

Семинарское занятие №19

Воробьёв Сергей

Февраль 2020

Задание 1. Найти определённый интеграл :

$$\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + C \\ \int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \pi \right) \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \pi \right)$

Задание 2. Найти определённый интеграл:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$$

Решение:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx = \{t^2 = 1+x\} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2 dt = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$$

Ответ: $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$

Задание 3. Найти площадь фигуры ограниченной кривыми:

$$y_1(x) = x - 3, \quad y_2(x) = 6x - x^2 - 7$$

Решение:

$$x - 3 = 6x - x^2 - 7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

$$S = \int_1^4 (6x - x^2 - 7 - (x - 3))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx = \frac{9}{2}$$

Ответ: $\frac{9}{2}$

Задание 4. Найти площадь ограниченной области:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Решение:

$$x = a * \sin^3 t$$

$$y = b * \cos^3 t$$

В силу симметрии посчитаем площадь четверти, а затем полученную величину домножим на четыре:

$$\frac{S}{4} = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)dt = y(t)x(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y'(t)dt$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y(t)x'(t) - x(t)y'(t))dt = \frac{3ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t * \sin^2 t dt = \frac{3\pi ab}{32}$$

$$S = \frac{3\pi ab}{8}$$

Ответ: $\frac{3\pi ab}{8}$