Семинарское занятие №18

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Разбор проверочной

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из распределения с плотностью:

$$\varrho(x) = \frac{p+1}{\theta^{p+1}} x^p I_{[0,\theta]}, \quad \theta > 0$$

Исследуйте на несмещенность и состоятельность оценку

$$\frac{p+2}{p+1} * \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Решение

$$E\left[\frac{p+2}{p+1} * \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{p+2}{p+1} E[X_1] = \theta$$

$$E[X_1] = \frac{p+1}{\theta^{p+1}} \int_0^\theta x^{p+1} dx = \frac{(p+1)\theta^{p+2}}{(p+2)\theta^{p+1}} = \frac{p+1}{p+2}\theta$$

$$P\left(\left|\frac{p+2}{p+1} * \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\frac{p+2}{p+1} * \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \theta\right)^2}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{D\left(\frac{p+2}{p+1} * \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{(p+2)^2 D(X_1)}{n(p+1)^2 \varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$E[X_1^2] = \frac{p+1}{\theta^{p+1}} \int_0^\theta x^{p+2} dx = \frac{(p+1)\theta^{p+3}}{(p+3)\theta^{p+1}} = \frac{p+1}{p+3}\theta^2$$

$$D[X_1] = \frac{p+1}{p+3}\theta^2 - \left(\frac{p+1}{p+2}\right)^2 \theta^2$$

Ответ: оценка несмещенная и состоятельная

Метод моментов

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} = Ef(X_1) = h(\theta)$$

$$\theta_n(X) = h^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n f(X_i)}{n}\right)$$

Задание 1. Листок 18

Оценить неизвестный параметр λ распределения Пуассона методом моментов.

Решение:

$$E(X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k * \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n} = \lambda$$

Ответ: $\bar{X}$

Задание 2. Листок 18

Оценить неизвестные параметры a, b равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ с помощью метода моментов

Решение:

$$EX_1 = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$EX_1^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\frac{a+b}{2} = \bar{X}_1$$

$$a = 2\bar{X}_1 - b$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n} = \bar{X}_2$$

$$(2\bar{X}_1 - b)^2 + (2\bar{X}_1 - b)b + b^2 = 3\bar{X}_2$$

$$4\bar{X}_1^2 - 2\bar{X}_1 b + b^2 - 3\bar{X}_2 = 0$$

$$b = \bar{X}_1 + \sqrt{3(\bar{X}_2 - \bar{X}_1^2)}$$

$$a = \bar{X}_1 - \sqrt{3(\bar{X}_2 - \bar{X}_1^2)}$$

Ответ: нашли