Семинарское занятие №5

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Задание 1

Докажите, что:

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0$$

Оцените величину этого интеграла для $x = 2$, $x = 3$

Решение:

Проинтегрируем по частям интеграл из левой части равенства. Получим:

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_x^{+\infty} -\frac{1}{t} d(e^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$-\frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d(-\frac{1}{t}) = \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{t^2} dt$$

При $x = 2$ имеем $\frac{1}{2} e^{-\frac{2^2}{2}} = \frac{1}{2e^2} \approx 0.068$. Если $x = 3$ имеем $\frac{1}{3} e^{-\frac{3^2}{2}} = \frac{1}{3e^{\frac{9}{2}}} \approx 0.0037$

Ответ: 0.068**,** 0.0037

Задание 2

Вероятность искажения одного бита информации при передаче 10000 битов с помощью некоторого устройства равна $1/2$. Оцените вероятность того, что более 51 процентов битов будет искажено?

Решение:

Пусть X_n случайная величина, описывающая искаженность бит, N - количество бит, равное 10000, p - вероятность искажения, равная $\frac{1}{2}$

Имеем схему Бернулли, с параметрами $N = 10000, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа имеем:

$$P(X_n > 5100) = P(\frac{X_n - Np}{\sqrt{Npq}} > \frac{5100 - Np}{\sqrt{Npq}}) \leq \int_{\frac{5100-Np}{\sqrt{Npq}}}^{+\infty} \phi(x) + \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{Npq}}$$

Заметим, что $\frac{5100-Np}{\sqrt{Npq}} > 0$, следовательно, можем воспользоваться утверждением из задачи 1:

$$\int_x^{+\infty} \phi(x)dx \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Имеем:

$$\frac{5100 - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{5100 - 10000 * \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10000}{4}}} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\int_{\frac{5100-Np}{\sqrt{Npq}}}^{+\infty} \phi(x) + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{Npq}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-2} + \frac{\frac{1}{2}}{50} \approx 0.037$$

Ответ: 0.037

Задание 3

В некотором посёлке 2500 жителей. Раз в сутки из посёлка в город ходит электричка. Каждый из жителей, примерно, 6 раз в месяц ездит в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных жителей. Какой вместительностью (чем меньше - тем лучше) должен обладать поезд, чтобы он переполнялся с вероятностью не более 0.05?

Решение:

Пусть X_n случайная величина, описывающая вместительность поезда, N - количество жителей, равное 2500, p - вероятность поездки в город, равная $\frac{6}{30}$

Имеем схему Бернулли, с параметрами $N = 2500, p = \frac{1}{5}, q = \frac{4}{5}$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа имеем:

$$P(X_n > k) = P(\frac{X_n - Np}{\sqrt{Npq}} > \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}}) \leq \int_{\frac{k-Np}{\sqrt{Npq}}}^{+\infty} \phi(x) + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{Npq}}$$

Заметим, что $\frac{k-Np}{\sqrt{Npq}} > 0$, следовательно, можем воспользоваться утверждением из задачи 1:

$$\int_x^{+\infty} \phi(x)dx \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Применяя рассуждения выше, и, ограничивая, экспоненту единицей приходим к следующему:

$$\int_{\frac{k-Np}{\sqrt{Npq}}}^{+\infty} \phi(x) + \frac{p^2+q^2}{\sqrt{Npq}} \leq \frac{\sqrt{Npq}}{k - Np} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\frac{17}{25}}{20}$$

Нам нужно получить вероятность ≤ 0.05, исходя, из постановки задачи:

$$\frac{20}{k-500} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.034 \leq 0.05$$

$$\frac{20}{k-500} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0.016$$

$$k - 500 \geq \frac{20 * 1000}{16 * \sqrt{2\pi}}$$

$$k \geq \frac{20 * 1000}{16 * \sqrt{2\pi}} + 500$$

Ответ:$k \geq \frac{20*1000}{16*\sqrt{2\pi}} + 500$

Задание 4

Робот „сапёр“обследует местность на предмет неразорвавшихся снарядов. Среднее число снарядов на единицу площади равно λ. Радиус обзора сканирующего устройства равен R. Робот двигается прямолинейно и равномерно со скоростью v. Вероятность обнаружения снаряда равна $p(v)$. Найдите вероятность обнаружения k снарядов за время t. Предполагая, что $p(v) = e^{-\alpha v}$, найдите значение скорости, при котором вероятность обнаружения хотя бы одного снаряда максимальна.

