**ЗАДАНИЕ 1.**

**1.1.** Найти угол  между градиентами функций  и 

в точке .

, , .

**Решение**.

**1)** Градиент функции  имеет вид:

.

**а)** Найдем частные производные для функции :

, , 

и вычислим их значения в точке :

, , .

Следовательно, .

**б)** Найдем частные производные для функции :

, , 

и вычислим их значения в точке :

, , .

Следовательно, .

**2)** Угол между двумя векторами определим по формуле:

.

Найдем скалярное произведение векторов:

.

Найдем длины векторов:

,

.

Тогда , а значит, .

Ответ: .

**1.2.** Исследовать на экстремум функцию.

**Решение**.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю частных производных функции. Так как в данном случае частные производные первого порядка всегда существуют, то для нахождения стационарных (критических) точек решим систему:

****, ****,

откуда , , , .

Таким образом, получили две стационарные точки: , .

Находим:

, , .

Для точки  получаем: ,

то есть, в этой точке **экстремума нет**.

Для точки  получаем:

,

и , следовательно, в этой точке данная функция достигает локального **минимума** и .

Ответ:  в точке .

**1.3.**

**1)** Экспериментально получены шесть значений функции , которые представлены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ***y*** | 0,7 | 0,5 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 4,3 |

Методом наименьших квадратов найти функцию вида , выражающую приближенно функцию . Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции .

**Решение.**

Будем искать функцию  в виде квадратичной функции .

Составим функцию 

Необходимое условие экстремума этой функции – равенство нулю частных производных по переменным *a*, *b* и *с*. Это система трех линейных уравнений:



В развернутой форме система для определения параметров *a*, *b* и *с* будет иметь вид:



Учитывая, что

,

,

,

,

,

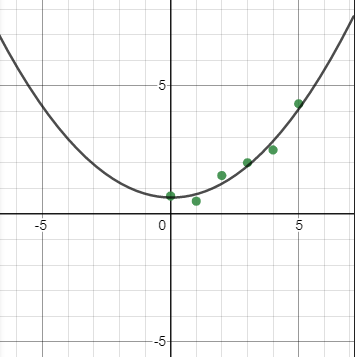
,

,

получим:

Решая эту систему, находим: , , .

Уравнение искомой функции имеет вид: .



**2)** Экспериментально получены пять значений функции , которые представлены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ***y*** | 0,8 | -0,1 | -1,2 | -1,3 | -1,4 |

Методом наименьших квадратов найти функцию вида , выражающую приближенно функцию . Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции .

**Решение.**

Будем искать функцию  в виде функции .

Составим функцию 

Необходимое условие экстремума этой функции – равенство нулю частных производных по переменным *a*, *b* и *с*. Это система трех линейных уравнений:



В развернутой форме система для определения параметров *a*, *b* и *с* будет иметь вид:



Учитывая, что

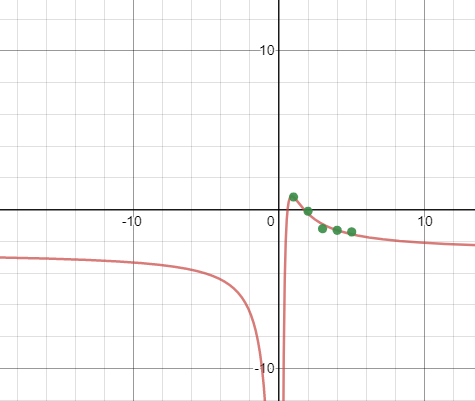
, , , ,

, , ,

получим:

Решая эту систему, находим: , , .

Уравнение искомой функции имеет вид: .



**ЗАДАНИЕ 2.**

**2.1.** Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. Решить задачу Коши.

**Решение.**

**1)** Определим тип дифференциального уравнения. Для данного уравнения это можно сделать двумя способами (на выбор).

**1 способ.**

Разрешим уравнение относительно производной .

Рассмотрим функцию , стоящую в правой части уравнения.

Это однородная функция нулевого измерения, так как .

Следовательно, данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией нулевого измерения в правой части, то есть уравнением вида .

**2 способ.**

Запишем уравнение в дифференциалах (т.е. приведем к виду  или ).

.

Здесь , .

;. Следовательно,  и  – однородные функции 1-го измерения, а значит,  – однородное дифференциальное уравнение. Любое однородное уравнение можно привести к виду . Сделаем это, разрешив исходное уравнение относительно производной.

**2) Решение уравнения.**

 .

Уравнение этого типа сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены переменной: 

Выполним данную замену для нашего уравнения.

Подставим в уравнение: .

Получим  – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: . Проинтегрируем обе части уравнения. Константу запишем в удобном виде под знаком логарифма:

 или ,  .

Вернёмся к старым переменным: . Преобразуем, получим  – общий интеграл.

**3)** Решим задачу Коши. Подставим начальные условия  в общий интеграл, чтобы определить значение константы ***с***.

  .

Тогда решение задачи Коши будет иметь вид: .

**2.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

.

**Решение.**

**1)**  – дифференциальное уравнение 3-го порядка, допускающее понижение порядка. Это уравнение вида , которое явно не содержит ***у*** (т.е. искомую функцию). Порядок такого уравнения можно понизить.

Полагая , , получим уравнение первого порядка:

 или  ().

Это линейное неоднородное уравнение. Решим его методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной).

