Modern mathematics series

Sergey Strukov

29 мая 2025 г.

Пределы.

Исторически, теория пределов возникла как часть анализа. Однако, после появления топологии, она в обобщённой форме стала естественной частью топологии. В этой статье теория пределов излагается в законченной геометрической форме. Кратко говоря, предел — это продолжение функции по непрерывности на специальных топологических пространствах — **фильтрах**. Подобная конструкция делает большинство свойств пределов *наглядно очевидными*.

п.1

1)^{def} Пусть F — топологическое пространство. F называется фильтром, если все точки F, кроме одной, открыты. Такая точка, тавтологически, определена однозначно. Будем обозначать её ∞_F. Следуя общему правилу, положим $F^\circ := F \backslash \{\infty_F\}$.

2) Пусть F — фильтр.
Тогда справедливы следующие утверждения:

F° открыто, но не замкнуто,

F° дискретно,

$\overline{F^\circ} = F$, $F^\circ \neq \varnothing$,

∞_F замкнута,

F недискретно.

3)^{def} Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$ — любое отображение.
Тогда f непрерывно (потому что F° дискретно!).
Пусть $x \in X$, g — продолжение f на F, такое, что $g(\infty_F) = x$.
Если g непрерывно, то будем говорить, что $x = \lim\limits_F f$.

$$\begin{tikzcd} F^\circ \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dashed, "g"] & \infty_F \arrow[l] \arrow[dl, "x"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad g(\infty_F) = x$$

4) Пусть F — фильтр, $p : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, $f : F^\circ \to X$ — отображение.
Тогда $x = \lim\limits_F f \;\Rightarrow\; p(x) = \lim\limits_F p \circ f$.

5) Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $\{Y_i\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, $\{p_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ — семейство непрерывных отображений. Пусть топология X порождена семейством $\{p_i\}_{i\in I}$. Пусть $f : F^\circ \to X$, $x \in X$.
Тогда, $x = \lim\limits_F f \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in I \;\; p_i(x) = \lim\limits_F p_i \circ f$.

6) Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$ — отображение.
Пусть $A \subset X$ замкнуто.
Если $f(F^\circ) \subset A$, $x = \lim\limits_F f$, то $x \in A$.
Proof.
Пусть g — непрерывное продолжение f, такое, что $g(\infty_F) = x$.
Тогда $x \in g(F) = g(\overline{F^\circ}) \subset \overline{g(F^\circ)} = \overline{f(F^\circ)} \subset \overline{A} = A$.
Тоже самое по-другому: $F^\circ \subset g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; \overline{F^\circ} \subset g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; \infty_F \in g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; x \in A$.
——————————-

7)$^{!!!}$ Пусть F — фильтр, X — **хаусдорфово** топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$.
Тогда $\exists$ не более одного предела $x = \lim\limits_F f$.

Почему у этого пункта аж три восклицательных знака? Причина в том, что в математике очень часто пределы в хаусдорфовы пространства используются для **построения** объектов. Например: производная, интеграл, сумма ряда и.т.п. Для этого нужна единственность, обеспеченная этим свойством.
Proof.
Пусть $x, y = \lim\limits_F f$. Тогда $(x, y) = \lim\limits_F\, (f, f)$, но $(f, f) : F^\circ \to X \times X$ отображает F° в диагональ $\Delta_X \subset X \times X$, которая, в силу хаусдорфовости, замкнута в $X \times X$. Значит, $(x, y) \in \Delta_X$, т.е. $x = y$.
——————————-

<u>п.2</u>

1)^{def} Пусть F и G — два фильтра. $\tau : F \to G$ — <u>морфизм фильтров</u>, если τ — непрерывное отображение и $\tau^{-1}(\infty_G) = \{\infty_F\}$.

Фильтры и их морфизмы образуют категорию.

2) Пусть F и G — два фильтра. Если $\tau : F \to G$ (морфизм фильтров), то:

$\tau(F^\circ) \subset G^\circ$,

$\tau(\infty_F) = \infty_G$,

$\tau^\circ : F^\circ \to G^\circ$ — отображение, индуцированное τ .

3) Пусть F и G — два фильтра. Пусть $\tau^\circ : F^\circ \to G^\circ$ — отображение. Тогда τ° может быть продолжено до морфизма фильтров $\tau : F \to G$ (очевидно, единственным образом) $\Leftrightarrow$ $\infty_G = \lim\limits_{F} \tau^\circ$.

