

Семинарское занятие №3

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Предел функции

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Задача 1

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 2}$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Ответ: -1

Задача 2

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задача 3

Найти предел:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+2}}{2^n + 3^n} + \frac{3^{n+3}}{2^n + 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 27$$

Ответ: 27

Задача 4

Найти предел:

$$a_n = \frac{5 * 2^n - 3 * 5^{n+1}}{100 * 2^n + 2 * 5^n}$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 * \left(\frac{2}{5}\right)^n}{100 * \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 * 5}{100 * \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2} = -\frac{15}{2}$$

Ответ: $-\frac{15}{2}$

Задача 5

Найти предел:

$$a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1}$$

Если $|a| > 1$, то предел равен 1, если $|a| = 1$, то предел равен 0, если $|a| < 1$, то предел равен -1

Задача 6

Найти предел:

$$a_n = \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (*) = \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{n} = \frac{2n^2 + 2}{n} = \infty$$

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^2 - (n-1)^2)((n+1)^2 + (n-1)^2)}{(n^2+1 - n^2+1)(n^2+1 + n^2-1)}$$

Ответ: ∞

Задача 7

Найти предел:

$$a_n = \left(\frac{2019}{n} \right)^n$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln 2019 - n \ln n} = e^{-\infty} = 0$$

Ответ: 0