Семинарское занятие №13

Воробьёв Сергей

Декабрь 2019

Задание 1. Найти предел последовательности:

$$lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$$

Решение:

$$lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}=lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1)}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{2}+1)(\sqrt[n]{4}+1)}=\frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Задание 2. Найти предел:

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Решение:
Рассмотрим слагаемое вида $\frac{1}{(2k-1)*(2k+1)}$. Преобразуем его в разность:

$$\frac{1}{(2k-1)*(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{A(2k+1)+B(2k-1)}{(2k-1)*(2k+1)}$$

Получим уравнения на A и B:

$$A(2k+1)+B(2k-1)=1\Rightarrow 2Ak+A+2Bk-B=1$$

$$=(2A+2B)k+(A-B)=1$$

Так как коэффициента при k нет в правой части последнего равенства и свободный член равен единице, то получаем два ограничения

$$2A+2B=0\Rightarrow A=-B$$

$$(A-B)=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

Вернемся к пределу, получим:

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} - \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задание 3. Найти значение $y'(x_0), \ \ x_0 = \frac{11}{12}, y < 2$**:**

$$F(x,y) = 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

Решение:

$$\frac{dF}{dx} = 6y + 6xy' + 16yy' - 12 - 26y' = 0$$

$$y' = \frac{12-6y}{6x+16y-26}$$

$$F(x_0, y(x_0)) = \frac{11}{2}y(x_0) + 8y^2(x_0) - 11 - 26y(x_0) + 11 = 8y^2(x_0) - \frac{41}{2}y(x_0) = 0$$

$$y(x_0) = 0, y(x_0) = \frac{41}{16}$$

Но по условию, нам второй корень не подходит. Найдем теперь значение производной в точке:

$$y'(x_0) = \frac{12-0}{\frac{11}{2} + 16*0 - 26} = -\frac{24}{41}$$

Ответ: $-\frac{24}{41}$

Задание 4.Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$**, в точке** $(0;4)$**:**

$$x = \frac{2t-t^2}{t-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$$

Решение:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_t = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}$$

$$x'_t = \frac{(2-2t)(t-1) - (2t-t^2)}{(t-1)^2} = \frac{-t^2-2+2t}{(t-1)^2}$$

$$y'_x = \frac{t^2 - 2t}{-t^2 - 2 + 2t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$(y'_x)'_t = \frac{(2t-2)(-t^2-2+2t) - (t^2-2t)(-2t+2)}{(-t^2-2+2t)^2}$$

Чтобы найти значение производной в точке $(0;4)$, нужно сначала получить t_0:

$$0 = \frac{2t - t^2}{t-1} \Rightarrow t = 0, t = 2$$

$$4 = \frac{t^2}{t-1} \Rightarrow t = 2$$

Следовательно, нам подходит точка $t_0 = 2$. Найдём теперь значение второй производной в этой точке:

$$(y'_x)'_t = \frac{-4}{4}$$

$$x'_t = -2$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задание 5. Найти производную n-ого порядка:

$$f(x) = xln(x^2 - 3x + 2)$$

Решение:
Заметим, что $xln(x^2-3x+2) = xln((x-1)(x-2)) = xln(x-1) + xln(x-2)$:

$$f'(x) = ln(x-1) + \frac{x}{x-1} + ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)} + \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1*(-2)}{(x-1)^3} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{-2*(-2)}{(x-2)^3}$$

$$...$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-2)!}{(x-1)^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^n(n-2)!}{(x-2)^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}*2*(n-1)!}{(x-2)^n}$$

Ответ: $\frac{(-1)^n(n-2)!(x-n)}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^n(n-2)!(x-2n)}{(x-2)^n} \quad n > 1$