Практическое задание 5

In [1]:

```
from sympy import *
import math
import pandas as pd
init_printing()
```

1. Найти производную y'_x функции:

$$\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Используем формулу

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$F'_x = \left(\mathrm{arctg}(\frac{y}{x})\right)' - \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x}{}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{2\cdot(x^2+y^2)}\cdot 2x = -\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = -$$

$$F'_y = \left(\mathrm{arctg}(\frac{y}{x})\right)' - \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x -}{x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2\cdot(x^2+y^2)}\cdot 2y = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x -}{x^2 -}$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\left(\frac{\frac{-y-x}{x^2+y^2}}{\frac{x-y}{x^2+y^2}}\right) = -\left(\frac{-y-x}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x-y}\right) = -\left(\frac{-y-x}{x-y}\right) = \frac{x+y}{x-y}$$

Проверим

In [2]:

```
x,y=symbols('x y')
f=atan(y/x)-ln(sqrt(x**2+y**2))
f
```

Out[2]:

$$-\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

In [3]:

```
-diff(f,x)/diff(f,y)
```

Out[3]:

$$\frac{\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}}{-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}}$$

После упрощения данного выражения, мы получим выведенное нами выражение: $\frac{x+y}{x-y}$. Следовательно производная найдена правильно.

2. Найти производную y'_x функции:

$$\begin{cases} y = \frac{t^2}{t-1}, \\ x = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

$$y'_t = \frac{(t^2)'\cdot(t-1)-t^2\cdot(t-1)'}{(t-1)^2} = \frac{2t\cdot(t-1)-t^2\cdot 1}{(t-1)^2} = \frac{2t^2-2t-t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2 -}{(t -}$$

$$x'_t = \frac{t'\cdot(t^2-1)-t\cdot(t^2-1)'}{(t^2-1)^2} = \frac{1\cdot(t^2-1)-t\cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2-1-2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2 -}{(t^2 -}$$

$$y'_x = \frac{\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}}{\frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2}} = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\cdot\frac{(t^2-1)^2}{-t^2-1} = \frac{t^2-2t}{(t-1)(t-1)}\cdot\frac{(t-1)(t+1)(t-1)(t+1)}{-t^2-1} = \frac{(t^2-2t)\cdot(t+1)^2}{-t^2-1}$$

$$= \frac{t^4+2t^3+t^2-2t^3-4t^2-2t}{-t^2-1} = \frac{t^4-3t^2-2t}{-t^2-1}$$

Проверим

In [4]:

```
t=Symbol('t')
y=t**2/(t-1)
y
```

Out[4]:

$$\frac{t^2}{t-1}$$

In [5]:

```
x=t/(t**2-1)
x
```

Out[5]:

$$\frac{t}{t^2-1}$$

In [6]:

```
diff(y,t)/diff(x,t)
```

Out[6]:

$$\frac{-\frac{t^2}{(t-1)^2}+\frac{2t}{t-1}}{-\frac{2t^2}{\left(t^2-1\right)^2}+\frac{1}{t^2-1}}$$

После упрощения данного выражения, мы получим выведенное нами выражение: $\frac{t^4-3t^2-2t}{-t^2-1}$. Следовательно производная найдена правильно.

3. Найти производную с помощью логарифмирования:

$$y=(x^2+2)^5\cdot(3x-x^3)^3$$

$$y'=(x^2+2)^5\cdot(3x-x^3)^3\cdot(\ln((x^2+2)^5\cdot(3x-x^3)^3))'=(x^2+2$$
$$\cdot((\ln(x^2+2)^5)'+(\ln(3x-x^3)^3)')=(x^2+2)^5\cdot(3x-x^3)^3\cdot\left(\frac{10x}{x^2+2}+\frac{9-9x}{3x-x}\right.$$
$$\cdot\left(\frac{10x(3x-x^3)+(9-9x^2)(x^2+2)}{(x^2+2)\cdot(3x-x^3)}\right)=(x^2+2)^4\cdot(3x-x^3)^2\cdot(10x(3x-x$$
$$=10x(x^2+2)^4\cdot(3x-x^3)^3+(9-9x^2)(x^2+2)^5(3x-x$$

Проверим

In [7]:

```
x=Symbol('x')
y=(x**2+2)**5*(3*x-x**3)**3
y
```

Out[7]:

$$\left(x^2+2\right)^5\left(-x^3+3x\right)^3$$

In [8]:

```
diff(y,x)
```

Out[8]:

$$10x\left(x^2+2\right)^4\left(-x^3+3x\right)^3+\left(9-9x^2\right)\left(x^2+2\right)^5\left(-x^3+3x\right)^2$$

Видим, что производная найдена првильно.

4. Найти производную функции с помощью логарифмирования:

$$y = x^x$$

$$y' = x^x\cdot(\ln x^x)' = x^x\cdot(x\ln x)' = x^x\cdot((x)'\ln x) + x(\ln x)' = x^x\cdot(1\cdot\ln x + x$$

Проверим

In [9]:

```
x=Symbol('x')
y=x**x
y
```

Out[9]:

$$x^x$$

In [10]:

```
diff(y,x)
```

Out[10]:

$$x^x\left(\log(x)+1\right)$$

Видим, что производная найдена првильно.

