Семинарское занятие №19

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Разбор проверочной

Оценить неизвестный параметр λ распределения Пуассона методом моментов с помощью функции $f(x) = x^2$

Решение

$$\bar{X}_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n} = EX_1^2$$

$$EX_1^2 = DX_1 + (EX_1)^2 = \lambda + \lambda^2$$

$$\lambda^2 + \lambda - \bar{X}_2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{X}_2}}{2}$$

Ответ: оценили

Метод максимального правдоподобия

$$p(x, \theta) = p_\theta(x_1) p_\theta(x_2) ... p_\theta(x_n)$$

$$L(x, \theta) = ln(p(x, \theta)) = \sum_{i=1}^{n} ln(p_\theta(x_i))$$

$$\hat{\theta} = argmax_\theta p(x, \theta)$$

$$\hat{\theta} = argmax_\theta L(x, \theta)$$

Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера

$$I(\theta) = E_\theta[\partial_\theta L(X, \theta)]^2$$

$$D\theta_n(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$$

Задание 1. Листок 19

Получить оценку методом максимального правдоподобия неизвестного параметра θ для распределения Бернулли. Найти информацию Фишера и проверить на эффективность

Решение:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \theta \\ 0 & 1-\theta \end{cases}$$

$$p(x,\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = \theta^k(1-\theta)^{n-k}$$

$$L(x,\theta) = kln(\theta) + (n-k)ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0$$

$$\frac{k}{n} = \bar{X} = \theta$$

$$I_n(\theta) = E[\partial_\theta L(X,\theta)]^2 = E\left[\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - 2n\theta\sum_{i=1}^n x_i + \theta^2 n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right]$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) + \left(E\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2$$

$$I_n(\theta) = \frac{n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2 - 2n^2\theta^2 + \theta^2 n^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

$$D\bar{X} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \Rightarrow D\bar{X} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Ответ: $\bar{X}, I_n(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$

Задание 2. Листок 19

Получить оценку методом максимального правдоподобия неизвестного параметра θ для распределения Пуассона. Найти информацию Фишера и проверить на эффективность

Решение:

$$P(X_i = k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$$

$$L(\theta, k_1, ..., k_n) = \sum_{i=0}^n ln\left(\frac{\theta^{k_i}e^{-\theta}}{k_i!}\right) = \sum_{i=0}^n k_i ln\theta - n\theta - \sum_{i=0}^n lnk_i!$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=0}^n k_i}{\theta} - n = 0$$

$$\frac{\sum_{i=0}^n k_i}{n} = \theta$$

$$I(\theta) = E[\partial_\theta L(X,\theta)]^2 = E[\frac{X_i}{\theta} - 1]^2 = \frac{EX_i^2}{\theta^2} - \frac{2EX_i}{\theta} + 1 = \frac{\theta^2+\theta}{\theta^2} - \frac{2\theta}{\theta} + 1 = \frac{1}{\theta}$$

$$D\bar{X} = \frac{\theta}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

Ответ: $\bar{X}, I_n(\theta) = \frac{n}{\theta}$

Задание 3. Листок 19

Получить оценку методом максимального правдоподобия неизвестного параметра θ для нормального распределения с параметрами $N(\theta, 1)$. Найти информацию Фишера и проверить на эффективность

Решение:

$$\rho_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

$$L(x,\theta) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\theta)^2}{2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\theta)^2}{2}} * ... * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\theta)^2}{2}}\right) =$$

$$= ln\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = 0$$

$$\bar{X} = \theta$$

$$I(\theta) = E(X_1-\theta)^2 = EX_1^2 - 2\theta EX_1 + \theta^2 = 1 + \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 1$$

$$D\bar{X} = \frac{1}{n} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

Ответ: $\bar{X}, I_n(\theta) = n$

Задание 4. Листок 19

Получить оценку методом максимального правдоподобия неизвестных параметров μ, σ для нормального распределения

Решение:

$$\rho_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x,\mu,\sigma) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\right) + nln\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \mu = \bar{X}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}$$

Ответ: получили