Отчет по заданию 1

Рассматриваем математическую модель, описывающую изменение концентраций адсорбированных веществ x и y:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 z - k_{-1}x - k_2 z^2 x, \qquad \frac{dy}{dt} = k_3 z^2 - k_{-3} y,$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 0.5, \quad 0 \le x + 2y \le 1.$$

Здесь $z = 1 - x - 2y$ - концентрация свободных мест.

1) Сначала проведём однопараметрический анализ по параметру k_{-1}.

Стационарные состояния удовлетворяют системе уравнений:

$$k_1 z - k_{-1}x - k_2 z^2 x = 0,$$
$$k_3 z^2 - k_{-3} y = 0.$$

Решая данную систему относительно x и k_2, получим:

$$x = -2y + 1 - \frac{\sqrt{k_3^3 k_{-3}^3 y^3}}{k_3^2 k_{-3} y},$$

$$k_2 = -\frac{k_1 \cdot \sqrt{k_3^3 k_{-3}^3 y^3} \cdot (2y-1)}{k_{-3}^2 y^2 \cdot (4k_3 y^2 - 4k_3 y + k_3 - k_{-3} y)} - \\ - \frac{k_3 \cdot (-k_1 k_{-3} y + 4k_{-1} k_3 y^2 - 4k_{-1} k_3 y + k_{-1} k_3 - k_{-1} k_{-3} y)}{k_{-3} y \cdot (4k_3 y^2 - 4k_3 y + k_3 - k_{-3} y)}.$$

Пробегая с некоторым шагом весь диапазон значений переменной y от 0 до 0.5, найдём соответствующие значения переменной x и параметра k_2. Для исследования устойчивости стационарных решений выпишем элементы матрицы Якоби и вычислим её след и определитель на стационаре:

$$a_{11} = -k_1 - k_{-1} - k_2 z^2 + 2k_2 x z, \qquad a_{12} = -2k_1 + 4k_2 x z,$$
$$a_{21} = -2k_3 z, \qquad a_{22} = -4k_3 z - k_{-3},$$
$$\Delta A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad S_A = a_{11} + a_{22}.$$

Если $\Delta_A > 0$, то стационарное состояние устойчиво и имеет тип узла. Если $\Delta_A < 0$, то стационарное состояние является седлом. Определитель обращается в ноль: $\Delta_A = 0$ в точках седло-узловой бифуркации.

Нарисуем графики зависимости концентраций в стационарном состоянии от параметра k_2: $x(k_2)$ и $y(k_2)$, отметим точки бифуркации (отмечаются одновременно и на $x(k_2)$, и на $y(k_2)$). Для параметра k_{-1} берутся 5 разных значений: 0.001, 0.005, 0.01, 0.015, 0.02. Значения $k_1 = 0.12,\ k_3 = 0.0032,\ k_{-3} = 0.001$ других параметров фиксированы.

