Семинарское занятие №15

Воробьёв Сергей

Март 2020

Задание 1. Листок 15

Пусть $X = (X_1, X_2)$ распределён нормально с параметрами $(0, R)$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу ковариации случайной величины $Y = (2X_1, X_1 + X_2)$

Решение:

$$AX = Y$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R' = ARA^T$$
$$R' = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: требуемое найдено

Задание 2. Листок 15

Пусть $X = (\xi, \eta)$ распределен нормально с параметрами $(0, R)$. Найдите случайную величину $\delta \sim N(0, 1)$ независимую с ξ:

$$\eta = a\xi + b\delta$$

Решение:

$$cov(\xi, \eta) = aE\xi^2 + bE\xi\delta = aD\xi$$
$$a = \frac{cov(\xi, \eta)}{D\xi}$$
$$D(b\delta^2) = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{D(\eta - \frac{cov(\xi, \eta)}{D\xi})\xi}$$

$$\delta = \frac{\eta - a\xi}{b}$$

Ответ: требуемое найдено

Задание 3. Листок 15

Случайным образом раскладывают пять шаров, среди которых три красных и два белых, по двум коробкам. Величина X число красных шаров в первой коробке, а Y число шаров (всех цветов) во второй коробке. Найдите совместное распределение этих величин. Вычислите $E(X|Y = 3)$. Найдите $P(X = 2|Y)$:

Решение:

$$|\Omega| = \sum_{k=0}^{5} C_5^k = 32$$

$$P(X = 3, Y = 0) = \frac{1}{32}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{32}$$

$$P(X = 3, Y = 1) = \frac{2}{32}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{3}{32}$$

$$P(X = 2, Y = 2) = \frac{6}{32}$$

$$P(X = 3, Y = 2) = \frac{1}{32}$$

$$P(X = 0, Y = 3) = \frac{1}{32}$$

$$P(X = 1, Y = 3) = \frac{6}{32}$$

$$P(X = 2, Y = 3) = \frac{3}{32}$$

$$P(X = 0, Y = 4) = \frac{2}{32}$$

$$P(X = 1, Y = 4) = \frac{3}{32}$$

$$P(X = 0, Y = 5) = \frac{1}{32}$$

Вероятности остальных пар равны нулю

$$E(X|Y=3) = 0 * \frac{P(X=0 \cap Y=3)}{P(Y=3)} + 1 * \frac{P(X=1 \cap Y=3)}{P(Y=3)} +$$

$$+2 * \frac{P(X=2 \cap Y=3)}{P(Y=3)} + 3 * \frac{P(X=3 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = 1,2$$

$$P(X=2|Y) = Ind_{\{Y=0\}}P(X=2|Y=0) + Ind_{\{Y=1\}}P(X=2|Y=1)+$$
$$+Ind_{\{Y=2\}}P(X=2|Y=2)+$$
$$+Ind_{\{Y=3\}}P(X=2|Y=3)+$$
$$+Ind_{\{Y=4\}}P(X=2|Y=4) + Ind_{\{Y=5\}}P(X=2|Y=5) =$$
$$= Ind_{\{Y=1\}}\frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{32}} + Ind_{\{Y=2\}}\frac{\frac{6}{32}}{\frac{10}{32}} + Ind_{\{Y=3\}}\frac{\frac{3}{32}}{\frac{10}{32}} =$$
$$= Ind_{\{Y=1\}}\frac{3}{5} + Ind_{\{Y=2\}}\frac{3}{5} + Ind_{\{Y=3\}}\frac{3}{10}$$

Ответ: искомое найдено

Задание 4. Листок 15

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \sim Pois(\lambda)$, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - независимы. Пусть $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Найдите $P(S_n = k|S_m = l), m > n$

Решение:

$$P(S_n = k|S_m = l) = P(S_n = k|S_n + S_{m-n} = l) =$$
$$= \frac{P(S_n + S_{m-n} = l|S_n = k)P(S_n = k)}{P(S_m = l)} = \frac{P(S_{m-n} = l-k)P(S_n = k)}{P(S_m = l)}$$

Полагая, что $S_n \sim Pois(n\lambda)$ и $P(S_n = k) = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$ можем выписать ответ

Ответ: искомое найдено