Modern mathematics series

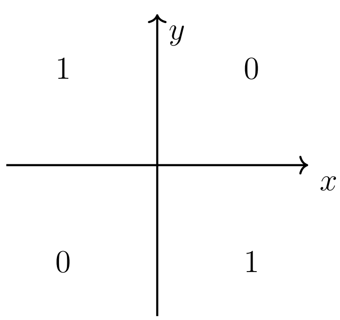
Sergey Strukov

7 января 2024 г.

Теорема Штурма.

Теорема Штурма — красивая элементарная теорема школьного уровня. Она позволяет найти число корней данного полинома с вещественными коэффициентами на заданном интервале. С её помощью можно локализовать корни вещественных полиномов и находить хорошие приближения к ним.

n.1



1)^{def} Функция $\sigma : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \{0,1\}$ определена как

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 1, & sign(x) = sign(y) \\ 0, & sign(x) \neq sign(y) \end{cases}$$

2) $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$

3) $\sigma(-x,y) = 1 - \sigma(x,y)$

4)^{def} $\sigma(x_1,\dots,x_n)$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^*$, $n \geqslant 1$

$$\sigma(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma(x_k, x_{k+1})$$

— число перемен знака (Ч.П.З.)

5) Индуктивно,

$\sigma(x_1) = 0$,

$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$.

п.2

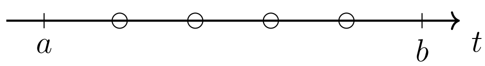
В этом пункте $f, g \in \mathbb{R}[T]$.

1) Пусть f и g не имеют общих вещественных корней. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2) Пусть a, b — не корни f или g . Т.е. $f(a), g(a), f(b), g(b) \in \mathbb{R}^*$.

3)^{def} Определим $\varphi(t) = \sigma(f(t), g(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда φ определена вне (конечного) множества корней f или g , например, в a и b .

4) Функция $\varphi(t)$ локально постоянна. Это вытекает из непрерывности $f(t)$, $g(t)$ и локального постоянства $\sigma(x, y)$.



5)^{def} Определим $\delta(t) = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) \in \{-1, 0, 1\}$ — функция скачков φ .

6) $\delta(t) = 0$ вне корней f или g .

7)!! Главная теорема:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{a<t<b \quad \delta(t)\neq 0} \delta(t)$$

.

8)

9)

10)

11)

12)

13)

14)

п.3

п.4