

Семинарское занятие №25

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Поточечная сходимость

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Задание 1. Найти предельную функцию:

$$f_n(x) = x^n, \quad E = [0, 1]$$

Решение:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$$

Таким образом, предельная функция выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Ответ: искомое найдено

Задание 2. Найти предельную функцию:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad E = \mathbb{R}$$

Решение:

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2}$$

$$f(x) = 0$$

Ответ: искомое найдено

Задание 3: Исследовать на равномерную сходимость

$$f_n(x) = x^n, \quad E = [0, 1)$$

Решение:

$$f(x) = 0$$

Пусть $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$

Получили невыполнение определения равномерной сходимости

Ответ: не сходится равномерно

Задание 4. Исследовать на равномерную сходимость

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad E = [0, 1)$$

Решение:

$$f(x) = 0$$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$x^* = \frac{n}{n+1}$$

$$f_n(x^*) = (x^*)^n(1 - x^*) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Воспользуемся утверждением:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x^*) = 0$$

Ответ: сходится равномерно