Практическое задание Урок 2

Часть 1.

1. **Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:**
   a. A — матрица 4×2, B — матрица 4×2;

Не определены - AB и BA

   b. A — матрица 2×5, B — матрица 5×3;

Определены: AB - 2x3
Не определены BA

   c. A — матрица 8×3, B — матрица 3×8;
Определены: AB – 8x8, BA – 3x3

   d. A — квадратная матрица 4×4, B — квадратная матрица 4×4.
Определены: AB – 4x4, BA – 4x4

2. **Найти сумму и произведение матриц:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **и** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*4+0*(-2) & (-1)*1+(-2)*5 \\ 4*3+0*0 & (-1)*3+5*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B * A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4*1+(-1)*3 & (-2)*4+0*(-1) \\ 1*0+3*5 & (-2)*0+5*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

In [2]:
```
a = np.array([[1,-2],[3,0]])
b = np.array([[4,-1],[0,5]])
print(f'Матрица A:\n{a}\n')
print(f'Матрица B:\n{b}')
```

```
Матрица A:
[[ 1 -2]
 [ 3  0]]

Матрица B:
[[ 4 -1]
 [ 0  5]]
```

In [3]:
```
print(f'Сумма A + B:\n{a+b}')
```

```
Сумма A + B:
[[ 5 -3]
 [ 3  5]]
```

In [4]:
```
print(f'Произведение A * B:\n{a@b}')
```

```
Произведение A * B:
[[  4 -11]
 [ 12  -3]]
```

In [5]:
```
print(f'Произведение B * A:\n{b@a}')
```

```
Произведение B * A:
[[ 1 -8]
 [15  0]]
```

3. **Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию 3A−2B+4C для матриц** $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$3A - 2B + 4C = 3 * \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

In [6]:
```python
a = np.array([[1,7],[3,-6]])
b = np.array([[0,5],[2,-1]])
c = np.array([[2,-4],[1,1]])
```

In [7]:
```python
print(f'Матрица A:\n{a}\n')
print(f'Матрица B:\n{b}\n')
print(f'Матрица C:\n{c}')
```

```
Матрица A:
[[ 1  7]
 [ 3 -6]]

Матрица B:
[[ 0  5]
 [ 2 -1]]

Матрица C:
[[ 2 -4]
 [ 1  1]]
```

In [8]:
```python
3*a-2*b+4*c
```

Out[8]:
```
array([[ 11,  -5],
       [  9, -12]])
```

4. **Дана матрица** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$**, вычислить** AA^T **и** A^TA

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4*4+1*1 & 5*4+(-2)*1 & 4*2+3*1 \\ 4*5+(-2)*1 & 5*5+(-2)*(-2) & 5*2+3*(-2) \\ 4*2+3*1 & 2*5+3*(-2) & 2*2+3*3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4*4+5*5+2*2 & 4*1+5*(-2)+2*3 \\ 4*1+5*(-2)+3*2 & 1*1+(-2)*(-2)+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

In [13]:
```python
a =np.array([[4,1],[5,-2],[2,3]])
print(f'Матрица A:\n{a}')
```

```
Матрица A:
[[ 4  1]
 [ 5 -2]
 [ 2  3]]
```

In [14]:
```python
print(f'Матрица транспонированная A:\n{a.T}')
```

```
Матрица транспонированная A:
[[ 4  5  2]
 [ 1 -2  3]]
```

In [16]:
```python
print(f'A*A.T:\n{a @ a.T}')
```

```
A*A.T:
[[17 18 11]
 [18 29  4]
 [11  4 13]]
```

In [17]:
```python
print(f'A.T*A:\n{a.T @ a}')
```

```
A.T*A:
[[45  0]
 [ 0 14]]
```

Часть 2.

1. **Вычислить определитель:**

a.) $\begin{vmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{vmatrix} = \sin(x) * \sin(x) + \cos(x) * \cos(x) = 1$

b.) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 * 5 * 9 = 180$

```
In [18]: a=np.array([[4,2,3],[0,5,1],[0,0,9]])

In [19]: print(f'Определитель:\n{np.linalg.det(a):.0f}')

Определитель:
180
```

c.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (5 * 9 - 6 * 8) - 2 * (4 * 9 - 7 * 6) + 3 * (4 * 8 - 5 * 7)$

$$= -3 - 2 * (-6) + 3 * (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

```
In [21]: a=np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])

In [22]: print(f'Определитель:\n{np.linalg.det(a):.0f}')

Определитель:
-0
```

2. **Определитель матрицы А равен 4. Найти:**

   a. $\det(A^2) = \det(A)*\det(A) = 16$
   Для двух квадратных матриц одинакового размера det(AB)=detA·detB.

   b. $\det(A^T) = \det(A) = 4$
   Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной:

   c. $\det(2A) = 2^n * \det(A) = 2^n*4 = 2^{n+2}$, где n – порядок матрицы
   Умножение строки или столбца матрицы на число λ приведет к умножению определителя матрицы на то же число.

3. **Доказать, что матрица** $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ **вырожденная**

Матрица называется *сингулярной*, или *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Если две строки (столбца) матрицы линейно зависимы, то определитель этой матрицы равен нулю.

Строки 1 и 2 линейно зависимы (-2)*Строка1 = Строка2 => det = 0 => матрица вырожденная

4. **Найти ранг матрицы:**

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a. Строка 3 – сумма 1 и 2 => $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Матрица имеет ранг = 2

In [23]:
```
a=np.array([[1,2,3],[1,1,1],[2,3,4]])
```

In [24]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы: {r}')
```

```
Ранг матрицы: 2
```

b.) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Матрица имеет ранг = 3

In [25]:
```
a=np.array([[0,0,2,1],[0,0,2,2],[0,0,4,3],[2,3,5,6]])
```

In [26]:
```
r = np.linalg.matrix_rank(a)
print(f'Ранг матрицы: {r}')
```

```
Ранг матрицы: 3
```