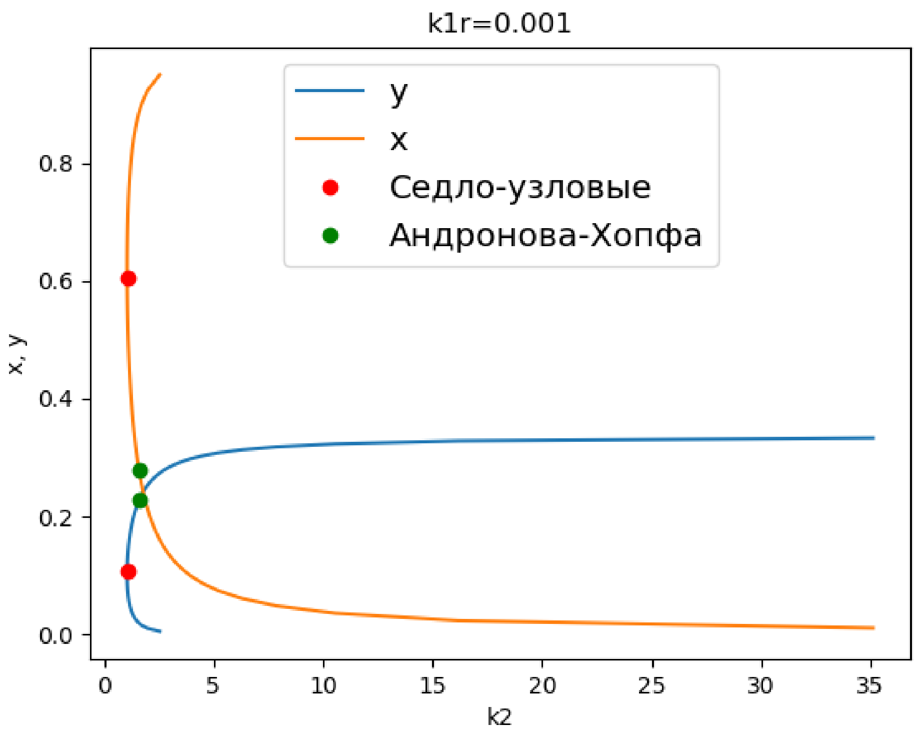

Рис. 1: $k_{-1} = 0.001$

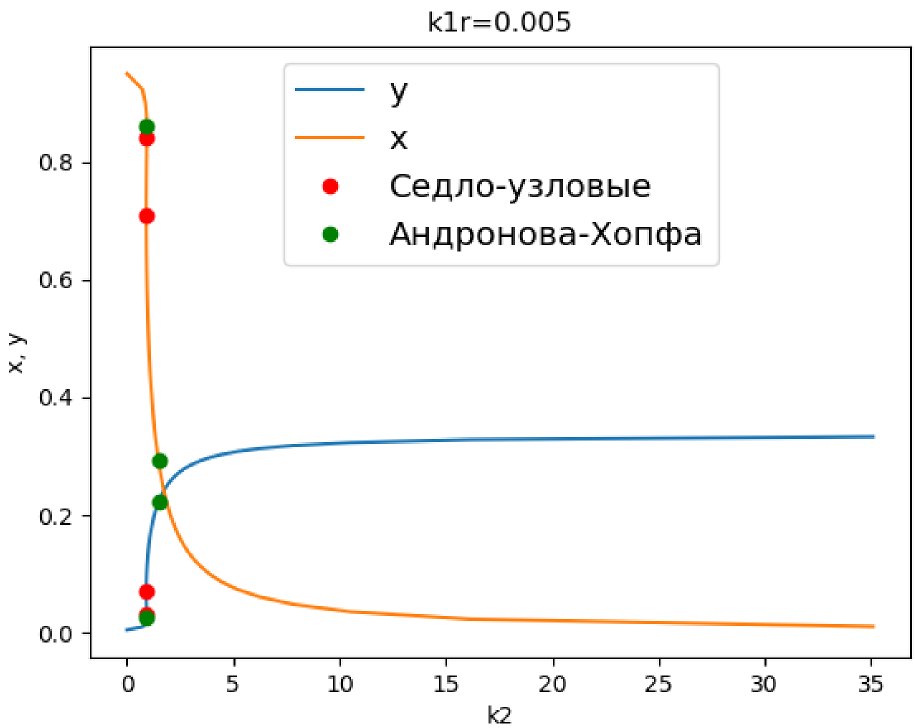

Рис. 2: $k_{-1} = 0.005$

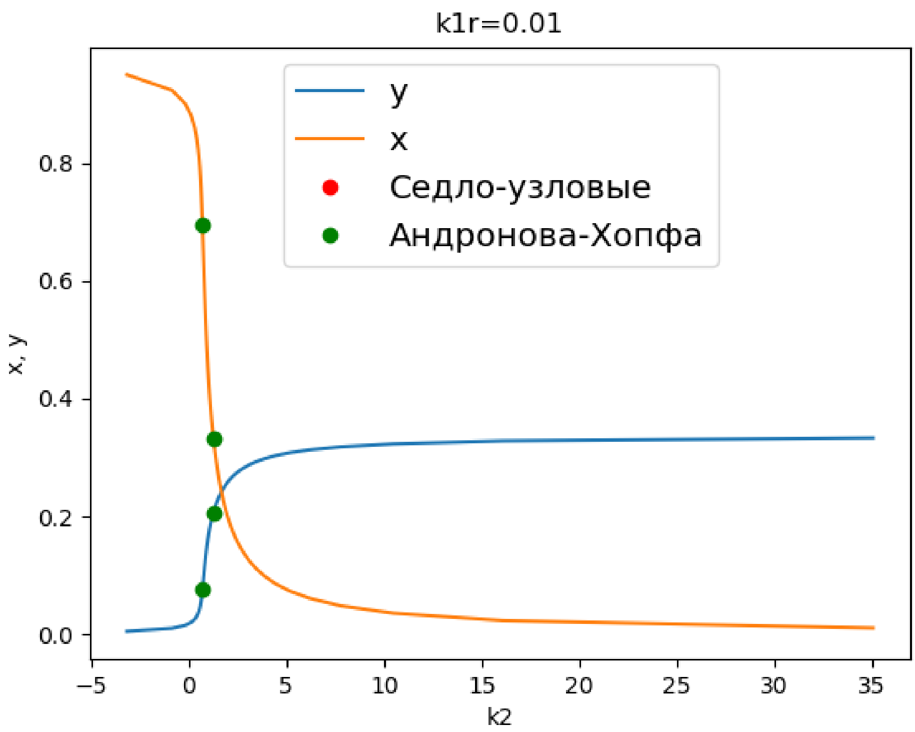

Рис. 3: $k_{-1} = 0.01$

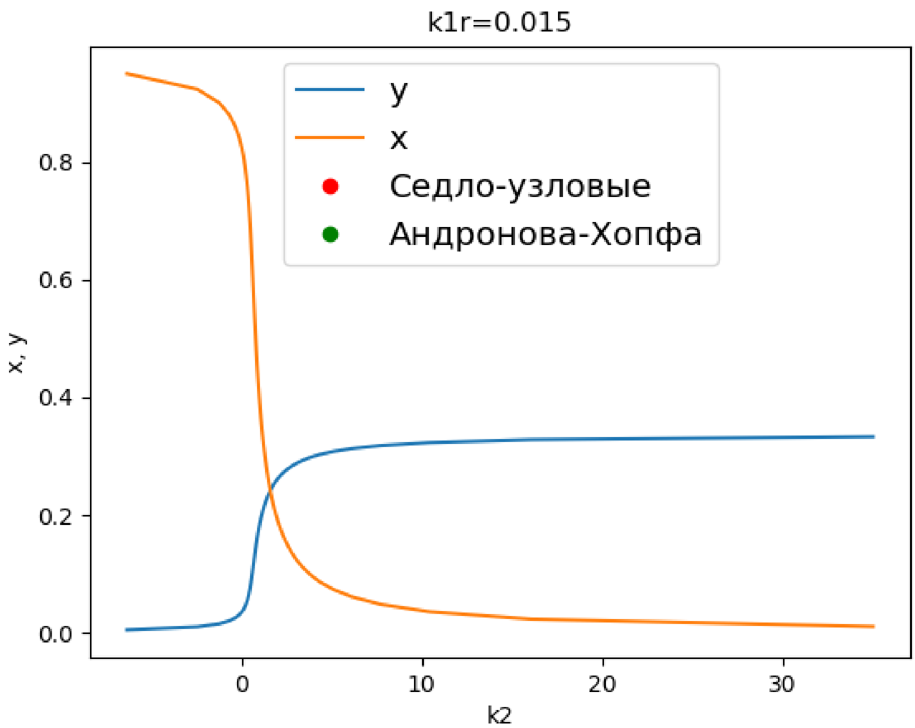

