

# Modern mathematics series

Sergey Strukov

1 июня 2025 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

## Пределы.

Исторически, теория пределов возникла как часть анализа. Однако, после появления топологии, она в обобщённой форме стала естественной частью топологии. В этой статье теория пределов излагается в законченной геометрической форме. Кратко говоря, предел — это продолжение функции по непрерывности на специальных топологических пространствах — **фильтрах**. Подобная конструкция делает большинство свойств пределов *наглядно очевидными*.

### n.1

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — топологическое пространство.  $F$  называется фильтром, если все точки  $F$ , кроме одной, открыты. Такая точка, тавтологически, определена однозначно. Будем обозначать её  $\infty_F$ . Следуя общему правилу, положим  $F^\circ := F \setminus \{\infty_F\}$ .

2) Пусть  $F$  — фильтр.

Тогда справедливы следующие утверждения:

$F^\circ$  открыто, но не замкнуто,

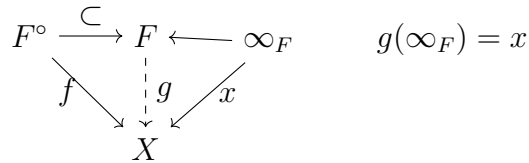
$F^\circ$  дискретно,

$\overline{F^\circ} = F$ ,  $F^\circ \neq \emptyset$ ,

$\infty_F$  замкнута,

$F$  не дискретно.

3)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — любое отображение. Тогда  $f$  непрерывно (потому что  $F^\circ$  дискретно!). Пусть  $x \in X$ ,  $g$  — продолжение  $f$  на  $F$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ . Если  $g$  непрерывно, то будем говорить, что  $x = \lim_F f$ .



4) Пусть  $F$  — фильтр,  $p : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Тогда  $x = \lim_F f \Rightarrow p(x) = \lim_F p \circ f$ .

5) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $\{Y_i\}_{i \in I}$  — семейство топологических пространств,  $\{p_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  — семейство непрерывных отображений. Пусть топология  $X$  порождена семейством  $\{p_i\}_{i \in I}$ . Пусть  $f : F^\circ \rightarrow X$ ,  $x \in X$ .

Тогда,  $x = \lim_F f \Leftrightarrow \forall i \in I \ p_i(x) = \lim_F p_i \circ f$ .

6) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Пусть  $A \subset X$  замкнуто.

Если  $f(F^\circ) \subset A$ ,  $x = \lim_F f$ , то  $x \in A$ .

Proof.

Пусть  $g$  — непрерывное продолжение  $f$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ .

Тогда  $x \in g(F) = g(\overline{F^\circ}) \subset \overline{g(F^\circ)} = \overline{f(F^\circ)} \subset \overline{A} = A$ .

То же самое по-другому:  $F^\circ \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \overline{F^\circ} \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \infty_F \in g^{-1}(A) \Rightarrow x \in A$ .

---

7)<sup>!!!</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — **хаусдорфово** топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$ .

Тогда  $\exists$  не более одного предела  $x = \lim_F f$ .

Почему у этого пункта аж три восклицательных знака? Причина в том, что в математике очень часто пределы в хаусдорфовы пространства используются для **построения** объектов. Например: производная, интеграл, сумма ряда и.т.п. Для этого нужна единственность, обеспеченная этим свойством.

Proof.

Пусть  $x, y = \lim_F f$ . Тогда  $(x, y) = \lim_F (f, f)$ , но  $(f, f) : F^\circ \rightarrow X \times X$  отображает  $F^\circ$  в диагональ  $\Delta_X \subset X \times X$ , которая, в силу хаусдорфовости, замкнута в  $X \times X$ . Значит,  $(x, y) \in \Delta_X$ , т.е.  $x = y$ .

---

## n.2

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра.  $\tau : F \rightarrow G$  — морфизм фильтров, если  $\tau$  — непрерывное отображение и  $\tau^{-1}(\infty_G) = \{\infty_F\}$ .

Фильтры и их морфизмы образуют категорию.

2) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Если  $\tau : F \rightarrow G$  (морфизм фильтров), то:

$$\tau(F^\circ) \subset G^\circ ,$$

$$\tau(\infty_F) = \infty_G ,$$

$$\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ \text{ — отображение, индуцированное } \tau .$$

3) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Пусть  $\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ$  — отображение. Тогда  $\tau^\circ$  может быть продолжено до морфизма фильтров  $\tau : F \rightarrow G$  (очевидно, единственным образом)  $\Leftrightarrow \infty_G = \lim_F \tau^\circ$ .

4) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра,  $X$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$ ,  $f : G^\circ \rightarrow X$ . Тогда если  $x = \lim_G f$ , то  $x = \lim_F f \circ \tau^\circ$ .

1) Пусть  $G$  — фильтр,  $F$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$  — непрерывное **инъективное** отображение.

Тогда  $F$  дискретно  $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\infty_G)$  открыто.

Если  $F$  не дискретно, то  $F$  — фильтр и  $\tau$  — морфизм фильтров.

Proof.

Пусть  $x \in F$ .  $\tau$  инъективно, значит,  $\{x\} = \tau^{-1}(\{\tau(x)\})$ .

Поэтому если  $\tau(x) \neq \infty_G$ , то  $x$  открыта. Если  $\tau(x) = \infty_G$ , то  $\{x\} = \tau^{-1}(\infty_G)$ .

Таким образом,  $\tau^{-1}(\infty_G)$  открыто  $\Rightarrow$  все точки  $F$  открыты  $\Rightarrow F$  дискретно.

Если  $F$  дискретно, то  $\tau^{-1}(\infty_G)$ , тавтологически, открыто.

Если  $F$  не дискретно, то  $\tau^{-1}(\infty_G)$  не открыто. В частности, это множество непусто, значит, состоит из одной точки  $a$ . Если  $x \neq a$ , то  $x$  открыта,  $a$  не открыта. Т.е.  $F$  — фильтр и  $\tau$  — морфизм фильтров.

---

2) Пусть  $G$  — фильтр,  $F \subset G$  — подпространство. Тогда  $F$  дискретно  $\Leftrightarrow \{\infty_G\} \cap F$  открыто в  $F$ .

Если  $F$  не дискретно, то  $F$  — фильтр и  $F \subset G$  — морфизм фильтров.

Такие  $F$  называются подфильтрами.

3) Пусть  $(F, \mathcal{T})$  — фильтр.

Пусть  $\mathcal{S}$  — более тонкая топология на  $F$ , чем  $\mathcal{T}$ .

Тогда  $\mathcal{S}$  дискретна  $\Leftrightarrow \{\infty_F\} \in \mathcal{S}$ .

Если  $\mathcal{S}$  не дискретна, то  $(F, \mathcal{S})$  — фильтр и  $(F, \mathcal{S}) \rightarrow (F, \mathcal{T})$  — морфизм фильтров.

Такие  $(F, \mathcal{S})$  называются более тонкими фильтрами.

4)<sup>def</sup>  $F$  — ультрафильтр, если любой более тонкий фильтр  $F' = F$ .

Другими словами, любая, более тонкая топология на  $F$  или дискретна, или совпадает с исходной.

5) Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $\mathcal{B}$  — база топологии  $X$ ,  $x \in X$ . Тогда  $\{x\}$  открыто  $\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{B}$ .

6)<sup>!</sup> Пусть  $F$  — фильтр. Тогда  $\exists$  более тонкий ультрафильтр.

Proof.

Пусть  $F = (F, \mathcal{T})$ .

$\Lambda := \{\mathcal{S} | \mathcal{S} \text{ — топология на } F, \mathcal{S} \supset \mathcal{T}, \{\infty_F\} \notin \mathcal{S}\}$ .

Если  $\mathcal{S} \in \Lambda$ , то  $(F, \mathcal{S})$  есть более тонкий, чем  $F$  фильтр, и все такие фильтры получаются этим способом.

$\Lambda$  частично упорядочено включением.

Если  $\mathcal{S} \in \Lambda$  — максимальный элемент, то  $(F, \mathcal{S})$  и есть требуемый более тонкий ультрафильтр.

Поэтому достаточно доказать, что  $\Lambda$  индуктивно и воспользоваться леммой Цорна.

Пусть  $\Sigma \subset \Lambda$  — цепь.  $\mathcal{B} := \bigcup \Sigma$ .

Тогда,  $F \in \mathcal{B}$ ,  $\{\infty_F\} \notin \mathcal{B}$ ,  $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$ .

Значит,  $\mathcal{B}$  — мультипликативный базис топологии  $\mathcal{S}$ .

Ясно, что  $\mathcal{S} \in \Lambda$  и что  $\mathcal{S}$  мажорирует  $\Sigma$ .

