

# Modern mathematics series

Sergey Strukov

21 сентября 2021 г.

Copyright © Sergey Strukov. All rights reserved. This is a public document. You can freely distribute and use it, providing the authorship and the copyright note is unchanged.

## Пределы.

Исторически, теория пределов возникла как часть анализа. Однако, после появления топологии она в обобщённой форме стала естественной частью топологии. В этой статье теория пределов излагается в законченной геометрической форме. Кратко говоря, предел — это продолжение функции по непрерывности на специальных топологических пространствах — **фильтрах**. Подобная конструкция делает большинство свойств пределов *наглядно очевидными*.

### п.1

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — топологическое пространство.  $F$  называется фильтром, если все точки  $F$ , кроме одной, открыты. Такая точка, тавтологически, определена однозначно. Будем обозначать её  $\infty_F$ . Следуя общему правилу, положим  $F^\circ := F \setminus \{\infty_F\}$ .

2) Пусть  $F$  — фильтр.

Тогда справедливы следующие утверждения:

$F^\circ$  открыто, но не замкнуто,

$F^\circ$  дискретно,

$\overline{F^\circ} = F$ ,  $F^\circ \neq \emptyset$ ,

$\infty_F$  замкнута,

$F$  не дискретно.

3)<sup>def</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Тогда  $f$  непрерывно.

Пусть  $x \in X$ ,  $g$  — продолжение  $f$  на  $F$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ .

Если  $g$  непрерывно, то будем говорить, что  $x = \lim_F f$ .

$$\begin{array}{ccc}
F^\circ & \xrightarrow{\subset} & F \longleftarrow \infty_F \\
\searrow f & \downarrow g & \swarrow x \\
& X &
\end{array}
\quad g(\infty_F) = x$$

4) Пусть  $F$  — фильтр,  $p : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Тогда  $x = \lim_F f \Rightarrow p(x) = \lim_F p \circ f$ .

5) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $\{Y_i\}_{i \in I}$  — семейство топологических пространств,  $\{p_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  — семейство непрерывных отображений. Пусть топология  $X$  порождена семейством  $\{p_i\}_{i \in I}$ . Пусть  $f : F^\circ \rightarrow X$ ,  $x \in X$ .

Тогда,  $x = \lim_F f \Leftrightarrow \forall i \in I \ p_i(x) = \lim_F p_i \circ f$ .

6) Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$  — отображение.

Пусть  $A \subset X$  замкнуто.

Если  $f(F^\circ) \subset A$ ,  $x = \lim_F f$ , то  $x \in A$ .

*Proof.*

Пусть  $g$  — непрерывное продолжение  $f$ , такое, что  $g(\infty_F) = x$ .

Тогда  $x \in g(F) = g(\overline{F^\circ}) \subset \overline{g(F^\circ)} = \overline{f(F^\circ)} \subset \overline{A} = A$ .

Тоже самое по-другому:  $F^\circ \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \overline{F^\circ} \subset g^{-1}(A) \Rightarrow \infty_F \in g^{-1}(A) \Rightarrow x \in A$ .

---

7)<sup>!!!</sup> Пусть  $F$  — фильтр,  $X$  — **хаусдорфово** топологическое пространство,  $f : F^\circ \rightarrow X$ .

Тогда  $\exists$  не более одного предела  $x = \lim_F f$ .

Почему у этого пункта аж три восклицательных знака? Причина в том, что в математике очень часто пределы в хаусдорфовы пространства используются для **построения** объектов. Например: производная, интеграл, сумма ряда и.т.п. Для этого нужна единственность, обеспеченная этим свойством.

*Proof.*

Пусть  $x, y = \lim_F f$ . Тогда  $(x, y) = \lim_F (f, f)$ , но  $(f, f) : F^\circ \rightarrow X \times X$  отображает  $F^\circ$  в диагональ  $\Delta_X \subset X \times X$ , которая, в силу хаусдорфовости, замкнута в  $X \times X$ . Значит,  $(x, y) \in \Delta_X$ , т.е.  $x = y$ .

---

## n.2

1)<sup>def</sup> Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра.  $\tau : F \rightarrow G$  — морфизм фильтров, если  $\tau$  — непрерывное отображение и  $\tau^{-1}(\infty_G) = \{\infty_F\}$ .

Фильтры и их морфизмы образуют категорию.

2) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Если  $\tau : F \rightarrow G$  (морфизм фильтров), то:

$$\tau(F^\circ) \subset G^\circ ,$$

$$\tau(\infty_F) = \infty_G ,$$

$$\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ \text{ — отображение, индуцированное } \tau .$$

3) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра. Пусть  $\tau^\circ : F^\circ \rightarrow G^\circ$  — отображение. Тогда  $\tau^\circ$  может быть продолжено до морфизма фильтров  $\tau : F \rightarrow G$  (очевидно, единственным образом)  $\Leftrightarrow \infty_G = \lim_F \tau^\circ$ .

4) Пусть  $F$  и  $G$  — два фильтра,  $X$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$ ,  $f : G^\circ \rightarrow X$ . Тогда если  $x = \lim_G f$ , то  $x = \lim_F f \circ \tau^\circ$ .

п.3

1) Пусть  $G$  — фильтр,  $F$  — топологическое пространство,  $\tau : F \rightarrow G$  — непрерывное инъективное отображение.

Тогда  $F$  дискретно  $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\infty_G)$  открыто.

Если  $F$  не дискретно, то  $F$  — фильтр и  $\tau$  — морфизм фильтров.

Proof.

---

2)

3)

4)

5)