Семинарское занятие №1

Воробьёв Сергей

Сентябрь 2019

Математическая индукция

Чтобы доказать требуемое утверждение с помощью математической индукции, необходимо проверить базу (истинность утверждения для фиксированного набора), а затем перенести рассуждения на общий случай, путем сведения его к проверенной базе для набора из фиксированного числа элементов

Бином Ньютона

Биномом Ньютона будем называть следующее представление:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Задача 1

Доказать, с помощью математической индукции:

$$1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Решение

База $n = 1$, для такого n равенство выполняется $1 = \frac{1*2}{2}$

Допустим, что для $n = 1$ это верно, тогда покажем, что равенство выполняется и для $n + 1$:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n(n+2)+(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Таким образом, мы показали, что равенство верно в любом случае

Задача 2

Доказать, с помощью математической индукции:

$$1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Решение

База $n=1$, для такого n равенство выполняется $1=\frac{1*3}{3}$

Допустим, что для $n=1$ это верно, тогда покажем, что равенство выполняется и для $n+1$:

$$1^2+3^2+...+(2n-1)^2+(2(n+1)-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2(n+1)-1)^2=$$

$$=\frac{4n^3+8n^2+4n-n+4n^2+8n+4-1}{3}=\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$$

Таким образом, мы показали, что равенство верно в любом случае

Задача 3

Доказать, с помощью математической индукции:

$$1*2+2*3+3*4...+(n-1)*n=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

Решение

База $n=1$, для такого n равенство выполняется $0=\frac{0*1*2}{3}$

Допустим, что для $n=1$ это верно, тогда покажем, что равенство выполняется и для $n+1$:

$$1*2+2*3+3*4...+(n-1)*n+n*(n+1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}+n(n+1)=$$

$$=\frac{n(n+1)(n-1+3)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Таким образом, мы показали, что равенство верно в любом случае

Задача 4

Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n*(n+1)}$$

Решение

Заметим, что: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n*(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ответ: $1 - \frac{1}{n+1}$

Задача 5
Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Решение
Заметим, что: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, тогда:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Ответ: 2^n

Задача 6
Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$$

Решение
Заметим, что: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, тогда:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$$

Ответ: 0

Задача 7
Найти сумму ряда:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

Решение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(k+1)k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n(n-1)...(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$

Ответ: $\frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

Задача 8
Найти значение выражения:

$$C_n^k + C_n^{k-1}$$

Решение

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{(n-k+1)!k!} = C_{n+1}^{k}$$

Ответ: C_{n+1}^{k}