Семинарское занятие №11

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Производные высших порядков

Пусть $f(x)$ - функция n раз дифференцируемая на (a,b). Тогда производная порядка n, есть производная от производной $n-1$ порядка:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))'$$

Стоит отметить, что производная нулевого порядка функции $f(x)$ - это $f(x)$

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

Свойства

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n, то:

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)} \quad \alpha, \beta = const$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Задание 1.Для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной неявно вычислить $y'(x_0)$:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0 \quad y > -5, x_0 = 0$$

Решение:

Продифференцируем выражение по переменной x, получим:

$$2x + 2yy' - 6 + 10y' = 0$$

$$y' = \frac{6-2x}{2y+10}$$

Для того, чтобы найти значение производной в нуле, нам необходимо сначала определить значение самой функции y в данной точке. Сделаем это, подставив $x = 0$ в исходное уравнение:

$$0^2 + y(0)^2 - 6 * 0 + 10 * y(0) - 2 = y(0)^2 + 10 * y(0) - 2 = 0$$

Получили квадратное уравнение на $y(0)$. Корни данного уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$y(0) = \frac{-10 + \sqrt{108}}{2}, \quad y(0) = \frac{-10 - \sqrt{108}}{2}$$

Из условия задачи следует, что нам подходит корень $y(0) = \frac{-10+\sqrt{108}}{2}$
Следовательно, производная функции y в точке $x = 0$ будет выглядеть следующим образом:

$$y'(0) = \frac{6 - 2 * 0}{2 * \frac{-10+\sqrt{108}}{2} + 10} = \frac{6}{\sqrt{108}}$$

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{108}}$

Задание 2.Для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной неявно вычислить $y'(x_0)$:

$$e^y + xy = e \quad y > 0, x_0 = 0$$

Решение:
Проведем аналогичные предыдущей задаче рассуждения:

$$\frac{dF}{dx} = y'e^y + y + xy' = 0$$

$$y' = \frac{-y}{e^y + x}$$

$$e^{y(0)} + 0 * y(0) = e \Rightarrow y(0) = 1$$

$$y'(0) = -\frac{1}{e^1 + 0} = -\frac{1}{e}$$

Ответ: $-\frac{1}{e}$

Задание 3.Для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной неявно вычислить $y'(x_0)$:

$$xy + lny = 1 \quad y < e^2, x_0 = 0$$

Решение:

$$\frac{dF}{dx} = y + xy' + \frac{1}{y}y' = 0$$

$$y' = \frac{-y}{\frac{1}{y} + x}$$

$$0 * y(0) + ln(y(0)) = 1 \Rightarrow y(0) = e$$

$$y'(0) = -\frac{e}{\frac{1}{e} + 0} = -e^2$$

Ответ: $-e^2$

Задание 4.Найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в точке x_0 с помощью дифференциала:

$$y(x) = arcsinx \quad x_0 = 0.51$$

Решение:
Пусть $\Delta x = 0.01, x = 0.50$, тогда:

$$arcsin(0.50 + 0.01) \approx arcsin(0.50) + \frac{1}{\sqrt{1 - 0.25}} * 0.01 = \frac{\pi}{6} + \frac{0.01}{0.5\sqrt{3}} \approx 0.535$$

Ответ: 0.535

Задание 5.Найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в точке x_0 с помощью дифференциала:

$$y(x) = \sqrt[3]{x} \quad x_0 = 65$$

Решение:
Пусть $\Delta x = 1, x = 64$, тогда:

$$\sqrt[3]{64 + 1} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[\frac{2}{3}]{64}} * 1 = 4 + \frac{1}{48} \approx 4.0208$$

Ответ: 4.0208

Задание 6. Найти производную порядка n

$$f(x) = 2^{3x}$$

Решение:

$$f'(x) = 2^{3x} * 3 * ln(2)$$

$$f''(x) = 2^{3x} * 3^2 * ln^2(2)$$

$$f'''(x) = 2^{3x} * 3^3 * ln^3(2)$$

Предположим, что $f^{(n)}(x) = 2^{3x} * 3^n * ln^n(2)$. Докажем предполагаемое по индукции. База $n = 3$, мы её уже проверили выше. Пусть утверждение верно для $n = 3$, докажем теперь для $n + 1$

$$(f^{(n)}(x))' = (2^{3x} * 3^n * ln^n(2))' = 2^{3x} * 3^n * 3 * ln^n(2) * ln(2) =$$