4) Пусть F и G — два фильтра, X — топологическое пространство, $\tau : F \to G$, $f : G^\circ \to X$.
Тогда если $x = \lim\limits_{G} f$, то $x = \lim\limits_{F} f \circ \tau^\circ$.

п.3

1) Пусть G — фильтр, F — топологическое пространство, $\tau : F \to G$ — непрерывное **инъективное** отображение.

Тогда F дискретно $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\infty_G)$ открыто.

Если F недискретно, то F — фильтр и τ — морфизм фильтров.

Proof.

Пусть $x \in F$. τ инъективно, значит, $\{x\} = \tau^{-1}(\{\tau(x)\})$.

Поэтому если $\tau(x) \neq \infty_G$, то x открыта. Если $\tau(x) = \infty_G$, то $\{x\} = \tau^{-1}(\infty_G)$.

Таким образом, $\tau^{-1}(\infty_G)$ открыто $\Rightarrow$ все точки F открыты $\Rightarrow$ F дискретно.

Если F дискретно, то $\tau^{-1}(\infty_G)$, тавтологически, открыто.

Если F не дискретно, то $\tau^{-1}(\infty_G)$ не открыто. В частности, это множество непусто, значит, состоит из одной точки a. Если $x \neq a$, то x открыта, a не открыта. Т.е. F — фильтр и τ — морфизм фильтров.

———————————-

2) Пусть G — фильтр, $F \subset G$ — подпространство. Тогда F дискретно $\Leftrightarrow$ $\{\infty_G\} \bigcap F$ открыто в F.

Если F недискретно, то F — фильтр и $F \subset G$ — морфизм фильтров.

Такие F называются подфильтрами.

3) Пусть $(F, \mathscr{T})$ — фильтр.

Пусть $\mathscr{S}$ — более тонкая топология на F , чем $\mathscr{T}$.

Тогда $\mathscr{S}$ дискретна $\Leftrightarrow$ $\{\infty_F\} \in \mathscr{S}$.

Если $\mathscr{S}$ недискретна, то $(F, \mathscr{S})$ — фильтр и $(F, \mathscr{S}) \to (F, \mathscr{T})$ — морфизм фильтров.

Такие $(F, \mathscr{S})$ называются более тонкими фильтрами.

4)^{def} F — <u>ультрафильтр</u>, если любой более тонкий фильтр $F' = F$.

Другими словами, любая, более тонкая топология на F или дискретна, или совпадает с исходной.

5)$^!$ Пусть F — фильтр. Тогда $\exists$ более тонкий <u>ультра</u>фильтр.

Proof.

Пусть $F = (F, \mathscr{T})$.

$\Lambda := \{\mathscr{S} | \mathscr{S}$ — топология на $F, \mathscr{S} \supset \mathscr{T}, \{\infty_F\} \notin \mathscr{S}\}$.

Если $\mathscr{S} \in \Lambda$, то $(F, \mathscr{S})$ есть более тонкий, чем F фильтр, и все такие фильтры получаются этим способом.

Λ частично упорядочено включением.

Если $\mathscr{S} \in \Lambda$ — максимальный элемент, то $(F, \mathscr{S})$ и есть требуемый более тонкий ультрафильтр.

Поэтому достаточно доказать, что Λ индуктивно и воспользоваться леммой Цорна.

Пусть $\Sigma \subset \Lambda$ — цепь. $\mathscr{B} := \bigcup \Sigma$.

Тогда, $F \in \mathscr{B}$, $\{\infty_F\} \notin \mathscr{B}$, $A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathscr{B}$.

Значит, $\mathscr{B}$ — мультипликативный базис топологии $\mathscr{S}$.

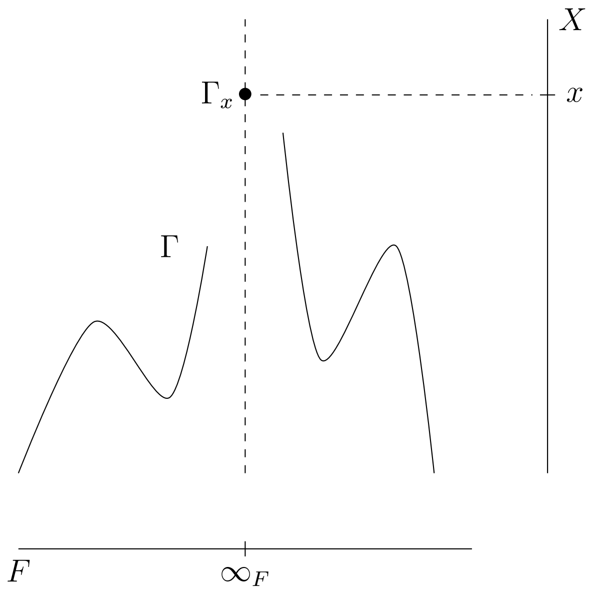
Ясно, что $\mathscr{S} \in \Lambda$ и что $\mathscr{S}$ мажорирует Σ .

