Практическое задание Урок 4

ЧАСТЬ 1

1. **Решить систему уравнений методом Гаусса:** $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0} \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & |+0 \\ 2 & 1 & -1 & +1 & |-2 \\ 1 & 1 & -3 & +1 & |+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & |+0 \\ 0 & -1 & +1 & +6 & |-2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & |4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 6x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_4 = c$$

$$x_3 = \frac{4 - 3c}{-2} = 1.5c - 2$$

$$x_2 = 2 + 1.5c - 2 + 6c = 7.5c$$

$$x_1 = -7.5c + 1.5c - 2 + 2c = -4c - 2$$

2. **Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:**

a. $\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 - x_2 + x_3 = 4} \\ \boldsymbol{2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 = 0} \end{cases}$

In [1]:
```
import numpy as np
```

In [2]:
```
at = np.array([[3,-1,1,4],[2,-5,-3,-17],[1,1,-1,0]])
a = np.array([[3,-1,1],[2,-5,-3],[1,1,-1]])
print(at)
print(a)
```

```
[[  3  -1   1   4]
 [  2  -5  -3 -17]
 [  1   1  -1   0]]
[[ 3 -1  1]
 [ 2 -5 -3]
 [ 1  1 -1]]
```

In [11]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(at)
print(f'Ранг матрицы At: {r}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A:  {r}')
```

```
Ранг матрицы At: 4
Ранг матрицы A:  4
```

$$rankA = rank\tilde{A} = n$$

система линейных уравнений – совместна, имеет единственное решение

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2} \\ \boldsymbol{3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5} \end{cases}$

In [12]:
```
at = np.array([[2,-4,6,1],[1,-2,3,-2],[3,-6,9,5]])
a = np.array([[2,-4,6],[1,-2,3],[3,-6,9]])
print(at)
print(a)
```

```
[[ 2 -4  6  1]
 [ 1 -2  3 -2]
 [ 3 -6  9  5]]
[[ 2 -4  6]
 [ 1 -2  3]
 [ 3 -6  9]]
```

In [13]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(at)
print(f'Ранг матрицы At: {r}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A:  {r}')
```

```
Ранг матрицы At: 2
Ранг матрицы A:  1
```

$$rankA < rank\tilde{A}$$

система линейных уравнений – несовместна, не имеет решений

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4} \\ \boldsymbol{3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2} \end{cases}$

In [14]:
```
at = np.array([[1,2,5,4],[3,1,-8,-2]])
a = np.array([[1,2,5],[3,1,-8]])
print(at)
print(a)
```

```
[[ 1  2  5  4]
 [ 3  1 -8 -2]]
[[ 1  2  5]
 [ 3  1 -8]]
```

In [15]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(at)
print(f'Ранг матрицы At: {r}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы A:  {r}')
```

```
Ранг матрицы At: 2
Ранг матрицы A:  2
```

$$rankA = rank\tilde{A} \ < n$$

система линейных уравнений – совместна, имеет бесконечное множество решений

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & |3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & |4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & |1 \end{pmatrix}$

In [8]:
```
at = np.array([[1,3,-2,4,3],[0,5,0,1,2],[0,0,3,0,4],[0,0,0,2,1]])
a = np.array([[1,3,-2,4],[0,5,0,1],[0,0,3,0],[0,0,0,2]])
print(at)
print(a)
```

```
[[ 1  3 -2  4  3]
 [ 0  5  0  1  2]
 [ 0  0  3  0  4]
 [ 0  0  0  2  1]]
[[ 1  3 -2  4]
 [ 0  5  0  1]
 [ 0  0  3  0]
 [ 0  0  0  2]]
```

In [9]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(at)
print(f'Ранг матрицы: {r}')
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы: {r}')
```

```
Ранг матрицы: 4
Ранг матрицы: 4
```

$$rankA = rank\tilde{A} = n$$

система линейных уравнений – совместна, имеет единственное решение

4. **Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей** $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & |\boldsymbol{a} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & |\boldsymbol{b} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & |\boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ **Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |a \\ 0 & -3 & -6 & |b-4a \\ 0 & -6 & -12 & |c-7a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & |a \\ 0 & -3 & -6 & |b-4a \\ 0 & 0 & 0 & |(c-7a)-2(b-4a) \end{pmatrix}$$

