Семинарское занятие №4

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Задача 1
Докажите:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!}, n \geq 1$$

Решение

$$\frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!} \Rightarrow n! \geq 2^{n-1}$$

Докажем по индукции, пусть верно для $n = 1$, домножая левую часть полученного неравенства на $n + 1$, а правую на 2, получаем, что равенство сохраняется.

$$(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$$

Задача 2
Докажите:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Решение
Раскроем скобки:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n * \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} * \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} * \frac{1}{n^3} + ... <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Задача 3
Доказать существование предела и найти его:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \;\; a_1 = 0$$

Решение

Докажем монотонность по индукции. Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \sqrt{6} > x_1$. База для $n = 1$ и $n + 1 = 2$ верна

Шаг индукции:

$$x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$$
$$x_{n+1}^2 = 6 + x_n$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n$$

Из предположения индукции, имеем, что $x_{n+1} > x_n$, значит $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$, также мы знаем, что члены положительны, следовательно, $x_{n+2} > x_{n+1}$

Ограниченность. $x_n \geq 0$, $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n$

$$x_n^2 - x_n - 6 < 0 \Rightarrow x_n < 3$$

Так как последовательность ограничена и монотонно возрастает, то существует предел: $lim_{n\to\infty} x_n = c$

$$lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} x_n = c$$
$$lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = c^2 = lim_{n\to\infty} 6 + x_n = 6 + c$$
$$c^2 = 6 + c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow lim_{n\to\infty} x_n = 3$$

Ответ: Предел равен 3

Задача 4

Найти предел:

$$a_n = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Решение

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} lim_{n\to\infty} 1 * \left(1 - \frac{1}{n}\right) * \left(1 - \frac{2}{n}\right) * ... * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ответ: $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Задача 5
Найти предел:

$$a_n = \left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$$

Решение

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{10n-1}\right)^{5n} = e^{5nln\left(1-\frac{2}{10n-1}\right)}$$

Перейдём к пределу в показателе, домножим и разделим на $-\frac{2}{10n-1}$

$$-\frac{2*5n}{10n-1}ln\left(1-\frac{2}{10n-1}\right)^{-\frac{10n-1}{2}} = x_n$$

$$lim_{n\to\infty}x_n = -1$$

Имеем $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Ответ: $\frac{1}{e}$