Семинарское занятие №14

Воробьёв Сергей

Декабрь 2019

Задание 1. Найти предел:

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2}$$

Решение:
Разложим числитель в ряд Телора:

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задание 2. Найти предел:

$$lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)-arcsin(x)}{tg(x)-sin(x)}$$

Решение:
Разложим знаменатель в ряд Тейлора, получим:

$$tg(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$tg(x)-sin(x)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Теперь разложим числитель до третьего порядка:

$$arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$arctg(x)-arcsin(x)=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Таким образом, получаем:

$$lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=-1$$

Ответ: -1

Задание 3. Вычислить ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2*\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Решение:

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2*\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k*\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)*\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}*\lambda^2*e^{\lambda}+e^{-\lambda}*\lambda*e^{\lambda}=\lambda^2-\lambda$$

Ответ: $\lambda^2-\lambda$

Задание 4.Найти предел:

$$lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x^3}$$

Решение:

Воспользуемся правилом Лопиталя. Заметим, что оно применимо n раз, так как в числителе и знаменателе выполняются все требования теоремы. Получим:

$$lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\sum f(x)e^{x^3}},\quad f(x)\geq 0$$

Получили в числителе константу, а в знаменателе бесконечно большую величину в пределе. Следовательно:

$$lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\sum f(x)e^{x^3}}=0$$

Ответ: 0

Задание 5. Найти предел:

$$lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{tgx-x}$$

Решение:

Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$lim_{x\to 0}\frac{x - sinx}{tgx - x} = lim_{x\to 0}\frac{1 - cosx}{\frac{1}{cos^2x} - 1} = lim_{x\to 0}\frac{sinx}{\frac{2sinx}{cos^3x}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$