Семинарское занятие №5

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Задание 1
$x_1 = a$
$x_{n+1} = \frac{bx_n}{c+dx_n}$

Доказать, что существует предел $lim_{n\to\infty}x_n$ и найти его, если $a, b, c, d > 0$, $b > c + ad$, $c + dx_n \neq 0$
Решение:
1) *Докажем монотонность по индукции*
Проверим базу $n + 1 = 2$ и $n = 1$

$$x_2 = \frac{ab}{c+da}$$
$$x_1 = a$$

Рассмотрим разность $x_2 - x_1 = \frac{a(b-c-ad)}{c+ad} > 0$ следует из условия
Шаг индукции. Докажем для x_{n+2}

$$x_{n+2} = \frac{bx_{n+1}}{1+dx_{n+1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{1+dx_n}$$

$x_{n+2} >?x_{n+1} \Rightarrow \frac{bx_{n+1}}{1+dx_{n+1}} >? \frac{bx_n}{1+dx_n}$
Имеем:

$$bx_{n+1}(c + dx_n) >?bx_n(c + dx_{n+1})$$

$$cbx_{n+1} + bdx_nx_{n+1} >?bx_nc + bdx_nx_{n+1}$$

$$cbx_{n+1} > cbx_n$$

Так как $x_{n+1} > x_n$ нам известно из базы. Таким образом, мы показали что функция монотонно возрастает

2) *Докажем ограниченность*

$$\frac{bx_n}{c+dx_n} < \frac{bx_n}{dx_n} < \frac{b}{d}$$

Итак, последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно имеет предел

3) *Поиск предела*

Пусть предел равен k

$$lim_{n\to\infty}x_{n+1} = lim_{n\to\infty}\frac{bx_n}{c+dx_n} = k$$

Так как предел конечен мы можем воспользоваться арифметикой пределов

$$lim_{n\to\infty}bx_n = klim_{n\to\infty}(c+dx_n)$$

$$lim_{n\to\infty}(b-kd)x_n = kc$$

$$lim_{n\to\infty}x_n = \frac{kc}{b-kd}$$

Но предел равен k. Приравняем полученные результаты: $\frac{kc}{b-kd} = k \Rightarrow \frac{c}{b-kd} = 1$ Таким образом, получаем:

$$k = \frac{b-c}{d}$$

Ответ: Предел равен $\frac{b-c}{d}$

Задание 2

Найти предел $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$, $x_1 = \sqrt{2}$, если известно, что он существует

Решение:

Пусть $lim_{n\to\infty}x_{n+1} = a$. Так как предел конечен, то воспользуемся арифметикой пределов и возведем выражение в квадрат следующим образом:

$$lim_{n\to\infty}(\sqrt{2+x_n})^2 = a^2$$

$$2+a = a^2$$

$$a = 2, a = -1$$

Ответ: Предел равен 2

Задание 3

Пусть $lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $a > 0$, $a \neq 1$. Найти $lim_{x\to0}(\frac{1}{x}log_a(1+x))$

Решение:

$$lim_{x\to0}(\frac{1}{x}log_a(1+x)) = lim_{x\to0}(log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}) = log_a e = \frac{1}{lna}$$

Ответ: $\frac{1}{lna}$

Задание 4
Найти предел $lim_{x\to 2}(\frac{x^2-4}{x^2-x-2})$
Решение:

$lim_{x\to 2}(\frac{x^2-4}{x^2-x-2}) = lim_{x\to 2}(\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}) = lim_{x\to 2}(\frac{x+2}{x+1}) = \frac{4}{3}$
Ответ: $\frac{4}{3}$

Задание 5
Найти предел $lim_{x\to\infty}(\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}})$
Решение:
$lim_{x\to a}(\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}) = lim_{x\to a}(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}) = 2\sqrt{a}$
Ответ: $2\sqrt{a}$

Задание 6
Найти предел $lim_{x\to 5}(\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25})$
Решение: $lim_{x\to 5}(\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}) = lim_{x\to 5}\frac{-3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} = \frac{-3}{200}$
Ответ: $\frac{-3}{200}$