Рис. 4: $k_{-1} = 0.015$

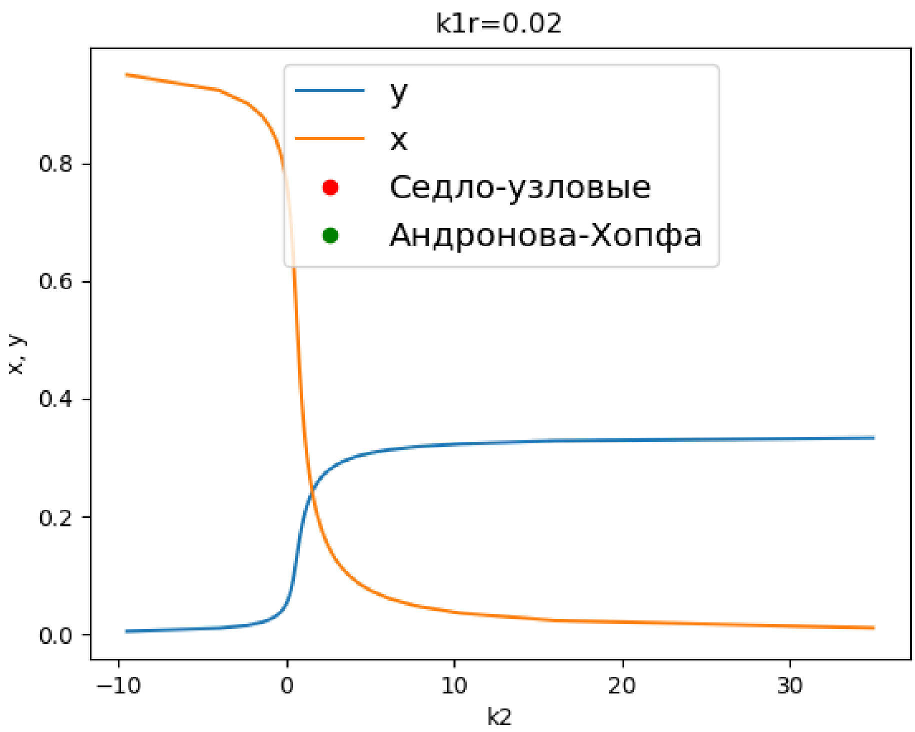
k1r=0.02
y
x
Седло-узловые
Андронова-Хопфа
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x, y
−10
0
10
20
30
k2

Рис. 5: $k_{-1} = 0.02$

2) Аналогично проведём однопараметрический анализ по параметру k_{-3}. Для параметра k_{-3} берутся 5 разных значений: 0.0005, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004. Значения $k_1 = 0.12$, $k_3 = 0.0032$, $k_{-1} = 0.01$ других параметров фиксированы.

