Практическое задание 7

In [1]:

```
from sympy import *
import math
import pandas as pd
init_printing()
import numpy as np
```

1. Исследовать на условный экстремум функцию

$$U = 3 - 8x + 6y,$$

если

$$x^2 + y^2 = 36$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 2x\lambda - 8 = 0, \\ L'_y = 2y\lambda + 6 = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

Выразит из первого уравнения y, из второго x и подставим всё в третье:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \frac{25}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

Получаем две точки: $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ и $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 2\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель в общем виде, а затем уже разберемся с каждой точкой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix}$$

$$\cdot (-4y\lambda) = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

По условию задачи $x^2 + y^2 = 36$, тогда

$$\Delta = -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$$

Т.е. знак определителя зависит только от знака λ.

Если $\lambda = -\frac{5}{6}$, то $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$ - точка максимума.

Если $\lambda = \frac{5}{6}$, $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$- точка минимума.

2. Исследовать на условный экстремум функцию

$$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15,$$

если

$$x^2 + 16y^2 = 64$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda \cdot (x^2 + 16y^2 - 64)$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0, \\ L'_y = 12x + 64y + 32y\lambda = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y = -4x - 2x\lambda, \\ 12x = -64y - 32y\lambda, \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y = -x(2 + \lambda), \\ 3x = -8y(2 + \lambda), \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \lambda = -\frac{6y}{x}, \\ 3x = -8y(2 + \lambda), \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \lambda = -\frac{6y}{x}, \\ 3x = -8y(-\frac{6y}{x}), \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\lambda = -\frac{6y}{x}, \\ 3x = \frac{48y^2}{x}), \\ x^2+16y^2-64=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\lambda = -\frac{6y}{x}, \\ x^2 = 16y^2, \\ x^2+16y^2-64=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\lambda = -\frac{6y}{x}, \\ x^2 = 16y^2, \\ 16y^2+16y^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{6y}{x} - 2, \\ x^2 = 16y^2, \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

Получаем четыре точки:

$\left(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{7}{2}\right)$

$\left(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\left(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\left(4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{7}{2}\right)$

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 4+2\lambda$$

$$L''_{yy} = 64+32\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 12$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 32y$$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель в общем виде, а затем уже разберемся с каждой точкой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} - 2x$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix} = -2x \cdot (2x \cdot (64+32\lambda) - 32y \cdot 12) + 32y \cdot (2x \cdot 12 -$$

По условию задачи $x^2 + y^2 = 64$, тогда после преобразований получаем

$$\Delta = 3xy - 16\lambda - 32$$

Теперь определим точки минимума и максимума

In [2]:

```
roots = pd.DataFrame([
    ["Точка 1", -4*sqrt(2), -sqrt(2), -7/2],
    ["Точка 2", -4*sqrt(2), sqrt(2), -1/2],
    ["Точка 3", 4*sqrt(2), -sqrt(2), -1/2],
    ["Точка 4", 4*sqrt(2), sqrt(2), -7/2]
])
for r in range(len(roots)):
    print("Определитель матрицы для рассматриваемой точки равен: ", 3*roots.loc[r][1]*roots
    if (3*roots.loc[r][1]*roots.loc[r][2]-16*roots.loc[r][3]-32) < 0:
        print(f"'{roots.loc[r][0]}' с координатами {roots.loc[r][1], roots.loc[r][2], roots
    elif (3*roots.loc[r][1]*roots.loc[r][2]-16*roots.loc[r][3]-32) > 0:
        print(f"'{roots.loc[r][0]}' с координатами {roots.loc[r][1], roots.loc[r][2], roots
```

```
Определитель матрицы для рассматриваемой точки равен:  48.0000000000000
'Точка 1' с координатами (-4*sqrt(2), -sqrt(2), -3.5) является локальным мини
мумом
Определитель матрицы для рассматриваемой точки равен:  -48.0000000000000
'Точка 2' с координатами (-4*sqrt(2), sqrt(2), -0.5) является локальным макси
мумом
Определитель матрицы для рассматриваемой точки равен:  -48.0000000000000
'Точка 3' с координатами (4*sqrt(2), -sqrt(2), -0.5) является локальным макси
мумом
Определитель матрицы для рассматриваемой точки равен:  48.0000000000000
'Точка 4' с координатами (4*sqrt(2), sqrt(2), -3.5) является локальным миниму
мом
```

3. Численно найти хотя бы один действительный корень системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3xy^3 - 2x^2y^2 + 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3y^3 - 2x^2 + 2x^3y - 5x^2y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

In [3]:

```
from scipy.optimize import fsolve, broyden1
import math

def equations(p):
    x, y = p
    # Запись системы уравнения вида x+y=2, x-y=0
    return (x**2-y**2+3*x*y**3-2*x**2*y**2+2*x-3*y-5, 3*y**3-2*x**2+2*x**3*y-5*x**2*y**2+5)

# Численное решение системы уравнений
(x, y), info, ier, mesg =  fsolve(equations, (10, 10), full_output=True)
print (x, y, ier)
```

```
1.273302064528599 1.6620391224277693 1
```

Проверим наши корни

In [4]:

```
x**2-y**2+3*x*y**3-2*x**2*y**2+2*x-3*y-5
```

Out[4]:

$$-1.071143174158351e - 12$$

In [5]:

```
3*y**3-2*x**2+2*x**3*y-5*x**2*y**2+5
```

Out[5]:

$$-1.1546319456101628e - 12$$

Видим, что при данных корнях выражения принимают значеия близкие к 0. Следовательно корни найдены правильно.

4*. Численно найти все 5 действительных корней.

In [7]:

```
from scipy.optimize import fsolve, broyden1
import math

def equations(p):
    x, y = p
    # Запись системы уравнения вида x+y=2, x-y=0
    return (x**2-y**2+3*x*y**3-2*x**2*y**2+2*x-3*y-5, 3*y**3-2*x**2+2*x**3*y-5*x**2*y**2+5)

# Численное решение системы уравнений
solv = []
for x in np.arange (-10000, 10000, 10):
    (x, y), info, ier, mesg =  fsolve(equations, (x, x), full_output=True)
#     print(x, y, ier)
    if ier == 1:
        solv.append([int(x*10**8)/10**8, int(y*10**8)/10**8])
```

```
C:\ProgramData\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:7: RuntimeWa
rning: overflow encountered in long_scalars
  import sys
```

Корни системы уравнений

In [8]:

```
roots=pd.DataFrame(solv)
roots.drop_duplicates().reset_index(drop=True)
```

Out[8]:

	0	1
0	1.375687	-0.174758
1	1.273302	1.662039
2	2.217754	0.610194
3	2.494357	0.708318
4	-3.653080	-0.274763

5*. Даны две функции $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Известно, что:

$$f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$$

$$g'(x) = 2 - 2f(x)$$

$$f(0) = 0$$

$$g(0) = 1$$

Восстановить функции $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$ с помощью формулы:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

на участке $[0, 20]$

В качестве решения построить график этих функций в одной системе координат.

6.** Найти все корни уравнения:

$$f(x) = g(x)$$

на участке $[0, 20]$

Где $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$ - функции из предыдущего решения.