

Семинарское занятие №23

Воробьёв Сергей

Март 2020

Признаки сходимости

Интегральный признак сходимости

Пусть $f(x) \geq 0$ и убывает на промежутке $[1, +\infty)$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно

Признак Даламбера

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $a_n > 0$, Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

то говорят, что:

- 1) ряд расходится, если $q > 1$
- 2) ряд сходится, если $q < 1$
- 3) ряд может сходиться и расходиться, если $q = 1$

Признак Коши

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $a_n \geq 0$, Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

то говорят, что:

- 1) ряд расходится, если $q > 1$
- 2) ряд сходится, если $q < 1$
- 3) ряд может сходиться и расходиться, если $q = 1$

Задание 1. Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

Ряд сходится по признаку Даламбера

Ответ: сходится

Задание 2. Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{e}$$

Ряд расходится по признаку Даламбера

Ответ: расходится

Задание 3. Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} * \frac{3n+2}{4n+3} = \frac{3}{4}$$

Ряд сходится по признаку Коши

Ответ: сходится

Задание 4. Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Решение:

$$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx = \int \frac{1}{t} dt$$
$$\ln|\ln(x+1)| \Big|_1^{+\infty} = \infty$$

Ряд расходится по интегральному признаку

Ответ: расходится