

Семинарское занятие №15

Воробьёв Сергей

Январь 2020

Неопределённый интеграл

Рассмотрим непрерывные функции $F(x)$ и $f(x)$ такие, что: $F'(x) = f(x)$. $F(x)$ будем называть первообразной функции $f(x)$

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ будем называть множество первообразных функций $F(x) + C$ и обозначать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределённого интеграла

1) $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

2) $\int d[f(x)] = f(x) + C$

3) $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Способы вычисления неопределённого интеграла

1) Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2) Замена переменной:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\phi(x)}$$

Задание 1. Найти неопределённый интеграл:

$$\int (x - 2e^x)dx$$

Решение:

Пользуясь свойством 2) неопределённого интеграла, получим:

$$\int d\left(\frac{x^2}{2} - 2e^x + C\right) = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - 2e^x + C$

Задание 2. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 4)}$$

Решение:

Представим подынтегральное выражение в виде разности дробей, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 4} = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ответ: $-\frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Задание 3. Найти неопределённый интеграл:

$$\int (3x - 5)^{10} dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int (3x - 5)^{10} dx &= \{t = 3x - 5, dt = 3dx\} = \int \frac{t^{10}}{3} dt = \\ &= \frac{t^{11}}{33} + C = \frac{(3x - 5)^{11}}{33} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(3x-5)^{11}}{33} + C$

Задание 4. Найти неопределённый интеграл:

$$\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx &= \{t = 5x^3 + 1, dt = 15x^2 dx\} = \\ &= \int \frac{\sqrt[5]{t}}{15} dt = \frac{\sqrt[5]{t^6}}{18} + C = \frac{\sqrt[5]{(5x^3 + 1)^6}}{18} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[5]{(5x^3+1)^6}}{18} + C$

Задание 5. Найти неопределённый интеграл:

$$\int x^2 e^x dx$$

Решение:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \{u = x^2, du = 2x dx, v = e^x, dv = e^x dx\} = \\ &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

$$\int 2x e^x dx = \{u = x, du = dx, v = e^x, dv = e^x dx\} = 2x e^x - 2 \int e^x dx = 2x e^x - 2e^x + C$$

Ответ: $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$