Modern mathematics series

Sergey Strukov

18 октября 2021 г.

Пределы.

Исторически, теория пределов возникла как часть анализа. Однако, после появления топологии она в обобщённой форме стала естественной частью топологии. В этой статье теория пределов излагается в законченной геометрической форме. Кратко говоря, предел — это продолжение функции по непрерывности на специальных топологических пространствах — **фильтрах**. Подобная конструкция делает большинство свойств пределов *наглядно очевидными*.

n.1

1)^{def} Пусть F — топологическое пространство. F называется фильтром, если все точки F, кроме одной, открыты. Такая точка, тавтологически, определена однозначно. Будем обозначать её ∞_F. Следуя общему правилу, положим $F^\circ := F \backslash \{\infty_F\}$.

2) Пусть F — фильтр.
Тогда справедливы следующие утверждения:

F° открыто, но не замкнуто,

F° дискретно,

$\overline{F^\circ} = F$, $F^\circ \neq \varnothing$,

∞_F замкнута,

F недискретно.

3)^{def} Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$ — отображение.
Тогда f непрерывно.
Пусть $x \in X$, g — продолжение f на F, такое, что $g(\infty_F) = x$.
Если g непрерывно, то будем говорить, что $x = \lim\limits_F f$.

$$\begin{tikzcd} F^\circ \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dashed, "g"] & \infty_F \arrow[l] \arrow[dl, "x"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad g(\infty_F) = x$$

4) Пусть F — фильтр, $p : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, $f : F^\circ \to X$ — отображение.

Тогда $x = \lim\limits_F f \;\Rightarrow\; p(x) = \lim\limits_F p \circ f$.

5) Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $\{Y_i\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, $\{p_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ — семейство непрерывных отображений. Пусть топология X порождена семейством $\{p_i\}_{i\in I}$. Пусть $f : F^\circ \to X$, $x \in X$.

Тогда, $x = \lim\limits_F f \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in I \; p_i(x) = \lim\limits_F p_i \circ f$.

6) Пусть F — фильтр, X — топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$ — отображение.

Пусть $A \subset X$ замкнуто.

Если $f\,(F^\circ) \subset A$, $x = \lim\limits_F f$, то $x \in A$.

Proof.

Пусть g — непрерывное продолжение f, такое, что $g(\infty_F) = x$.

Тогда $x \in g(F) = g(\overline{F^\circ}) \subset \overline{g(F^\circ)} = \overline{f(F^\circ)} \subset \overline{A} = A$.

Тоже самое по-другому: $F^\circ \subset g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; \overline{F^\circ} \subset g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; \infty_F \in g^{-1}(A) \;\Rightarrow\; x \in A$.

——————————-

7)!!! Пусть F — фильтр, X — **хаусдорфово** топологическое пространство, $f : F^\circ \to X$.

Тогда $\exists$ не более одного предела $x = \lim\limits_F f$.

Почему у этого пункта аж три восклицательных знака? Причина в том, что в математике очень часто пределы в хаусдорфовы пространства используются для **построения** объектов. Например: производная, интеграл, сумма ряда и.т.п. Для этого нужна единственность, обеспеченная этим свойством.

Proof.

Пусть $x, y = \lim\limits_F f$. Тогда $(x, y) = \lim\limits_F\,(f, f)$, но $(f, f) : F^\circ \to X \times X$ отображает F° в диагональ $\Delta_X \subset X \times X$, которая, в силу хаусдорфовости, замкнута в $X \times X$. Значит, $(x, y) \in \Delta_X$, т.е. $x = y$.

——————————-

п.2

1)^{def} Пусть F и G — два фильтра. $\tau : F \to G$ — морфизм фильтров, если τ — непрерывное отображение и $\tau^{-1}(\infty_G) = \{\infty_F\}$.

Фильтры и их морфизмы образуют категорию.

2) Пусть F и G — два фильтра. Если $\tau : F \to G$ (морфизм фильтров), то:

$\tau(F^\circ) \subset G^\circ$,

$\tau(\infty_F) = \infty_G$,

$\tau^\circ : F^\circ \to G^\circ$ — отображение, индуцированное τ .

