Разбор варианта контрольной работы

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Задание 1. Вариант 1

Пусть k-целое число от 0 до 6. Пусть S - множество, состоящее из 6 элементов. A, B - это случайные подмножества множества S мощности k. При каком k вероятность события, что мощность симметрической разности A и B равна двум, максимальна?

Решение

Заметим что, мощность симметрической разности равняется двум тогда, когда мощность пересечения $|A \cap B|$ равна $k-1 \;\; k > 0$, так как мощности множеств A, B равны k

Множество элементарных исходов равно $|\Omega| = C_6^k * C_6^k$, так как мы выбираем по k элементов в множество A и множество B

Найдем множество соответствующее искомой вероятности. Сначала выберем элементы для множества A, получим C_6^k. Далее, у нас должно быть $k-1$ элемент в пересечении, следовательно, выберем из множества A $k-1$ элемент для B, получим C_k^{k-1}. Наконец, доберем множество B элементами, которые не входят в пересечение, получим $C_{6-k}^{k-(k-1)}$. В итоге имеем:

$$|(A \cup B)/(A \cap B) = 2| = |X| = C_6^k * C_k^{k-1} * C_{6-k}^{k-(k-1)}$$

$$P(X) = \frac{C_6^k * C_k^{k-1} * C_{6-k}^{k-(k-1)}}{C_6^k * C_6^k}$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{C_6^1 * C_1^0 * C_5^1}{C_6^1 * C_6^1} = \frac{5}{6}$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{C_6^2 * C_2^1 * C_4^1}{C_6^2 * C_6^2} = \frac{8}{15}$$

$$k = 3 \Rightarrow \frac{C_6^3 * C_3^2 * C_3^1}{C_6^3 * C_6^3} = \frac{15}{20}$$

$$k = 4 \Rightarrow \frac{C_6^4 * C_4^3 * C_2^1}{C_6^4 * C_6^4} = \frac{8}{15}$$

$$k = 5 \Rightarrow \frac{C_6^5 * C_5^4 * C_1^1}{C_6^5 * C_6^5} = \frac{5}{6}$$

Для случаев, когда $k = 0, k = 6$, пересечение не будет состоять из $k-1$ элемента

Ответ: $k = 1, k = 5$

Задание 2. Вариант 1

Из колоды в 52 карты случайным образом вытаскиваются карты до тех пор, пока не появится туз. Туз впервые появился при вытаскивании 20-ой карты. Какова вероятность, что следующая карта - туз пики?

Решение

Пусть A - событие 'на двадцатом шаге вытянули туз', B - событие 'на двадцать первом шаге вытянули туз пик'

Искомая вероятность будет искаться следующим образом:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Так как до двадцатого шага мы должны были выбирать не тузы, то вероятность вытащить туза на двадцатом шаге равна:

$$P(A) = \frac{48 * 47 * 46 * ... * 30}{52 * 51 * 50 * ... * 34} * \frac{4}{33}$$

Пересечение $B \cap A$ распадается на случаи, когда вытянули туз пик и вытянули туз не пик на двадцатом шаге. В первом случае, вероятность вытащить на 21 шаге туз пик равна 0, а во втором $\frac{1}{32}$

$$P(B \cap A) = \frac{48 * 47 * 46 * ... * 30}{52 * 51 * 50 * ... * 34} * \frac{1}{33} * 0 + \frac{48 * 47 * 46 * ... * 30}{52 * 51 * 50 * ... * 34} * \frac{3}{33} * \frac{1}{32}$$

Найдем искомую вероятность:

$$P(B|A) = \frac{\frac{48*47*46*...*30}{52*51*50*...*34} * \frac{1}{33} * 0 + \frac{48*47*46*...*30}{52*51*50*...*34} * \frac{3}{33} * \frac{1}{32}}{\frac{48*47*46*...*30}{52*51*50*...*34} * \frac{4}{33}} =$$

$$= \frac{1}{4} * 0 + \frac{3}{4} * \frac{1}{32}$$

Ответ: $\frac{3}{128}$

Задание 3. Вариант 1

В отделе работают два разработчика и менеджер. Каждый из разработчиков посылает коммиты в систему контроля, а менеджер составляет ежегодный отчет. Было замечено, что у первого разработчика плохим является каждый четвертый коммит, а у второго каждый пятый. За год первый разработчик послал 4000 коммитов в сеть, а второй 5000 коммитов.

Перед составлением ежегодного отчёта, коммиты перемешались, и менеджер наудачу рассматривает выбранный коммит. Какова вероятность того, что выбранный коммит отправлен первым разработчиком, при условии, что коммит хороший?

(Сеть и система контроля в данной задаче - это одно и то же)

Решение

$$P(I|X) = \frac{P(X|I)P(I)}{P(X)} = \frac{P(X|I)P(I)}{P(X|I)P(I) + P(X|II)P(II)}$$

$$P(X|I) = \frac{3}{4}, \ \ P(I) = \frac{4}{9}$$

$$P(X|II) = \frac{4}{5}, \ \ P(II) = \frac{5}{9}$$

$$P(X) = \frac{3}{4} * \frac{4}{9} + \frac{4}{5} * \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$P(I|X) = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{7}$$

Ответ: $\frac{3}{7}$

Задание 4. Вариант 1

Артем и Борис договорились встретиться возле входа в институт между 12.00 и 12.40, но не уточнили время встречи. Каждый из них готов ждать на улице не более 20 минут в хорошую погоду и не более 10 минут в дождь. Найдите вероятность того, что они встретятся на улице, если в этот день дождь будет с вероятностью $\frac{1}{3}$. (Время появления Артема и Бориса считается независимым)

Решение

Пусть $P(A)$ - искомая вероятность, тогда:

$$P(A) = P(A|G)P(G) + P(A|B)P(B) = P\left(|x-y| < \frac{1}{2}\right) * \frac{2}{3} + P\left(|x-y| < \frac{1}{4}\right) * \frac{1}{3}$$

Где $P(G), P(B)$ вероятности появления хорошей и дождливой погоды соответственно. Получаем:

$$P(A) = \frac{3}{4} * \frac{2}{3} + \frac{7}{16} * \frac{1}{3} = \frac{31}{48}$$

Ответ: $\frac{31}{48}$