Семинарское занятие №9

Воробьёв Сергей

Декабрь 2019

Задание 1. Листок 9

В коробке 7 красных и 5 белых шаров. Случайным образом из коробки вынимают два шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества красных шаров. Изменится ли ответ, если вынимать шары следующим образом: вытащили первый шар и положили обратно, а затем вытащили второй шар?

Решение:

Рассмотрим случайную величину $\xi = 0, 1, 2$, которая описывает количество выбранных шаров. Найдем соответствующие вероятности:

$$P(\xi = 0) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{35}{66}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{66}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$E[\xi] = 0 * \frac{10}{66} + 1 * \frac{35}{66} + 2 * \frac{21}{66} = \frac{35 + 42}{66} = \frac{77}{66}$$

$$E[\xi^2] = 0^2 * \frac{10}{66} + 1^2 * \frac{35}{66} + 2^2 * \frac{21}{66} = \frac{35 + 84}{66} = \frac{119}{66}$$

$$D[\xi] = \frac{119}{66} - \frac{77^2}{66^2} \approx 0,44$$

Теперь рассмотрим второй случай задачи, когда вынимают по отдельности с возвращением:

$$P(\xi = 0) = \frac{25}{144}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2 * 35}{144} = \frac{70}{144}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{49}{144}$$

$$E[\xi] = 0 * \frac{25}{144} + 1 * \frac{70}{144} + 2 * \frac{49}{144} = \frac{70+98}{144} = \frac{168}{144} = \frac{7}{6}$$

$$E[\xi^2] = 0 * \frac{25}{144} + 1^2 * \frac{70}{144} + 2^2 * \frac{49}{144} = \frac{70+196}{144} = \frac{133}{72}$$

$$D[\xi] = \frac{133}{72} - \frac{49}{36} \approx 0,48$$

Ответ: математическое ожидание не изменится, а дисперсия изменится

Задание 2. Листок 9

Монету, с вероятностью выпадения „орла“ p, бросают N раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества „орлов“.

Решение:

Пусть случайная величина ξ описывает количество выпавших орлов при N бросаниях, тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_N$, где ξ_i описывает выпадение „орла“при i-ом броске. Найдём математическое ожидание и дисперсию $E[\xi_i]$:

$$E[\xi_i] = 0 * P(\xi_i = 0) + 1 * P(\xi_i = 1) = p$$
$$E[\xi_i^2] = 0^2 * P(\xi_i = 0) + 1^2 * P(\xi_i = 1) = p$$
$$D[\xi] = p - p^2 = pq$$

Воспользуемся свойством линейности математического ожидания и найдем $E[\xi]$:

$$E[\xi] = E[\xi_1] + E[\xi_2] + ... + E[\xi_N] = Np$$

Заметим что $\xi_i, \xi_j \quad i \neq j$ независимы, следовательно, можно воспользоваться свойством дисперсии для суммы независимых случайных величин:

$$D[\xi] = D[\xi_1] + D[\xi_2] + ... + D[\xi_N] = Npq$$

Ответ: Np, Npq

Задание 3. Листок 9

Бросают пять игральных костей. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

Решение:

Проводя аналогичные рассуждения предыдущей задаче, получим:

$$E[\xi] = E[\xi_1] + E[\xi_2] + E[\xi_3] + E[\xi_4] + E[\xi_5] =$$

$$E[\xi_i] = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$
$$E[\xi_i^2] = \frac{0+1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D[\xi_i] = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$
$$E[\xi] = 5 * 3,5 = 17,5$$
$$D[\xi] = 5 * \frac{35}{12} = \frac{175}{12}$$

ξ_i - величина описывающая количество очков, выпавшей на i - ой кости

Ответ: 17.5, $\frac{175}{12}$

Задание 4. Листок 9

Монету, с вероятностью выпадения „орла“ p, бросают до первого выпадения орла. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа подбрасываний, если количество бросков неограничено.

Решение:

Распределение случайной величины ξ, описывающей количество бросков будет выглядеть следующим образом:

$$P(\xi = n) = pq^{n-1}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$E[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p + 2pq + 3pq^2 + ... = p(1 + 2q + 3q^2 + ...) = pf(q)$$

$$\int f(q)dq = q + q^2 + q^3 + ... + C_1 = \frac{q}{1-q} + C_1$$
$$f(q) = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow E[\xi] = \frac{1}{p}$$

$$E[\xi^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = p + 2^2pq + 3^2pq^2 + ... = p(1 + 2^2q + 3^2q^2 + ...) = pg(q)$$

$$\int g(q)dq = q + 2q^2 + 3q^3 + ... + C_2 = qf(q) + C_2 = \frac{q}{(1-q)^2} + C_2$$
$$g(q) = \frac{1+q}{(1-q)^3} \Rightarrow E[\xi^2] = \frac{1+q}{p^2}$$
$$D[\xi] = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Ответ: $\frac{1}{p}, \frac{q}{p^2}$

Задание 5. Листок 9

Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Найдите математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Решение:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k * \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda * e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda+\lambda}\lambda = \lambda$$

$$E[\xi^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 * \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) * \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} * e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} * e^{\lambda} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$D[\xi] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Ответ: λ, λ