Семинарское занятие №2

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Предел последовательности
Определение предела последовательностей:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Задача 1
Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$$

Решение

$$(k+1)C_n^k = kC_n^k + C_n^k = nC_{n-1}^{k-1} + C_n^k$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k = n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1} + \sum_{k=1}^{n}C_n^k = n\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k + \sum_{k=1}^{n}C_n^k = n2^{n-1} + 2^n - 1$$

Ответ: $n2^{n-1} + 2^n - 1$

Задача 2
Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k$$

Решение

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k = n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}C_n^k = n\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k - \sum_{k=1}^{n}C_n^k = n2^{n-1} - 2^n + 1$$

Ответ:$n2^{n-1} - 2^n + 1$

Задача 3

Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$$

Решение
Рассмотрим выражение $(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^{2n}$

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...)(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+...) = C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2x^4-...$$

Рассмотрим коэффициент при x^k в правой части, для того, чтобы его получить необходимо перемножить слагаемые из левой части так, чтобы в сумме они давали нужную степень из правой части

Таким образом, получаем:

$$C_n^0C_n^n - C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} - ... + C_n^nC_n^0 = (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}$$

Этот верен для четного числа n, если же оно нечетно, то ответ равен нулю, так как нечетных степеней в правой части равенства нет

Ответ: $(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}$**,** 0

Задача 4
Доказать ограниченность последовательности:

$$a_n = \frac{2n^2-1}{2+n^2}, n \geq 1$$

Решение

$$0 \leq \frac{2n^2-1}{2+n^2} \leq \frac{2n^2}{n^2} \leq 2$$

Задача 5
Доказать ограниченность последовательности сверху:

$$a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}, n \geq 1$$

Решение

$$\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{n}{n} = 1$$

Задача 6
Доказать, что последовательность убывает и доказать, что предел равен 0

$$a_n = (\frac{1}{3})^n$$

Решение

Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, оно равно $\frac{1}{3} < 1$, что значит, что последовательность убывает

Докажем теперь, что предел равен 0

$$|\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

$$nln\frac{1}{3} < ln\varepsilon$$

$$n \geq \frac{ln\varepsilon}{ln\frac{1}{3}}$$

Ответ: убывает

Задача 7

Найти предел по теореме о двух милиционеров:

$$a_n = \frac{5^n}{n}$$

Решение

Из предыдущей задачи знаем, что $\frac{1}{3^n} \to 0, n \to \infty$

Значит при больших n:

$$0 \leq \frac{5^n}{n^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

Граница снизу остается нулем, верхняя граница стремится к нулю, следовательно, по теореме о двух милиционерах a_n сходится к нулю

Задача 8

Найти предел:

$$lim_{n\to\infty}\frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$$

Решение

$$lim_{n\to\infty}\frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} = lim_{n\to\infty}\frac{5 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 5$$

Ответ: 5

Задача 9
Найти предел:

$$lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

Решение

$$lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} =$$

$$= lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$