Семинарское занятие №33

Воробьёв Сергей

Июнь 2020

Задание 1. Найти площадь фигуры X, которая задана следующими ограничениями:

$$y \leq x$$
$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Решение:

$$\int\int_X 1dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

Ответ: нашли

Задание 2. Найти объём фигуры X, которая задана следующими ограничениями:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$
$$0 \leq x$$
$$0 \leq y$$
$$0 \leq z$$

Решение:

Заметим, что необходимо найти восьмую часть объёма шара:

$$\int\int\int_X 1dxdydz \to$$
$$\to \{x = rsin(\theta)cos(\phi), y = rsin(\theta)sin(\phi), z = rcos(\theta), \quad \theta \in [0;\pi], \phi \in [0;2\pi)\} \to$$
$$\to \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 sin(\theta)dr = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: нашли

Задание 3. Вычислить интеграл от f по множеству X, ограниченному прямыми

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$$

$$2y = x$$

$$y = 2x$$

$$x + y = 6$$

Решение:

Множество, ограниченное прямыми можно разбить на два треугольника, получим:

$$\int\int_X \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\int_{X_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy + \int\int_{X_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$$

$$\int\int_{X_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \int_0^2 \left(- \frac{dx}{1+x+y} \right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x} = \int_0^2 \left(- \frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2}} \right) dx = -\frac{1}{3}ln(7) + \frac{2}{3}ln(4)$$

$$\int\int_{X_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int_2^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{6-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \int_2^4 \left(- \frac{dx}{1+x+y} \right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{6-x} = \int_2^4 \left(- \frac{1}{7} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2}} \right) dx = -\frac{2}{7} + \frac{2}{3}(ln(7) - ln(4))$$

$$\int\int_X = \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \frac{1}{3}ln(7) - \frac{2}{7}$$

Ответ: нашли

Задание 4. Вычислить интеграл от f по множеству X:

$$f(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$X = \{\sqrt{x^2+y^2} \le z \le a\}$$

Решение:

$$\int\int\int_X \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz \to \{x = rcos(\phi), y = rsin(\phi), z = z\} \to$$

$$\to \int\int\int_Y \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}} r dr d\phi dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dz \int_0^z \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$
$$= \frac{\pi}{6}(2-\sqrt{2})a^4$$

Ответ: нашли