Семинарское занятие №21

Воробьёв Сергей

Май 2020

Разбор проверочной

Построить доверительный интервал для неизвестного параметра θ распределения Бернулли, используя эффективную точечную оценку параметра.

Решение

По неравенству Чебышёва получаем, что:

$$P\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha}} \leq \theta \leq \bar{X}+\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha}}\right) \geq 1-\alpha$$

$$p(X,\theta) = ln(\theta^k(1-\theta)^{n-k})$$

$$L(X,\theta) = kln(\theta) + (n-k)ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0$$

$$k - k\theta - n\theta + k\theta = 0$$

$$\theta = \bar{X}$$

$$I_n(\theta) = E[\partial_\theta L(X,\theta)]^2 = E\left[\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - 2n\theta\sum_{i=1}^n x_i + \theta^2 n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right]$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) + \left(E\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2$$

$$I_n(\theta) = \frac{n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2 - 2n^2\theta^2 + \theta^2 n^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

$$D\bar{X} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \Rightarrow D\bar{X} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Таким образом, получаем:

$$\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n\alpha}}; \bar{X}+\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n\alpha}}\right)$$

Ответ: искомое найдено

Задание 1. Листок 21

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - выборка, где X_i распределено по закону Бернулли с вероятностью успеха θ. Используя статистику $\bar{X}$ и ЦПТ постройте асимптотический доверительный интервал для θ

Решение:

Из ЦПТ следует, что:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \approx \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} \to N(0,1)$$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \to \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

Подбираем аргумент так, чтобы $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Получаем:

$$2\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$$

Таким образом, доверительный интервал выглядит так:

$$\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$

Ответ: посчитали

Задание 2. Листок 21

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - выборка, где X_i распределено по закону Бернулли с вероятностью успеха θ. В результате опроса 1000 студентов университета оказалось, что 70 процентов из них хотя бы один раз летали на самолёте. Постройте 95 процентный асимптотический доверительный интервал для неизвестной доли студентов, которые летали на самолёте

Решение:

$$N = 1000$$

:

$$\bar{X} = 0.7$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\Phi(z_{0.975}) = \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{0.975} = 1.96$$

Подставляя значения в интервал:

$$\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$

Получим:

$$\left(0.7 - 1.96 * \sqrt{\frac{0.7 * 0.3}{1000}}; 0.7 + 1.96 * \sqrt{\frac{0.7 * 0.3}{1000}}\right) \approx (0.67; 0.73)$$

Ответ: построили

Задание 3. Листок 21

Среднее значение в выборке размера 25 из нормального распределения $N(\mu, 81)$ оказалось равным 10. Постройте 95 процентный доверительный интервал для неизвестного параметра μ

Решение:

Для параметра μ при известной дисперсии доверительный интервал выглядит следующим образом:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$n = 25$$

$$\bar{X} = 10$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

Подставляя значения в интервал, получим:

$$\left(10 - \frac{9 * 1.96}{5}; 10 + \frac{9 * 1.96}{5}\right) \approx (6.5; 13.5)$$

Ответ: построили

Задание 4. Листок 21

Среднее значение в выборке размера 25 из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$ оказалось равным 10, а выборочная дисперсия 81. Постройте 95 процентные доверительные интервалы для неизвестных параметров μ, σ.

Решение:

Для параметра μ при неизвестной дисперсии доверительный интервал выглядит следующим образом:

$$\left(\bar{X} - \frac{St_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{St_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$F_{T_{n-1}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.064$$

Подставляя значения в интервал, получим:

$$\left(10 - \frac{9 * 2.064}{5}; 10 + \frac{9 * 2.064}{5}\right) \approx (6.3; 13.7)$$

Для параметра σ доверительный интервал выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{x_{\frac{\alpha}{2}}}}; \frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{x_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)$$

$$F_{\chi^2_{n-1}}(x_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow x_{1-\frac{\alpha}{2}} = 12.401$$

$$F_{\chi^2_{n-1}}(x_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow x_{\frac{\alpha}{2}} = 39.364$$

Подставляя значения в интервал, получим:

$$\left(\frac{9\sqrt{24}}{39.364}; \frac{9\sqrt{24}}{12.401}\right)$$

Ответ: нашли

Задание 5. Листок 21

В условиях задачи 3 на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу $H_0 : \mu = 12$ против альтернативы $H_1 : \mu \neq 12$. Найти мощность критерия

Решение:

Из построенного интервала в задаче 3, заключаем, что μ лежит в интервале:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

В нашем случае:

$$\mu \in (6.5; 13.5)$$

Как видим гипотеза H_0 удовлетворяет ограничениям. Следовательно, данную гипотезу принимаем. Найдём мощность критерия:

$$\beta = P_\mu\left(\bar{X} - \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq 12 \leq \bar{X} + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(12-\mu) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(12-\mu) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(12-\mu) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(12-\mu) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$1 - \beta = 1 - \Phi\left(\frac{5}{9}(12-\mu) + 1.96\right) + \Phi\left(\frac{5}{9}(12-\mu) - 1.96\right)$$

Ответ: нашли