Семинарское занятие №30

Воробьёв Сергей

Май 2020

Частные производные и дифференциал:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Производная по направлению и градиент:

$$1 = (cos(\alpha_1), cos(\alpha_2), ..., cos(\alpha_n)), \quad \sum_{k=1}^{n} cos^2(\alpha_k) = 1$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x_1 + tcos(\alpha_1), x_2 + tcos(\alpha_2), ..., x_n + tcos(\alpha_n)) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{t}$$

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Задание 1. Найти градиент функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Решение:

$$gradf = (2x, 2y, 2z)$$

Ответ: нашли

Задание 2. Доказать дифференцируемость функции f, в точке $(0, 1)$:

$$f(x, y) = x + y^2 + ln(x + y^2)$$

Решение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x + y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{2y}{x + y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 4$$
$$df(0, 1) = 2dx + 4dy$$

Ответ: $df(0, 1) = 2dx + 4dy$

Задание 3. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

Решение:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$
$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$
$$\Delta f = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} \neq o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

Ответ: функция не дифференцируема в нуле

Задание 4. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0, \quad P_0 = (1, 2, 3)$$

Решение:

$$F_x(1, 2, 3) = 6y - 4x - y^2\Big|_{(x_0, y_0, z_0) = P_0} = 4$$
$$F_y(1, 2, 3) = 6x - 2xy\Big|_{(x_0, y_0, z_0) = P_0} = 2$$
$$F_z(1, 2, 3) = -2z\Big|_{(x_0, y_0, z_0) = P_0} = -6$$

$$4(x-1)+2(y-2)-6(z-3)=0$$
$$2x+y-3z+5=0$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{3-z}{6}$$

Ответ: нашли