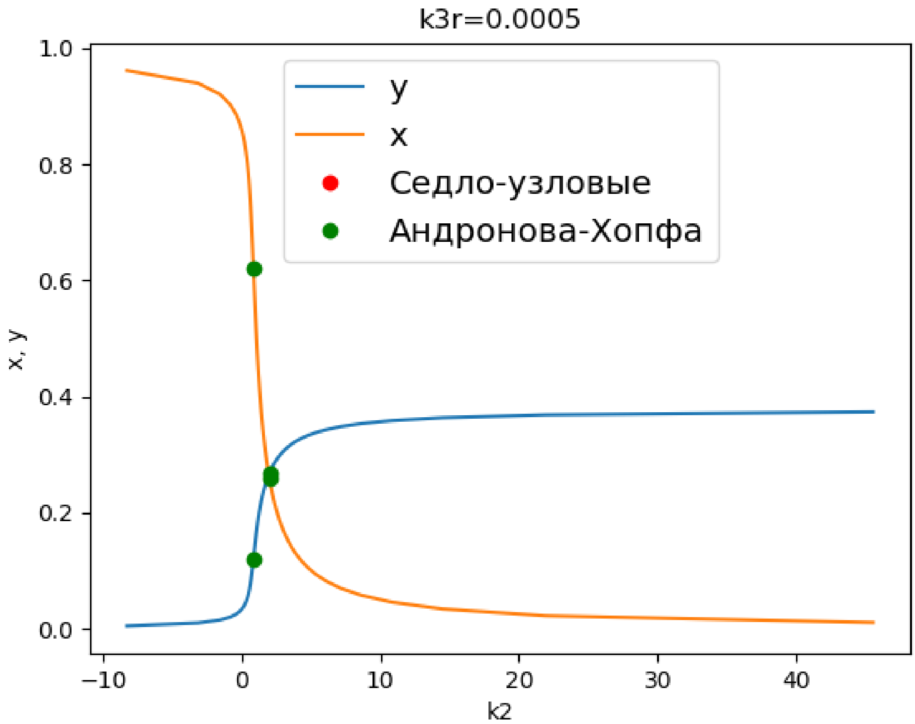

Рис. 6: $k_{-3} = 0.0005$

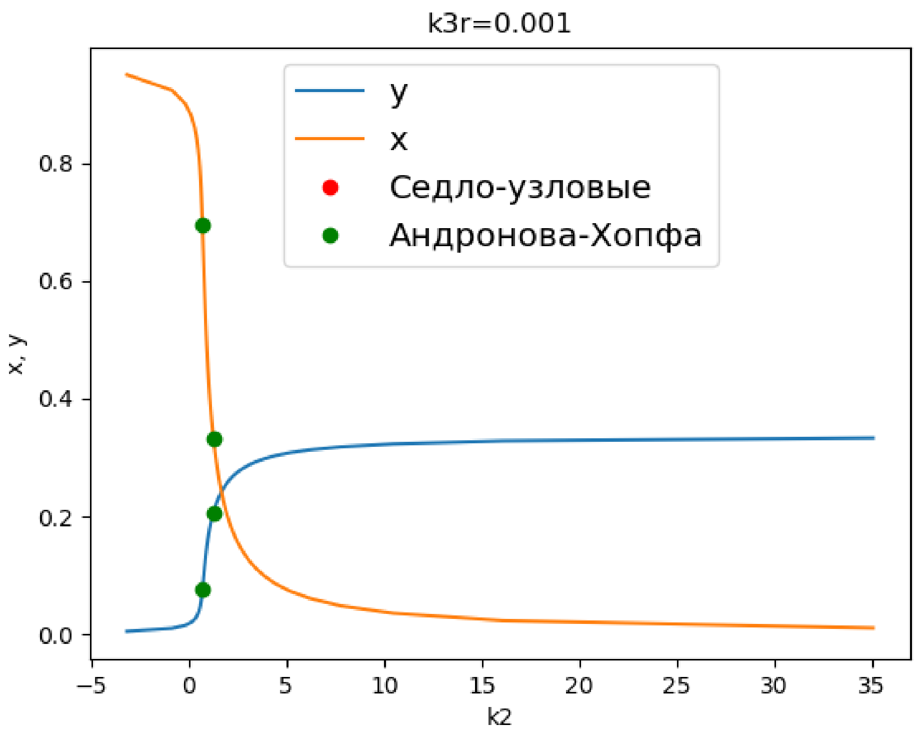

Рис. 7: $k_{-3} = 0.001$

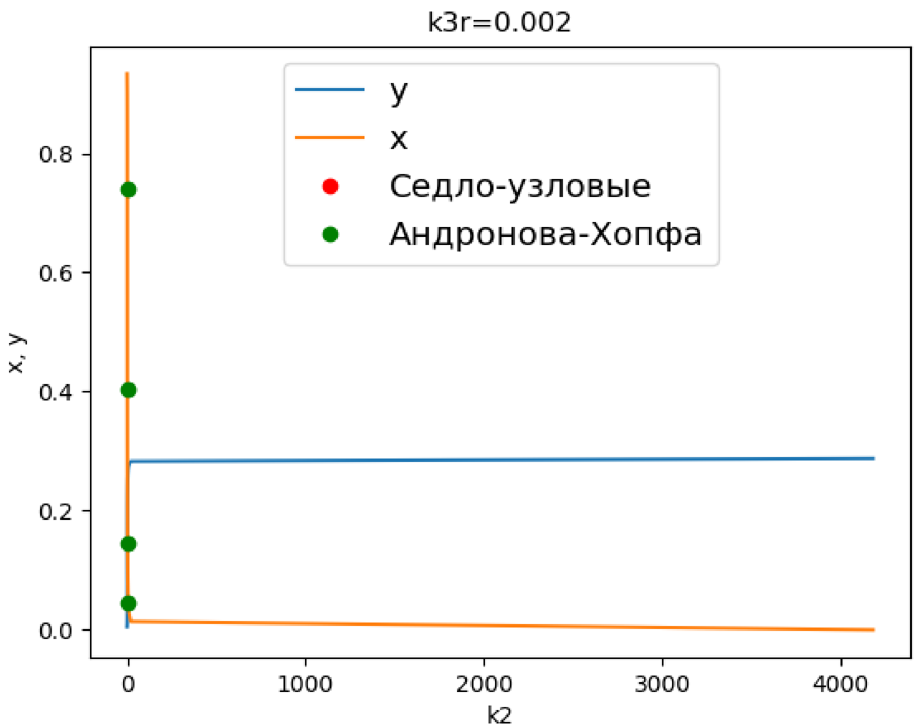

Рис. 8: $k_{-3} = 0.002$