3) Пусть F и G — два фильтра. Пусть $\tau^\circ : F^\circ \to G^\circ$ — отображение. Тогда τ° может быть продолжено до морфизма фильтров $\tau : F \to G$ (очевидно, единственным образом) $\Leftrightarrow$ $\infty_G = \lim\limits_F \tau^\circ$.

4) Пусть F и G — два фильтра, X — топологическое пространство, $\tau : F \to G$, $f : G^\circ \to X$.
Тогда если $x = \lim\limits_G f$, то $x = \lim\limits_F f \circ \tau^\circ$.

<u>п.3</u>

1) Пусть G — фильтр, F — топологическое пространство, $\tau : F \to G$ — непрерывное **инъективное** отображение.

Тогда F дискретно $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\infty_G)$ открыто.

Если F недискретно, то F — фильтр и τ — морфизм фильтров.

Proof.

Пусть $x \in F$. τ инъективно, значит, $\{x\} = \tau^{-1}(\{\tau(x)\})$.

Поэтому если $\tau(x) \neq \infty_G$, то x открыта. Если $\tau(x) = \infty_G$, то $\{x\} = \tau^{-1}(\infty_G)$.

Таким образом, $\tau^{-1}(\infty_G)$ открыто $\Rightarrow$ все точки F открыты $\Rightarrow$ F дискретно.

Если F дискретно, то $\tau^{-1}(\infty_G)$, тавтологически, открыто.

Если F не дискретно, то $\tau^{-1}(\infty_G)$ не открыто. В частности, это множество непусто, значит, состоит из одной точки a. Если $x \neq a$, то x открыта, a не открыта. Т.е. F — фильтр и τ — морфизм фильтров.

——————————-

2) Пусть G — фильтр, $F \subset G$ — подпространство. Тогда F дискретно $\Leftrightarrow$ $\{\infty_G\} \bigcap F$ открыто в F.

Если F недискретно, то F — фильтр и $F \subset G$ — морфизм фильтров.

Такие F называются подфильтрами.

3) Пусть $(F, \mathscr{T})$ — фильтр.

Пусть $\mathscr{S}$ — более тонкая топология на F , чем $\mathscr{T}$.

Тогда $\mathscr{S}$ дискретна $\Leftrightarrow$ $\{\infty_F\} \in \mathscr{S}$.

Если $\mathscr{S}$ недискретна, то $(F, \mathscr{S})$ — фильтр и $(F, \mathscr{S}) \to (F, \mathscr{T})$ — морфизм фильтров.

Такие $(F, \mathscr{S})$ называются более тонкими фильтрами.

4)^{def} F — <u>ультрафильтр</u>, если любой более тонкий фильтр $F' = F$.

Другими словами, любая, более тонкая топология на F или дискретна, или совпадает с исходной.

5)$^{!}$ Пусть F — фильтр. Тогда $\exists$ более тонкий <u>ультра</u>фильтр.

Proof.

Пусть $F = (F, \mathscr{T})$.

$\Lambda := \{\mathscr{S} | \mathscr{S}$ — топология на $F, \mathscr{S} \supset \mathscr{T}, \{\infty_F\} \notin \mathscr{S}\}$.

Если $\mathscr{S} \in \Lambda$, то $(F, \mathscr{S})$ есть более тонкий, чем F фильтр, и все такие фильтры получаются этим способом.

Λ частично упорядочено включением.

Если $\mathscr{S} \in \Lambda$ — максимальный элемент, то $(F, \mathscr{S})$ и есть требуемый более тонкий ультрафильтр.

Поэтому достаточно доказать, что Λ индуктивно и воспользоваться леммой Цорна.

Пусть $\Sigma \subset \Lambda$ — цепь. $\mathscr{B} := \bigcup \Sigma$.

Тогда, $F \in \mathscr{B}$, $\{\infty_F\} \notin \mathscr{B}$, $A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathscr{B}$.

Значит, $\mathscr{B}$ — мультипликативный базис топологии $\mathscr{S}$.

Ясно, что $\mathscr{S} \in \Lambda$ и что $\mathscr{S}$ мажорирует Σ .

——————————-

<u>п.4</u>

Пусть F — фильтр,
X — топологическое пространство,
$f : F^\circ \to X$.

1) Пусть $\Gamma := \{ \ (t, f(t)) \mid t \in F^\circ \ \}$ — график f .

n.7