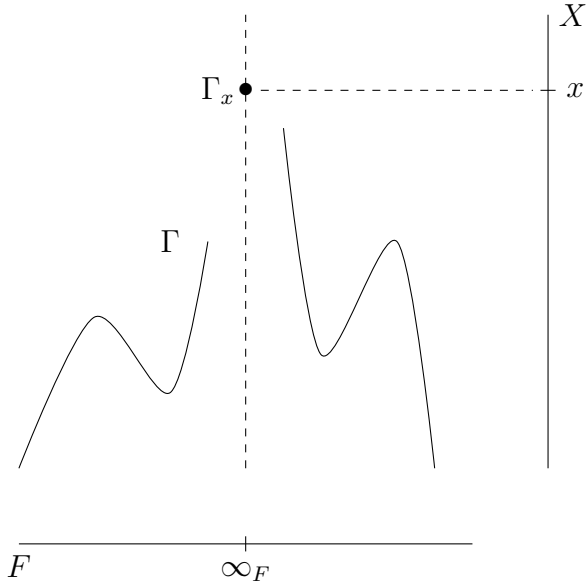
---

п.4

Пусть  $F$  — фильтр,  
 $X$  — топологическое пространство,  
 $f : F^\circ \rightarrow X$  .

1) Пусть  $\Gamma := \{ (t, f(t)) \mid t \in F^\circ \} \subset F \times X$  — график  $f$  .

Пусть  $x \in X$  ,  $\Gamma_x := \Gamma \cup \{(\infty_F, x)\} \subset F \times X$  — график продолжения  $f$  , такого, что  $\infty_F \mapsto x$  .



2) Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x & \xrightarrow{pr_X} & X \\ \downarrow pr_F \text{ биективно} & & \\ F & & \end{array}$$

Тогда

$$x = \lim_F f \Leftrightarrow pr_F \text{ изоморфизм} \Rightarrow \Gamma_x \text{ недискретно}$$

3)<sup>def</sup>  $x \in X$  называется предельной точкой  $f$  относительно  $F$  , если  $\Gamma_x$  недискретно. Множество предельных точек  $f$  относительно  $F$  будем обозначать  $Lim_F(f)$  .

$$4) x = \lim_F f \Rightarrow x \in Lim_F(f) .$$

5) Следующие утверждения эквивалентны:

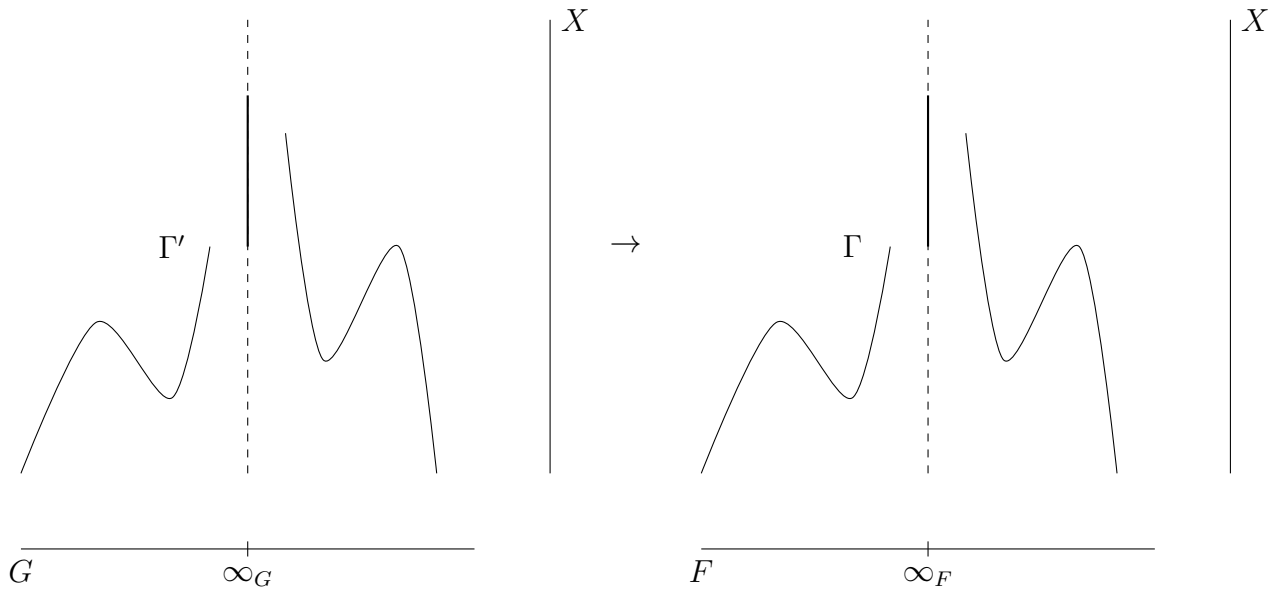
- a)  $\Gamma_x$  дискретно,
- b)  $(\infty_F, x)$  открыто в  $\Gamma_x$ ,
- c)  $\Gamma$  замкнуто в  $\Gamma_x$ ,
- d)  $\bar{\Gamma} \cap \Gamma_x = \Gamma$ ,
- e)  $(\infty_F, x) \notin \bar{\Gamma}$ ,
- f)  $\exists$  окрестности  $\infty_F \in V, x \in U$ , такие, что  $V \times U \cap \Gamma = \emptyset$ ,
- g)  $\exists$  окрестности  $\infty_F \in V, x \in U$ , такие, что  $V \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ ,
- h)  $\exists$  окрестности  $\infty_F \in V, x \in U$ , такие, что  $f(V^\circ) \cap U = \emptyset$ .