———————————-

п.4

Пусть F — фильтр,
X — топологическое пространство,
$f : F^\circ \to X$.

1) Пусть $\Gamma := \{\ (t, f(t)) \mid t \in F^\circ\ \} \subset F \times X$ — график f .
Пусть $x \in X$, $\Gamma_x := \Gamma \cup \{(\infty_F, x)\} \subset F \times X$ — график продолжения f , такого, что $\infty_F \mapsto x$.



2) Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x & \xrightarrow{pr_X} & X \\ \Big\downarrow {\scriptstyle pr_F} \text{ биективно} & & \\ F & & \end{array}$$

Тогда

$$x = \lim_F f \Leftrightarrow pr_F \text{ изоморфизм} \Rightarrow \Gamma_x \text{ недискретно}$$

3)^{def} $x \in X$ называется предельной точкой f относительно F , если Γ_x недискретно. Множество предельных точек f относительно F будем обозначать $\underset{F}{Lim}(f)$.

4) $x = \lim\limits_F f \Rightarrow x \in \underset{F}{Lim}(f)$.

5) Следующие утверждения эквивалентны:

a) Γ_x дискретно

b) (∞_F, x) открыто в Γ_x

c) Γ замкнуто в Γ_x

d) $\overline{\Gamma} \bigcap \Gamma_x = \Gamma$

e) $(\infty_F, x) \notin \overline{\Gamma}$

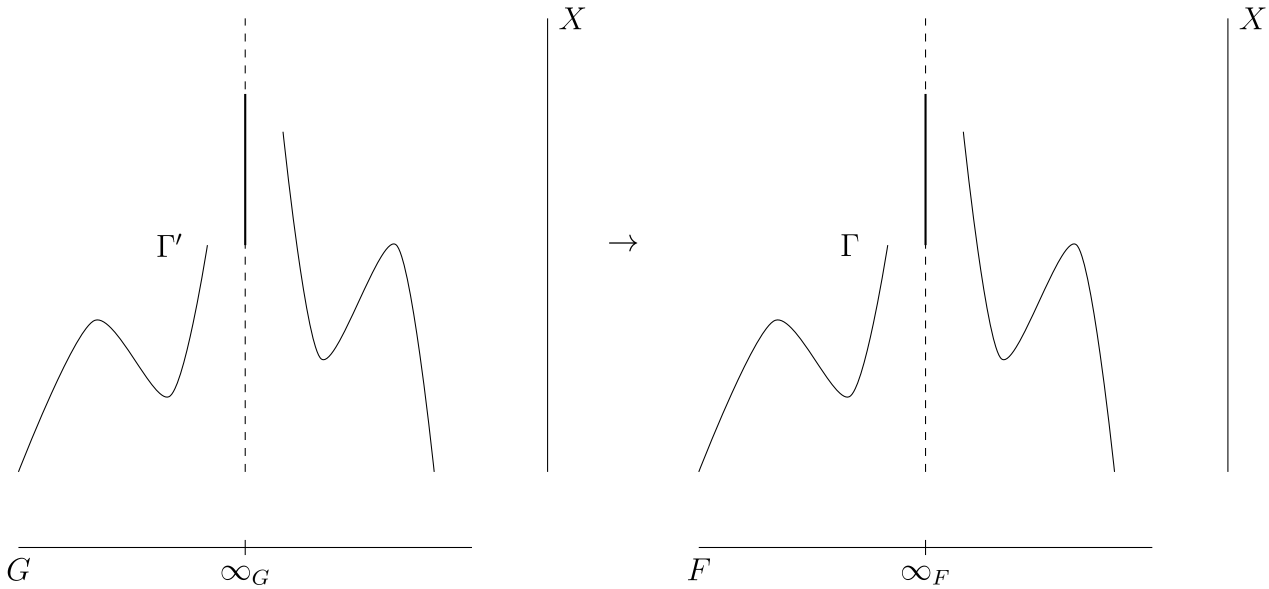
f) $\exists$ окрестности $\infty_F \in V, x \in U$, такие, что $V \times U \bigcap \Gamma = \varnothing$

g) $\exists$ окрестности $\infty_F \in V, x \in U$, такие, что $V \bigcap f^{-1}(U) = \varnothing$

6) $\overline{\Gamma} \bigcap \infty_F \times X = \infty_F \times \underset{F}{Lim}(f)$. $\underset{F}{Lim}(f)$ замкнуто в X .

