соответственно является таковым.