5. Найти производную функции с помощью логарифмирования:

$$y = \frac{(2-x^2)^3\cdot(x-1)^2}{(2x^3-3x)\cdot e^x}$$

$$y' = \frac{(2-x^2)^3\cdot(x-1)^2}{(2x^3-3x)\cdot e^x}\cdot((\ln((2-x^2)^3))' + (\ln((x-1)^2))' - (\ln((2x^3-3x)))'$$

$$= \frac{(2-x^2)^3\cdot(x-1)^2}{(2x^3-3x)\cdot e^x}\cdot\left(\frac{-6x}{2-x^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{6x^2+3}{2x^3-3x} - x\right)$$

Можно упрощать дальше, но это не особо улучшит ситуацию.

Проверим

In [11]:

```
x=Symbol('x')
y=(((2-x**2)**3)*((x-1)**2))/((2*x**3-3*x)*(exp(x)))
y
```

Out[11]:

$$\frac{\left(2-x^2\right)^3(x-1)^2 e^{-x}}{2x^3-3x}$$

In [12]:

```
diff(y,x)
```

Out[12]:

$$-\frac{6x\left(2-x^2\right)^2(x-1)^2 e^{-x}}{2x^3-3x} + \frac{\left(2-x^2\right)^3\left(3-6x^2\right)(x-1)^2 e^{-x}}{\left(2x^3-3x\right)^2} - \frac{\left(2-x^2\right)^3(x-1)^2 e^{-x}}{2x^3-3x}$$

Если бы мы продолжили упрощение нашего выражения, то получили это вырвжение. Следовательно производная найдена правильно.

6*. Вывести табличное значение производной для функции

$$\mathrm{arctg}(x)$$

$$y = \mathrm{arctg}(x)$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Проврим

In [13]:

```
x=symbols('x')
f=atan(x)
f
```

Out[13]:

$\operatorname{atan}(x)$

In [14]:

```
diff(f,x)
```

Out[14]:

$$\frac{1}{x^2+1}$$

Видим, что производная найдена верно.

7. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P = 144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.
Площадь прямоугольника равна $S = x \cdot y$. Выразим x через y, используя периметр.

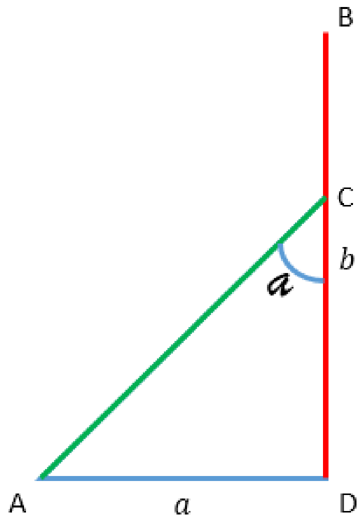
$$P = 2x + 2y$$
$$x = 72 - y$$

Тогда площадь равна $P = y \cdot (72 - y) = 72y \cdot y^2$
Чтобы найти наибольшую площадь, найдем производную и с помощью нее найдем максимум функции.

$$P' = (72y \cdot y^2)' = 72 - 2y$$
$$72 - 2y = 0$$
$$y = 31$$
$$x = 72 - 31 = 31$$

Ответ: Прямоугольник с периметром 144 см. имеет наибольшую площадь при длинне сторон 31 и 31 см. Т.е наибольшую площадь имеет квадрат.

8*. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через B, считая по кратчайшему расстоянию на a км. Под каким углом α к железной дороге следует пностроить подъезной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 км составляет: по подъезному пути p рублей, по железной дороге q рублей $(p > q)$ и город B расположен на b км севернее завода A.



Пусть:

AC **- длинна подъездного пути**

CB **- длинна пути по ЖД. Обозначим ее за** x

Тогда стоимость (P**) провоза груза будет равна** $P = p \cdot AC + q \cdot CB$

Если $AC = \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$**, то** $P = p \cdot \sqrt{a^2 + (b - x)^2} + q \cdot x$

Найдем производную P **по** x

$$P' = (p \cdot \sqrt{a^2 + (b-x)^2})' + (q \cdot x)' = p \cdot \frac{-2b + 2x}{2\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + q = \frac{p(x - b}{\sqrt{a^2 + (b -}}$$

$$+ q\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$$

Приравяем проирводную к 0 **и найдем точки экстремума**

$$-p(b - x) + q\sqrt{a^2 + (b-x)^2} = 0$$

$$q\sqrt{a^2 + (b-x)^2} = p(b - x)$$

$$q^2(a^2 + (b-x)^2) = p^2(b-x)^2$$

$$q^2a^2 + q^2(b-x)^2 = p^2(b-x)^2$$

$$\frac{q^2a^2}{(b-x)^2} = p^2 - q^2$$

$$b - x = \sqrt{\frac{q^2a^2}{p^2-q^2}}$$

$$x = b - \sqrt{\frac{q^2a^2}{p^2-q^2}}$$

Получается что, $CD = \sqrt{\frac{q^2a^2}{p^2-q^2}}$

И как итог $\tan\alpha = \frac{AD}{C\mathrm{B}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{q^2a^2}{p^2-q^2}}} = a\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{q^2a^2}} = \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{q}$