

Отчет по заданию 4

Часть 1

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f(x, y), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), & x^2 + y^2 = R^2, \ y > 0, \\ u = h(x, y), & x^2 + y^2 = R^2, \ y < 0. \end{cases}$$

Было взято 3 набора функций для $R = 1$.

Пример 1

$$\begin{cases} -\Delta u + 12u = 60 + 6e^{3x} - 360y^2, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 6xe^{3x} - 60y^2, & x^2 + y^2 = 1, \ y > 0, \\ u = 2e^{3x} - 30y^2, & x^2 + y^2 = 1, \ y < 0. \end{cases}$$

Отклонения от точного решения:

$$L_2\text{-error} = 0.00013, \quad C\text{-error} = 0.00044$$

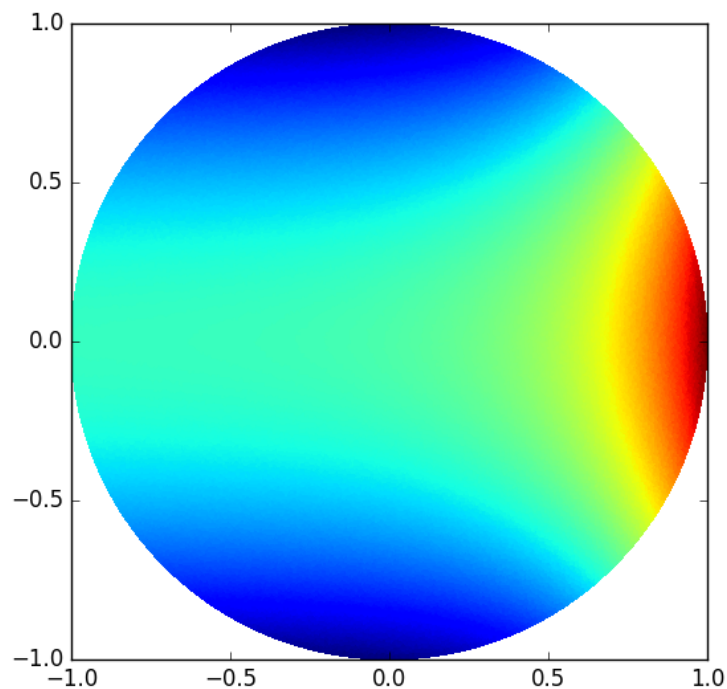


Рис. 1: Посчитанная функция $u(x, y)$

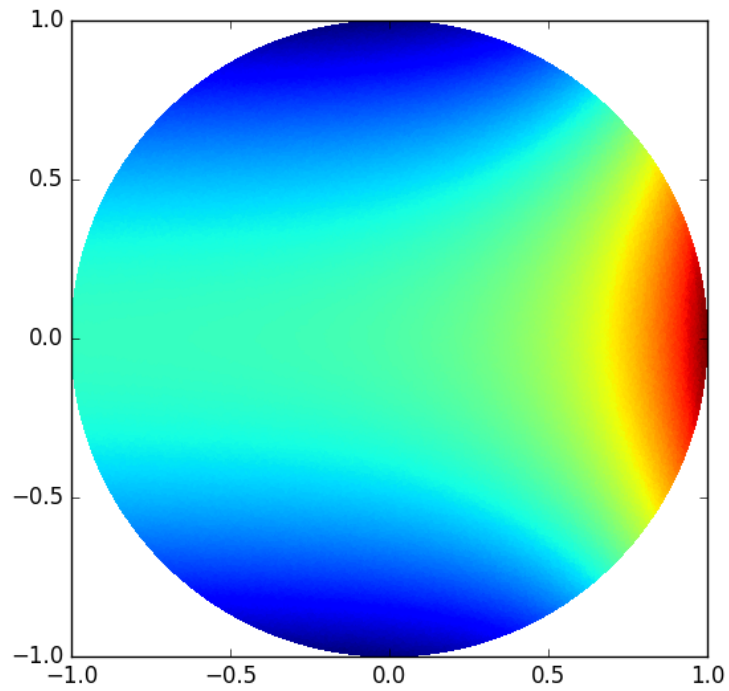


Рис. 2: Точная функция $u(x, y)$

Пример 2

$$\begin{cases} -\Delta u + u = x^2 + y^2 - 4, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 2, & x^2 + y^2 = 1, \ y > 0, \\ u = 1, & x^2 + y^2 = 1, \ y < 0. \end{cases}$$

