

# Modern mathematics series

Sergey Strukov

25 мая 2025 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

## Пределы.

Исторически, теория пределов возникла как часть анализа. Однако, после появления топологии, она в обобщённой форме стала естественной частью топологии. В этой статье теория пределов излагается в законченной геометрической форме. Кратко говоря, предел — это продолжение функции по непрерывности на специальных топологических пространствах — **фильтрах**. Подобная конструкция делает большинство свойств пределов *наглядно очевидными*.

### n.1

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — топологическое пространство.  $F$  называется фильтром, если все точки  $F$ , кроме одной, открыты. Такая точка, тавтологически, определена однозначно. Будем обозначать её  $\infty_F$ . Следуя общему правилу, положим  $F^\circ := F \setminus \{\infty_F\}$ .

2) Пусть  $F$  — фильтр.

Тогда справедливы следующие утверждения:

$F^\circ$  открыто, но не замкнуто,

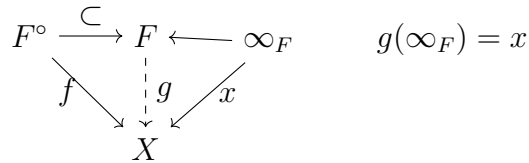
$F^\circ$  дискретно,

$\overline{F^\circ} = F$ ,  $F^\circ \neq \emptyset$ ,

$\infty_F$  замкнута,

$F$  не дискретно.

3)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — любое отображение. Тогда  $f$  непрерывно (потому что  $F^\circ$  дискретно!). Пусть  $x \in X$ ,  $g$  — продолжение  $f$  на  $F$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ . Если  $g$  непрерывно, то будем говорить, что  $x = \lim_F f$ .



4) Пусть  $F$  — фильтр,  $p : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Тогда  $x = \lim_F f \Rightarrow p(x) = \lim_F p \circ f$ .

5) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $\{Y_i\}_{i \in I}$  — семейство топологических пространств,  $\{p_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  — семейство непрерывных отображений. Пусть топология  $X$  порождена семейством  $\{p_i\}_{i \in I}$ . Пусть  $f : F^\circ \rightarrow X$ ,  $x \in X$ .

Тогда,  $x = \lim_F f \Leftrightarrow \forall i \in I \ p_i(x) = \lim_F p_i \circ f$ .

6) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Пусть  $A \subset X$  замкнуто.

Если  $f(F^\circ) \subset A$ ,  $x = \lim_F f$ , то  $x \in A$ .

Proof.

Пусть  $g$  — непрерывное продолжение  $f$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ .

Тогда  $x \in g(F) = g(\overline{F^\circ}) \subset \overline{g(F^\circ)} = \overline{f(F^\circ)} \subset \overline{A} = A$ .

То же самое по-другому:  $F^\circ \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \overline{F^\circ} \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \infty_F \in g^{-1}(A) \Rightarrow x \in A$ .

---

7)<sup>!!!</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — **хаусдорфово** топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$ .

Тогда  $\exists$  не более одного предела  $x = \lim_F f$ .

Почему у этого пункта аж три восклицательных знака? Причина в том, что в математике очень часто пределы в хаусдорфовы пространства используются для **построения** объектов. Например: производная, интеграл, сумма ряда и.т.п. Для этого нужна единственность, обеспеченная этим свойством.

Proof.

Пусть  $x, y = \lim_F f$ . Тогда  $(x, y) = \lim_F (f, f)$ , но  $(f, f) : F^\circ \rightarrow X \times X$  отображает  $F^\circ$  в диагональ  $\Delta_X \subset X \times X$ , которая, в силу хаусдорфовости, замкнута в  $X \times X$ . Значит,  $(x, y) \in \Delta_X$ , т.е.  $x = y$ .

---

## n.2

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра.  $\tau : F \rightarrow G$  — морфизм фильтров, если  $\tau$  — непрерывное отображение и  $\tau^{-1}(\infty_G) = \{\infty_F\}$ .