**2)** Рассмотрим линейное однородное уравнение: . Разделим переменные: , , проинтегрируем, получим общее решение однородного уравнения:

,  .

**3)** Решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

.

Чтобы найти функцию , подставим это решение в уравнение ().

,  , ,  .

**4)** Возвращаемся к старой переменной: . Интегрируем, получаем: .

Интегрируем еще раз и находим общее решение уравнения:

.

**2.3.** Найти общее решение дифференциального уравнения

.

**Решение.**

**1)**  – это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

.

Найдем решение  однородного уравнения .

Характеристическое уравнение  имеет корни  и . Следовательно, .

**2)** Найдем частное решение .

Т.к. уравнение имеет правую часть специального вида, значит, она представима как . Тогда частное решение будет иметь вид:

 ,

где ,  и  – многочлены с неопределенными коэффициентами, *k* – кратность корня  характеристического уравнения.

В данном уравнении правая часть специального вида является суперпозицией двух функций, т.е. , поэтому частное решение имеет вид: , где каждая из функций находится по формуле . Найдем  и  для соответствующих  и .

**2.1)** .

Здесь , ; , ,  .

, ,  . Эти значения не являются корнями характеристического уравнения, т.е. , поэтому  будем искать в виде:

.

Для нахождения неопределенных коэффициентов *А* и *В* подставляем  в левую часть исходного уравнения и приравниваем соответствующей функции .

Имеем: , .

Получаем: .

Отсюда: 

Решая систему, получаем: , , следовательно,

.

**2.2)** . Это частный случай правой части специального вида, когда .

Здесь: , .

, ,   – это корень характеристического уравнения, , поэтому  следует искать в виде:

 или .

Подставляем  в уравнение, в правой части – только .

Имеем: , .

Получаем: .

Преобразуем: .

Отсюда имеем: 

Из системы находим: , , , поэтому .

**2.3)** ,  .

**3)** Окончательно получаем:

.

**2.4.** Указать структуру общего решения дифференциального уравнения, не находя коэффициентов его частных решений.

.

**Решение.**

**1)**  – это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

****.

Найдем решение  однородного уравнения: .

Характеристическое уравнение  имеет корни ,  и . Следовательно,

.

**2)** Найдем вид частного решения .

После объединения соответствующих слагаемых получаем правую часть специального вида , где , , . Тогда .

Укажем вид каждого решения .

**2.1)**  – частный случай.

Здесь: , .

, ,   – это корень характеристического уравнения. Таких корней два,  , 

.

**2.2)**  – частный случай.

, .

, ,   – не является корнем характеристического уравнения,  , 

.

**2.3)** .

, ; , ,  .

, ,   – это корни характеристического уравнения,  , 

.

**3)** ****.

**ЗАДАНИЕ 3.**

**3.1.** Исследовать числовой ряд на сходимость.

**а)** ****.

**Решение.**

Воспользуемся признаком Даламбера.

, следовательно,

ряд сходится по признаку Даламбера.

**б)** .

**Решение.**

Воспользуемся радикальным признаком Коши.

, следовательно, ряд сходится по

радикальному признаку Коши.

**3.2.** Найти область сходимости степенного ряда .

**Решение.**

**1)** Степенной ряд сходится абсолютно в интервале . Вне этого интервала ряд расходится. На границах требуются дополнительные исследования.

Радиус сходимости *R* может быть найден по формулам:

 или .

Имеем: , следовательно, ряд сходится абсолютно в области  или .

**2)** Исследуем сходимость ряда на границах области.

**2.1)** .

Подставляя это значение в исходный ряд, получим

 – гармонический ряд,

он расходится.

**2.2)** .

В этой точке имеем  – знакочередующийся ряд.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей . Так как данный ряд расходится, то знакочередующийся ряд абсолютно не сходится.

Проверим условную сходимость, воспользовавшись признаком Лейбница.

Последовательность  монотонно убывает, так как



, следовательно, ряд сходится условно по признаку Лейбница.

**3)** Вывод: область сходимости степенного ряда .

**3.3.** Вычислить определенный интеграл  с точностью , представив подынтегральную функцию в виде степенного ряда.

**Решение.** Обозначим: .Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Для этого в основном разложении функции

 , 

подставим  вместо :

, .

Тогда,

.

Интервал  области сходимости , поэтому проинтегрируем ряд на отрезке :



Получен знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому для вычисления его суммы с точностью  возьмем столько членов ряда, чтобы модуль первого отброшенного был меньше заданной точности.

Замечаем, что одиннадцатый член ряда .

Следовательно, чтобы вычислить интеграл с точностью до , достаточно взять десять членов ряда.



**Ответ:** .

**3.4.** Функцию  разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг.

**Решение.** Известно, что в ряд по синусам кратных дуг раскладываются нечетные функции, следовательно, необходимо доопределить нашу функцию в интервал  нечетным образом, т.е. симметрично относительно начала координат.

~; ,

тогда для нашей функции при  имеем:

.

Для вычисления первого интеграла воспользуемся формулой:

,

во втором интеграле используем формулу интегрирования по частям

; .

Тогда,











Значит, ~.

Ряд сходится к функции на промежутке , за пределами этого интервала к периодическому продолжению картины интервала  на всю числовую ось в граничных точках и точках разрыва к среднему арифметическому левого и правого пределов.























**Ответ**: ~.