Семинарское занятие №32

Воробьёв Сергей

Май 2020

Условный экстремум

Рассмотрим открытое множество $G \subset R^n$ заданы функции $f(x), \phi_1(x), ..., \phi_m(x)$, где $m < n$. Пусть E множество точек, такие что $\phi_1(x) = 0, ..., \phi_m(x) = 0$, такие уравнения называют уравнениями связи

Метод множителей Лагранжа

Пусть функции, описанные выше, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0 и ранг матрицы Якоби J, равен в этой точке m:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial\phi_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_m(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\phi_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Функцию $L(x)$ называют функцией Лагранжа, а λ_i множителями Лагранжа:

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x)$$

Необходимое условие

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n \\ \phi_j(x^0) = 0, \quad j = 1, ..., m \end{cases}$$

Достаточное условие

$$(*) \ \ d\phi_j(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\phi_j(x^0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 > 0$$

Если выполнены $(*)$ и $d^2L(x^0)$ положительно (отрицательно) определена, то $f(x)$ в точке x^0 имеет условный строгий минимум (максимум)

Задание 1. Пусть $u = xy, \phi(x, y) = x - y = 0$. Найти условный строгий минимум

Решение:

Заметим, что искомой точкой является $(0,0)$, так как из уравнения связи следует, что произведение xy является положительным для точек не равных $(0,0)$

Ответ: нашли

Задание 2. Найти условные экстремумы функции $u(x,y,z)$**:**

$$u(x,y,z) = xyz$$
$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 6$$

Решение:

Заметим, что из уравнений связи мы можем исключить некоторые переменные. Вычитая из второго уравнения связи первое, получаем, что $y = -2z$. Далее, подставляя полученный результат в первое уравнение связи, получим $x = 6 + z$. Таким образом, получим:

$$u = xyz = -2z^2(z+6) = -2z^3 - 12z^2$$
$$\frac{du}{dz} = -6z^2 - 24z = 0 \Rightarrow z = 0, z = -4$$
$$\frac{d^2u}{dz^2} = -12z - 24$$
$$\frac{d^2u}{dz^2}(0) = -24$$
$$\frac{d^2u}{dz^2}-4 = 24$$

Таким образом, точка $z_0 = 0$, является точкой максимума, а $z_0 = -4$ является точкой минимума

$$u(0) = 0, u(-4) = -64$$

Ответ: нашли

Задание 3. Найти условные экстремумы функции $u(x,y)$**:**

$$u(x,y) = 6 - 5x - 4y$$
$$\phi(x,y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Решение:

$$J = (2x; -2y), \quad rkJ = 1$$
$$L(x,y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{5}{2\lambda}, y = \frac{-4}{2\lambda}$$

$$\frac{25-16}{4\lambda^2} = 9$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5, y = -4$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -5, y = 4$$

Следовательно, точками экстремума могут быть $(5, -4)$, $(-5, 4)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda \Rightarrow d^2 L = 2\lambda(dx^2 - dy^2)$$

$$d\phi = xdx - ydy \Rightarrow (-5; 4), (5; -4) : 0 = 5dx + 4dy$$

$$(-5; 4) \Rightarrow d^2 L = \frac{9}{16} dx^2 > 0$$

$$(5; -4) \Rightarrow d^2 L = -\frac{9}{16} dx^2 < 0$$

Таким образом, $u(x, y)$ имеет условный минимум в точке $(-5; 4)$ и максимум в точке $(5; -4)$

$$u(-5; 4) = 15, \quad u(5; -4) = -3$$

Ответ: нашли