7) $\underset{F}{Lim}(f) = \bigcap\limits_{\infty_F \in V} \overline{f(V^\circ)}$

8) Пусть $\tau : G \to F$ — морфизм фильтров. Тогда $\underset{G}{Lim}(f \circ \tau^\circ) \subset \underset{F}{Lim}(f)$.
Proof.



$(\tau \times id_X)(\Gamma') \subset \Gamma$

$(\tau \times id_X)(\overline{\Gamma'}) \subset \overline{\Gamma}$

———————————-

9)[!] Следующие утверждения равносильны:

a) $x \in \underset{F}{Lim}(f)$

b) Γ_x есть фильтр

c) $\exists F'$ — более тонкий фильтр, чем F , такой, что $x = \lim\limits_{F'} f$

d) $\exists F'$ — более тонкий фильтр, чем F , такой, что $x \in \underset{F'}{Lim}(f)$

10) Пусть F — **ультрафильтр**. Тогда $\underset{F}{Lim}(f) = \lim\limits_{F} f$.

11) Пусть X хаусдорфово. Тогда $x = \lim\limits_{F} f \;\Rightarrow\; \underset{F}{Lim}(f) = \{x\}$.

12) Пусть $p : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда $p(\underset{F}{Lim}(f)) \subset \underset{F}{Lim}(f \circ p)$.

n.5

1)^{def} Пусть F — фильтр. *Базой* F называется базис окрестностей в ∞_F . Т.е. это семейство $\mathscr{B}$, такое, что $\forall\ U \in \mathscr{B}$ есть окрестность ∞_F и $\forall\ V$, окрестности ∞_F, $\exists\ V \in \mathscr{B}$, такая, что $V \subset U$.

2) Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $f : F \to X$ — функция. Тогда f непрерывна $\Leftrightarrow f$ непрерывна в точке ∞_F .

3) Пусть F — фильтр, $\mathscr{B}$ — база F , X — топологическое пространство, $f : F \to X$ — функция, $f(\infty_F) = x$. Тогда f непрерывна $\Leftrightarrow \forall\ x \in U$ окрестности $\exists\ V \in \mathscr{B}$, такая, что $f(V) \subset U$.

4)$^!$ Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $x \in \overline{A}$. Тогда $\exists$ фильтр F и функция $f : F^\circ \to X$, такие, что $x = \lim\limits_F f$.

Proof.

Положим $F = A \bigsqcup \{\infty\}$. Топологию на F зададим следующим базисом:

$\{a\}$ в точке $a \in A$,

$\{\ (U \bigcap A) \cup \{\infty\} \mid x \in U$ — окрестность $\}$, в точке ∞ .

Тогда F — фильтр, $\infty_F = \infty$, $F^\circ = A$. Определим $f := id_A$, $g : F \to X$ — продолжение f , такое, что $g(\infty) = x$. Тогда для любой окрестности $x \in U$ будем иметь $g((U \bigcap A) \cup \{\infty\}) \subset U$, значит, g непрерывна, поэтому $x = \lim\limits_F f$.

——————————————-

5)^{def} $(\Lambda, \to)$ — направленное множество, если:

Λ — непустое множество,

$\to$ — отношение на Λ , удовлетворяющее следующим условиям:

a) $\lambda \to \lambda$ (рефлексивность),

b) $\lambda \to \mu\ \&\ \mu \to \nu \Rightarrow \lambda \to \nu$ (транзитивность),

c) $\forall\ \lambda, \mu\ \exists\ \nu$, такое, что $\lambda \to \nu\ \&\ \mu \to \nu$

Λ можно рассматривать как малую категорию, где Λ есть множество объектов,

$$Hom(\lambda, \mu) = \begin{cases} \{\varnothing\}, & \text{если } \lambda \to \mu \\ \varnothing, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

6)^{def} Пусть Λ — направленное множество.

$$\Lambda \to \infty \;:=\; \Lambda \sqcup \{\infty\}$$

Введём на $\Lambda \to \infty$ топологию со следующим базисом:

$\{\lambda\}$ в точке $\lambda \in \Lambda$,

$\{\ \{\ \mu \mid \lambda \to \mu\ \} \cup \{\infty\} \mid \lambda \in \Lambda\ \}$, в точке ∞ .

