Семинарское занятие №22

Воробьёв Сергей

Март 2020

Числовые ряды

Пусть дана последовательность $\{a_n\}$. Тогда числовым рядом назовем такое S, что:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частичной суммой ряда будем называть S_N, где:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Если $\exists lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - называют сходящимся, а число S его суммой

Необходимый признак сходимости

Если ряд сходится, то $a_n \Rightarrow 0$

Задание 1. Доказать формулу геометрической прогрессии:

Решение:

$$b_1 + b_2 + ... + b_N = S$$

$$qb_1 + ... + qb_N = qS$$

$$b_1 - b_{N+1} = S - qS$$

$$\frac{b_1(1-q^N)}{1-q} = S$$

Ответ: доказали

Задание 2. Вычислить ряд:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad |q| < 1$$

Решение:

По формуле суммы геометрической прогрессии получаем:

$$S = \frac{1}{1-q}$$

Ответ: $\frac{1}{1-q}$

Задание 3. Вычислить ряд:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n, \quad |q| < 1$$

Решение:

$$S = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q} + ... = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Ответ: $\frac{q}{(1-q)^2}$

Задание 4. Вычислить ряд:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}, \quad |q| < 1$$

Решение:

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + ... = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Ответ: $\frac{1}{(1-q)^2}$

Задание 5. Вычислить ряд:

$$a_n = b_{n+1} - b_n \quad lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$$

Решение:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$$

$$S = b - b_1$$

Ответ: $S = b - b_1$

Задание 6. Исследовать на сходимость:

$$a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$$

Решение:

$$a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Но $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, следовательно, исходный ряд расходится по признаку сравнения

Ответ: расходится