система линейных уравнений несовместна при

$$c - 2b - 3a \neq 0$$

ЧАСТЬ 2

1. **Решить систему уравнений методом Крамера:**

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 2x_2 = 1} \\ \boldsymbol{3x_1 - 4x_2 = 7} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = 5$$

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = 2$$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 - 3x_3 = -2} \\ \boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

In [16]:
```
a=np.array([[2,-1,5],[1,1,-3],[2,4,1]])
a1=np.array([[10,-1,5],[-2,1,-3],[1,4,1]])
a2=np.array([[2,10,5],[1,-2,-3],[2,1,1]])
a3=np.array([[2,-1,10],[1,1,-2],[2,4,1]])
```

In [18]:
```
print(f'Определитель A: {np.linalg.det(a):.0f}')
print(f'Определитель A1:{np.linalg.det(a1):.0f}')
print(f'Определитель A2:{np.linalg.det(a2):.0f}')
print(f'Определитель A3:{np.linalg.det(a3):.0f}')
```

```
Определитель A: 43
Определитель A1:86
Определитель A2:-43
Определитель A3:43
```

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

2. **Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:**

a. $$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{3} & \mathbf{26} & \mathbf{30} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}_{l_{21}=2,\ \ l_{31}=3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{l_{32}=4}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{18} & \mathbf{29} & \mathbf{18} \\ \mathbf{4} & \mathbf{22} & \mathbf{53} & \mathbf{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}_{l_{21}=2, l_{31}=3, l_{41}=4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix}_{l_{32}=5, l_{42}=6} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{l_{43}=7}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1} \\ \mathbf{11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6} \\ \mathbf{9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -9{,}5 \end{pmatrix}_{l_{21}=5{,}5,\ \ l_{31}=4{,}5} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 0 & 17{,}295 \end{pmatrix}_{l_{32}=2{,}33}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5{,}5 & 1 & 0 \\ 4{,}5 & 2{,}33 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ly = b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5{,}5 & 1 & 0 \\ 4{,}5 & 2{,}33 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 1$$
$$5.5y_1 + y_2 = -6 \quad => \quad y_2 = -11{,}5$$
$$4{,}5 * 1 + 2{,}33 * (-11{,}5) + y_3 = -5 \quad => \quad y_3 = 17{,}295$$

$$\boldsymbol{Ux = y}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 0 & 17{,}295 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 1 \\ -11.5 \\ 17.295 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1$$
$$1{,}5x_2 - 11{,}5 * 1 = -11.5 \quad => \quad x_2 = 0$$
$$2 * x_1 + 1 * 0 + 3 * 1 = 1 \quad => \quad x_1 = -1$$

4. Решить систему линейных уравнений методом Холецкого:

$$\begin{cases} \mathbf{81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531} \\ \mathbf{-45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460} \\ \mathbf{45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193} \end{cases}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21}l_{31}) = \frac{1}{5}(-15 - (-5) * 5) = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$$

$$9y_1 = 531, \quad => \quad y_1 = 59$$

$$-5 * 59 + 5 * y_2 = -460, \quad => \quad y_2 = -33$$

$$5 * 59 + 2 * (-33) + 3 * y_3 = 193 \quad => \quad y_3 = -12$$

$$L^T x = y$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 59 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = -12 \quad => \quad x_3 = -4$$
$$5x_2 + 2 * (-4) = -33 \quad => \quad x_2 = -5$$
$$9 * x_1 - 5 * (-5) + 5 * (-4) = 59 \quad => \quad x_1 = 6$$