Тогда $\Lambda \to \infty$ есть фильтр, $(\Lambda \to \infty)^\circ = \Lambda$. Самый распространённый пример — $\mathbb{N} \to \infty$.

7) Пусть Λ и Λ' — направленные множества, $\tau : \Lambda \to \Lambda'$ — монотонное отображение. Т.е. $\lambda \to \mu \Rightarrow \tau(\lambda) \to \tau(\mu)$. τ можно рассматривать как функтор, если интерпретировать Λ и Λ' как малые категории. Тогда τ продолжается до морфизма фильтров $(\Lambda \to \infty) \to (\Lambda' \to \infty)$ (всегда однозначно) $\Leftrightarrow \forall\ \lambda' \in \Lambda'\ \exists\ \lambda \in \Lambda\ ,\ \lambda' \to \tau(\lambda)$.

<u>*Proof.*</u>

τ продолжается до морфизма фильтров $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Lambda\to\infty} \tau = \infty$. Это значит, что $\forall\ \lambda' \in \Lambda'\ \exists\ \lambda \in \Lambda\ ,\ \lambda \to \mu \Rightarrow \lambda' \to \tau(\mu)$. В частности, $\lambda' \to \tau(\lambda)$. Наоборот, пусть $\lambda' \to \tau(\lambda)$. Тогда $\lambda \to \mu \Rightarrow \tau(\lambda) \to \tau(\mu) \Rightarrow \lambda' \to \tau(\mu)$.

————————————-

8) Пусть Λ и Λ' — направленные множества. Тогда $\Sigma := \Lambda \times \Lambda'$ со следующим отношением порядка: $(\lambda, \lambda') \to (\mu, \mu') \Leftrightarrow \lambda \to \mu\ \&\ \lambda' \to \mu'$, есть направленное множество. При этом проекции $\Sigma \to \Lambda$ и $\Sigma \to \Lambda'$ монотонны и продолжаются до морфизмов фильтров $(\Sigma \to \infty) \to (\Lambda \to \infty)$ и $(\Sigma \to \infty) \to (\Lambda' \to \infty)$.

9) Пусть Λ — направленное множество, λ_{max} — наибольший элемент Λ , т.е. $\forall\ \lambda \in \Lambda\ \lambda \to \lambda_{max}$. Это равносильно тому, что λ_{max} — максимальный элемент Λ , т.е. $\forall\ \lambda \in \Lambda\ \lambda_{max} \to \lambda \Rightarrow \lambda \to \lambda_{max}$. Тогда $\forall\ f : \Lambda \to X$, где X — топологическое пространство,

$$f(\lambda_{max}) = \lim_{\Lambda\to\infty} f$$

10) Пусть Λ — направленное множество, F — фильтр, $\tau : \Lambda \to F^\circ$ — отображение. Тогда τ продолжается до морфизма фильтров $(\Lambda \to \infty) \to F$ (всегда однозначно) $\Leftrightarrow \forall\ \infty_F \in U$ окрестности $\exists\ \lambda \in \Lambda\ \forall\ \lambda \to \mu\ ,\ \tau(\mu) \in U$.

n.6

X — топологическое пространство

1) Следующие утверждения равносильны:

a) X компактно,

b) $\forall\ Y\ pr_Y : Y \times X \to Y$ замкнуто,

c) $\forall$ фильтра F и $f : F^\circ \to X$, $\underset{F}{Lim}(f) \neq \varnothing$,

d) $\forall$ фильтра F и $f : F^\circ \to X$ $\exists$ более тонкий фильтр F' , такой, что существует $\lim\limits_{F'} f$,

e) $\forall$ **ультрафильтра** F и $f : F^\circ \to X$ $\exists$ $\lim\limits_{F} f$

Proof.
a) $\Rightarrow$ b)
TODO
b) $\Rightarrow$ c)
TODO
c) $\Rightarrow$ a)
TODO
Импликации c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ c) тривиальны.
——————————-

2)!!! (Теорема Тихонова о произведениях). Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство компактных пространств, то их произведение $\prod\limits_{i\in I} X_i$ тоже компактно.

n.7