

# Modern mathematics series

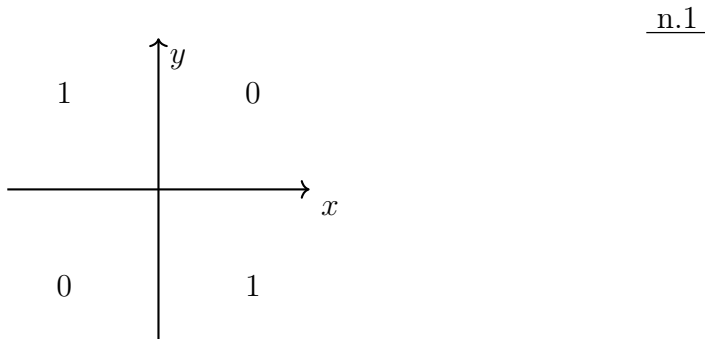
Sergey Strukov

7 января 2024 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

## Теорема Штурма.

Теорема Штурма — красивая элементарная теорема школьного уровня. Она позволяет найти число корней данного полинома с вещественными коэффициентами на заданном интервале. С её помощью можно локализовать корни вещественных полиномов и находить хорошие приближения к ним.



1)<sup>def</sup> Функция  $\sigma : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \{0, 1\}$  определена как

$$\sigma(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{sign}(x) = \text{sign}(y) \\ 0, & \text{sign}(x) \neq \text{sign}(y) \end{cases}$$

2)  $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

3)  $\sigma(-x, y) = 1 - \sigma(x, y)$

4)<sup>def</sup>  $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \geq 1$

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^{n-1} \sigma(x_k, x_{k+1})$$

— число перемен знака (Ч.П.З.)

5) Индуктивно,

$$\sigma(x_1) = 0 ,$$

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, \dots, x_n) , n \geq 2 .$$

## п.2

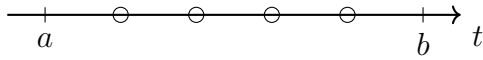
В этом пункте  $f, g \in \mathbb{R}[T]$  .

1) Пусть  $f$  и  $g$  не имеют общих вещественных корней. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a < b$  .

2) Пусть  $a, b$  — не корни  $f$  или  $g$  . Т.е.  $f(a), g(a), f(b), g(b) \in \mathbb{R}^*$  .

3)<sup>def</sup> Определим  $\varphi(t) := \sigma(f(t), g(t))$  ,  $t \in \mathbb{R}$  . Тогда  $\varphi$  определена вне (конечного) множества корней  $f$  или  $g$  , например, в  $a$  и  $b$  .

4) Функция  $\varphi(t)$  локально постоянна. Это вытекает из непрерывности  $f(t)$  ,  $g(t)$  и локального постоянства  $\sigma(x, y)$  .



5)<sup>def</sup> Определим  $\delta(t) := \varphi(t+0) - \varphi(t-0) \in \{-1, 0, 1\}$  — функция скачков  $\varphi$  .

6)  $\delta(t) = 0$  вне корней  $f$  или  $g$  .

7)<sup>!!</sup> Главная теорема:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{a < t < b \atop \delta(t) \neq 0} \delta(t)$$

8)<sup>def</sup> Определим символ

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b := \sum_{a < t < b \atop g(t) \neq 0} \delta(t)$$

9)  $\varphi$  и  $\delta$  для пар  $(f, g)$  и  $(g, f)$  одинаковы.

10)<sup>!!</sup> Закон взаимности:

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b + \left(\frac{g}{f}\right)_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

11) Если заменить  $f$  на  $-f$  , то  $\varphi$  превратиться в  $1 - \varphi$  , а  $\delta$  в  $-\delta$  .

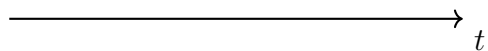
12)<sup>!</sup> Нечётность:

$$\left(\frac{-f}{g}\right)_a^b = -\left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

13)<sup>!</sup> Модулярность. Если заменить  $f$  на полином  $h \in \mathbb{R}[T]$  , такой, что  $g(t) = 0 \Rightarrow h(t) = f(t)$  , то значения  $\delta(t)$  не изменяться в точках  $\{t \in \mathbb{R} : g(t) = 0\}$  . Поэтому

$$\left(\frac{h}{g}\right)_a^b = \left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

В частности, это верно, если  $h = f - qg$  . Для доказательства см. картинку:



n.3  
n.4