Практическое задание Урок 1

Часть 1.

1. **Исследовать на линейную зависимость:**

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = x + 1, \quad f_4(x) = x - e^x$$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

$$f_1 + f_2 + (-1) f_3 + f_4 = 0$$

$$\exists \lambda_i, \ \lambda_i \neq 0 \quad => \quad f_1, f_2, f_3, f_4 - \text{линейно зависимые}$$

2. **Исследовать на линейную зависимость:**

$$f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = (x+1)^2$$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

$$0.5 f_1 + 2 f_2 + f_3 + (-1) f_4 = 0$$

$$\exists \lambda_i, \ \lambda_i \neq 0 \quad => \quad f_1, f_2, f_3, f_4 - \text{линейно зависимые}$$

3. **Найти координаты вектора x = (2,3,5) ∈ R^3 в базисе b1 = (0,0,10), b2 = (2,0,0), b3 = (0,1,0)**

x = (0.5, 1, 3)

4. **Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2$ ∈ R^3 [x]:**

a. в базисе 1, x, x^2 - (2, -2, 3)
b. в базисе x^2, x-1, 1 - (3, -2, 0)

5. **Установить, является ли линейным подпространством:**

a. совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

совокупность векторов типа (0, a, b) U (a, 0, b) U (0, 0, b) не является линейным пространством т.к.

$$(0, a, b) + (c, 0, d) = (c, a, b + d) - \notin (0, \mathrm{a}, \mathrm{b}) \cup (\mathrm{a}, 0, \mathrm{b}) \cup (0, 0, \mathrm{b})$$

b. все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

1. Сумма векторов:

$$x = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * u_i)$$

$$y = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i * u_i)$$

$$z = x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \xi_i) * u_i = (\sum_{i=1}^{n} \eta_i * u_i)$$

$$\text{т.к. } \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \xi_i \in \mathbb{R} => (\lambda_i + \xi_i) = \eta_i \in \mathbb{R}$$

вектор z (сумма векторов x и y) останется линейной комбинацией векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

2. Произведение на скаляр

$$x = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * u_i \ )$$

$$z = \alpha x = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha * \lambda_i * u_i \ \right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i * u_i$$

$$\text{т.к. } \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R} => (\alpha * \lambda_i) = \eta_i \in \mathbb{R}$$

вектор z (произведение вектора x на скаляр а) останется линейной комбинацией векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ образуют линейной подпространство.

Часть 2.

1. **Найти скалярное произведение векторов x, y ∈ R:**

а) x = (0,−3,6), y = (−4,7,9)

$$(x, y) = 0 * (-4) + (-3) * 7 + 6 * 9 = -21 + 54 = 33$$

б) x = (7,−4,0,1), y = (−3,1,11,2)

$$(x, y) = 7 * (-3) + (-4) * 1 + 0 * 11 + 1 * 2 = \ -21 - 4 + 2 = -23$$

2. **Найти нормы векторов (4,2,4) и (12,3,4) и угол между ними.**

$$x = (4, 2, 4), \qquad y = (12, 3, 4)$$

$$\|x\|_1 = |4| + |2| + |4| = 10$$

$$\|y\|_1 = \ |12| + |3| + |4| = 19$$

$$\|x\|_2 = \ \sqrt{4^2 + \ 2^2 + \ 4^2} = 6$$

$$\|y\|_2 = \ \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(x, y)}{\|x\|_2 * \|y\|_2} = \frac{4 * 12 + 2 * 3 + 4 * 4}{6 * 13} = \frac{70}{78} \ \approx 0.897$$

$$\varphi = \arccos(0.897) \ \approx \ 26.23^0$$

3. **Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:**

а) произведение длин векторов;

длину вектора считаем по норме l_2

1) (x, y) = (y, x);

$$\|x\|_2 * \ \|y\|_2 = \|y\|_2 * \ \|x\|_2$$

2) (λx, y) = λ(x, y);

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = \lambda * \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \lambda * \|x\|_2$$

$$\|\lambda x\|_2 * \|y\|_2 = \lambda * \|x\|_2 * \|y\|_2 = \lambda * (\|x\|_2 * \|y\|_2)$$

