Семинарское занятие №27

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Степенные ряды
Степенным рядом будем называть функциональный ряд вида:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Теорема

Для всякого степенного ряда S существует R такое, что S сходится абсолютно в круге $K = \{x : |x| < R\}$

K - круг сходимости, R - радиус сходимости

Рассмотрим ряд:

$$S^* = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Для такого ряда $K = \{x : |x-a| < R\}$

Формулы для нахождения R

$$\frac{1}{R} = \overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$R = lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Интервал $(a-R, a+R)$ называют интервалом сходимости

Задание 1. Найти радиус сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Решение:

$$R = lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Ответ: 1

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{nln^2(n+1)}$$

Решение:

$$R = lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)ln^2(n+2)}{2nln^2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Интервал сходимости равен $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Проверим сходимость в точках $x_0 = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}$. Заметим, что в этих точках ряд сходится абсолютно

Ответ: $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$