Семинарское занятие №16

Воробьёв Сергей

Февраль 2020

Задание 1. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{1}{sinx}dx$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{sinx}{sin^2x}dx = \int -\frac{d(cosx)}{1-cos^2x} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(ln|t-1| - ln|t+1|) + C = \frac{1}{2}(ln|cosx-1| - ln|cosx+1|) + C$$

Ответ: $\frac{1}{2}(ln|cosx-1| - ln|cosx+1|) + C$

Задание 2. Найти неопределённый интеграл:

$$\int arccos^2xdx$$

Решение:
Интегрируя по частям, получим:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int arccos^2xdx \rightarrow \begin{cases} u = arccos^2x \\ du = -\frac{2arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow x * arccos^2x - \int -\frac{2x * arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$x * arccos^2x - 2\int arccosxd(\sqrt{1-x^2}) \rightarrow \begin{cases} u = arccosx \\ du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \sqrt{1-x^2} \\ dv = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{cases}$$

$$x * arccos^2x - 2\left(\sqrt{1-x^2}arccosx - \int -dx\right) =$$

$$= x * arccos^2x - 2\left(\sqrt{1-x^2}arccosx + x\right) + C$$

Ответ: $x * arccos^2x - 2\left(\sqrt{1-x^2}arccosx + x\right) + C$

Задание 3. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

Решение (для положительного корня, для отрицательного ищется аналогично):

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \{x = tgt, dx = \frac{1}{cos^2t}dt\} = \int \frac{dt}{cos^2t * \frac{sin^2t}{cos^2t} * \sqrt{1+tg^2t}} =$$

$$= \int \frac{cost}{sin^2t}dt = \{sint = u, costdt = du\} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{sin(arctgx)} + C$$

Ответ: $-\frac{1}{sin(arctgx)} + C$

Задание 4. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$$

Решение:

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{3}{20}\int \frac{1}{x-3}dx$$

Ответ: $\frac{1}{4}ln|x+1| - \frac{3}{5}ln|x+2| + \frac{3}{20}ln|x-3|$

Задание 5. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$$

Решение:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int xdx + \int \frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}dx =$$

$$= \int xdx + \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}dx$$

Имеем:

$$A = 1, B = 4, C = 3$$

$$\int xdx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \int xdx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + ln|x-1| + ln(2x^2+2x+1) + arctg(2x+1) + C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + ln|x-1| + ln(2x^2+2x+1) + arctg(2x+1) + C$

Задание 6. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Решение:

$$Mx + p = Mx + \frac{Mp}{2} - \frac{Mp}{2} + N$$

Имеем:

$$\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C$$

Ответ: $\frac{M}{2}ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C$