Фильтры и их морфизмы образуют категорию.

2) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Если  $\tau : F \rightarrow G$  (морфизм фильтров), то:

$$\tau(F^\circ) \subset G^\circ ,$$

$$\tau(\infty_F) = \infty_G ,$$

$$\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ \text{ — отображение, индуцированное } \tau .$$

3) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Пусть  $\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ$  — отображение. Тогда  $\tau^\circ$  может быть продолжено до морфизма фильтров  $\tau : F \rightarrow G$  (очевидно, единственным образом)  $\Leftrightarrow \infty_G = \lim_F \tau^\circ$ .

4) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра,  $X$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$ ,  $f : G^\circ \rightarrow X$ . Тогда если  $x = \lim_G f$ , то  $x = \lim_F f \circ \tau^\circ$ .

### п.3

1) Пусть  $G$  — фильтр,  $F$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$  — непрерывное **инъективное** отображение.

Тогда  $F$  дискретно  $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\infty_G)$  открыто.

Если  $F$  не дискретно, то  $F$  — фильтр и  $\tau$  — морфизм фильтров.

Proof.

Пусть  $x \in F$ .  $\tau$  инъективно, значит,  $\{x\} = \tau^{-1}(\{\tau(x)\})$ .

Поэтому если  $\tau(x) \neq \infty_G$ , то  $x$  открыта. Если  $\tau(x) = \infty_G$ , то  $\{x\} = \tau^{-1}(\infty_G)$ .

Таким образом,  $\tau^{-1}(\infty_G)$  открыто  $\Rightarrow$  все точки  $F$  открыты  $\Rightarrow F$  дискретно.

Если  $F$  дискретно, то  $\tau^{-1}(\infty_G)$ , тавтологически, открыто.

Если  $F$  не дискретно, то  $\tau^{-1}(\infty_G)$  не открыто. В частности, это множество непусто, значит, состоит из одной точки  $a$ . Если  $x \neq a$ , то  $x$  открыта,  $a$  не открыта. Т.е.  $F$  — фильтр и  $\tau$  — морфизм фильтров.

---

2) Пусть  $G$  — фильтр,  $F \subset G$  — подпространство. Тогда  $F$  дискретно  $\Leftrightarrow \{\infty_G\} \cap F$  открыто в  $F$ .

Если  $F$  не дискретно, то  $F$  — фильтр и  $F \subset G$  — морфизм фильтров.

Такие  $F$  называются подфильтрами.

3) Пусть  $(F, \mathcal{T})$  — фильтр.

Пусть  $\mathcal{S}$  — более тонкая топология на  $F$ , чем  $\mathcal{T}$ .

Тогда  $\mathcal{S}$  дискретна  $\Leftrightarrow \{\infty_F\} \in \mathcal{S}$ .

Если  $\mathcal{S}$  не дискретна, то  $(F, \mathcal{S})$  — фильтр и  $(F, \mathcal{S}) \rightarrow (F, \mathcal{T})$  — морфизм фильтров.

Такие  $(F, \mathcal{S})$  называются более тонкими фильтрами.

4)<sup>def</sup>  $F$  — ультрафильтр, если любой более тонкий фильтр  $F' = F$ .

Другими словами, любая, более тонкая топология на  $F$  или дискретна, или совпадает с исходной.

5)<sup>!</sup> Пусть  $F$  — фильтр. Тогда  $\exists$  более тонкий ультрафильтр.

Proof.

Пусть  $F = (F, \mathcal{T})$ .

$\Lambda := \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ — топология на } F, \mathcal{S} \supset \mathcal{T}, \{\infty_F\} \notin \mathcal{S}\}$ .

Если  $\mathcal{S} \in \Lambda$ , то  $(F, \mathcal{S})$  есть более тонкий, чем  $F$  фильтр, и все такие фильтры получаются этим способом.

$\Lambda$  частично упорядочено включением.

