Семинарское занятие №12

Воробьёв Сергей

Декабрь 2019

Правило Лопиталя

Метод, позволяющий раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
Теорема: Пусть $f(x), g(x)$ функции такие, что:

1) $lim_{x \to x_0} f(x) = lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ или 0
2) $g'(x) \neq 0$, в окрестности точки x_0
3) $lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ - существует

Тогда:

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет производные до n-ого порядка, включая n. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$

Задание 1. Найти предел функции:

$$lim_{x \to 0} \frac{sin(\alpha x) - sin(\beta x)}{sh(\alpha x) - sh(\beta x)}$$

Решение:
Так как x стремится к 0, то:

$$lim_{x \to 0} \frac{sin(\alpha x) - sin(\beta x)}{sh(\alpha x) - sh(\beta x)} = lim_{x \to 0} \frac{\alpha x - \beta x}{\alpha x - \beta x} = 1$$

Ответ: 1

Задание 2. Найти предел функции:

$$lim_{x\to -1}\frac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$$

Решение:

Так как выполняются все условия правила Лопиталя применим его для того, чтобы найти предел:

$$lim_{x\to -1}\frac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}=lim_{x\to -1}\frac{8x^3+9x^2-8x-9}{12x^3+15x^2+6x+3}=\frac{0}{0}$$

Неопределенность сохранилась, однако для полученного отношения выполняются условия правила Лопиталя, применим его снова:

$$lim_{x\to -1}\frac{8x^3+9x^2-8x-9}{12x^3+15x^2+6x+3}=lim_{x\to -1}\frac{24x^2+18x-8}{36x^2+30x+6}=-\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$

Задание 3. Найти предел функции:

$$lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}arccos(x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

Решение:

$$lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}arccos(x)\right)^{\frac{1}{x}}=lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}ln(\frac{2}{\pi}arccos(x))}=$$

$$=lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}ln(\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-arcsin(x)))}=lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}ln(1-\frac{2}{\pi}x)}=$$

$$=lim_{x\to 0}e^{\frac{-\frac{2}{\pi}x}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

Ответ: $e^{-\frac{2}{\pi}}$

Задание 4.Найти предел функции:

$$lim_{x\to 0}xlnx$$

Решение:

Заметим, что $xlnx=\frac{lnx}{\frac{1}{x}}$. Так как выполнены условия правила Лопиталя, применим его для поиска предела:

$$lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=lim_{x\to 0}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0$$

Ответ: 0

Задание 5. Найти предел функции:

$$lim_{x\to 0}\frac{x-sin(x)}{x^3}$$

Решение:
Разложим $sin(x)$ в Ряд Тейлора до третьего порядка. Получим:

$$lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{3!}+o(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

Ответ:$\frac{1}{6}$

Задание 6. Найти предел функции:

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2tg(x)}-e^x+x^2}{arcsin(x)-sin(x)}$$

Решение:

Разложим знаменатель в Ряд Тейлора до того момента, пока не получим ненулевые коэффициенты при старшей степени. Это нам нужно для того, чтобы установить порядок малости. Получим:

$$arcsin(x)=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$arcsin(x)-sin(x)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Разложим теперь числитель до третьего порядка малости:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$tg(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+2tg(x)}=1+\frac{1}{2}(2tg(x))-\frac{1}{8}(2tg(x))^2+\frac{1}{16}(2tg(x))^3+o(tg^3(x))=$$

$$1+x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)=$$

$$=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Таким образом, получаем:

$$lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 2$$

Ответ: 2