6)  $\bar{\Gamma} \cap \infty_F \times X = \infty_F \times \lim_F(f)$ .  $\lim_F(f)$  замкнуто в  $X$ .

$$7) \lim_F(f) = \bigcap_{\infty_F \in V} \overline{f(V^\circ)}$$

8) Пусть  $\tau : G \rightarrow F$  — морфизм фильтров. Тогда  $\lim_G(f \circ \tau^\circ) \subset \lim_F(f)$ .

Proof.



$$(\tau \times id_X)(\Gamma') \subset \Gamma$$

$$(\tau \times id_X)(\bar{\Gamma}') \subset \bar{\Gamma}$$

9)! Следующие утверждения равносильны:

a)  $x \in \lim_F(f)$  ,

b)  $\Gamma_x$  есть фильтр,

c)  $\exists F'$  — более тонкий фильтр, чем  $F$  , такой, что  $x = \lim_{F'} f$  ,

d)  $\exists F'$  — более тонкий фильтр, чем  $F$  , такой, что  $x \in \lim_{F'}(f)$  .

10) Пусть  $F$  — **ультрафильтр**. Тогда  $\lim_F(f) = \lim_F f$  .

11) Пусть  $X$  хаусдорфово. Тогда  $x = \lim_F f \Rightarrow \lim_F(f) = \{x\}$  .

12) Пусть  $p : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Тогда  $p(\lim_F(f)) \subset \lim_F(f \circ p)$  .

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — фильтр. *Базой*  $F$  называется базис окрестностей в  $\infty_F$ . Т.е. это семейство  $\mathcal{B}$ , такое, что  $\forall V \in \mathcal{B}$  есть окрестность  $\infty_F$  и  $\forall U$ , окрестности  $\infty_F$ ,  $\exists V \in \mathcal{B}$ , такая, что  $V \subset U$ .

2) Пусть  $F$  — фильтр,  $A \subset F$ . Тогда:

$A$  открыто  $\Leftrightarrow$  либо  $A \subset F^\circ$ , либо  $A$  — окрестность  $\infty_F$ ,

если  $A$  — окрестность  $\infty_F$ , а  $A \subset B \subset F$ , то  $B$  — тоже окрестность  $\infty_F$ ,

$A$  замкнуто  $\Leftrightarrow$  либо  $\infty_F \in A$ , либо  $\infty_F \notin \bar{A}$ ,

$A$  не замкнуто  $\Leftrightarrow \infty_F \notin A$  &  $\infty_F \in \bar{A}$  (в этом случае  $\bar{A} = A \cup \{\infty_F\}$ ).

3) База и бесконечная точка фильтра однозначно определяют топологию фильтра.

4) Пусть  $F$  — множество,  $\infty \in F$  — точка,  $\mathcal{B}$  — семейство подмножеств  $F$ . Тогда  $\mathcal{B}$  есть база некоторого фильтра с множеством точек  $F$  и  $\infty_F = \infty$  тогда и только тогда, когда

a)  $\forall U \in \mathcal{B}$ ,  $\infty \in U$  и  $U \neq \{\infty\}$ ,

b)  $\forall U, V \in \mathcal{B}$ ,  $\exists W \in \mathcal{B}$ , такой, что  $W \subset U \cap V$ .

