Семинарское занятие №20

Воробьёв Сергей

Март 2020

Нахождение площадей, объёмов, длин кривых с помощью определённого интеграла

Пусть $f(x) \geq 0$ определена и непрерывна на $[a, b]$. Тогда площадь фигуры, образованной осью x, прямыми $x_1 = a, x_1 = b$ и функцией $f(x)$ будет равна S:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Чтобы найти объём, полученный вращением фигуры отсносительно oX, необходимо посчитать интеграл:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, то:

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt$$

Чтобы найти длину кривой в пространстве, где $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b]$, необходимо вычислить l (x, y, z - непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$):

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

Если плоская кривая:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

Если уравнение плоской кривой устроено так, что $y = y(x), x \in [a_1, b_1]$, то:

$$l = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Задание 1. Найти периметр криволинейного треугольника ограниченного кривыми :

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$y = \sqrt{|x|}$$

Решение:

Найдём точки пересечения:

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 - x^2}, |x| \leq 1$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1$$
$$B(1; 1)$$

Так как имеется симметрия относительно оси Y, заключаем, что вторая точка имеет координаты:

$$x = -1, y = 1$$
$$A(-1; 1)$$

Вычислим длину дуги AB:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx = \sqrt{2} arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$OA = OB$$
$$OB = \sqrt{x},\ \ 0 \leq x \leq 1$$

Однако производная $y' = (\sqrt{x})'$ не ограничена в нуле. Положим y независимой переменной, тогда $x = y^2,\ 0 \leq y \leq 1$. Тогда $x' = 2y$

Тогда длина дуги OB равна:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 + x'^2} dx = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + ln(2 + \sqrt{5}))$$

Периметр криволинейного треугольника равен:

$$P = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(2\sqrt{5} + ln(2 + \sqrt{5}))$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(2\sqrt{5} + ln(2 + \sqrt{5}))$

Несобственный интеграл

Рассмотрим $f(x)$, предположим, что она определена на $[a, b)$ и интегрируема на $\forall[a, \xi] : a \leq \xi < b$. Если существует предел:

$$lim_{\xi \to b-0} F(\xi) = lim_{\xi \to b-0} \int_a^\xi f(x)dx$$

то его называют несобственным интегралом $f(x)$ на $[a, b)$. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Также говорят, что данный интеграл сходится, но если предела не существует, то говорят, что данный интеграл расходится

Задание 2. Установить сходимость интеграла и найти его, если сходимость имеется:

$$\int_0^1 lnxdx$$

Решение:

$$lim_{\xi \to 0+0} \int_\xi^1 lnxdx = lim_{\xi \to 0+0} xlnx - x\Big|_\xi^1 = lim_{\xi \to 0+0} - 1 - \xi ln\xi + \xi = -1$$

Ответ: -1

Задание 3. Установить сходимость интеграла и найти его, если сходимость имеется:

Чтобы избежать громоздкости формул будем опускать знаки пределов, тем самым подразумевая его

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Решение:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_0^1$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow F(\alpha) = \infty$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow F(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx = ln|x| \Big|_0^1 = \infty$$

Ответ: $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}; \;\; \alpha \geq 1 \Rightarrow \infty$

Задание 4.Установить сходимость интеграла и найти его, если сходимость имеется:

$$\int_{-1}^1 \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Решение:

Заметим, что на самом деле при $x = 1$, функция ограничена в окрестности, т.к.

$$lim_{x \to 1-0} \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

Проблемная точка в нашем случае, это точка $x = -1$

$$\int_{-1}^1 \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi tdt = \frac{\pi^2}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2}$