Отклонения от точного решения:

$$L_2\text{-error} = 3.148\text{e}-05, \quad C\text{-error} = 3.888\text{e}-05$$

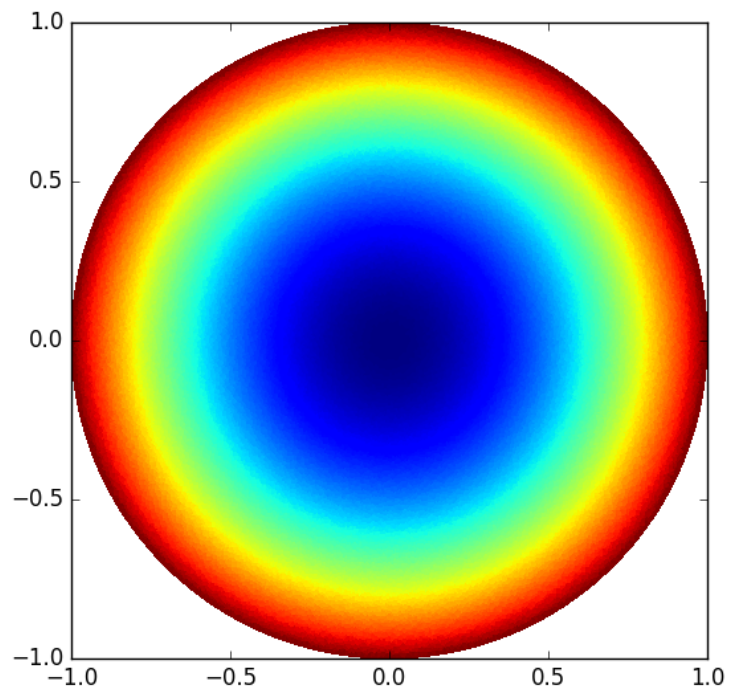


Рис. 3: Посчитанная функция $u(x, y)$

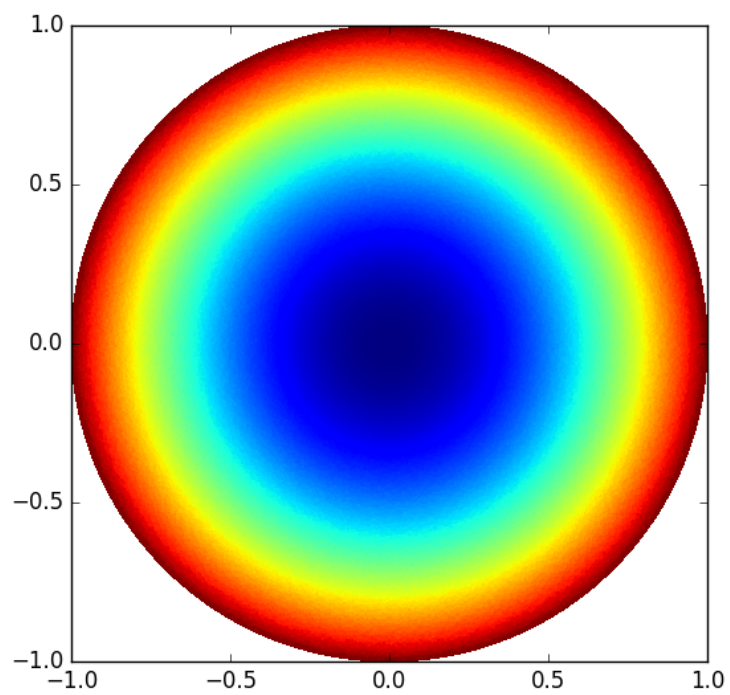


Рис. 4: Точная функция $u(x, y)$

Пример 3

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = 4 \sin(x+y) - 6 \cos(2y), & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = (x+y) \cos(x+y) + 2y \sin(2y), & x^2 + y^2 = 1, \ y > 0, \\ u = \sin(x+y) - \cos(2y), & x^2 + y^2 = 1, \ y < 0. \end{cases}$$

