Modern mathematics series

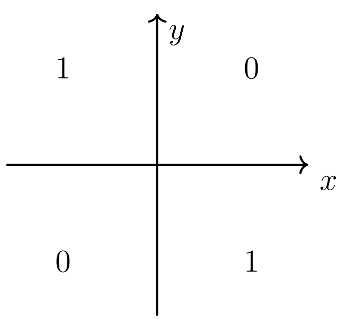
Sergey Strukov

8 января 2024 г.

Теорема Штурма.

Теорема Штурма — красивая элементарная теорема школьного уровня. Она позволяет найти число корней данного полинома с вещественными коэффициентами на заданном интервале. С её помощью можно локализовать корни вещественных полиномов и находить хорошие приближения к ним.

п.1



1)^{def} Функция $\sigma : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \{0, 1\}$ определена как

$$\sigma(x, y) := \begin{cases} 1, & sign(x) = sign(y) \\ 0, & sign(x) \neq sign(y) \end{cases}$$

2) $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

3) $\sigma(x, y) = \sigma(sign(x), y) = \sigma(sign(x), sign(y))$

4) $\sigma(-x, y) = 1 - \sigma(x, y)$

$5)^{def}$ $\sigma(x_1,\dots,x_n)$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^*$, $n \geqslant 1$

$$\sigma(x_1,\dots,x_n) := \sum_{k=1}^{n-1} \sigma(x_k, x_{k+1})$$

— число перемен знака (Ч.П.З.)

6) Индуктивно,

$$\sigma(x_1) = 0 \ ,$$

$$\sigma(x_1,\dots,x_n) = \sigma(x_1,x_2) + \sigma(x_2,\dots,x_n) \ , \ n \geqslant 2 \ .$$

<u>п.2</u>

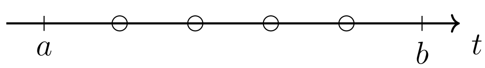
В этом пункте $f, g \in \mathbb{R}[T]$.

1) Пусть f и g не имеют общих вещественных корней. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2) Пусть a, b — не корни f или g . Т.е. $f(a), g(a), f(b), g(b) \in \mathbb{R}^*$.

$3)^{def}$ Определим $\varphi(t) := \sigma(f(t), g(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда φ определена вне (конечного) множества корней f или g , например, в a и b .

4) Функция $\varphi(t)$ локально постоянна. Это вытекает из непрерывности $f(t)$, $g(t)$ и локального постоянства $\sigma(x, y)$.



$5)^{def}$ Определим $\delta(t) := \varphi(t+0) - \varphi(t-0) \in \{-1, 0, 1\}$ — функция скачков φ .

6) $\delta(t) = 0$ вне корней f или g .

7)!! Главная теорема:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{a<t<b \quad \delta(t)\neq 0} \delta(t)$$

$8)^{def}$ Определим символ

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b := \sum_{a<t<b \quad g(t)=0} \delta(t)$$

9) φ и δ для пар (f, g) и (g, f) одинаковы.

10)!! Закон взаимности:

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b + \left(\frac{g}{f}\right)_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

11) Если заменить f на $-f$, то φ превратиться в $1-\varphi$, а δ в $-\delta$.

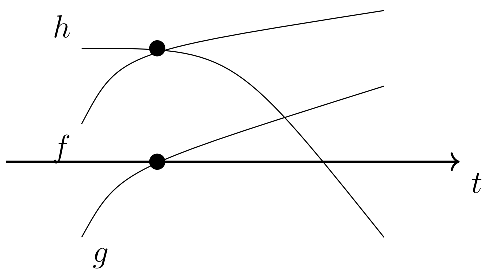
12)! Нечётность:

$$\left(\frac{-f}{g}\right)_a^b = -\left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

13)! Модулярность. Если заменить f на полином $h \in \mathbb{R}[T]$, такой, что $g(t)=0 \Rightarrow h(t)=f(t)$, то значения $\delta(t)$ не изменяться в точках $\{\ t \in \mathbb{R} \mid g(t)=0\ \}$. Поэтому

$$\left(\frac{h}{g}\right)_a^b = \left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

В частности, это верно, если $h = f - qg$. Для доказательства см. картинку:



Пояснение, вблизи точки t значения f и h имеют одинаковый знак, $sign(f) = sign(h)$, поэтому две версии φ совпадают, а, значит, совпадают и две версии δ.

<u>Resume</u>

1)

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b \in \mathbb{Z}$$

2)

$$\left(\frac{-f}{g}\right)_a^b = -\left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

3)

$$g(t)=0 \Rightarrow h(t)=f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)_a^b = \left(\frac{f}{g}\right)_a^b$$

4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b + \left(\frac{g}{f}\right)_a^b = \varphi(b) - \varphi(a) = \sigma(f(b), g(b)) - \sigma(f(a), g(a))$$

5) Если g не имеет вещественных корней, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b = 0$$

<u>n.3</u>

f , g , a , b — такие же, как и выше

1) Определим последовательность

$f_0 := f$

$f_1 := g$

$\dots$

$f_k = f_{k+1}q_k - f_{k+2}$, $k \geqslant 0$ — деление с остатком

$\dots$

$f_{n-1} = f_n q_{n-1}$

2)

