Лекция 3 Статические игры с полной информацией. ~~Опр~~ Определение статической игры с полной информацией

Под статической понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие

Пример „Дилемма заключенного". Двое заключенных подозреваются в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют возможности общаться друг с другом. Каждому подозреваемому предлагают сознаться (С) к определенному сроку, но можно и молчать (М). Если один сознался, а другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает макс. ~~ср~~ срок = 9 лет.

Если оба сознались, то оба получают = 6 лет.

Если оба молчат, то вину доказать невозможно и получают по 1 году

В виде матрицы

	M	C
M	-1, -1	-9, 0
C	0, -9	-6, -6

Игра в нормальной форме

Двое знакомых выбирают ПК: 1 - IBM, 2 - MAC. Обладание ПК любимого типа оценивается у 1 $a > 0$, у 2-го $b > 0$, другие марки $c > 0$

N1 \ N2	IBM	MAC
IBM	a+c, c	a, b
MAC	0, 0	c, b+c

Совокупность объектов:

$G = \{S_i, u_i, i \in N\}$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ - множество игроков, S_i - множество стратегий i-го игрока, $u_i : \prod_{i \in N} S_i \to R$ - функция выигрыша игрока i.

Профиль стратегий всех игроков:

$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = \prod_{i \in N} S_i$

Профиль всех, ~~кр~~ кроме i:

$s_{-i} = (s_j, j \neq i) \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$

При этом $S=(S_i, S_{-i})=(S_1, \ldots, S_n)$

Лекция 4. Экономические модели, основанные на статических играх с полной информацией

Дуополия Курно

Пусть $n=2$, $i \neq j$, выпуск продукции q_i

$Q=q_1+q_2$ совокупное предложение

Цена на рынке устанавливается в соответствии с обратной ~~спросом~~ функцией спроса, которую считаем линейной: $P(Q)=D^{-1}(Q)=a-Q$, $a>0$, где $a>0$. Функция затрат $C(q_i)=c\cdot q_i$, $a>c>0$

$S_i=[0,\infty)$ множество стратегий

Выигрыш игрока (прибыль):

$u_i(q_i, q_j)=P(Q)\cdot C(q_i)=$

$=(a-q_i-q_j)\cdot q_i-c\cdot q_i=q_i\cdot(a-c-q_i-q_j)$

Отсюда наилучший ответ игрока i на любую стратегию игрока j

$R_i(q_j)=\frac{a-c-q_j}{2}$

Решение имеет вид: $q_1^*=q_2^*=\frac{1}{3}(a-c)$

Выигрыши: $\frac{1}{9}(a-c)^2$

Суммарный выигрыш: $\frac{2}{9}(a-c)^2$

Цена на продукцию $\frac{a+2c}{3}$

Суммарный выпуск

$Q^*=q_1^*+q_2^*=\frac{2}{3}(a-c)$

При монополии: $Q_M=\frac{1}{2}(a-c)$ при цене $P_M=\frac{a+c}{2}$ и выигрыше $\frac{1}{4}(a-c)^2$

При совершенной конкуренции $Q_{CE}=a-c$, цены равны $P_{CE}=c$ при нулевом выигрыше

Олигополии $n>2$

Если ввести обозначение $q_{-i}=\sum_{j\neq i} q_j$, то наилучшая функция

$R_i(q_{-i})=\frac{1}{2}(a-c-q_{-i})$ и вычисляется аналогично дуополии

Чтобы найти РН, надо решить сис. ур.

$q_i^*=\frac{1}{2}(a-c-q_{-i}^*)$, $i=1,\ldots,n$

Ее решение имеет вид

$Q^* = \frac{n}{n+1}(a-c)$; $P^* = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{n+1}\cdot c$; $q_i^* = \frac{1}{n+1}(a-c)$,

при чем при неограниченном увеличении числа игроков эти значения стремятся к уровням совершенной конкуренции

$Q^* \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_{CE}$; $P^* \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{CE} = C$

Олигополия Бертрана (с назначением цен)

Рассмотрим дуополию ($n=2$) в случае однородной продукции

Функция спроса имеет вид.

$$D_i(p_i,p_j) = \begin{cases} 0, & p_i > p_j \\ a-p_i, & p_i < p_j \\ \frac{a-p_i}{2} & p = p_j \end{cases}$$

Пусть $a > c$ и выигрыш игрока i определяется как его прибыль:

$u_i(p_i,p_i) = (p_i - c)\cdot D_i(p_i,p_j)$

При любом $p_j > c$ наилучший ответ игрока i точно нереализуется, но ε ~~[illegible]~~ оптимальный ответ равен

$p_i^* = c, i = 1,2$

П. в дуополии Бертрана с однородной продукцией и без ограничений на выпуск возникает жесткая конкуренция, приводящая к совершенному равновесию.

Неоднородная продукция в дуополии Бертрана.

Каждый ~~[illegible]~~ игрок i по прежнему назначает цену p_i на свою продукцию, а спрос a задается функцией

$D_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$, $0 < b < 1$

Выигрыш игрока определяется как прибыль

$u_i(p_i,p_j) = (p_i - c)\cdot D_i(p_i,p_j) = (p_i - c)\cdot(a - p_i + bp_j)$

Наилучший ответ игрока: $P_i(p_j) = \frac{1}{2}(a+c+bp_j)$

Для ~~[illegible]~~ нахождения РН надо решить систему

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}(a+c+bp_2^*) \\ p_2^* = \frac{1}{2}(a+c+bp_1^*) \end{cases}$$

$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}$

Это РН трудно сравнивать с другими вариантами, при $b=0$ монополиста, при $0<b<1$

Лекция 5. Существование равновесий Нэша и смешанные стратегии

Пример Совпадение монет. Два игрока одновременно и независимо друг от друга кладут на стол по монете каждый, прикрывая свою монету рукой. По команде судьи они поднимают руки. Игрок 1 выигрывает, если монеты лежат по-разному, а 2 если одинаково. Выигрыши PH:

	O	P
O	-1,1	1,-1
P	1,-1	-1,1

Смешанная стратегия игрока i – это вероятностная мера μ_i на множестве чистых стратегий S_i. Если все множества стратегий конечны, $\mu_i(s_i)$ является вероятностью выбора игроком i стратегии s_i: $\mu_i(s_i) \ge 0$, $\sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1$

Смешанным расширением игры в нормальной форме $G = \{S_i, u_i, i \in N\}$ называется игра $G_m = \{M_i, \bar{u}_i, i \in N\}$ где $M_i = \{\mu_i \mid \mu_i(s_i) \ge 0, \sum_{s_i \in S_i} \mu(s_i) = 1\}$ – множество смешанных стратегий игрока i; $\mu(s) = \prod_{i \in N} \mu(s_i)$ – вероятность выбора s при независимом выборе s_i; $\bar{u}_i(\mu) = \sum_{s \in S} \mu(s) \cdot u_i(s)$ – ожидаемый выигрыш в исходной игре, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$