5) Пусть  $F$  — множество,  $\mathcal{B}$  есть база некоторого фильтра с множеством точек  $F$ . Пусть  $\infty \in \bigcap \mathcal{B}$ . Тогда  $\mathcal{B}$  есть база некоторого фильтра с множеством точек  $F$  и  $\infty_F = \infty$ .

6) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F \rightarrow X$  — функция. Тогда  $f$  непрерывна  $\Leftrightarrow f$  непрерывна в точке  $\infty_F$ .

7) Пусть  $F$  — фильтр,  $\mathcal{B}$  — база  $F$ ,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F \rightarrow X$  — функция,  $f(\infty_F) = x$ . Тогда  $f$  непрерывна  $\Leftrightarrow \forall x \in U$  окрестности  $\exists V \in \mathcal{B}$ , такая, что  $f(V) \subset U$ .

8)<sup>!</sup> Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subset X$ ,  $x \in \bar{A}$ . Тогда  $\exists$  фильтр  $F$  и функция  $f : F^\circ \rightarrow X$ , такие, что  $x = \lim_F f$ .

*Proof.*

Положим  $F = A \sqcup \{\infty\}$ . Топологию на  $F$  зададим следующим базисом:

$\{a\}$  в точке  $a \in A$ ,

$\{(U \cap A) \cup \{\infty\} \mid x \in U \text{ — окрестность } x\}$ , в точке  $\infty$ .

Тогда  $F$  — фильтр,  $\infty_F = \infty$ ,  $F^\circ = A$ . Определим  $f := id_A$ ,  $g : F \rightarrow X$  — продолжение  $f$ , такое, что  $g(\infty) = x$ . Тогда для любой окрестности  $x \in U$  будем иметь  $g((U \cap A) \cup \{\infty\}) \subset U$ , значит,  $g$  непрерывна, поэтому  $x = \lim_F f$ .



9)<sup>def</sup>  $(\Lambda, \rightarrow)$  — направленное множество, если:

$\Lambda$  — непустое множество,

$\rightarrow$  — отношение на  $\Lambda$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- a)  $\lambda \rightarrow \lambda$  (рефлексивность),
- b)  $\lambda \rightarrow \mu \ \& \ \mu \rightarrow \nu \Rightarrow \lambda \rightarrow \nu$  (транзитивность),
- c)  $\forall \lambda, \mu \ \exists \nu$ , такое, что  $\lambda \rightarrow \nu \ \& \ \mu \rightarrow \nu$ .

$\Lambda$  можно рассматривать как малую категорию, где  $\Lambda$  есть множество объектов,

$$Hom(\lambda, \mu) = \begin{cases} \{\emptyset\}, & \text{если } \lambda \rightarrow \mu \\ \emptyset, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

10)<sup>def</sup> Пусть  $\Lambda$  — направленное множество.

$$\Lambda \rightarrow \infty := \Lambda \sqcup \{\infty\}$$

Введём на  $\Lambda \rightarrow \infty$  топологию со следующим базисом:

$\{\lambda\}$  в точке  $\lambda \in \Lambda$ ,

$\{\{\mu \mid \lambda \rightarrow \mu\} \cup \{\infty\} \mid \lambda \in \Lambda\}$ , в точке  $\infty$ .

Тогда  $\Lambda \rightarrow \infty$  есть фильтр,  $(\Lambda \rightarrow \infty)^\circ = \Lambda$ . Самый распространённый пример —  $\mathbb{N} \rightarrow \infty$ .

11) Пусть  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  — направленные множества,  $\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda'$  — монотонное отображение. Т.е.  $\lambda \rightarrow \mu \Rightarrow \tau(\lambda) \rightarrow \tau(\mu)$ .  $\tau$  можно рассматривать как функтор, если интерпретировать  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  как малые категории. Тогда  $\tau$  продолжается до морфизма фильтров  $(\Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow (\Lambda' \rightarrow \infty)$  (всегда однозначно)  $\Leftrightarrow \forall \lambda' \in \Lambda' \ \exists \lambda \in \Lambda, \lambda' \rightarrow \tau(\lambda)$ .

Proof.

