

Modern mathematics series

Sergey Strukov

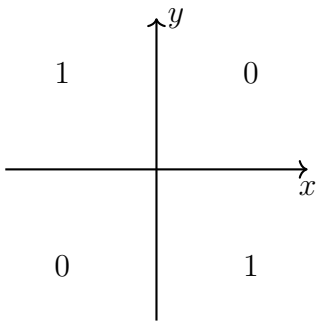
6 января 2024 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

Теорема Штурма.

Теорема Штурма — красивая элементарная теорема школьного уровня. Она позволяет найти число корней данного полинома с вещественными коэффициентами на заданном интервале. С её помощью можно локализовать корни вещественных полиномов и находить хорошие приближения к ним.

н.1



1)^{def} Функция $\sigma : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \{0, 1\}$ определена как

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{sign}(x) = \text{sign}(y) \\ 0, & \text{sign}(x) \neq \text{sign}(y) \end{cases}$$

2) $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

3) $\sigma(-x, y) = 1 - \sigma(x, y)$

4)^{def} $\sigma(x_1, \dots, x_n)$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$, $n \geq 1$

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma(x_k, x_{k+1})$$

— число перемен знака (Ч.П.З.)

5) Индуктивно,

$$\sigma(x_1) = 0 ,$$

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, \dots, x_n) , n \geqslant 2 .$$