Семинарское занятие №14

Воробьёв Сергей

Февраль 2020

Многомерное нормальное распределение

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n} * \sqrt{detR}} e^{-\frac{\langle R^{-1}(x-\mu),(x-\mu)\rangle}{2}}$$

$$\phi_\xi(x) = Ee^{i\langle x,\xi\rangle} = e^{-\frac{\langle Rx,x\rangle + i\langle\mu,x\rangle}{2}}$$

$$\xi \sim N(\mu, R)$$

$$Ax \sim N(A\mu, ARA^T)$$

Задание 1. Листок 14

Пусть (ξ, η) равномерно распределён на $[0,1] \times [0,1]$. Докажите, что (X, Y), где:

$$X = \sqrt{-2ln\xi}cos(2\pi\eta)$$

$$Y = \sqrt{-2ln\xi}sin(2\pi\eta)$$

имеет нормальное распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

Решение:

Рассмотрим характеристическую функцию $X+Y$:

$$\phi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = \int_0^1 \int_0^1 e^{it\sqrt{-2ln\xi}cos(2\pi\eta)+it\sqrt{-2ln\xi}sin(2\pi\eta)} d\xi d\eta$$

Сделаем замену:

$$\rho = \sqrt{-2ln\xi}$$

$$\rho^2 = -2ln\xi$$

$$e^{-\frac{\rho^2}{2}} = \xi$$

$$\theta = 2\pi\eta$$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \eta$$

$$|J| = -\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} * \frac{1}{2\pi}$$

Получили:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{it(\rho cos(\theta) + \rho sin(\theta))} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} * \frac{1}{2\pi} d\rho d\theta$$

Заметим, что в прямоугольной системе координат мы получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+y)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

Ответ: доказали

Задание 2. Листок 14

Пусть (ξ, η) имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций Q. Найдите числа c_{ij} и независимые случайные величины e_1, e_2, имеющие распределение $N(0,1)$ такие, что $\xi = c_{11}e_1 + c_{12}e_2$, $\eta = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$

Решение:
Пусть $e_1 = \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}$ Рассмотрим $cov(\xi, e_1)$

$$cov(\xi, e_1) = E\xi e_1 = E(c_{11}e_1^2 + c_{12}e_2e_1) = c_{11}Ee_1^2 = c_{11}$$

С другой стороны:

$$cov(\xi, e_1) = \frac{cov(\xi, \xi)}{\sqrt{D\xi}} \Rightarrow \sqrt{D\xi} = c_{11}$$

Найдём теперь c_{12}:

$$c_{12}e_2 = \xi - e_1c_{11} = \xi - \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{D\xi} = 0 \Rightarrow c_{12} = 0$$

Аналогично рассуждениям выше найдём c_{21}:

$$cov(\eta, e_1) = E\eta e_1 = E(c_{21}e_1^2 + c_{22}e_2e_1) = c_{21}Ee_1^2 = c_{21}$$

$$cov(\eta, e_1) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}} = c_{21}$$

Осталось найти c_{22}:

$$Dc_{22}e_2 = c_{22}^2 = E(\eta^2 - 2\xi\eta\frac{cov(\xi, \eta)}{D\xi} + \frac{cov^2(\xi, \eta)}{(D\xi)^2}\xi^2)$$

$$c_{22} = \sqrt{D\eta - \frac{cov^2(\xi, \eta)}{D\xi}}$$

Ответ: требуемое найдено

Задание 3. Листок 14

Пусть (X_1, X_2) имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите такую матрицу A, что $X = AY$, где $Y = (Y_1, Y_2)$, Y_i имеют распределение $N(0, 1)$ и являются независимыми

Решение:

Аналогично рассуждениям выше, найдем по выведенным формулам значения оператора A:

$$a_{11} = \sqrt{2}, a_{12} = 0$$
$$a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: искомый оператор найден

Задание 4. Листок 14

Величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0, 1), (-1, 1), (0, 4), (1, 4)$. Найдите $P(|2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4| < 13)$

Решение:

$$P(|2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4| < 13) = P(-13 < 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 < 13)$$

$$\eta = 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4$$
$$E\eta = 2E\xi_1 - 3E\xi_2 + E\xi_3 - E\xi_4 = 2$$
$$D\eta = 4D\xi_1 + 9D\xi_2 + D\xi_3 + D\xi_4 = 21$$
$$P(|2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4| < 13) = \Phi\left(\frac{13 - 2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-13 - 2}{\sqrt{21}}\right)$$

Ответ: искомое найдено