Семинарское занятие №3

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Задание 1

Имеется 10 коробок, в каждой из которых лежит a белых и b черных шаров. Из первой коробки выбирается случайным образом шар и перекладывается во вторую коробку, затем из второй коробки извлекается один шар и перекладывается в третью и т.д. Наконец, из последней коробки извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение:

Рассмотрим событие „Из первой коробки достали белый шар“$= W_1$. Вероятность события W_1 равна $P(W_1) = \frac{a}{a+b}$, так как в первой коробке находится a белых и b чёрных шаров. Аналогично для черных шаров. Рассмотрим событие „Из первой коробки достали чёрный шар“$= B_1$. Вероятность события B_1 равна $P(B_1) = \frac{b}{a+b}$

Теперь рассмотрим событие „Из второй коробки достали белый шар“. Обозначим это событие, как W_2. (Здесь и далее будем считать, что B_i = „Вероятность вытащить из i-ой коробки чёрный шар“, а W_i = „Вероятность вытащить из i-ой коробки белый шар“) Вероятность данного события распадётся на формулу полной вероятности следующим образом: $P(W_2) = P(W_2|W_1)P(W_1) + P(W_2|B_1)P(B_1) = \frac{a+1}{a+b+1}\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1}\frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$

Аналогично найдем вероятность события B_2:

$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1)+P(B_2|W_1)P(W_1) = \frac{b+1}{a+b+1}\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+b+1}\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$

Заметим, что равенства $P(B_i) = \frac{b}{a+b}$ и $P(W_i) = \frac{a}{a+b}$ будут сохраняться, так как на выбор соответсвующих шаров будут сказываться исходы, когда перед фиксированным шаром находится шар того же цвета и когда шар другого цвета. В связи с тем, что количество шаров в коробках будет увеличиваться на единицу, то при суммировании вероятностей множитель $a + b + 1$ будет сокращаться. Следовательно, заключаем, что $P(W_{10}) = \frac{a}{a+b}$

Ответ: $P(W_{10}) = \frac{a}{a+b}$

Задание 2

Цель, по которой ведётся стрельба с вероятностью $p > 0.5$ находится в пункте I и с вероятностью $(1-p)$ находится в пункте II. Имеется n снарядов, каждый из которых может быть направлен в одну из этих областей. Каждый снаряд поражает цель независимо от других снарядов с вероятностью q. Сколько снарядов надо направить в каждый из этих пунктов (использовать надо все снаряды) для того, чтобы вероятность поражения цели была максимальна, если $p = \frac{4}{5}, q = \frac{1}{2}, n = 6$

Решение:

Идея: Мы хотим получить вероятность, что хотя бы один раз цель была поражена и полученную вероятность максимизировать.

Пусть в область I было выпущено k снарядов, а в область II $n-k$ снарядов. Рассмотрим событие „Ни один снаряд не попал в цель“$= A$.

$$P(A) = P(A|in\ I)P(in\ I) + P(A|in\ II)P(in\ II) = p(1-q)^k + (1-p)(1-q)^{n-k}$$

. С вероятностью p и $1-p$ мы выбираем области, а с вероятностью $(1-q)$ мы промахиваемся. Так как мы выпустили в первую область k снарядов и выпуск снарядов независим, то получаем $(1-q)^k$, аналогично получаем $(1-q)^{n-k}$ в случае выпуска снарядов во вторую область.

Теперь найдем вероятность события „Хотя бы один раз мишень была поражена“$= B$. $P(B) = 1 - P(A) = 1 - (p(1-q)^k + (1-p)(1-q)^{n-k})$

Подставим известные нам параметры ($p = \frac{4}{5}, q = \frac{1}{2}, n = 6$)в выражение $1 - (p(1-q)^k + (1-p)(1-q)^{n-k})$. Получим:

$$P(B) = 1 - (\frac{4}{5}(1-\frac{1}{2})^k + \frac{1}{5}(1-\frac{1}{2})^{6-k})$$

Положим $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}(1-\frac{1}{2})^6$, $x = (1-\frac{1}{2})^k$. Наше выражение достигает максимума, когда $P(A) = ax - b\frac{1}{x} = 0 \to ax^2 - b = 0$.

Имеем: $x = (1-\frac{1}{2})^k = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{(1-\frac{1}{2})^6}{4}} = \frac{1}{16} \Rightarrow kln(\frac{1}{2}) = ln(\frac{1}{16}) \Rightarrow kln2 = ln16 \Rightarrow k = log_2 16 = 4$

Ответ: в первую область нужно направить 4 снаряда, а во вторую 2

Задание 3

N пользователей делятся на две группы: профессионалы (a человек) и домохозяйки (b человек). Вероятности нахождения некоторой информации в интернете для каждой из этих категорий равны p_a и p_b соответственно. Два случайно выбранных пользователя пытаются найти информацию. Какова вероятность того, что поиск увенчается успехом хотя бы для одного из них?

