Семинарское занятие №22

Воробьёв Сергей

Май 2020

Разбор проверочной

После 1000 независимых подбрасываний монеты, было обнаружено, что выпало 100 орлов. Проверить гипотезу $H_0 : \theta = 0.08$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$, против альтернативы $H_1 : \theta \neq 0.08$

Решение

На предыдущем семинаре был получен доверительный интервал:

$$\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$

Воспользуемся им для проверки гипотезы. В нашем случае имеем:

$$\left(0.1 - 1.96 * \sqrt{\frac{0.1 * 0.9}{1000}}; 0.1 + 1.96 * \sqrt{\frac{0.1 * 0.9}{1000}}\right) \approx (0.0814; 0.1186)$$

Как видим $\theta = 0.08$ не лежит в данном интервале, следовательно, гипотезу H_0 отвергаем

Ответ: принимаем H_1

Нейман-Пирсон

$$H_0 : \rho(x) = \rho_0(x)$$

$$H_1 : \rho(x) = \rho_1(x)$$

$$K_t = \left\{x \in R^n : \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} \geq t\right\}, \quad t \geq 0$$

Задание 1. Листок 22

Пусть имеется выборка из нормального распределения $X_i \sim N(\theta, 1)$. С помощью теоремы Неймана-Пирсона постройте наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $\theta = 0$ при альтернативе $\theta = 1$. Найдите вероятность ошибки второго рода при уровне значимости α

Решение:

Найдём критическое множество:

$$K = \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}} \geq t, x_i \in R \right\} = \left\{ e^{\frac{\sum_{i=1}^n 2x_i - 1}{2}} \geq t, x_i \in R \right\}$$

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \geq 2ln(t), x_i \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{2ln(t)+n}{2} \in R \right\}$$

$$c = \frac{2ln(t)+n}{2}$$

Подберём c так, чтобы:

$$\alpha = P_0(X \in K) = P_0\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq c \right) = P_0\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n}} \right)$$

$$z_{1-\alpha} = \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Таким образом, критическое множество выглядит следующим образом:

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq z_{1-\alpha}\sqrt{n} \right\}$$

$$\beta = P_1\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} < \frac{c-n}{\sqrt{n}} \right) = \Phi\left(\frac{c-n}{\sqrt{n}} \right)$$

Ответ: построили

Задание 2. Листок 22

Пусть X_1 одномерная выборка из распределения с плотностью $\rho(x) = (m+1)x^m Ind_{[0,1]}$. С помощью теоремы Неймана-Пирсона постройте наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $m = 4$ при альтернативе $m = 2$. Найдите вероятность ошибки второго рода при уровне значимости $\alpha = 0.01$

Решение:

Найдём критическое множество:

$$K = \left\{ \frac{3x^2}{5x^4} \geq t, x \in [0,1] \right\} = \{ x \leq c, x \in [0,1] \}$$

$$c = \sqrt{\frac{3}{5t}}$$

Подберём c так, чтобы выполнялось:

$$\alpha = P_0(X_1 \in K) = \int_0^c 5x^4 dx = c^5$$

Посчитаем ошибку второго рода:

$$\beta = P_1(X_1 \notin K) = \int_c^1 3x^2 dx = 1 - c^3 = 1 - \alpha^{\frac{3}{5}}$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow c \approx 0.398, \quad K = \{0 \leq x \leq 0.398\}$$

$$\beta = 1 - 0.063 \approx 0.94$$

Ответ: посчитали

Задание 3. Листок 22

Пусть X_1 одномерная выборка из распределения с плотностью $\rho(x) = \theta e^{-\theta x} Ind_{[0,\infty]}$. С помощью теоремы Неймана-Пирсона постройте наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $\theta = 6$ при альтернативе $\theta = 5$. Найдите вероятность ошибки второго рода при уровне значимости $\alpha = 0.05$

Решение:

Найдём критическое множество:

$$K = \left\{ \frac{5e^{-5x}}{6e^{-6x}} \geq t, x \in [0, \infty) \right\} = \left\{ \frac{5e^{x}}{6} \geq t, x \in [0, \infty) \right\} = \{x \geq c, x \in [0, \infty)\}$$

$$c = ln\left(\frac{6t}{5}\right)$$

Подберём c так, чтобы выполнялось:

$$\alpha = P_0(X_1 \in K) = \int_c^\infty 6e^{-6x} dx = e^{-6c}$$

Посчитаем ошибку второго рода:

$$\beta = P_1(X_1 \notin K) = \int_0^c 5e^{-5x} dx = 1 - e^{-5c}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow c = \frac{ln(0.05)}{-6} \approx 0.5, \quad K = \{0.5 \leq x\}$$

$$\beta = 1 - 0.08 \approx 0.92$$

Ответ: посчитали