Семинарское занятие №6

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Задание 1

В условии предыдущей задачи про лягушку и кочки для всякого начального распределения $\nu = (\nu(A), \nu(B))$ рассмотрим распределение $\mu^k = \nu P^k$. Докажите, что величины $\Delta^k(A) = \mu^k(A) - \mu(A)$ и $\Delta^k = \mu^k(B) - \mu(B)$ удовлетворяют равенствам:

$$\Delta^{k+1}(A) = (p + r - 1)\Delta^k(A), \quad \Delta^{k+1}(B) = (p + r - 1)\Delta^k(B)$$

Выведите из этих равенств, что если $0 < p < 1, 0 < r < 1$, то $\mu^t \to \mu$. Что происходит в случае, когда $p = 1$ или $r = 1$?

Решение:

Мы знаем, что $\mu^{k+1} = \nu P^{k+1} = \nu P^k P$. Рассмотрим $P^k * P$:

$$P^{k+1} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}p + p_{12}(1-r) & p_{11}(1-p) + p_{12}r \\ p_{21}p + p_{22}(1-r) & p_{21}(1-p) + p_{22}r \end{pmatrix}$$

$$\mu^{k+1} = \nu P^{k+1} = \begin{pmatrix} \nu(A)[p_{11}p + p_{12}(1-r)] + \nu(B)[p_{21}p + p_{22}(1-r)] \\ \nu(A)[p_{11}(1-p) + p_{12}r] + \nu(B)[p_{21}(1-p) + p_{22}r \end{pmatrix}$$

$$\mu^{k+1}(A) = \nu(A)[p_{11}p + p_{12}(1-r)] + \nu(B)[p_{21}p + p_{22}(1-r)] =$$
$$= p(\nu(A)p_{11} + \nu(B)p_{21}) + (1-r)(\nu(A)p_{12} + \nu(B)p_{22}) =$$

$$= p\mu^k(A) + (1-r)\mu^k(B)$$

$$\mu^{k+1} = p\mu^k(A) + (1-r)(1 - \mu^k(A)) = 1 - r + \mu^k(A)(p - 1 + r)$$

$$\Delta^{k+1}(A) = \mu^{k+1}(A) - \mu(A) = 1 - r + \mu^k(A)(p - 1 + r) - \mu(A) =$$

$$= (p-1+r)\mu^{k+1}(A) + (1-r) - \mu(A) = (p-1+r)\mu^k(A) + (1-r)\frac{2-p-r-1}{2-p-r} =$$

$$= (p - 1 + r)(\mu^k(A) - \mu(A)) = (p + r - 1)\Delta^k(A)$$

Рассмотрим теперь предел $\mu^t \to \mu$

$$\mu^k(A) - \mu(A) = \Delta^k(A) = (p + r - 1)\Delta^{k-1}(A)$$

$$|\mu^k(A)-\mu(A)| = |(p+r-1)\Delta^{k-1}(A)| < \varepsilon$$

$$|\Delta^{k-1}(A)| < \frac{\varepsilon}{|(p+r-1)|} \to |(p+r-1)\Delta^{k-2}(A)| < \frac{\varepsilon}{|(p+r-1)^2|} \to$$

$$\to |\Delta^{k-2}(A)| < \frac{\varepsilon}{|(p+r-1)^2|} \to |\Delta^1(A)| < \frac{\varepsilon}{|(p+r-1)^{k-1}|} > |\mu^1(A)-\mu(A)|$$

$$|\mu^1(A)-\mu(A)| = |p\nu(A)+(1-r)\nu(B) - \frac{1-r}{2-p-r}| < \frac{\varepsilon}{|(p+r-1)^{k-1}|}$$

$$|(p+r-1)|^{k-1} < \frac{\varepsilon}{|p\nu(A)+(1-r)\nu(B) - \frac{1-r}{2-p-r}|}$$

$$k-1 \geq \frac{ln\varepsilon - ln|p\nu(A)+(1-r)\nu(B) - \frac{1-r}{2-p-r}|}{ln|p+r-1|}$$

$$k \geq \frac{ln\varepsilon - ln|p\nu(A)+(1-r)\nu(B) - \frac{1-r}{2-p-r}|}{ln|p+r-1|} + 1$$

Ответ: доказали

Задание 2

Пусть задана цепь Маркова ξ_k с переходными вероятностями $P(x,y)$ и начальным распределением ν. Выразите вероятности $P(\xi_k = x)$, $P(\xi_k = x, \xi_{k+m} = y)$. Докажите равенство $P(\xi_{k+m} = x|\xi_k = y) = P(\xi_m = x|\xi_0 = y)$

Решение:

$$P(\xi_k = x) = \sum_{y_1} P(\xi_k = x|\xi_{k-1} = y_1)P(\xi_{k-1} = y_1) =$$

$$\sum_{y_1} P(x,y_1)P(\xi_{k-1} = y_1) = \sum_{y_2}\sum_{y_1} P(x,y_1)P(y_1,y_2)P(\xi_{k-2} = y_2) =$$

$$= \sum_{y_n} ... \sum_{y_1} P(x,y_1)P(y_1,y_2)P(y_2,y_3)...P(y_{k-1},y_k)\nu_0$$

Если говорить в терминах матрицы перехода, то $P(\xi_k = x)$ равна сумме элементов столбца x матрицы в степени k.

Рассмотрим последнее условие: $P(\xi_{k+m} = x|\xi_k = y) = P(\xi_m = x|\xi_0 = y)$

Вторая часть равенствва равна $P(\xi_m = x|\xi_0 = y) = P^m(x,y)$

Докажем правую часть равенства (по индукции):

$$P(\xi_{k+m} = x|\xi_k = y) = \frac{P(\xi_k = y, \xi_{k+m} = x)}{P(\xi_k = y)} =$$

$$= \sum_{n\in E} \frac{P(\xi_k = y, \xi_{k+m-1} = n, \xi_{k+m} = x)}{P(\xi_{k+m-1} = n, \xi_k = y)} \frac{P(\xi_{k+m-1} = n, \xi_k = y)}{P(\xi_k = y)} =$$

$$= \sum_{n\in E} P(\xi_{k+m} = x|\xi_{k+m-1} = n, \xi_k = y)P(\xi_{k+m-1} = n|\xi_k = y)$$

так как в марковской цепи зависимость только от предыдущего состояния, то заключаем, что:

$$\sum_{n\in E} P(\xi_{k+m} = x|\xi_{k+m-1} = n, \xi_k = y)P(\xi_{k+m-1} = n|\xi_k = y) =$$

$$= \sum_{n\in E} p_{nx} * P^{m-1}(n, y) = P^m(x, y)$$

По формуле Байеса можно найти вероятность пересечения

Задание 3

Пусть

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad \nu = (0.1, 0.9)$$

Найти $\mu^2(A), P(\xi_2 = 1)$ и стационарное распределение?

Решение:

$$\nu P^2 = (0.1, 0.9) \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.1, 0.9) \begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} = (0.331, 0.669)$$

Следовательно, $\mu^2(A) = 0.331, P(\xi_2 = 1) = 0.331$

Ответ:$\mu^2(A) = 0.331, P(\xi_2 = 1) = 0.331$