

# Modern mathematics series

Sergey Strukov

29 мая 2025 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

## Удобства.

### n.1

Серия текстов "**Modern mathematics series**" призвана рассказать о современной математике. Это не учебники, тексты предназначены для людей, уже имеющих математическую базу и математическую культуру. По характеру они являются workbook-ами, т.е. книгами, позволяющими быстро овладеть представленной в них математической техникой или извлечь математический факт. Каждая книга содержит законченную теорию или законченный логический фрагмент теории. Изложение ведётся в формате *истории*, т.е. серии крошечных рассказов, при этом в большинстве пунктов нет доказательств. Считается, что доказательства приведённых там фактов несложно и может быть проведено читателем в уме. Однако, в тех случаях, когда доказательство большое или нетривиальное, он приводится в секции Proof. Важные теоремы отмечены восклицательными знаками.

### n.2

1) Многие математические объекты есть множества с дополнительными структурами. Довольно часто в этих структурах есть один выделенный элемент базового множества. Например, если  $G$  — группа, то этот выделенный элемент — единица группы. В таком случае удобно символом  $G^\circ$  обозначать базовое множество с выколотым выделенным элементом. Например,  $\mathbb{Z}^\circ$  — множество ненулевых целых чисел.

2) Пусть дано топологическое пространство  $X$  и его точка  $x$ . Говорят, что эта точка замкнута (открыта, и.т.п.), если одноточечное множество  $\{x\}$  замкнуто (соответственно открыто, и.т.п.) в  $X$ .

3) Несколько полезных определений:

$$\mathbb{R}_+ := \{ t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \}$$

$$\mathbb{R}_- := \{ t \in \mathbb{R} \mid t < 0 \}$$

$$\mathbb{Z}_+ := \{ t \in \mathbb{Z} \mid t > 0 \}$$

$$\mathbb{Z}_- := \{ t \in \mathbb{Z} \mid t < 0 \}$$

4) Если  $p$  — простое число, то  $\mathbb{Z}/(p)$  — простое (конечное) поле из  $p$  элементов.

5)  $\{ \pm 1 \}$  — группа знаков, стандартная группа второго порядка.

6) Одномерный тор:

$$\mathbb{T} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

Одна из важнейших топологических групп во всей математике.

7) Стандартная комплексная синусоида:

$$\mathfrak{e}(t) = e^{2\pi it}, \quad t \in \mathbb{R}$$

8) Основные свойства  $\mathfrak{e}(t)$  :

$$\mathfrak{e}(t + t') = \mathfrak{e}(t) \cdot \mathfrak{e}(t')$$

$$\mathfrak{e}(kt) = \mathfrak{e}(t)^k$$

$$\mathfrak{e}(t + 1) = \mathfrak{e}(t)$$

$$|\mathfrak{e}(t)| = 1$$

$$\mathfrak{e}(-t) = \mathfrak{e}(t)^{-1} = \overline{\mathfrak{e}(t)}$$

9) В силу периодичности,  $\mathfrak{e}(t)$  может быть определена для аргумента  $t$  из  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Фактически,  $\mathfrak{e}(t) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$ .