Практическое задание 9

1. Исследовать сходимость ряда.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

(*) Двумя различными признаками.

Первый способ - второй признак сравнения

Это сравнение со степенным рядом $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ помним, что:

- если степень $p > 1$, то ряд сходится.
- во всех остальных случаях расходится.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{3}{2} > 1$, следовательно ряд сходиться

Второй способ - Интегральный признак Коши - если мы сможем посчитать этот интеграл, то ряд сходится.

In [1]:

```
from sympy import *
init_printing()
x=Symbol('x')
f=1/(x+1)**(3/2)
f
```

Out[1]:

$(x+1)^{-1.5}$

In [2]:

```
integrate(f,(x, 1, +oo))
```

Out[2]:

1.41421356237309

Интеграл посчитали, следовательно ряд сходиться

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \ldots + \frac{1000^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

Воспользуемся признаком д’Аламбера При расмотрении предел:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

помним, что:

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то признак д’Аламбера не работает

Тогда:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1000^{(n+1)}}{(n+1)!} : \lim_{n \to +\infty} \frac{1000^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1000^n \cdot 1000 \cdot n!}{1000^n \cdot n!(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1000}{n+1} = 0$$

$0 < 1$, следовательно ряд сходится

3*. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \ldots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

В третьем и четвертом задании доказываем, что

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = 0$$

Далее помня, что предел произведения равен произедению пределов находим, что пределы с 2n и 3n тоже равны 0. Далее используя признак д’Аламбера, понимаем, что q<1 и, следовательно ряды сходятся.

4*. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \ldots + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

5*. Исследовать сходимость ряда

Здесь мы имеем дело со знакопеременным рядом

$$-\frac{\sqrt{1}}{101}+\frac{\sqrt{2}}{102}-\ldots+\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+100}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+100}$$

По модулю $(-1)^n$ всегда равен 1. следовательно им можно пренебречь. Далее

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n}+\frac{100}{\sqrt{n}})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{100}{\sqrt{n}}}=0$$

В данном примере главный член последовательности монотонно стремиться к 0, поэтому по признаку Лейбница, ряд сходиться.

6*. Разложить функцию $y=e^x$ в ряд Маклорена, а так же в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$. Построить график функции и разложений.