Если  $\mathcal{S} \in \Lambda$  — максимальный элемент, то  $(F, \mathcal{S})$  и есть требуемый более тонкий ультрафильтр.

Поэтому достаточно доказать, что  $\Lambda$  индуктивно и воспользоваться леммой Цорна.

Пусть  $\Sigma \subset \Lambda$  — цепь.  $\mathcal{B} := \bigcup \Sigma$ .

Тогда,  $F \in \mathcal{B}$ ,  $\{\infty_F\} \notin \mathcal{B}$ ,  $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$ .

Значит,  $\mathcal{B}$  — мультипликативный базис топологии  $\mathcal{S}$ .

Ясно, что  $\mathcal{S} \in \Lambda$  и что  $\mathcal{S}$  мажорирует  $\Sigma$ .

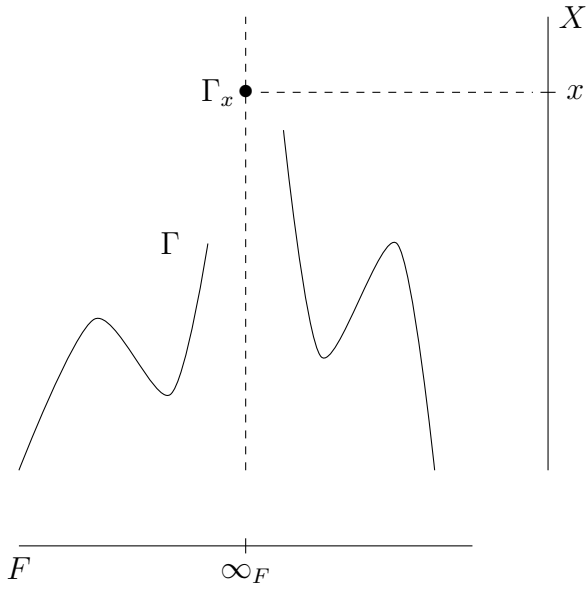
---

п.4

Пусть  $F$  — фильтр,  
 $X$  — топологическое пространство,  
 $f : F^\circ \rightarrow X$  .

1) Пусть  $\Gamma := \{ (t, f(t)) \mid t \in F^\circ \} \subset F \times X$  — график  $f$  .

Пусть  $x \in X$  ,  $\Gamma_x := \Gamma \cup \{(\infty_F, x)\} \subset F \times X$  — график продолжения  $f$  , такого, что  $\infty_F \mapsto x$  .



2) Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x & \xrightarrow{pr_X} & X \\ \downarrow pr_F \text{ биективно} & & \\ F & & \end{array}$$

Тогда

$$x = \lim_F f \Leftrightarrow pr_F \text{ изоморфизм} \Rightarrow \Gamma_x \text{ недискретно}$$

3)<sup>def</sup>  $x \in X$  называется предельной точкой  $f$  относительно  $F$  , если  $\Gamma_x$  недискретно. Множество предельных точек  $f$  относительно  $F$  будем обозначать  $Lim_F(f)$  .

$$4) x = \lim_F f \Rightarrow x \in Lim_F(f) .$$

5) Имеют место следующие эквивалентности:

$$\Gamma_x \text{ дискретно} \Leftrightarrow$$

$(\infty_F, x)$  открыто в  $\Gamma_x \Leftrightarrow$

$\Gamma$  замкнуто в  $\Gamma_x \Leftrightarrow$

$\bar{\Gamma} \cap \Gamma_x = \Gamma \Leftrightarrow$

$(\infty_F, x) \notin \bar{\Gamma} \Leftrightarrow$

$\exists$  окрестности  $\infty_F \in V, x \in U$ , такие, что  $V \times U \cap \Gamma = \emptyset \Leftrightarrow$