Отклонения от точного решения:

$$L_2\text{-error} = 1.844\text{e}-05, \quad C\text{-error} = 3.064\text{e}-05$$

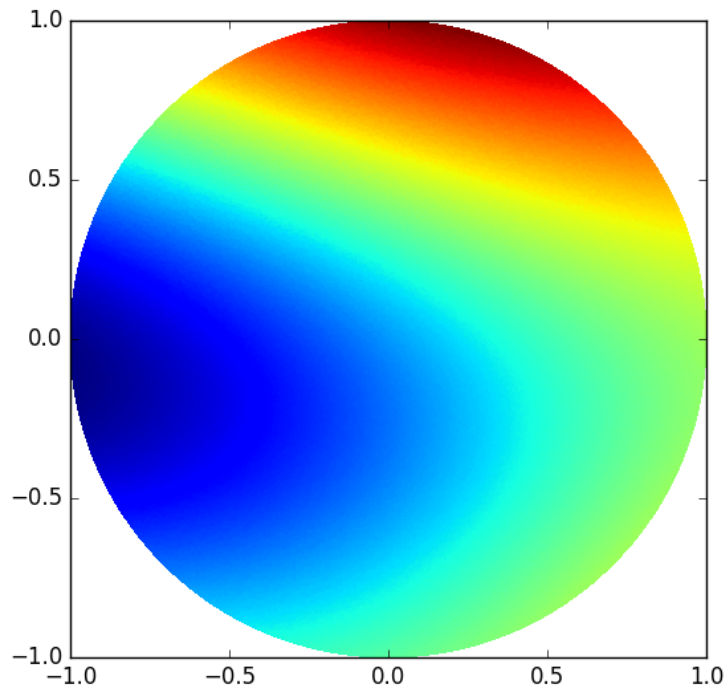


Рис. 5: Посчитанная функция $u(x, y)$

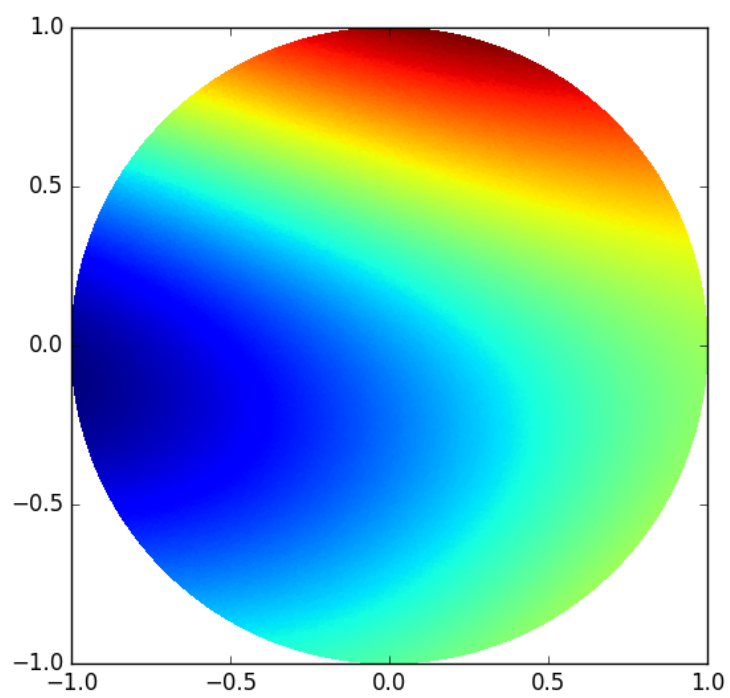


Рис. 6: Точная функция $u(x, y)$

Часть 2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + f(x, y, t), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, t), & x^2 + y^2 = R^2, \ y > 0, \\ u = h(x, y, t), & x^2 + y^2 = R^2, \ y < 0. \end{cases}$$

Было взято 3 набора функций для $R = 1$. Видео с результатами подсчетов можно найти в репозитории.