$$= 2^{3x} * 3^{n+1} * ln^{n+1}(2) = f^{(n+1)}(x)$$

Ответ: $f^{(n)}(x) = 2^{3x} * 3^n * ln^n(2)$

Задание 7. Найти производную порядка n

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Положим $h_1(x) = \frac{1}{x-2}, \quad h_2(x) = \frac{1}{x+2}$

$$h_1'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$h_1''(x) = \frac{(-1)*(-2)}{(x-2)^3}$$

$$h_1'''(x) = \frac{(-1)*(-2)*(-3)}{(x-2)^4}$$

$$...$$

$$h_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n * n!}{(x-2)^{n+1}}$$

Можно показать по индукции, что данное соотношение верно. Аналогично получаем производную порядка n для функции $h_2(x)$. Имеем:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^n * n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n * n!}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

Ответ: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^n * n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n * n!}{(x+2)^{n+1}}\right)$

Задание 8. Найти производную порядка n

$$f(x) = x^2 cos(2x)$$

Решение:

Положим $h_1(x) = x^2, \quad h_2(x) = cos(2x)$ тогда по свойству производных n - ого порядка получаем:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h_2^{(n-k)} h_1^{(k)} =$$

$$= C_n^0 (x^2)^{(0)} (cos(2x))^{(n)} + C_n^1 (x^2)^{(1)} (cos(2x))^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)^{(2)} (cos(2x))^{(n-2)} + ... =$$

$$= x^2 (cos(2x))^{(n)} + 2xn(cos(2x))^{(n-1)} + 2 * \frac{n(n-1)}{2} * (cos(2x))^{(n-2)}$$

Найдем производные косинусов:

$$(cos(2x))' = (sin(2x + \frac{\pi}{2}))' = 2cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2sin(2x + \frac{2\pi}{2})$$

$$(cos(2x))'' = (2sin(2x + \frac{2\pi}{2}))' = 4cos(2x + \frac{2\pi}{2}) = 4sin(2x + \frac{3\pi}{2})$$

$$...$$

$$(cos(2x))^{(n)} = 2^n cos(2x + \frac{\pi n}{2})$$

Истинность данного утверждения можно проверить по индукции. Таким образом, получаем:

$$f^{(n)}(x) = 2^n x^2 cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + 2^n nxcos(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}) + 2^{n-2} * n(n-1)cos(2x + \frac{(n-2)\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n x^2 cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + 2^n nxsin(2x + \frac{\pi n}{2}) - 2^{n-2} * n(n-1)cos(2x + \frac{n\pi}{2})$$

Ответ: $2^n x^2 cos(2x + \frac{\pi n}{2}) + 2^n nxsin(2x + \frac{\pi n}{2}) - 2^{n-2} * n(n-1)cos(2x + \frac{n\pi}{2})$

Задание 9. Найти производную порядка $n = 8$ в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

Решение:

Положим $h_1(x) = x^2, \quad h_2(x) = \frac{1}{1-x}$ тогда по свойству производных n - ого порядка получаем:

$$f^{(8)}(x) = \sum_{k=0}^{8} C_8^k h_2^{(8-k)} h_1^{(k)} =$$

$$= C_8^0 (x^2)^{(0)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} + C_8^1 (x^2)^{(1)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)} + C_8^2 (x^2)^{(2)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)} + ... =$$

$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} + 16x\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)} + 8*7*\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)}$$

Найдем производные функции $\frac{1}{1-x}$:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1*2}{(1-x)^3}$$

$$...$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)} = \frac{6!}{(1-x)^7}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)} = \frac{7!}{(1-x)^8}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}$$

Таким образом, получаем:

$$f^{(8)}(x) = x^2 * \frac{8!}{(1-x)^9} + 16x * \frac{7!}{(1-x)^8} + 8*7*\frac{6!}{(1-x)^7}$$

$$f^{(8)}(0) = 8!$$

Ответ: 8!

Задание 10. Найти производную y''_{xx} в точке $(1,0)$

$$x = (t^2+1)e^t, y = t^2e^{2t}$$

Решение:

$$y'_x = \frac{2te^{2t} + 2t^2e^{2t}}{2te^t + t^2e^t + e^t} = \frac{2te^{2t}(t+1)}{e^t(t+1)^2} = \frac{2te^t}{t+1}$$

$$y''_{xx} = \frac{(2e^t + 2te^t)(t+1) - 2te^t}{(t+1)^2}$$

Точка $(x,y) = (1,0)$ равносильна $t = 0$, так как следует из условия:

$$1 = (0^2+1)e^0, \quad 0 = 0^2e^{2*0}$$

$$y''_{xx}(0) = \frac{2}{1} = 2$$

Ответ: 2