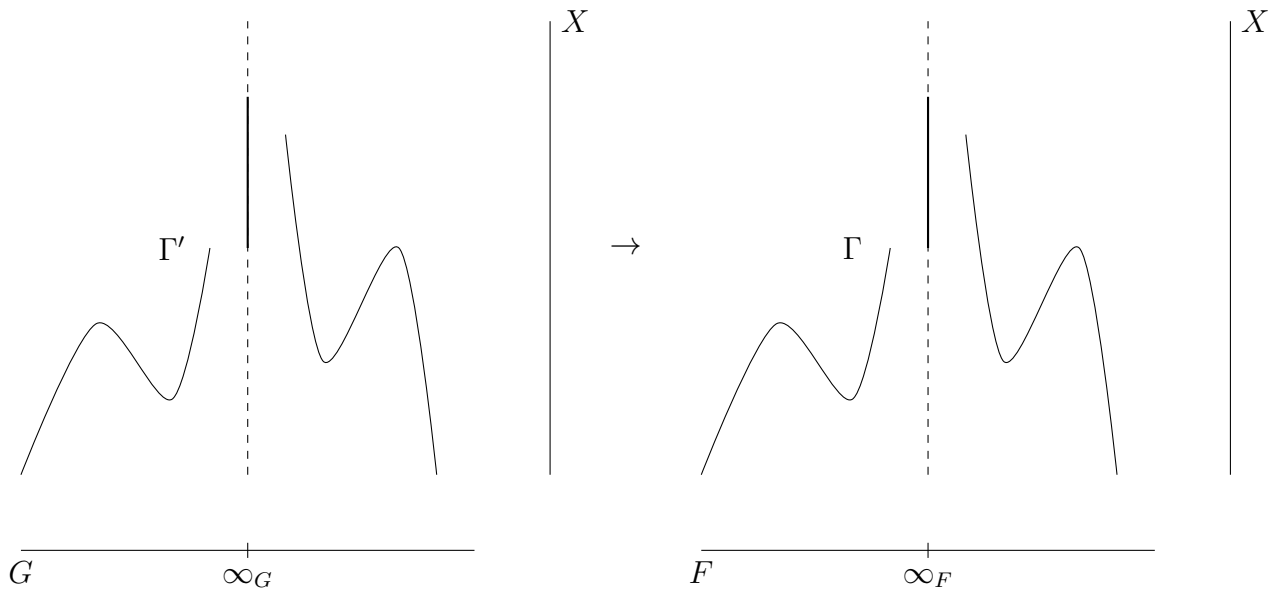
$\exists$  окрестности  $\infty_F \in V, x \in U$ , такие, что  $V \cap f^{-1}(U) = \emptyset$

6)  $\bar{\Gamma} \cap \infty_F \times X = \infty_F \times \lim_F(f)$ .  $\lim_F(f)$  замкнуто в  $X$ .

7)  $\lim_F(f) = \bigcap_{\infty_F \in V} \overline{f(V^\circ)}$

8) Пусть  $\tau : G \rightarrow F$  — морфизм фильтров. Тогда  $\lim_G(f \circ \tau^\circ) \subset \lim_F(f)$ .

Proof.



$$(\tau \times id_X)(\Gamma') \subset \Gamma$$

$$(\tau \times id_X)(\bar{\Gamma}') \subset \bar{\Gamma}$$

9)<sup>1</sup>  $x \in \lim_F(f) \Rightarrow \Gamma_x$  есть фильтр  $\Rightarrow \exists F'$  — более тонкий фильтр, чем  $F$ , такой, что  $x = \lim_{F'} f \Rightarrow \exists F'$  — более тонкий фильтр, чем  $F$ , такой, что  $x \in \lim_{F'}(f) \Rightarrow x \in \lim_F(f)$ .

- 10) Пусть  $F$  — **ультрафильтр**. Тогда  $\text{Lim}_F(f) = \lim_F f$  .
- 11) Пусть  $X$  хаусдорфово. Тогда  $x = \lim_F f \Rightarrow \text{Lim}_F(f) = \{x\}$  .
- 12) Пусть  $p : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Тогда  $p(\text{Lim}_F(f)) \subset \text{Lim}_F(f \circ p)$  .

n.5



n.6

n.7