01.11.2020 Тихомиров С.С. 19САУ3Т

Лекция 1. Введение в теорию игр.

Основные понятия матричных игр

Понятие игры

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами, которых называют игроками, в ситуациях, когда на результаты этих решений влияют действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами — игроками.

Игрок — это просто термин, который ~~уд~~ удобен для проведения аналогии изучаемой ситуации с салонной игрой с четко прописанными правилами. Каждый игрок обладает определенной свободой выбора действий. Своими действиями игрок влияет ~~не то~~ на результаты ~~не то~~ не только свои, но и всех остальных.

Результат оценивается заданной для каждого игрока функцией выигрыша.

Цель игрока — максимизировать свои выигрыши.

Игра — математическая модель конфликтной ситуации.

Ход — выбор и осуществление действия по правилам игры

Стратегия — последовательность всех ходов до окончания игры.

Классификация игр.

В зависимости от числа стратегий

- конечные
- бесконечные

По числу игроков:

- парные
- множественные

В зависимости от взаимоотношений игроков:

- кооперативные, если определены коали[...]
- коалиционные, ~~если~~ если игроки могут [...] в соглашении

– бескоалиционные, если нельзя вступать в ~~отно~~ отношения

В играх с 0-й суммой одни игроки выигрывают за счет других, т.е. суммарный выигрыш всех = 0

Парные игры с нулевой суммой – антагонистические

Конечные антагонистические игры – матричные

Матричные игры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

У 1 игрока стратегии строки $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, у 2-го игрока столбцы $(B_1, B_2, \dots, B_n)$

Если представить в виде:

	B_1	B_2	...	B_n	α
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β	β_1	β_2	...	β_n	

то можно сделать ~~вывод~~ определения:

Нижняя цена игры (максимин): ~~α max~~

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i$

Верхняя (минимакс):

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j$

Чистые и смешанные стратегии

Чистая стр. игрока – это возможный ход, выбранный им с вероятностью равной единице

Смешанной стратегией называется вектор

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

$\left(\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right)$

Если $x_i > 0, y_j > 0$, игра называется активной

Платежная функция игры:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x_i y_j$$

Стратегии $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$, $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ называются оптимальными, если для произвольных стратегий $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ выполняется условие

$$f(\bar{x}, \bar{y}^*) \le f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \le f(\bar{x}^*, \bar{y})$$

Решением игры называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры

Лекция 2 Методы решения матричных игр.

Игры с седловым элементом

В этом случае игрок 1 имеет чистую максиминную стратегию, а игрок 2 чистую минимаксную стратегию и при этом $\alpha = \beta = V$.

Тогда говорят, что игра решается в ...

Игра 2x2: аналитическое и графическое решение

	B_1	B_2	
A_1	a_{11}	a_{12}	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	x_2
	y_1	y_2	

Сис. ур. для 1 игрока

$$\begin{cases} a_{11} y_1^* + a_{12} y_2^* = V \\ a_{21} y_1^* + a_{22} y_2^* = V \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

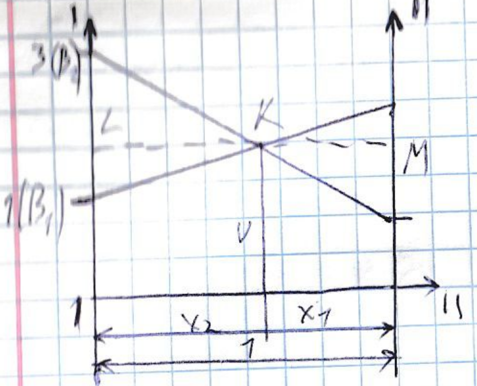
$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

Аналогично решение для 2 игрока.

Граф. решение

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, дает такую картину



Числовое значение решения игры:

$\langle ((4/15; 11/15), (0; 1/5; 4/5)); 3,2 \rangle$

Задача:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти нижнюю и верхнюю цену игры

Решение

$$A = A = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \\ \cancel{32} & \cancel{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 12 \\ 2 \\ \ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 & 22 \end{matrix} & \end{array}$$

$a = max(a_i) = 12$, $b = min(b_j) = 22$

т.к. $\alpha \neq \beta$, то цена $12 \leq y \leq 22$

Сис. ур. для 1-го игрока

$$\begin{cases} 12x_1 + 32x_2 = V \\ 32x_1 + 2x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{2 - 32}{12 + 2 - 32 - 22} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{12 - 22}{12 + 2 - 32 - 22} = \frac{1}{4}$$

Сис ур для 2-го игрока:

$$\begin{cases} 12y_1 + 22y_2 = V \\ 32y_1 + 2y_2 = V \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{2 - 22}{12 + 2 - 32 - 22} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{12 - 32}{12 + 2 - 32 - 22} = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{12 \cdot 2 - 22 \cdot 32}{12 + 2 - 32 - 22} = 17$$

Ответ: $V = 17$ – цена игры; $x(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; $y(\frac{1}{2};$

Граф. метод