Modern mathematics series

Sergey Strukov

17 мая 2025 г.

Удобства.

n.1

1) Многие математические объекты есть множества с дополнительными структурами. Довольно часто в этих структурах есть один выделенный элемент базового множества. Например, если G — группа, то этот выделенный элемент — единица группы. В таком случае удобно символом G° обозначать базовое множество с выколотым выделенным элементом. Например, $\mathbb{Z}^\circ$ — множество ненулевых целых чисел.

2) Пусть дано топологическое пространство X и его точка x. Говорят, что эта точка замкнута (открыта, и.т.п.), если одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто (соответственно открыто, и.т.п.) в X.

3) Несколько полезных определений:

$$\mathbb{R}_+ := \{\ t \in \mathbb{R} \mid t > 0\ \}$$

$$\mathbb{R}_- := \{\ t \in \mathbb{R} \mid t < 0\ \}$$

$$\mathbb{Z}_+ := \{\ t \in \mathbb{Z} \mid t > 0\ \}$$

$$\mathbb{Z}_- := \{\ t \in \mathbb{Z} \mid t < 0\ \}$$

4) Если p — простое число, то $\mathbb{Z}/(p)$ — простое (конечное) поле из p элементов.

5) $\{\ \pm 1\ \}$ — группа знаков, стандартная группа второго порядка.

6) Одномерный тор:

$$\mathbb{T} := \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\ \}$$

Одна из важнейших топологических групп во всей математике.

7) Стандартная комплексная синусоида:

$$\mathbb{e}(t) = e^{2\pi i t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

8) Основные свойства $\mathbb{e}(t)$:

$$\mathbb{e}(t + t') = \mathbb{e}(t) \cdot \mathbb{e}(t')$$

$$\mathbb{e}(kt) = \mathbb{e}(t)^k$$

$$\mathbb{e}(t + 1) = \mathbb{e}(t)$$

$$|\mathbb{e}(t)| = 1$$

$$\mathbb{e}(-t) = \mathbb{e}(t)^{-1} = \overline{\mathbb{e}(t)}$$

9) В силу периодичности, $\mathbb{e}(t)$ может быть определена для аргумента t из $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Фактически, $\mathbb{e}(t) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.