$\tau$  продолжается до морфизма фильтров  $\Leftrightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tau = \infty$ . Это значит, что  $\forall \lambda' \in \Lambda' \ \exists \lambda \in \Lambda, \lambda \rightarrow \mu \Rightarrow \lambda' \rightarrow \tau(\mu)$ . В частности,  $\lambda' \rightarrow \tau(\lambda)$ . Наоборот, пусть  $\lambda' \rightarrow \tau(\lambda)$ . Тогда  $\lambda \rightarrow \mu \Rightarrow \tau(\lambda) \rightarrow \tau(\mu) \Rightarrow \lambda' \rightarrow \tau(\mu)$ .

12) Пусть  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  — направленные множества. Тогда  $\Sigma := \Lambda \times \Lambda'$  со следующим отношением порядка:  $(\lambda, \lambda') \rightarrow (\mu, \mu') \Leftrightarrow \lambda \rightarrow \mu \ \& \ \lambda' \rightarrow \mu'$ , есть направленное множество. При этом проекции  $\Sigma \rightarrow \Lambda$  и  $\Sigma \rightarrow \Lambda'$  монотонны и продолжаются до морфизмов фильтров  $(\Sigma \rightarrow \infty) \rightarrow (\Lambda \rightarrow \infty)$  и  $(\Sigma \rightarrow \infty) \rightarrow (\Lambda' \rightarrow \infty)$ .

13) Пусть  $\Lambda$  — направленное множество,  $\lambda_{max}$  — наибольший элемент  $\Lambda$ , т.е.  $\forall \lambda \in \Lambda \ \lambda \rightarrow \lambda_{max}$ . Это равносильно тому, что  $\lambda_{max}$  — максимальный элемент  $\Lambda$ , т.е.  $\forall \lambda \in \Lambda \ \lambda_{max} \rightarrow \lambda \Rightarrow \lambda \rightarrow \lambda_{max}$ . Тогда  $\forall f : \Lambda \rightarrow X$ , где  $X$  — топологическое пространство,

$$f(\lambda_{max}) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f$$

14) Пусть  $\Lambda$  — направленное множество,  $F$  — фильтр,  $\tau : \Lambda \rightarrow F^\circ$  — отображение. Тогда  $\tau$  продолжается до морфизма фильтров  $(\Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow F$  (всегда однозначно)  $\Leftrightarrow \forall \infty_F \in U$  окрестности  $\exists \lambda \in \Lambda \forall \lambda \rightarrow \mu, \tau(\mu) \in U$ .

$X$  — топологическое пространство

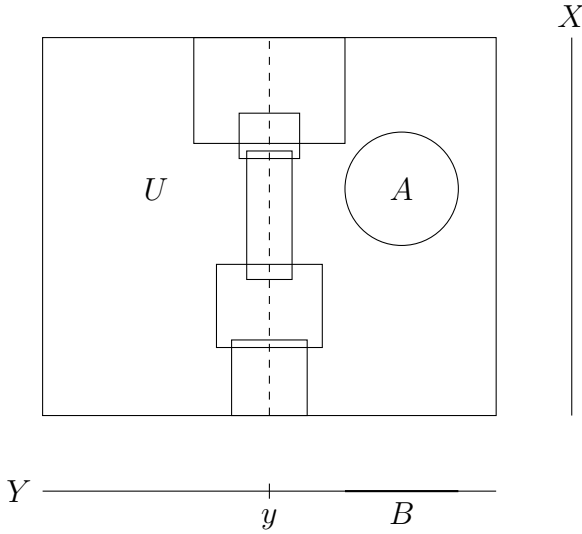
1)! Следующие утверждения равносильны:

- a)  $X$  компактно,
- b)  $\forall Y \text{ } pr_Y : Y \times X \rightarrow Y$  замкнуто,
- c)  $\forall$  фильтра  $F$  и  $f : F^\circ \rightarrow X$ ,  $Lim_F(f) \neq \emptyset$ ,
- d)  $\forall$  фильтра  $F$  и  $f : F^\circ \rightarrow X \exists$  более тонкий фильтр  $F'$ , такой, что существует  $\lim_{F'} f$ ,
- e)  $\forall$  ультрафильтра  $F$  и  $f : F^\circ \rightarrow X \exists \lim_F f$

Proof.

a)  $\Rightarrow$  b)

Пусть  $A \subset Y \times X$  — замкнуто, тогда  $U = Y \times X \setminus A$  открыто.



Положим  $B = pr_Y(A)$ ,  $C = Y \setminus B$ . Нам надо доказать, что  $B$  замкнуто, это равносильно тому, что  $C$  открыто.