3) $(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

$$\|x_1 + x_2\|_2 * \|y\|_2 = (\|x_1\|_2 * \|y\|_2) + (\|x_2\|_2 * \|y\|_2) =>$$

$$\|x_1 + x_2\|_2 = \|x_1\|_2 + \|x_2\|_2 - \text{утверждение не верное т. к. длинна суммарного вектора} \\ \leq \text{суммы длин данных векторов}$$

4) (x, x) ≥ 0, причем (x, x) = 0 ⇔ x = 0.

Пространство, где скалярное произведение задано, как произведение длин векторов, не является евклидовым т.к. не выполняется 3 аксиома.

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

1) (x, y) = (y, x);

$$3 * \|x\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi) = 3 * \|y\|_2 * \|x\|_2 * \cos(\varphi)$$

2) (λx, y) = λ(x, y);

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = \lambda * \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \lambda * \|x\|_2$$

$$3 * \|\lambda x\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi) = 3 * \lambda * \|x\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi) = \lambda * (3 * \|x\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi))$$

3) $(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

$$3 * \|x_1 + x_2\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi_{sum}) = (3 * \|x_1\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi_1)) + (3 * \|x_2\|_2 * \|y\|_2 * \cos(\varphi_2)) =>$$

$$\|x_1 + x_2\|_2 * \cos(\varphi_{sum}) = \|x_1\|_2 * \cos(\varphi_1) + \|x_2\|_2 * \cos(\varphi_2) - \text{утверждение верное}$$

т.к. проекция суммарного вектора x_1+x_2 на y равна сумме проекций векторов x_1 и x_2 на вектор y

4) (x, x) ≥ 0, причем (x, x) = 0 ⇔ x = 0.

утроенное обычное скалярное произведение можно представить как $3 * (x, y) = (3x, y)$, по 2 аксиоме

$$=> (3x, y) = (x_0, y) - \text{обычное скалярное произведение} => \text{выполняется 4 аксиома.}$$

Пространство, где скалярное произведение задано, как утроенное обычное скалярное произведение векторов является евклидовым

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3:

а) (1,0,0), (0,0,1);

координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные элементы

$$x = (\xi_1 e_{1,}\ \ \xi_2 e_2,\ \ \xi_3 e_3),\ \ x \in\ \mathbb{R}^3$$

e_3 – базисный элемент не определён. => (1,0,0), (0,0,1) – не являются базисом пространства R^3

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1)$

в евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ называется ортонормированным, если

$$(e_i e_j) = 0\ \forall\ i \neq j \quad \text{и}\ (e_i e_i) = 1\ \forall\ i \in [1, 3]$$

$$(e_1 e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) * \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 * 0\right) = 0$$

$$(e_1 e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) * 0 + 0 * 1\right) = 0$$

$$(e_2 e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} * 0 + 0 * 1\right) = 0$$

$$(e_1 e_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) * \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 * 0\right) = 1$$

$$(e_2 e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 * 0\right) = 1$$

$$(e_3 e_3) = (0 * 0 + 0 * 0 + 1 * 1) = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1) - \text{является ортонормированным базисом } \mathbb{R}^3$$

в) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(0,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0, 1)$

$$(e_1 e_2) = \left(\frac{1}{2} * 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0, 1) - \text{не является ортонормированным базисом } \mathbb{R}^3$$

г) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

$$(e_1 e_2) = (1 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0) = 0$$

$$(e_1 e_3) = (1 * 0 + 0 * 0 + 0 * 1) = 0$$

$$(e_2 e_3) = (0 * 0 + 1 * 0 + 0 * 1) = 0$$

$$(e_1 e_1) = (1 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0) = 1$$

$$(e_2 e_2) = (0 * 0 + 1 * 1 + 0 * 0) = 1$$

$$(e_3 e_3) = (0 * 0 + 0 * 0 + 1 * 1) = 1$$

$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ — является ортонормированным базисом $\mathbb{R}^3$