Практическое задание 1.1

1. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Решение
Заметим, что $f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$, то есть вектор $f_4(x)$ — линейная комбинация векторов $f_3(x)$, $f_2(x)$ и $f_1(x)$, из чего можно сделать вывод, что
$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x$ линейно зависимы.

2. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$$

Решение
Заметим, что $f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + 0,5f_1(x)$, то есть вектор $f_4(x)$ — линейная комбинация векторов $f_3(x)$, $f_2(x)$ и $f_1(x)$, из чего можно сделать вывод, что
$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$ линейно зависимы.

3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение

Видим, что базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$ образуют векторы $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$. Тогда

$$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) = 0,5 \cdot (0, 0, 10) + 1 \cdot (2, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) = 0,5b_1 + b_2 +$$

то есть координатами вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$ являются 0.5, 1, 3.

##**4.** Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе 1, x, x^2;

Решение
Вектор $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$ можно представить как $x = (3, -2, 2)$
Видим, что базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ образуют векторы $b_1 = (0, 0, 1)$, $b_2 = (0, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 0)$. Тогда

$$x = (3, -2, 2) = (3, 0, 0) + (0, -2, 0) + (0, 0, 2) = 2 \cdot (0, 0, 1) + (-2) \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (1, 0, 0) = 2b_1 + (-$$

то есть координатами вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$ в базисе 1, x, x^2 являются 2, -2, 3.

б) в базисе x^2, $x - 1$, 1.

Решение

Вектор $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$ можно представить как $x = (3, -2, 2)$
Видим, что базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ образуют векторы $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, -1)$, $b_3 = (0, 0, 1)$.
Тогда

$$x = (3, -2, 2) = a_1 \cdot (1, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, -1) + a_3 \cdot (0, 0, 1)$$

Из данного равенства получаем систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 3 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = -2 \\ a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем, что координатами вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$ в базисе $1, x, x^2$ являются $3, -2, 0$.

##**5.** Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю

Помним ,что подмножество L линейного пространства V является его подпространством тогда и только тогда, когда для любых элементов $u, v \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

$$1)\ u + v \in L;$$

$$2)\ \alpha \cdot u \in L.$$

Решение:
Проведем проверку по выше приведенному утверждению

$$(0, b, c) + (a, 0, c) = (a, b, c + \text{c}),$$
$$\alpha \cdot (0, b, \text{c}) = (0, \alpha b, \alpha \text{c}).$$

Из полученных векторов первый не принадлежат указанному в задании множеству всех векторов вида $(0, b, c)$ или $(a, 0, c)$, то есть данное множество не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Решение:
Проведем проверку по выше приведенному утверждению

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n) + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n) = ((a_1 + b_1)u_1, (a_2 + b_2)u_2, \ldots, (a_n + b_n)u_n),$$
$$\alpha \cdot (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n) = (\alpha a_1 u_1, \alpha a_2 u_2, \ldots, \alpha a_n u_n).$$

И вектор $((a_1 + b_1)u_1, (a_2 + b_2)u_2, \ldots, (a_n + b_n)u_n)$, и вектор $(\alpha a_1 u_1, \alpha a_2 u_2, \ldots, \alpha a_n u_n)$ все еще являяются элементами подмножества линейных комбинаций векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Следовательно, множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ является является его линейным подпространством.