Семинарское занятие №4

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Задание 1

Отрезок $[0,1]$ разбивается случайным образом на два отрезка. Пусть M -длина наибольшего, а m - длина наименьшего из отрезков. Для всякого a найдите вероятности событий $\{M \leq a\}$ и $\{m \leq a\}$

Решение:

Пусть элемент $x \in [0,1]$ разбивает отрезок на две части, согласно условию. Найдем сначала вероятность того, что первый отрезок меньше a

$$P(M \leq a) = P(max\{x, 1-x\} \leq a) = P(\{x < a\} \cap \{1-x < a\})$$

$$P(\{x < a\} \cap \{1-x < a\}) = P(1-a < x < a) = a - (1-a) = 2a - 1$$

$$P(M \leq a) = \begin{cases} 0 & a \leq \frac{1}{2} \\ 2a-1 & \frac{1}{2} < a < 1 \\ 1 & a \geq 1 \end{cases}$$

Найдем теперь вероятность того, что наименьший отрезок меньше a

$$P(m \leq a) = P(min\{x, 1-x\} \leq a) = 1 - P(min\{x, 1-x\} > a)$$

$$1 - P(min\{x, 1-x\} \geq a) = 1 - P(\{x > a\} \cap \{x - 1 > a\})$$

$$1 - P(\{x > a\} \cap \{x - 1 > a\}) = 1 - P(1 - a > x > a) = 2a$$

$$P(M \leq a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ 2a & 0 < a < \frac{1}{2} \\ 1 & a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $2a-1$**,** $2a$

Задание 2

На плоскости задан некоторый отрезок AB единичной длины, Боб случайным образом проводит через A прямую и вычисляет длину L проекции отрезка на эту прямую. Для всякого a найдите вероятность того, что $L \leq a$

Решение:

Заметим, что длина проекции равна $|cos\alpha|$, так как имеем отношение прилежащего катета к гипотенузе. Заметим что, $\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow P(a < \alpha < b) = \frac{b-a}{\pi}$. Найдем искомую вероятность:

$$P(\{L \leq a\}) = P(|cos\alpha| \leq a) = P(-a < cos\alpha < a)$$

$$P(-a < cos\alpha < a) = P(\pi - arccosa > \alpha > arccosa) = \frac{\pi - 2arccosa}{\pi}$$

Примечание: $E(arccosa) \in [0, \pi]$, $arccos(-x) = \pi - arccosx$ В неравенствах переход к арккосинусам корректный, так как угол находится в первой четверти

Ответ: $\frac{\pi - 2arccosa}{\pi}$

Задание 3

Алиса и Боб договорились встретиться в промежуток времени с 12.00 до 13.00 причем каждый из них готов ждать ровно 30 минут. Какова вероятность встречи? Какова вероятность того, что они встретились и Боб не ждал Алису? Какова вероятность, что они пришли одновременно?

Решение:

Пусть Алиса приходит к 13 часам x минут, а Боб приходит к 13 часам y минут.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

Рассмотрим событие A - { Встреча Алисы и Боба происходит}:

$$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 30 \; 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\} \subset \Omega$$

$$P(A) = P(|x - y| \leq 30) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 1 - \frac{30^2}{60^2} = \frac{3}{4}$$

Теперь посчитаем вероятность события, Боб не ждал Алису:

$$P(x \geq y) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4}$$

И, наконец, вычислим вероятность одновременного прибытия Боба и Алисы:

$$P(x = y) = 0$$

Ответ: $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, 0$

Задание 4

На окружность единичного радиуса поставлены три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

Решение:

Пусть дуга $AC = x$, $BC = y$. Множество элементарных исходов будет состоять из всевозможных двоек имеющих следующий вид:

$$\mu(\Omega) = \{(x, y) | 0 \leq x + y \leq 2\pi, 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

У нас имеются два особых случая, когда треугольник может получиться тупо- или прямоугольным, это случаи, когда мы находимся в одной половине окружности. Следовательно, событие, что треугольник остроугольный будет иметь следующий вид:

$$\mu(M) = \{(x, y)|0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 2\pi - (x + y) \leq \pi\}$$

Построив множества на плоскости, замечаем, что искомая вероятность, есть отношение двух треугольников:

$$P(M) = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{2\pi 2\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

Ответ:$\frac{1}{4}$

Задание 5

Трое загадывают по числу из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что существует треугольник с такими сторонами?

Решение: Воспользуемся неравенством треугольника и применим к выбранным числам. Пусть $x, y, z \in [0, 1]$. Тогда имеем:

$$x + y < z$$

$$x + z < y$$

$$y + z < x$$

Построим единичный куб, а также фигуру которая задается неравенствами. Границы будут удовлетворять следующим равенствам:

$$1)x + y = z$$

$$2)z + y = x$$

$$3)x + z = y$$

Целочисленными решениями (подходящими вершинами) будут являться: для 1) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$ для $2), 3)$ решение будет аналогичным. Заметим, что полученная фигура является тетраэдром, с высотой 1 и площадью основания $\frac{1*1}{2}$. Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ Таких тетраэдров будет три, так как в остальных двух случаях наблюдается симметрия. Имеем, в итоге: $\frac{1}{6} * 3 = \frac{1}{2}$

Ответ:$\frac{1}{2}$

Задание 6

Алиса выбирает точку (x, y) из единичного круга $B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ согласно равномерному распределению на B. Боб выбирает точку (x, y) следующим образом: он выбирает (ϕ, r) из прямоугольника $\prod = [0, 2\pi) \times [0, 1]$ согласно равномерному распределению на $\prod$, а затем полагает $x = rcos\phi, y = rsin\phi$. Отличаются ли вероятностные меры у Алисы и Боба?

Решение:

Выберем из прямоугольника $[0, 2\pi) \times [0, 1]$ радиус, равный $r \in [0, 1]$. Вероятность множества с данным радиусом в прямоугольнике равна $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$

Теперь перейдем к множеству $x^2 + y^2 \leq 1$. В данном случае, вероятность выбора множества с радиусом r равна r^2. Как видим, вероятностные меры не совпадают

Ответ: Да, отличаются