Практическое задание 8

In [1]:

```
from sympy import *
init_printing()
```

1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

Сделаем замену:

$$(x-2)(x+5)=t \quad \Rightarrow \quad t=x^2+3x-10 \quad \Rightarrow \quad dt=(2x+3)dx \quad \Rightarrow \quad dx$$

Преобразуем наш интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx=\int \frac{2x+3}{t}\cdot\frac{dt}{2x+3}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|(x-2$$

Проверим

In [2]:

```
x=Symbol('x')
f=(2*x+3)/((x-2)*(x+5))
f
```

Out[2]:

$$\frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}$$

In [3]:

```
integrate(f,x)
```

Out[3]:

$$\log\left(x^2+3x-10\right)$$

Видим, что интеграл посчитан правильно

2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx$$

$$U = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad dU = 2e^{2x} dx$$

$$dV = \cos 3x dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\sin 3x}{3}$$

Тогда:

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3} \cdot 2e^{2x} dx$$

$$\frac{2}{3} \int \sin 3x \cdot e^{2x} dx$$

$$U = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad dU = 2e^{2x} dx$$

$$dV = \frac{\sin 3x}{3} dx \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{\cos 3x}{3}$$

Воспользуемся формулой ещё раз

$$\frac{2}{3} \int \sin 3x \cdot e^{2x} dx = 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{9}\right) + \int \frac{\cos 3x}{9} \cdot 4e^{2x} dx$$

Тогда:

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} + 2e^{2x} \cdot \frac{\cos 3x}{9} - \int \frac{\cos 3x}{9} \cdot 4e^{2x} dx$$

Перенесем интеграл из правой части в левую

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx + \int \frac{\cos 3x}{9} \cdot 4e^{2x} dx = e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} + 2e^{2x} \cdot \left(\frac{\cos 3x}{9}\right)$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x}{9}$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x}{13}$$

Проверим

In [4]:

```
x=Symbol('x')
f=exp(2*x)*cos(3*x)
f
```

Out[4]:

$e^{2x}\cos(3x)$

In [5]:

```
integrate(f,x)
```

Out[5]:

$$\frac{3e^{2x}\sin(3x)}{13} + \frac{2e^{2x}\cos(3x)}{13}$$

Видим, что интеграл посчитан правильно

3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$$

$$U = x \quad \Rightarrow \quad dU = dx$$

$$dV = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad V = -e^{-x}$$

Тогда:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\ln 2 - 1}{2} + 1$$

Проверим

In [6]:

```
x=Symbol('x')
f=x*exp(-x)
f
```

Out[6]:

xe^{-x}

In [7]:

```
integrate(f,(x, 0, ln(2)))
```

Out[7]:

$\frac{1}{2} - \frac{\log(2)}{2}$

Видим, что интеграл посчитан правильно

4. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

¶

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$A(x+2) + B(x-1) = Ax + 2A + Bx - B = 1$$

$$\begin{cases} Ax + Bx = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$$

Тогда:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_2^{b} \frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b} \frac{1}{x-1}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{\ln(b-1)}{3} - \frac{\ln(0)}{3}$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_2^{b} \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b} \frac{1}{x+2}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{\ln(b+2)}{3} - \frac{\ln(4)}{3}$$

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{\ln(b-1)}{3} - \frac{\ln(0)}{3} - \lim_{b\to+\infty}\frac{\ln(b+2)}{3} + \frac{\ln(4)}{3} = \frac{\ln(4)}{3}$$

Проверим

In [8]:

```
x=Symbol('x')
f=1/(x**2+x-2)
f
```

Out[8]:

$$\frac{1}{x^2+x-2}$$

In [9]:

```
integrate(f,(x, 2, +oo))
```

Out[9]:

$$\frac{\log(4)}{3}$$

Видим, что интеграл посчитан правильно

5*. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$