Семинарское занятие №11

Воробьёв Сергей

Январь 2020

Задание 1. Листок 11

Правильную монету бросили $N = 100$ раз. Оценить вероятность того, что выпавшее число орлов отклонится от среднего более чем на 40

Решение:

Так как монета правильная, то вероятность выпадения орла равна $\frac{1}{2}$
Пользуясь неравенством Чебышёва получаем:

$$P(|X_n - EX_n| \geq 40) = P(|X_n - 50| \geq 40) \leq \frac{D(X_n)}{40^2} = \frac{25}{40^2}$$

Ответ: $\frac{25}{40^2}$

Задание 2. Листок 11

Доказать, что $P(-3 < \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} < 3) \geq 0.88$

Решение:

$$P(-3 < \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} < 3) = P(|\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}| < 3) = 1 - P(|\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}| \geq 3) \geq 1 - \frac{D(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}})}{9} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} > \frac{88}{100}$$

Ответ: ЧТД

Задание 3. Листок 11

Доказать закон больших чисел в слабой форме

Решение:

$P(|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon} \to 0$

Ответ: ЧТД

Задание 4. Листок 11
Доказать центральную предельную теорему
Решение:
Пусть:

$$\xi_i^* = \frac{\xi - \mu}{\sigma}, S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n - n\mu}{\sigma}$$

Рассмотрим характеристическую функцию $\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)$

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = (\phi_{\xi_1^*}(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$$

Разложим $\phi_{\xi_1^*}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ в точке $t = 0$, получим:

$$1 + \frac{-t^2}{2n} E\xi_1^{*2} + o(\frac{t^2}{n})$$

Подставляя в выражение и устремляя n к бесконечности получаем:

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Ответ: ЧТД

Задание 5. Листок 11

Найти $\phi_\xi(t)$, если $\rho_\xi(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \forall x \in R$

Решение:

$$\phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{itx} * e^{x}}{2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{itx} * e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} - \frac{1}{it-1}\right)$$

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} - \frac{1}{it-1}\right)$

Задание 6. Листок 11

Найти $\phi_\xi(t)$ если ξ распределена равномерно на отрезке $[a, b]$

Решение:

$$\phi_\xi(t) = \int_{a}^{b} \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Ответ: $\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$