Семинарское занятие №7

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Задание 1. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} cosx & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & x = \frac{\pi}{4} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

Решение
Точкой разрыва является точка $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$lim_{x \to \frac{\pi}{4} - 0} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$lim_{x \to \frac{\pi}{4} + 0} f(x) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Функция терпит разрыв первого рода со скачком $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Ответ: Разрыв первого рода

Задание 2. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \frac{1}{x} ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Решение
Точками разрыва являются точки $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$. Рассмотрим пределы $f(x)$ в точках разрыва:

$$lim_{x \to 0} f(x) = lim_{x \to 0} \frac{1}{x} ln(1+x) - \frac{1}{x} ln(1-x) \to$$

$$\to lim_{x \to 0} \frac{x}{x} + \frac{-x}{x} = 0$$

Функция терпит разрыв первого рода в точке $x_0 = 0$

$$lim_{x\to 1} f(x) = lim_{x\to 1}\frac{1}{x}ln(1+x) - \frac{1}{x}ln(1-x) \to$$
$$\to lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

Ответ: Устранимый разрыв первого рода в первом случае и второго во втором

Задание 3. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} \frac{shx}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Решение
Точкой разрыва является точка $x_0 = 0$

$$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$
$$f(0) = a$$

Имеем устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$
Ответ: устранимый разрыв первого рода

Задание 4. Найти значение a, при котором функция будет непрерывна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x} & x \neq 0, x \in N \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Решение
Точкой разрыва является точка $x_0 = 0$

$$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0}\frac{1 + nx - 1}{x} = n$$
$$f(0) = a$$

Имеем устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$. Следовательно, $a = n$
Ответ: $a = n$

Задание 5. Доказать непрерывность функции во всех действительных точках

$$f(x) = x^4, x \in R$$

Подсказка: необходимо посмотреть окрестности каждой точки

Решение

$$\Delta f(x) = (x_0 + \Delta x)^4 - x_0^4$$

$$\Delta f(x) = 4x_0^3\Delta x + 6x_0^2\Delta x^2 + 4x_0\Delta x^3 + \Delta x^2$$

$$lim_{\Delta x \to 0}(4x_0^3\Delta x + 6x_0^2\Delta x^2 + 4x_0\Delta x^3 + \Delta x^2) = 0$$

Значит, функция $f(x) = x^4$ непрерывна

Ответ: доказали

Задание 6. Доказать непрерывность функции во всех иррациональных точках

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\text{иррациональное число} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \text{ несократимая дробь} \end{cases}$$

Решение

Рассмотрим множество $M = \{x \in R : f(x) \geq \varepsilon, \forall\varepsilon\}$

Никакая иррациональная точка не лежит в M, поскольку в иррациональных точках функция f обращается в ноль. Если $x \in M$, тогда x есть рациональное число вида $x = \frac{m}{n}$, где $m \in Z,\ n \in N$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима, и тогда $f(x) = \dfrac{1}{n} \geq \varepsilon$ и, следовательно, $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Из ограничения на n следует, что пересечение множества M и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть α — произвольное иррациональное число. По определению $f(\alpha) = 0$. Мы можем выбрать окрестность точки α так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества M. Если же $x \notin M$, то $f(x) < \varepsilon$. Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.

Теперь докажем, что функция Римана разрывна во всех рациональных точках.

Пусть q — произвольное рациональное число. По определению $f(q) > 0$. В любой окрестности рационального числа q найдутся иррациональное число β и $f(\beta) = 0$. Таким образом, условие непрерывности не выполняется.

Ответ: доказали