Практическое задание 3

In [1]:

```python
import sympy as sym
import numpy as np
np.set_printoptions(precision=2, suppress=True)
```

1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения линейного оператора, составив и решив характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \cdot (-6) = 0,$$

Решим данное уравнение

In [2]:

```python
x = sym.Symbol('x')
sym.solveset((-1-x)*(6-x)-2*(-6))
```

Out[2]:

$\{2, 3\}$

Видим, что собственные значения равны 2 и 3

Найдем собственные векторы вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ***для собственного значения 2, подставив полученное собственное значение в выражение*** $\mathbf{A}x = \lambda x$***:***

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1, \\ 2 \cdot x_1 + 6x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

Из этого уравнения следует, что вектор вида $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет каждому уравнению системы.

Таким образом, существует множество коллинеарных друг другу собственных векторов, представителем которых является $x = (2, -1)$ (с точностью до умножения на число), которые это линейное преобразование переводит в коллинеарные исходным.

Найдем собственные векторы вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ для собственного значения 3, подставив полученное собственное значение в выражение $\mathbf{A}x = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1, \\ 2 \cdot x_1 + 6x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

Из этого уравнения следует, что вектор вида $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет каждому уравнению системы.

Таким образом, существует множество коллинеарных друг другу собственных векторов, представителем которых является $x = (2, -1)$ (с точностью до умножения на число), которые это линейное преобразование переводит в коллинеарные исходным.

Найдем собственные векторы вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ***для собственного значения 3, подставив полученное собственное значение в выражение*** $\mathbf{A}x = \lambda x$***:***

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1, \\ 2 \cdot x_1 + 6x_2 = 3x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = -1,5x_2$$

Из этого уравнения следует, что вектор вида $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет каждому уравнению системы.

Таким образом, существует множество коллинеарных друг другу собственных векторов, представителем которых является $x = (3, -2)$ (с точностью до умножения на число), которые это линейное преобразование переводит в коллинеарные исходным. Проверим

In [3]:

```
A = np.array([[-1, -6], [2, 6]])
x_1 = np.array([2, -1])
x_2 = np.array([3, -2])
w, v = np.linalg.eig(A)

print(f'Матрица A:\n{A}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица A:
[[-1 -6]
 [ 2  6]]
Собственные значения:
[2. 3.]
Собственные векторы:
[[-0.89  0.83]
 [ 0.45 -0.55]]
```

Проверим через выражение $\mathbf{A}x = \lambda x$

In [4]:

```
A @ x_1 == 2 * x_1
```

Out[4]:

```
array([ True,  True])
```

In [5]:

```
A @ x_2 == 3 * x_2
```

Out[5]:

```
array([ True,  True])
```

Видим, что собственные вектора и собственные значения были посчитаны верно.

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что **любой** вектор является для него собственным.

Найдем собственные значения линейного оператора, составив и решив характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0,$$

Решим данное уравнение

In [6]:

```
x = sym.Symbol('x')
sym.solveset((-1-x)*(-1-x))
```

Out[6]:

$$\{-1\}$$

Найдем собственные векторы вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ для собственного значения -1, подставив полученное собственное значение в выражение $\mathbf{A}x = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases} -x_1 = -x_1, \\ -x_2 = -x_2. \end{cases}$$

Видим, что данная система имеет решение при любых x_1 и x_2, следовательно **любой** вектор является собственным для оператора

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверим

In [7]:

```
A = np.array([[-1, 0], [0, -1]])
x_1 = np.random.rand(2,2)

w, v = np.linalg.eig(A)

print(f'Матрица A:\n{A}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица A:
[[-1  0]
 [ 0 -1]]
Собственные значения:
[-1. -1.]
Собственные векторы:
[[1. 0.]
 [0. 1.]]
```

In [8]:

```
A @ x_1 == -x_1
```

Out[8]:

```
array([[ True,  True],
       [ True,  True]])
```

Действительно видим, что любой случайный вектор является собственным для рассматриваемого оператора

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся выражением $\mathbf{A}x = \lambda x$.
Составим и попробуем решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases} 2 = \lambda, \\ 2 = \lambda. \end{cases}$$

Таким образом, видим, что при собственом значении 2 вектор $x = (1, 1)$ является собственным для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

In [9]:

```
A = np.array([[1, 1], [-1, 3]])
x_1 = np.array([1, 1])

w, v = np.linalg.eig(A)

print(f'Матрица A:\n{A}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица A:
[[ 1  1]
 [-1  3]]
Собственные значения:
[2. 2.]
Собственные векторы:
[[ 0.71 -0.71]
 [ 0.71 -0.71]]
```

In [10]:

```
A @ x_1 == 2 * x_1
```

Out[10]:

```
array([ True,  True])
```

Проверка подтвердила, что при собственом значении 2 вектор $x = (1, 1)$ является собственным для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся выражением $\mathbf{A}x = \lambda x$.
Составим и попробуем решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Получим

$$\Rightarrow \begin{cases} -9 = \lambda 3 \\ -9 = \lambda 3 \\ -12 = -\lambda 4 \end{cases}$$

Такая система не имеет смысла, следовательно, вектор $x = (3, -3, -4)$ не является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A. Проверим

In [11]:

```
A = np.array([[0, 3, 0], [3, 0, 0], [0, 0, 3]])
x_1 = np.array([3, -3, -4])

w, v = np.linalg.eig(A)

print(f'Матрица A:\n{A}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица A:
[[0 3 0]
 [3 0 0]
 [0 0 3]]
Собственные значения:
[ 3. -3.  3.]
Собственные векторы:
[[ 0.71 -0.71  0.   ]
 [ 0.71  0.71  0.   ]
 [ 0.    0.    1.   ]]
```

In [12]:

```
A @ x_1 == 3 * x_1
```

Out[12]:

```
array([False, False,  True])
```

In [13]:

```
A @ x_1 == -3 * x_1
```

Out[13]:

```
array([ True,  True, False])
```

Проверка подтвердила, что при собственых значениях 3 и -3 вектор $x = (3, -3, -4)$ не является собственным для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$