Семинарское занятие №17

Воробьёв Сергей

Февраль 2020

Метод Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$$

$Q_2(x)$ - многочлен, содержащий корни кратности 1 многочлена $Q(x)$, а $Q_1(x)$ такой,что:

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$$

$P_1(x), P_2(x)$ - многочлены степени меньшей, чем $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, соответственно. Коэффициенты при степенях в многочленах $P_1(x)$ и $P_2(x)$ ищутся с помощью метода неопределённых коэффициентов.

Интегрирование иррациональностей

Интегрирование иррациональностей сводится, путем соответствующей замены, к интегрированию рациональных функций. Ниже будут рассмотрены некоторые примеры.

Интегрирование с одинаковым подкоренным выражением

$$\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}; ...; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx, n \in N, p_i \in Q$$

Для нахождения таких интегралов можно использовать замену:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

Где m общий знаменатель $p_1, p_2, ..., p_n$

Некоторые другие подстановки

Если в подынтегральном выражении имеется иррациональность вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, то предлагается использовать следующие замены:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t, a > 0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}, c > 0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1)t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_2)t$$

Данные замены известны как, замены Эйлера. (x_1, x_2 - корни многочлена $ax^2 + bx + c$). Также можно использовать замену Абеля:

$$\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = t$$

Задание 1. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

Решение:

Воспользуемся методом Остроградского:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} dx =$$
$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + arctg(x+1) + C$$

Ответ: $\frac{1}{x^2+2x+2} + arctg(x+1) + C$

Задание 2. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$$

Решение:

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx = \int R(x; \sqrt[3]{x}; \sqrt[6]{x}), p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{6}$$
$$\{x = t^6\} = 6 \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)} t^5 dt = 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$
$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6arctg(\sqrt[6]{x}) + C$$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6arctg(\sqrt[6]{x}) + C$

Задание 3. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

Решение (для положительного корня, для отрицательного ищется аналогично):

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \{\sqrt{1+x+x^2} = tx+1, x = \frac{2t-1}{1-t^2}\} = \int \frac{2t}{t^2-1}dt =$$

$$= ln(t^2-1) + C = ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right| + C$$

Ответ: $ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right| + C$

Задание 4. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}dx = \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} * \frac{1}{(2-x)^2}dx = \int R\left(x; \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)dx =$$

$$= \{t^3 = \frac{2-x}{2+x}, x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3}\} = -12\int \frac{(t^3+1)^2t^3}{16t^6(t^3+1)^2}dt = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} =$$

$$= \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2}} + C$$

Ответ: $\frac{3}{8\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2}} + C$