Решение:

Применим рассуждения аналогичные для Пуассоновского процесса с отрезками. Разобьём рассматриваемый участок на маленькие прямоугольники. λ - это среднее число мин, значит вероятность мине попасть в каждую полоску, равна $\frac{\lambda 2Rvt}{N}$(λ умноженная на площадь маленького прямоугольника и поделенная на общую площадь). В данном случае N - общая площадь всех прямоугольников. Если N-число прямоугольников, то вероятность мине попасть в каждую полоску равна $\frac{\lambda 2Rvt}{N2Rvt} = \frac{\lambda}{N}$ Вероятность роботу обнаружить мину в этой полоске равна $\frac{p(v)\lambda 2Rvt}{N}$

Тогда получим:

$$\frac{(\lambda p(v) * 2Rvt)^k}{k!} e^{-\lambda p(v) * 2Rvt}$$

Теперь найдём значение скорости, при котором вероятность обнаружения хотя бы одного снаряда максимальна

Для этого посчитаем, вероятность, что ни один снаряд не будет обнаружен, а затем эту вероятность вычтем из единицы. А полученное выражение будем максимизировать

$$1 - \frac{(\lambda 2p(v)Rvt)^0}{0!} e^{-2\lambda p(v)Rvt} = 1 - e^{-2\lambda p(v)Rvt}$$

Чтобы проминимизировать $e^{-\lambda 2p(v)Rvt}$ по v, нужно промаксимизировать $2\lambda p(v)Rvt$. Найдём производную:

$$\frac{d(2\lambda Rvte^{-\alpha v})}{dv} = 2\lambda Rte^{-\alpha v}(1 - \alpha v) = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\alpha}$$

Чтобы убедиться, что это максимум можно посчитать вторую производную

Ответ:$v = \frac{1}{\alpha}$

Задание 5

Лягушка прыгает с кочки A на кочку B и обратно, а может и остаться на кочке, на которой она уже сидит. Если лягушка сидит на кочке A, то она с вероятностью p остаётся на ней, а с вероятностью $1-p$ прыгает на кочку B. Если лягушка сидит на кочке B, то она с вероятностью r остаётся на ней, а с вероятностью $1-r$ прыгает на кочку A. Лягушка принимает решение независимо от своих предыдущих прыжков. Выпишите стохастическую матрицу P соответствующей цепи Маркова. Найдите вероятность того, что начав своё движение с кочки A через три прыжка лягушка окажется на кочке B. Найдите стационарное распределение μ.

Решение:

Если за состояние 1 принять A, а за состояние 2 принять B, то матрица P будет выглядеть следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-r & r \end{pmatrix}$$

Вероятность события „Лягушка через три прыжка окажется на кочке B“равна:

$$p * p * (1-p) + p * (1-p) * r + (1-p) * r * r + (1-p) * (1-r) * (1-p)$$

Найдем стационарное распределение:

$$\begin{cases} \mu_1 = p * \mu_1 + (1-r) * \mu_2 \\ \mu_2 = (1-p) * \mu_1 + r * \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 = 1 \end{cases}$$

Решая систему, получаем, что

$$\mu_1 = \frac{1-r}{2-p-r}$$

$$\mu_2 = \frac{1-p}{2-p-r}$$

Ответ:$\mu_1 = \frac{1-r}{2-p-r}, \mu_2 = \frac{1-p}{2-p-r}$