Решение:

Пусть искомая вероятность равна $P(A)$. Найдем вероятность того, что ни для кого поиск не увенчается успехом, а потом вычтем из единицы полученную вероятность, так мы найдем $P(A)$

Вероятность того, что пользователь не нашел искомую информацию равна $P(F) = P(F|u \in b)P(u \in b) + P(F|u \in a)P(u \in a)$, где событие F - пользователь не нашел информацию, события $u \in b$ и $u \in a$ - пользователь из группы домохозяек и пользователь из группы профессионалов соответственно:

$$S = \frac{(1-p_b)b}{a+b} + \frac{(1-p_b)a}{a+b}$$

Так как оба пользователя ищут информациб независимо, то вероятность того, что ни для кого поиск не увенчается успехом равна квадрату S

Таким образом, получаем ответ:

Ответ:

$$1 - S^2 = 1 - (\frac{(1-p_b)b}{a+b} + \frac{(1-p_b)a}{a+b})^2$$

Задание 4

Пусть в кошельке находятся две монеты: симметричная монета с вероятностью герба $\frac{1}{2}$ и несимметричная монета с вероятностью герба $\frac{1}{3}$. Наудачу выбирается и бросается одна из монет. Предположим, что выпал герб. Какова вероятность того, что выбранная монета симметричная?

Решение:

Пусть событие A - монета симметрична, B - выпал герб. Тогда $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$, так как $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|not\ A)P(not\ A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

Ответ: $\frac{3}{5}$

Задание 5

Вы написали письмо другу. С вероятностью 0.1 письмо не дойдет до почтового отделения. Если письмо попало на почту, то с вероятностью 0.2 его потеряют при сортировке. Наконец, с вероятностью 0.1 почтальон доставит письмо не по адресу. (а) С какой вероятностью письмо придет по назначению? (б) Какова вероятность, что письмо потеряли при сортировке, если ваш друг не получил письмо.

Решение:

а) Письмо придет по назначению если пройдёт все три этапа: $P(A)P(B|A)P(C|A,B) = \frac{P(A)P(B\cap A)P(A\cap B\cap C)}{P(A)P(A\cap B)} = P(A\cap B\cap C)$. Следовательно, имеем произведение $0.9 * 0.8 * 0.9$

b) $P(lost|not\ received) = \frac{P(not\ received|lost)P(lost)}{P(not\ received)} = \frac{0.2}{1-0.9*0.8*0.9}$

Ответ: а)0.648 б) 0.569

Задание 6

Агент Д. следит за передвижениями президента некоторой компании. Известно, что президент бывает в офисе с вероятностью 0.6, а на даче с вероятностью 0.4. У агента Д. есть два осведомителя, причем первый ошибается с вероятностью 0.2, а второй - с вероятностью 0.1. Первый осведомитель утверждает, что президент компании в офисе, а второй осведомитель утверждает, что он на даче. Где президент?

Решение:

Введем следующие обозначения:

$P(A_{of}) = 0.6$ - вероятность того, что президент в офисе

$P(A_{cot}) = 0.4$ - вероятность того, что президент на даче

J_{1-of} = событие „первый журналист утверждает, что президент в офисе“

J_{2-cot} = событие „второй журналист утверждает, что президент на даче“

Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо сравнить две вероятности: $P(A_{of}|J_{1-of}, J_{2-cot})$, $P(A_{cot}|J_{1-of}, J_{2-cot})$
Посчитаем первую вероятность (вторая считается аналогично): $P(A_{of}|J_{1-of}, J_{2-cot}) = \frac{P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{of})P(A_{of})}{P(J_{1-of}, J_{2-cot})} = (*) = \frac{0.8*0.1*0.6}{0.8*0.1*0.6+0.2*0.9*0.4} = 0.4$

$(*) P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{of}) = P(J_{1-of}|A_{of})P(J_{2-cot}|A_{of}) = 0.8 * 0.1$ так как осведомители ошибаются независимо, а вероятность того, что первый оказался прав $= 1 - 0.2$, а вероятность того, что второй ошибся $= 0.1$

$P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{cot})$ считается аналогично и равна $0.2 * 0.9$

$P(J_{1-of}, J_{2-cot}) = P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{of})P(A_{of}) + P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{cot})P(A_{cot})$
Стоит отметить, что условные вероятности независимы, так как ошибаются агенты независимо, но величина $P(J_{1-of}, J_{2-cot})$ независимой являться не будет, так как не будет выполняться определение независимости, если вместо условных вероятностей подставить произведение.

$P(A_{cot}|J_{1-of}, J_{2-cot}) = \frac{P(J_{1-of}, J_{2-cot}|A_{cot})P(A_{cot})}{P(J_{1-of}, J_{2-cot})} = \frac{0.2*0.9*0.4}{0.8*0.1*0.6+0.2*0.9*0.4} = 0.6$ Следовательно, президент на даче

Ответ: Президент на даче