Семинарское занятие №24

Воробьёв Сергей

Март 2020

Признаки сходимости

Пусть $a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$, тогда S называется знакочередующимся, где S:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

Признак Лейбница

Если $lim_{n \to \infty} a_n = 0$ и $\forall n \Rightarrow a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, то

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \to$$

Признак Дирихле

Рассмотрим ряд $S^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Если:

1) Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограниченны

2) Последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю

То ряд S^* сходится

Признак Абеля

Рассмотрим также ряд $S^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Если:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

2) Последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограниченна

То ряд S^* сходится

Задание 1. Исследовать ряд на абсолютную сходимость:

$$a_n = \frac{(n+1)cos(2n)}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}}$$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n+1)cos(2n)}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$$

Ряд сходится абсолютно

Ответ: сходится абсолютно

Задание 2. Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Решение:

Заметим, что ряд абсолютно не сходится. Исследуем на условную сходимость:

$\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю. Выполняются все условия признака Лейбница. Ряд сходится условно

Ответ: сходится условно

Задание 3:

Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю. Верно ли, что $\forall \alpha \in R$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(n\alpha)$ сходится?

Решение:

Рассмотрим $S_n = \sum_{k=1}^{n} sin(k\alpha)$

$$2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)S_n = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = 2sin(n\alpha)sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$$

$$S_n = \frac{sin(n\alpha)sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{sin(\frac{\alpha}{2})}$$

Таким образом, выполняются все условия признака Дирихле. Следовательно, ряд сходится

Ответ: верно

Задание 4. Сходится ли ряд?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\alpha)}{ln(ln(n+2))} cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Решение:

Рассмотрим $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\alpha)}{ln(ln(n+2))}$. Такой ряд сходится по признаку Дирихле (следствие из предыдущей задачи). Далее, последовательность $cos\left(\frac{1}{n}\right)$ монотонна и ограниченна. Таким образом, выполнены все условия признака Абеля. Следовательно, ряд сходится

Ответ: ряд сходится