

Практическое задание №5

1. Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания μ с надежностью 0.95, если выборочная средняя $\bar{X} = 80$, а объем выборки $n = 256$.

$M(X) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – доверительный интервал. Используем Z распределение т. к. $\sigma_{г.с.}$ определена

$$\alpha = 100\% - 95\% = 5\%, \quad \frac{\alpha}{2} = 2.5\%$$

$$f(Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.975, \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$80 \pm 1.96 * \frac{16}{\sqrt{256}} = 80 \pm 1.95$$

[78.04, 81.96] – доверительный интервал

2. В результате 10 независимых измерений некоторой величины X , выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные:

6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1

Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0.95.

$M(X) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – доверительный интервал. Используем распределение Стьюдента т. к. $\sigma_{г.с.}$ не определена

$$M(X) = \frac{6.9 + 6.1 + 6.2 + 6.8 + 7.5 + 6.3 + 6.4 + 6.9 + 6.7 + 6.1}{10} = 6.59$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2}{n - 1}} \approx 0.45$$

$$\frac{\alpha}{2} = 2.5\%, \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$$

$$6.59 \pm 2.262 * \frac{0.45}{\sqrt{10}} \approx 6.59 \pm 0.32$$

[6.27, 6.91] – доверительный интервал

3, 4 задачи через тест гипотезы решаем

3. Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм.

Используя односторонний критерий с $\alpha=0.05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n=100$ шариков средний диаметр оказался равным 17.5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв. мм.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

используем Z – распределение т. к. задана дисперсия

$$f(Z_{\text{таб}}) = 0.95 \Rightarrow Z_{\text{таб}} = 1.65$$

$$Z_{\text{расч}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(17.5 - 17)}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}}} = \frac{0.5}{0.2} = 2.5$$

$$Z_{\text{расч}} > Z_{\text{таб}} \Rightarrow H_1 - \text{верна}, \quad \mu > \mu_0$$

4. Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г.
Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет:
202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190.
Известно, что их веса распределены нормально.
Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

используем распределение Стьюдента т. к. не задана дисперсия

$$\frac{\alpha}{2} = 0.5\%, \quad \Rightarrow \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\text{таб}} = 3.250$$

$$M(X) = \frac{202 + 203 + 199 + 197 + 195 + 201 + 200 + 204 + 194 + 190}{10} = 198.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2}{n - 1}} \approx 4.45$$

$$Z_{\text{расч}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(198.5 - 200)}{\frac{4.45}{\sqrt{10}}} = \frac{-1.5}{1.41} = -1.06$$

$$|Z_{\text{расч}}| < Z_{\text{таб}} \Rightarrow H_0 - \text{верна}, \quad \mu = \mu_0$$