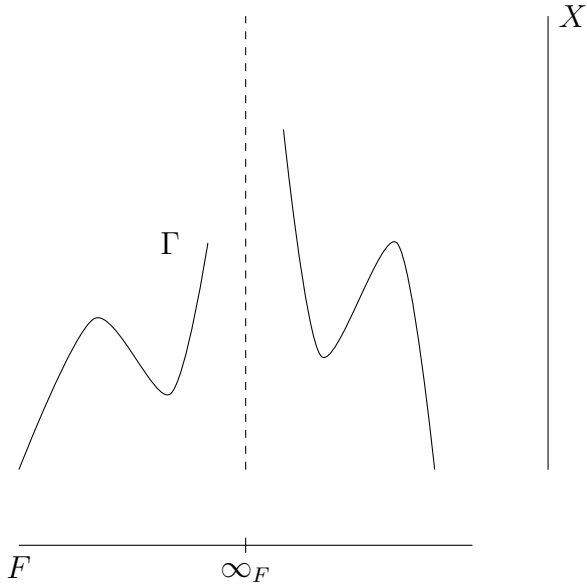
$$C = \{ y \in Y \mid y \times X \bigcap A = \emptyset \} = \{ y \in Y \mid y \times X \subset U \}$$

Пусть  $y \in C$ , тогда  $y \times X \subset \bigcup_{i \in I} W_i \times V_i$ , где  $W_i$  — окрестность  $y$ ,  $V_i$  — открыто в  $X$  и  $W_i \times V_i \subset U$ .

Но  $y \times X$  компактно, следовательно можно считать  $I$  конечным (заменяя на конечное подпокрытие). Тогда  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$  — окрестность  $y$  и  $X \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ . Значит,  $W \times X = \bigcup_{i \in I} W \times V_i \subset \bigcup_{i \in I} W_i \times V_i \subset U$ . Поэтому  $W \subset C$ . Итак,  $C$  открыто.

b)  $\Rightarrow$  c)

Пусть  $\Gamma$  — график  $f$  .



Имеем,  $pr_F(\bar{\Gamma})$  замкнуто, содержит  $F^\circ$  , значит,  $\supset \bar{F}^\circ = F$  . Тем самым,  $\infty_F \in pr_F(\bar{\Gamma}) \Rightarrow \infty_F \times X \cap \bar{\Gamma} \neq \emptyset \Rightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty}(f) \neq \emptyset$  .

c)  $\Rightarrow$  a)

Пусть  $\{U_i\}_{i \in I}$  — открытое покрытие  $X$  , из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.  $\Lambda := \{ J \subset I \mid J \text{ конечно} \}$  . Упорядочим  $\Lambda$  по включению:  $J \rightarrow J'$  , если  $J \subset J'$  . Тогда  $\Lambda$  — направленное множество. Для любого  $J \in \Lambda$  выберем  $f(J) \in X \setminus U_i$  .

Пусть  $i \in I$  ,  $J = \{i\}$  . Пусть  $J \rightarrow J'$  , тогда  $i \in J'$  , значит,  $f(J') \notin U_i$  . Т.е.  $f(\{ J' \mid J \rightarrow J' \}) \cap U_i = \emptyset \Rightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty}(f) \cap U_i = \emptyset$  . Поскольку это верно для любого  $i$  ,  $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}(f) = \emptyset$  , противоречие.

Импликации c)  $\Rightarrow$  d)  $\Rightarrow$  e)  $\Rightarrow$  c) тривиальны.

2)!!!! (Теорема Тихонова о произведениях). Если  $\{X_i\}_{i \in I}$  — семейство компактных пространств, то их произведение  $\prod_{i \in I} X_i$  тоже компактно.

1) Пусть  $F$  — фильтр. Тогда  $F$  есть ультрафильтр тогда, и только тогда, когда для любого разбиения  $F^\circ = A \sqcup B$  верно, что  $A \cup \{\infty_F\}$  или  $B \cup \{\infty_F\}$  открыто (но не оба вместе). Это также равносильно тому, что  $A$  или  $B$  замкнуто (но не оба вместе).

Proof.

