Семинарское занятие №8

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Производная: определение и свойства

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Задание 1. Найти производную по определению

$$f(x) = C = const$$

Решение

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

Стоит отметить, что мы делим тождественный 0 на бесконечно малую величину, поэтому получаем 0

Ответ: 0

Задание 2. Найти производную по определению

$$f(x) = x^k$$

Решение

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^k - x_0^k}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^k + kx_0^{k-1}\Delta x + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2}\Delta x^2 + ... - x_0^k}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2}\Delta x + o(\Delta x) = kx_0^{k-1}$$

Ответ: kx^{k-1}

Задание 3. Найти производную по определению

$$f(x) = Cx^k$$

Решение

Вынесем константу в числителе и аналогично заданию 2 найдем предел

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x)^k - Cx_0^k}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0^k + kx_0^{k-1}\Delta x + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2}\Delta x^2 + ... - x_0^k)}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} C(kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2}\Delta x + o(\Delta x)) = Ckx_0^{k-1}$$

Ответ: Ckx^{k-1}

Задание 4. Найти производную по определению

$$f(x) = |x|$$

Решение

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{(|x_0 + \Delta x| - |x_0|)(|x_0 + \Delta x| + |x_0|)}{\Delta x(|x_0 + \Delta x| + |x_0|)} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x(|x_0 + \Delta x| + |x_0|)} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 + \Delta x}{|x_0 + \Delta x| + |x_0|} = \frac{x_0}{|x_0|}$$

Стоит отметить, что в 0 функция не определена, следовательно в данной точке у функции $|x|$ производной нет

Задание 5. Найти производную по определению

$$f(x) = sinx$$

Решение

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x_0 + \Delta x) - sinx_0}{\Delta x} = \frac{sin(\frac{\Delta x}{2})cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = cosx_0$$

Ответ: $cosx$

Задание 6. Найти производную

$$f(x) = tgx$$

Решение

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{cosx * cosx + sinx * sinx}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Ответ: $\frac{1}{cos^2 x}$

Задание 7. Найти производную

$$f(x) = arctgx$$

Решение

Будем искать производную, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции

$$y_x^{'} = \frac{1}{x_y'}$$

$$y = arctgx \Rightarrow x = tgy$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2(arctgx)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ответ: $\frac{1}{1+x^2}$

Задание 8. Найти производную

$$f(x) = arcsinx$$

Решение

Аналогично заданию 7 будем искать производную, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции

$$y_x^{'} = \frac{1}{x_y'}$$

$$y = arcsinx \Rightarrow x = siny$$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{(siny)'} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - sin(arcsinx)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Примечание: мы берем положительный корень, так как $cos(arcsinx)$ положительный ввиду области определения $arcsin$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Задание 9. Найти производную

$$f(x) = lnx$$

Решение

Аналогично заданию 7 будем искать производную, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции

$$y_x^{'} = \frac{1}{x_y'}$$

$$y = lnx \Rightarrow x = e^y$$

$$(lnx)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{lnx}} = \frac{1}{x}$$

Также можно искать производную по определению

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x_0 + \Delta x) - lnx_0}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x} + o(\Delta x)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} + o(1) = \frac{1}{x_0}$$

Ответ: $\frac{1}{x}$

Задание 10. Найти производную

$$f(x) = ctg(e^{2x})$$

Решение

Будем использовать теоерму о производной сложной функции, чтобы найти $f'(x)$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{sin^2(e^{2x})} * (e^{2x})' = -\frac{1}{sin^2(e^{2x})} * e^{2x} * (2x)' = -\frac{1}{sin^2(e^{2x})} * e^{2x} * 2 = -\frac{2e^{2x}}{sin^2(e^{2x})}$$

Ответ: $-\frac{2e^{2x}}{sin^2(e^{2x})}$