Практическое задание Урок 3

1. **Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей** $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Найдем собственные значения линейного оператора, составив и решив характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$D = 1 => \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$$

Собственные вектора:

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$1.)\ \lambda = \lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}, \quad x_1 = -2x_2$$

Собственный вектор $\overline{u_1} = (2, -1)$

$2.)\ \lambda = \lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \quad x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

Собственный вектор $\overline{u_2} = (3, -2)$

In [2]:
```
a = np.array([[-1, -6], [2, 6]])
w, v = np.linalg.eig(a)

print(f'Матрица A:\n{a}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы, нормированные:\n{v}')
print(f'Собственный вектор1 приведённый к x1=2: \n{v[:,0]*(2/v[0,0])}')
print(f'Собственный вектор2 приведённый к x1=3: \n{v[:,1]*(3/v[0,1])}')
```

```
Матрица A:
[[-1 -6]
 [ 2  6]]
Собственные значения:
[2. 3.]
Собственные векторы, нормированные:
[[-0.89442719  0.83205029]
 [ 0.4472136  -0.5547002 ]]
Собственный вектор1 приведённый к x1=2:
[ 2. -1.]
Собственный вектор2 приведённый к x1=3:
[ 3. -2.]
```

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор является для него собственным.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - \text{собственное значениение}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_1 = 0 \\ -x_2 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \forall x_{1,} \forall x_2, \overline{u} = (x_1, x_2) - \text{является собственным}$$

In [3]:
```
a = np.array([[-1, 0], [0, -1]])
w, v = np.linalg.eig(a)

print(f'Матрица А:\n{a}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица А:
[[-1  0]
 [ 0 -1]]
Собственные значения:
[-1. -1.]
Собственные векторы:
[[1. 0.]
 [0. 1.]]
```

3. Пусть линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Установить, является ли вектор x = (1, 1) собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1+1 = \lambda \\ -1+3 = \lambda \end{cases} = \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{вектор} = (1{,}1) \text{ является собственным вектором линейного оператора,}$$

и его собственное значение составляет $\lambda = 2$.

In [4]:
```
a = np.array([[1, 1], [-1, 3]])
w, v = np.linalg.eig(a)

print(f'Матрица А:\n{a}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')

print(f'Собственный вектор1 приведённый к x1=1:\n{v[:,0]*(1/v[0,0])}')
print(f'Собственный вектор2 приведённый к x1=1:\n{v[:,1]*(1/v[0,1])}')
```

```
Матрица А:
[[ 1  1]
 [-1  3]]
Собственные значения:
[2.00000002 1.99999998]
Собственные векторы:
[[ 0.70710677 -0.70710679]
 [ 0.70710679 -0.70710677]]
Собственный вектор1 приведённый к x1=1:
[1.         1.00000002]
Собственный вектор2 приведённый к x1=1:
[1.         0.99999998]
```

4. Пусть линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Установить, является ли вектор x = (3, −3, −4) собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 - 9 + 0 = 3\lambda \\ 9 + 0 + 0 = -3\lambda \\ 0 + 0 - 12 = -4\lambda \end{cases} = \begin{cases} 3\lambda = -9 \\ 3\lambda = \ -9 \\ 4\lambda = 12 \end{cases} = \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

вектор $= (3, \mathbf{-3}, -4)$ не является собственным вектором линейного оператора,

In [5]:
```
a = np.array([[0,3, 0], [3,0,0],[0,0,3]])
w, v = np.linalg.eig(a)

print(f'Матрица A:\n{a}')
print(f'Собственные значения:\n{w}')
print(f'Собственные векторы:\n{v}')

print(f'Собственный вектор1 приведённый к x1=3:\n{v[:,0]*( 3/v[0,0])}')
print(f'Собственный вектор2 приведённый к x1=3:\n{v[:,1]*(3/v[0,1])}')
```

```
Матрица A:
[[0 3 0]
 [3 0 0]
 [0 0 3]]
Собственные значения:
[ 3. -3.  3.]
Собственные векторы:
[[ 0.70710678 -0.70710678  0.        ]
 [ 0.70710678  0.70710678  0.        ]
 [ 0.          0.          1.        ]]
Собственный вектор1 приведённый к x1=3:
[3. 3. 0.]
Собственный вектор2 приведённый к x1=3:
[ 3. -3. -0.]
```