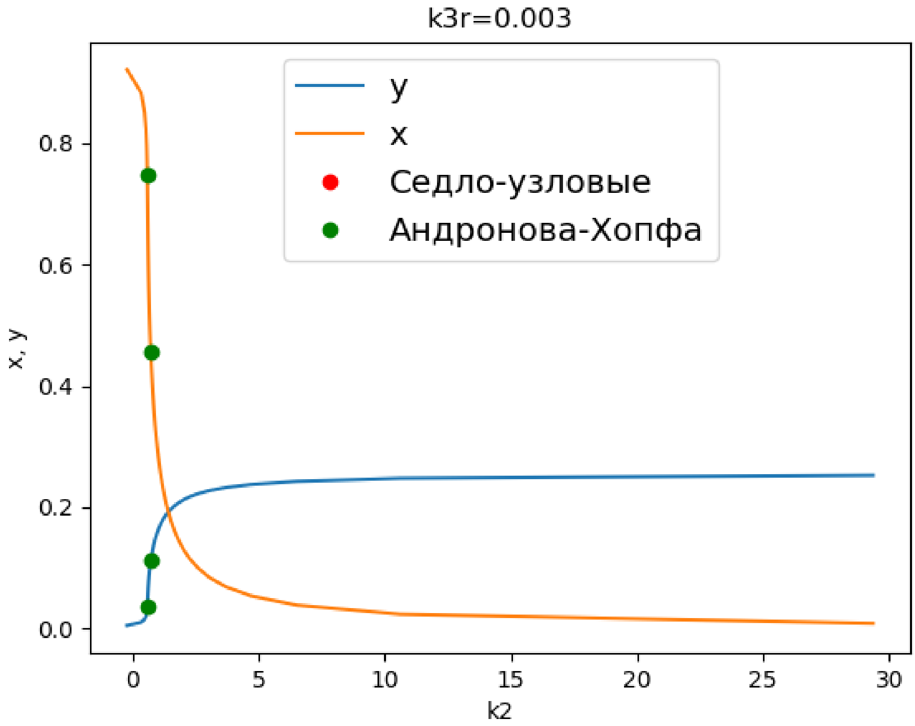

Рис. 9: $k_{-3} = 0.003$

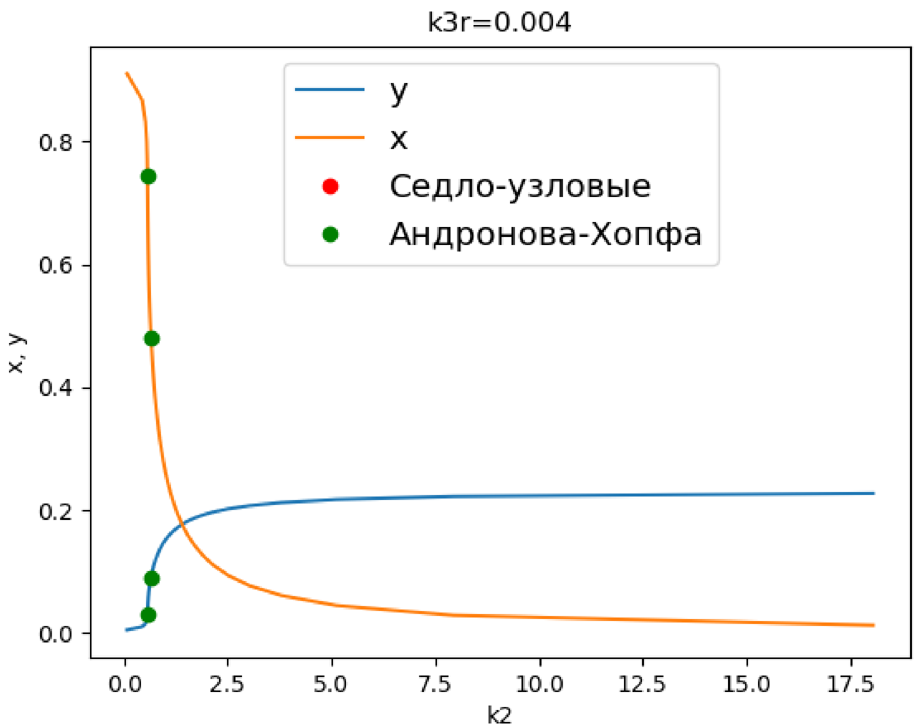

Рис. 10: $k_{-3} = 0.004$

3) Теперь проведём двухпараметрический анализ по параметрам k_1, k_2.

