Семинарское занятие №2

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Задание 1

В семье два ребёнка, причем один из детей мальчик. Какова вероятность того, что в семье два мальчика?

Решение:

Пусть событие $A-$ „в семье два мальчика “
Пусть событие $B-$ „в семье есть один мальчик “

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задание 2

Колоду из 52 карт раздают на четверых игроков. Один из игроков объявляет, что у него есть туз. Какова вероятность, что у него есть ещё хотя бы один туз? Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

Решение:

Хотя бы один туз $= C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$
Ровно один туз $= 4C_{48}^{12}$

Ответ: В первом случае: $1 - \frac{4C_{48}^{12}}{C_{52}^{13} - C_{48}^{13}}$, а во втором: $1 - \frac{C_{48}^{12}}{C_{51}^{12}}$

Задание 3

В коробке a белых и b чёрных шариков. Случайным образом извлекается шар. Этот шар возвращается обратно и добавляется еще c шаров одного с ним цвета.

(а) Найдите вероятность того, что при двух извлечениях шаров выбраны два белых шара

(б) Найдите вероятность того, что при двух извлечениях шаров выбраны один черный шар и один белый шар

(в) Найдите вероятность того, что при $n+m$ извлечениях появилось n белых и m чёрных шаров

Решение:

(а) Вероятность извлечения белого шара на первом шаге равна $\frac{a}{a+b}$, так как в коробке $a+b$ шаров и a из них белые по условию. Далее, так как в коробку помимо извлеченного шара добавилось c шаров, то в коробке стало $a+b+c$ шаров и $a+c$ из них белые. Следовательно, вероятность на втором шаге вытащить белый шар равна $\frac{a+c}{a+b+c}$. По правилу произведения получаем, что вероятность извлечения двух белых шаров равна

$$P_{ww} = \frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)}$$

(б) Чтобы посчитать искомую вероятность, нам необходимо учесть, что при двух извлечениях нам подходят исходы, когда мы вытащили сначала черный шар, а потом белый и наоборот. Проводя аналогичные рассуждения, как в пункте (а) получаем:

$$P_{bw} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{ba}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b+c)}$$

(в) Заметим, что при каждом извлечении в знаменатель добавляется увеличенный на c множитель, а в числитель при каждом дополнительном извлечении соответствующего цвета добавляется множитель также увеличенный на c. Поэтому, в общем случае имеем:

$$P_{mn} = C_{n+m}^{n} \frac{a(a+c)(a+2c)...(a+(n-1)c)b(b+c)(b+2c)...(b+(m-1)c)}{(a+b)(a+b+c)...(a+b+(n+m-1)c)}$$

Ответ: P_{ww}, P_{bw}, P_{mn}

Задание 4

Новичок играет три партии в теннис против двух противников: слабого и сильного. Он должен победить в двух партиях подряд. Порядок партий может быть следующий: слабый-сильный-слабый или сильный-слабый-сильный. Вероятность победить слабого p, вероятность победить сильного q, $q < p$. Результаты партий независимы в совокупности. Какой вариант предпочтительней для новичка и какова вероятность выиграть?

Решение:

Посчитаем вероятность победы в двух партиях подряд при последовательности слабый-сильный-слабый:

$$P_{wsw} = pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = 2qp(1-p) + pqp$$

Посчитаем вероятность победы в двух партиях подряд при последовательности сильный-слабый-сильный:

$$P_{sws} = qpq + qp(1-q) + (1-q)pq = 2qp(1-q) + qpq$$

Сравним полученные вероятности:

$$P_{wsw} >? P_{sws}$$

$$2qp(1-p)+pqp >?2qp(1-q)+qpq$$

$$2-p >?2-q$$

Но $p > q$, значит последовательность слабый-сильный-слабый наиболее предпочтительнее

Ответ: $2qp(1-p)+pqp$

Задание 5

(а) Приведите пример трёх событий, которые попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности?

(б) Приведите пример трёх зависимых событий, у которых вероятность пересечения равна произведению вероятностей?

(в) Приведите пример трёх событий A, B, C,таких, что A, B независимы, A, C- независимы, но, A и $B \bigcup C$- зависимые события?

Решение:

(а) Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (все исходы равновероятны)

$$A = \{\omega_1, \omega_4\}, B = \{\omega_2, \omega_4\}, C = \{\omega_3, \omega_4\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

(б) Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$(все исходы равновероятны)

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\}, B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}, C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_7, \omega_8\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{8} \neq P(A)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

(в) Подходит пример из пункта (а)

Задание 6

(а) Пусть A и B независимы. Докажите, что события A и Ω/B независимы

(б) События A, B, C попарно независимы и равновероятны, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найдите максимальное значение $P(A)$.

(в) Покажите, что для полной системы событий A, B, C (т.е. $P(A \cup B \cup C) = 1$), условия предыдущего пункта, что эти события попарно независимы и их пересечение пусто, не могут выполняться

Решение:

(а)

$$P(A \cap \Omega/B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B))$$

(б)

$$P(A) = P(B) = P(C) = p$$
$$P(A \cap B) = p^2$$
$$P(A \cap C) = p^2$$
$$P(B \cap C) = p^2$$

Так как каждое множество содержит два пересечения получаем неравенство:

$$2p^2 \le p$$
$$p \le \frac{1}{2}$$

Пример случая, когда $p = \frac{1}{2}$. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (все исходы равновероятны)

$$A = \{\omega_2, \omega_3\}$$
$$B = \{\omega_1, \omega_3\}$$
$$C = \{\omega_1, \omega_2\}$$

(в)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 1$$

$$3p - 3p^2 - 1 = 0$$
$$3p^2 - 3p + 1 = 0$$
$$p \notin R$$