Семинарское занятие №21

Воробьёв Сергей

Март 2020

Признаки сходимости несобственного интеграла

Пусть $f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad x \in [a,b)$, также пусть данные функции интегрируемы $\forall \xi : a < \xi < b : x \in [a, \xi]$. Тогда из сходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b g(x)dx$, а из расходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b f(x)dx \ (I)$

Пусть $f(x) \geq 0, g(x) > 0 \ \ x \in [a,b)$, также пусть данные функции интегрируемы $\forall \xi : a < \xi < b : x \in [a, \xi]$. Тогда, если $lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно (II)

Критерий Коши

$$\int_a^b f(x)dx \to \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta \in [a,b) : \forall \eta_1, \eta_2 \in (\eta, b) \Rightarrow \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Говорят, что несобственный интеграл сходится абсолютно на $[a,b)$, если:

$$\int_a^b |f(x)|dx \to$$

Говорят, что несобственный интеграл сходится условно на $[a,b)$, если $\int_a^b f(x)dx \not\to$, но:

$$\int_a^b f(x)dx \to$$

Признаки Абеля и Дирихле

Пусть $h(x) = f(x) * g(x)$ определена на $[a,b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx \to$, если:

Дирихле

1)$f(x)$ - непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,b)$

2)$g(x)$ - непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,b)$ причем $lim_{x \to b-0} g(x) = 0$

Абель
1)$f(x)$ - непрерывна на $[a,b)$ и $\int_a^b f(x)dx \to$
2)$g(x)$ - ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,b)$

Задание 1. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)dx$$

Решение:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)dx$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(sin(2t))dt$$

$$I = 2\bigg(\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln2dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(cost)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(sint)dt\bigg)$$

$$I = 2\bigg(\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln2dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ln(cos(\frac{\pi}{2} - u))du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(sint)dt\bigg)$$

$$I = \frac{\pi ln2}{2} + 2I$$

$$I = -\frac{\pi ln2}{2}$$

Ответ: $-\frac{\pi ln2}{2}$

Задание 2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx$$

Решение:
Пусть $f(x) = \frac{1}{1-x^3}, g(x) = \frac{1}{1-x}$

$$lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

Так как $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx \not\to$, то $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx \not\to$
Ответ: расходится

Задание 3. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}sin(\sqrt{x})}dx$$

Решение:

Так как проблемной точкой является $x = 0$, то нужно посмотреть как ведет себя функция в окрестности данной точки

$$\frac{ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}sin(\sqrt{x})} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

А такой интеграл сходится

Ответ: сходится

Задание 4.Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}$$

Решение:

По признаку Дирихле положим $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$, а $g(x) = 1-x$

Следовательно, $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ сходится по признаку Дирихле

Ответ: сходится

Задание 5.Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}|sin(x)|}{\sqrt{x}}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}$$

Решение:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}|sin(x)|}{\sqrt{x}}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}$$

Интеграл сходится абсолютно

Ответ: сходится абсолютно