Допишем к системе стационаров уравнение $\Delta_A = 0$, решим полученную систему относительно y, k_1, k_2. Задавая значения параметров $k_{-1} = 0.01$, $k_3 = 0.0032$, $k_{-3} = 0.001$ по умолчанию, пробегая с некоторым шагом весь диапазон переменной x от 0 до 1, найдём значения переменной y и параметров k_1, k_2. Получили искомые координаты точек (k_2, k_1), строим параметрический портрет системы.

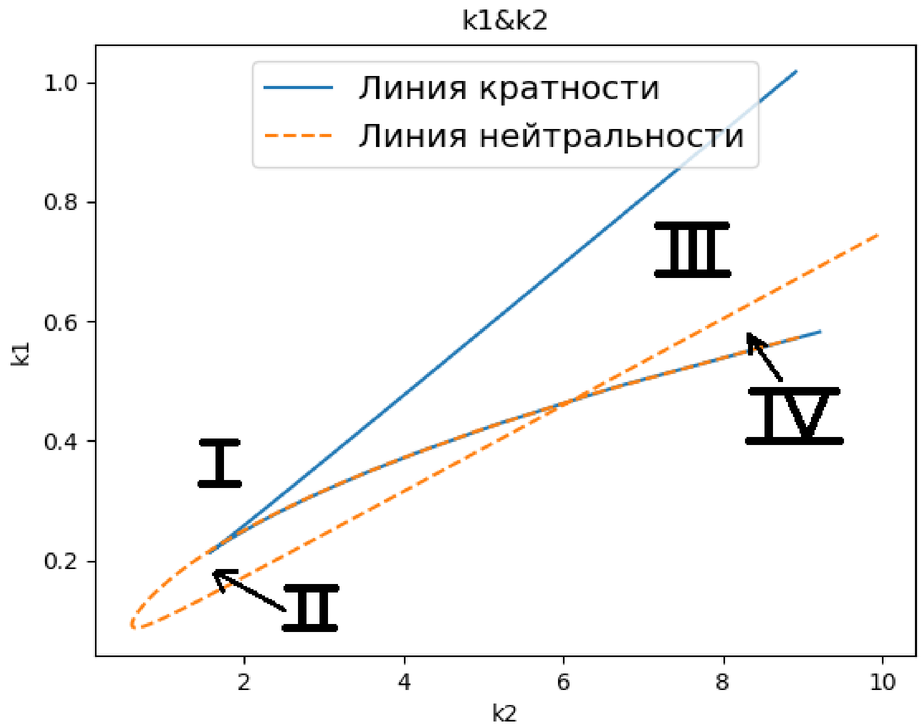

Рис. 11: Параметрический портрет системы

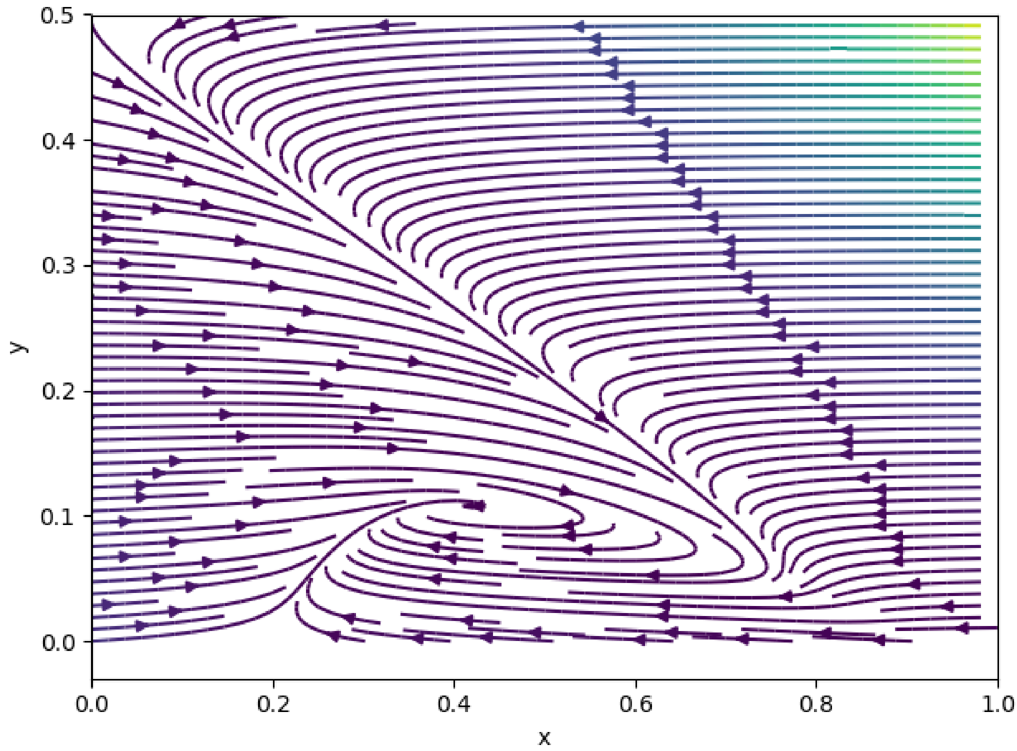

Рис. 12: Фазовый портрет, область II

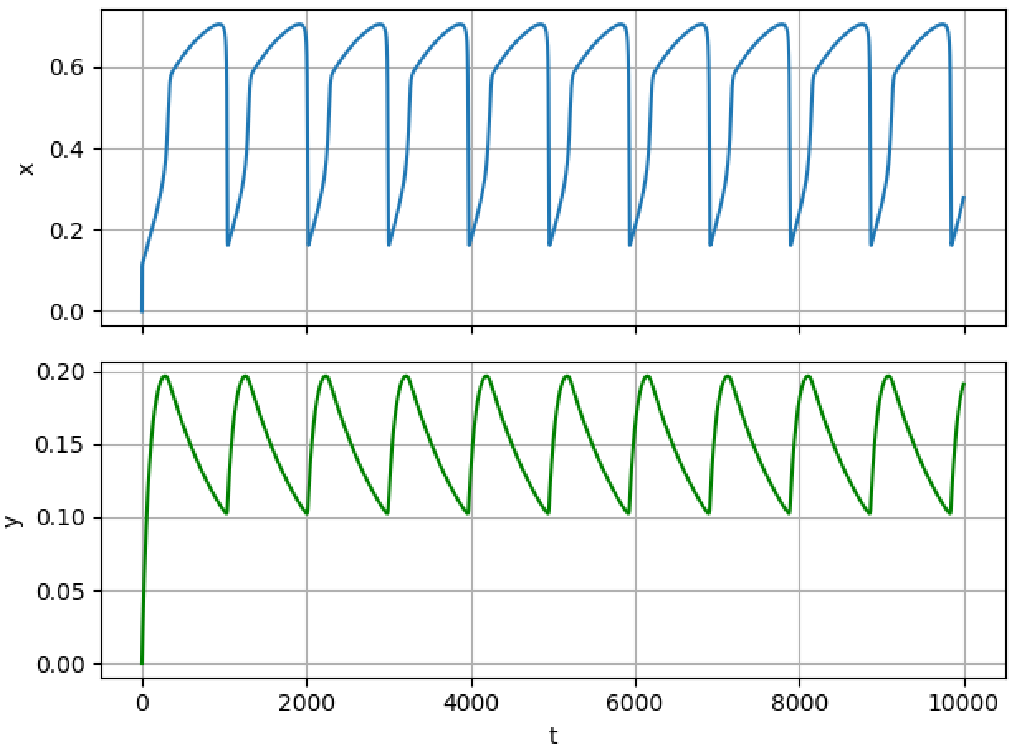

Рис. 13: Автоколебания $x(t)$ и $y(t)$