Пусть  $F = (F, \mathcal{T})$ . Тогда  $F$  — ультрафильтр  $\Leftrightarrow \forall \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  топологии  $\mathcal{S} \neq \mathcal{T} \Rightarrow \{\infty_F\} \in \mathcal{S}$ . Т.е. пусть  $A \subset F$ ,  $A \notin \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{S}$  — топология с предбазой  $\mathcal{T} \cup \{A\}$ . Тогда  $\{\infty_F\} \in \mathcal{S}$ . Пусть  $\mathcal{B}$  — база, порождённая  $\mathcal{T} \cup \{A\}$ , тогда  $\{\infty_F\} \in \mathcal{B}$ . Т.е.  $\exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \cup \{A\}$ , такие, что  $\{\infty_F\} = U_1 \cap \dots \cap U_n$ . Из этого вытекает, что  $\exists U \in \mathcal{T}$ , такое, что  $\{\infty_F\} = U$  или  $\{\infty_F\} = U \cap A$ . Первое невозможно, значит верно второе. Мы доказали, что  $F$  — ультрафильтр  $\Leftrightarrow \forall A \subset F$ ,  $A \notin \mathcal{T} \exists U \in \mathcal{T}$ , такое, что  $\{\infty_F\} = U \cap A$ .

Пусть теперь  $F^\circ = A \sqcup B$  — разбиение, причём  $A \cup \{\infty_F\}$  не открыто. Значит,  $\exists U \in \mathcal{T}$  такое, что  $\{\infty_F\} = U \cap (A \cup \{\infty_F\})$ . Поэтому  $(U \setminus \{\infty_F\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow U \setminus \{\infty_F\} \subset B$ . Имеем,  $B \cup \{\infty_F\} = B \cup U$  открыто (потому что  $B$  открыто).

Наоборот, пусть выполнено условие про разбиения. Пусть  $A \subset F$ , такое, что  $A$  не открыто. Тогда  $\infty_F \in A$ . Положим  $B = F \setminus A$ . Тогда, по условию,  $U = B \cup \{\infty_F\}$  открыто. Но  $U \cap A = \{\infty_F\}$ , что и требовалось.

2) Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subset X$ ,  $x \in \overline{A}$ . Пусть  $X$  обладает счётным базисом окрестностей в точке  $x$ . Тогда  $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , такая, что  $x = \lim_{\mathbb{N} \rightarrow \infty} f$ .

Proof.

Пусть  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — убывающий базис окрестностей в точке  $x$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} U_n \cap A \neq \emptyset$ . Выберем для всех  $n \in \mathbb{N}$  точку  $f(n) \in U_n \cap A$ . Тогда  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Далее,  $f(k) \in U_n$ , если  $k \geq n$ . Т.е.  $f(\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}) \subset U_n$ . Значит,  $x = \lim_{\mathbb{N} \rightarrow \infty} f$ .

3) Пусть  $F$  — фильтр со счётной базой фильтра. Тогда существует морфизм фильтров  $(\mathbb{N} \rightarrow \infty) \rightarrow F$ .

Proof.

$$\infty_F \in \overline{F^\circ}$$

4) Пусть  $F$  — фильтр со счётной базой фильтра. Пусть  $A \subset F$  не замкнуто. Тогда существует морфизм фильтров  $\tau : (\mathbb{N} \rightarrow \infty) \rightarrow F$ , такой, что  $\tau^{-1}(A) = \mathbb{N}$ .

Proof.

Достаточно заметить, что  $\infty_F \notin A$  и  $A \cup \{\infty_F\}$  — подфильтр  $F$ .

5) Пусть  $F$  — фильтр со счётной базой фильтра. Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$ ,  $x \in X$ . Пусть для любого морфизма фильтров  $\tau : (\mathbb{N} \rightarrow \infty) \rightarrow F$  верно, что  $x = \lim_{\mathbb{N} \rightarrow \infty} f \circ \tau$ . Тогда  $x = \lim_F f$ .

Proof.

Пусть  $g : F \rightarrow X$  — продолжение  $f$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ . Докажем, что  $g$  непрерывно. Пусть  $B \subset X$  замкнуто, а  $A = g^{-1}(B)$  не замкнуто. Тогда существует морфизм фильтров  $\tau : (\mathbb{N} \rightarrow \infty) \rightarrow F$ , такой, что  $\tau^{-1}(A) = \mathbb{N}$ . Имеем,  $(g \circ \tau)^{-1}(B) = \mathbb{N}$  не замкнуто в  $\mathbb{N} \rightarrow \infty$ , следовательно,  $g \circ \tau$  не непрерывно, поэтому неверно, что  $x = \lim_{\mathbb{N} \rightarrow \infty} f \circ \tau$ . Противоречие.

---