Пример 1 (video1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + 39 - 6x, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 3x^3 - 40y^2, & x^2 + y^2 = 1, \ y > 0, \\ u = x^3 - 20y^2 - t, & x^2 + y^2 = 1, \ y < 0. \end{cases}$$

Временной промежуток: $0 \leq t \leq 100$.

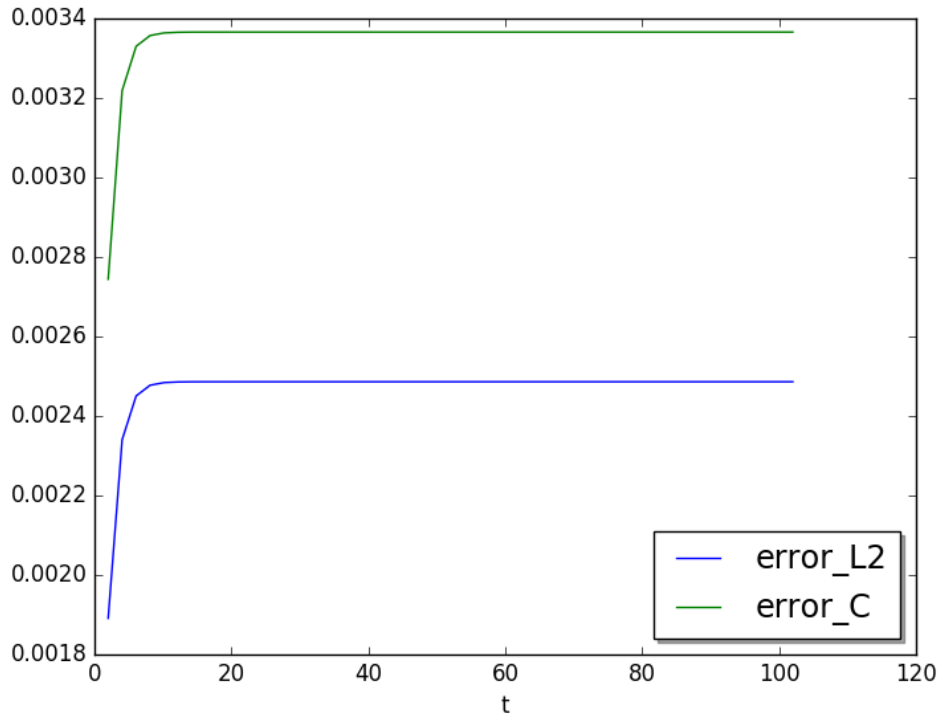


Рис. 7: Отклонения от точного решения

Пример 2 (video2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - 5 + 12e^{2x}, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -6xe^{2x} + 2y, & x^2 + y^2 = 1, y > 0, \\ u = 5 - 3e^{2x} + 2y - 5t, & x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{cases}$$

Временной промежуток: $0 \leq t \leq 30$.