$f_0, f_1, \dots, f_n$ — <u>ряд Штурма</u>, $n \geqslant 1$

$deg(f_{k+1}) < deg(f_k)$, $1 \leqslant k < n$

$f_0, \dots, f_n \in (f_n)$, $f_n = (f, g)$

f_n не имеет вещественных корней

3)! Допустим, что члены ряда Штурма не обращаются в нуль в точках a и b . Тогда

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b = \sigma(f_1(a), \dots, f_n(a)) - \sigma(f_1(b), \dots, f_n(b))$$

<u>*Proof.*</u>

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b = \left(\frac{f_0}{f_1}\right)_a^b$$

$$\left(\frac{f_k}{f_{k+1}}\right)_a^b = \left(\frac{-f_{k+2}}{f_{k+1}}\right)_a^b = -\left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}}\right)_a^b =$$

$$+\left(\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}\right)_a^b + \sigma(f_{k+1}(a), f_{k+2}(a)) - \sigma(f_{k+1}(b), f_{k+2}(b))$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_a^b = \left(\frac{f_{n-1}}{f_n}\right)_a^b + \sigma(f_1(a), f_2(a)) - \sigma(f_1(b), f_2(b)) + \cdots + \sigma(f_{n-1}(a), f_n(a)) - \sigma(f_{n-1}(b), f_n(b)) =$$

$$0 + \sigma(f_1(a), \ldots, f_n(a)) - \sigma(f_1(b), \ldots, f_n(b))$$

---

n.4

Пусть $f \in \mathbb{R}[T]$ — полином без кратных корней
$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
a и b — не корни f или f'

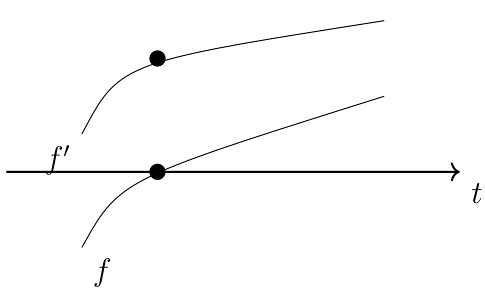
1) $(f, f') = 1$, f и f' не имеют общих корней

2)!

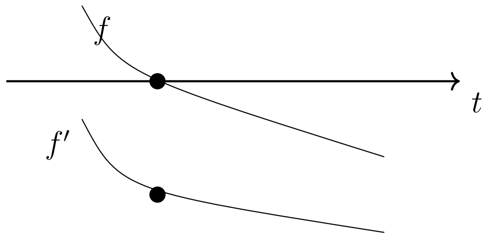
$$\left(\frac{f'}{f}\right)_a^b = - \text{ число корней } f \text{ на } (a, b)$$

Proof.

Достаточно доказать, что $f(t) = 0 \Rightarrow \delta(t) = -1$.
Для доказательства см. следующие картинки:



$\varphi(t+0) = 0$, $\varphi(t-0) = 1$, $\delta(t) = -1$



$\varphi(t+0) = 0$, $\varphi(t-0) = 1$, $\delta(t) = -1$

Пояснение, $sign(f(t+0)) = sign(f'(t))$, $sign(f(t-0)) = -sign(f'(t))$.
————————————-

3)!! <u>Теорема Штурма</u>

Пусть $f_0 = f$, $f_1 = f'$, ... , f_n , $n \geqslant 1$ — ряд Штурма. Пусть члены ряда не обращаются в нуль в точках a и b . Тогда

$$\text{число корней } f \text{ на } (a,b) = \sigma(f_0(a), \ldots, f_n(a)) - \sigma(f_0(b), \ldots, f_n(b))$$

<u>Proof.</u>

$$-\left(\frac{f'}{f}\right)_a^b = \left(\frac{f}{f'}\right)_a^b + \sigma(f(a), f'(a)) - \sigma(f(b), f'(b)) =$$

$$\sigma(f(a), f'(a)) + \sigma(f_1(a), \ldots, f_n(a)) - \sigma(f(b), f'(b)) - \sigma(f_1(b), \ldots, f_n(b))$$

————————————-

4) Пусть $g(t) = Gt^n + \ldots$ — полином, Gt^n — его старший член. Тогда $sign(g(a)) = sign(G)(-1)^n$ для $a \to -\infty$, $sign(g(b)) = sign(G)$ для $b \to +\infty$. Будем писать $sign(g(-\infty)) := sign(G)(-1)^n$ и $sign(g(+\infty)) := sign(G)$.

5) <u>Следствие</u>

Пусть $f_0 = f$, $f_1 = f'$, ... , f_n , $n \geqslant 1$ — ряд Штурма.
Тогда

$$\text{число корней } f = \sigma(sign(f_0(-\infty)), \ldots, sign(f_n(-\infty))) - \sigma(sign(f_0(+\infty)), \ldots, sign(f_n(+\infty)))$$

6) <u>Теорема Штурма+</u>

Пусть $f_0 = f$, $f_1 = f'$, ... , f_n , $n \geqslant 1$ — ряд Штурма. Пусть f не обращается в нуль в точках a и b . Тогда

$$\text{число корней } f \text{ на } (a,b) = \sigma(f_0(a), \ldots, f_n(a)) - \sigma(f_0(b), \ldots, f_n(b))$$

При этом если один из аргументов σ равен нулю, его надо просто вычеркнуть.