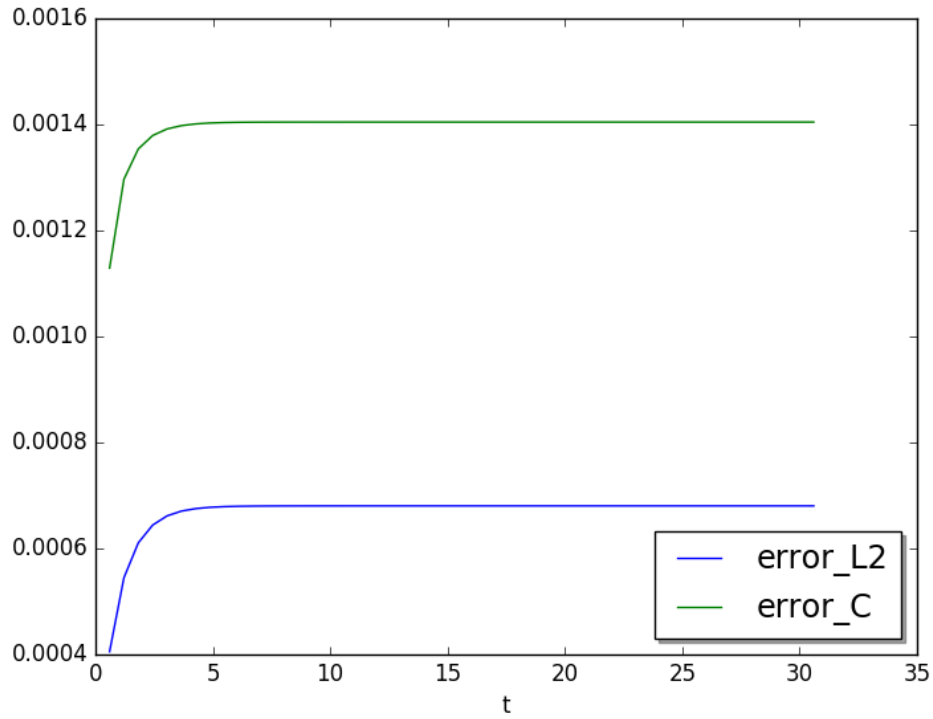


Рис. 8: Отклонения от точного решения

Пример 3 (video3)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - 3 - 17 \sin y, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 4x - 17y \cos y, & x^2 + y^2 = 1, y > 0, \\ u = 4x - 17 \sin y - 3t, & x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{cases}$$

Временной промежуток: $0 \leq t \leq 50$.

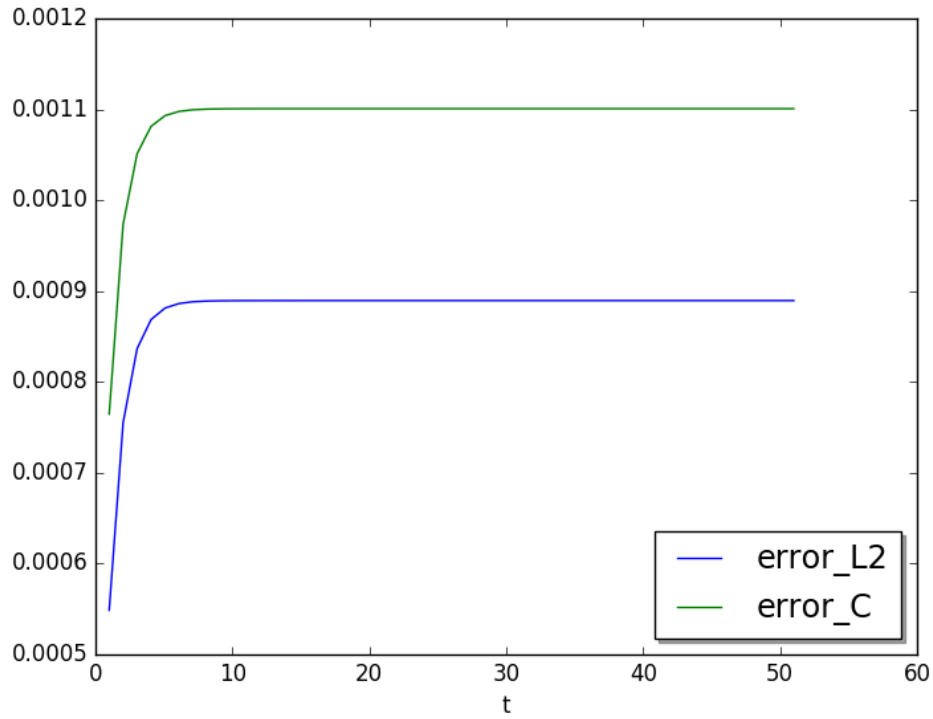


Рис. 9: Отклонения от точного решения