# Домашнее задание №1

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

**Критерии оценивания**

1) В данной работе представлено пять заданий

2) За каждое задание можно получить от нуля до одного балла

3) Первое задание делится на три пункта: за пункт (а) можно получить 0.4 балла, за пункт (б) 0.5 балла, за пункт (в) 0.1 балла. Промежуточные баллы от 0 до 0.4 в первом пункте не используются, промежуточные баллы от 0 до 0.5 во втором пункте не используются, промежуточные баллы от 0 до 0.1 в третьем пункте не используются

4) Задания со второго по пятое оцениваются либо в ноль баллов, либо в один балл, промежуточной оценки между нулем и единицей нет.

5) Полный балл выставляется, если приведён правильный итоговый ответ, а также приведены обоснованные переходы

6) В сумме за домашнее задание можно получить не более 5 баллов

7) "Похожее решение"хотя бы одной задачи служит основанием для выставления оценки 0 баллов за всю работу

**Задание 1**

$$1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! + ... + n * n! = (n + 1)! - 1$$

(а) Доказать утверждение выше по индукции
(б) Доказать утверждение выше, не используя индукции
(в) Найти значение суммы при $n = 2019$

**Решение:**

а) База индукции $n=1$. При таком $n$ имеем:

$$1*1!=2!-1=1$$

База верна. Предположим, что данное равенство верно при таком $n$, докажем при $n+1$:

$$1*1!+2*2!+3*3!+...+n*n!+(n+1)*(n+1)!=$$
$$=(n+1)!-1+(n+1)*(n+1)!=(n+1)!*(n+2)-1=(n+2)!-1$$

Что и требовалось доказать

б) Предположим, что мы не знаем чему равна сумма $1*1!+2*2!+3*3!+...+n*n!$, попробуем её вычислить:

$$1*1!+2*2!+3*3!+...+n*n!=\sum_{k=1}^{n}kk!=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}((k+1)k!-k!)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!=(n+1)!-1$$

Что и требовалось доказать

в) Найдем значение выражения при $n=2019$:

$$1*1!+2*2!+3*3!+...+2019*2019!=2020!-1$$

**Задание 2**
Найти предел:

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2+n-1}{n^3+n^2+n+1}\right)^{\frac{2019}{n^3}}$$

**Решение:**

$$\left(\frac{n^3+n^2+n-1}{n^3+n^2+n+1}\right)^{\frac{2019}{n^3}}=\left(1+\frac{-2}{n^3+n^2+n+1}\right)^{\frac{2019}{n^3}}=$$
$$=\left(1+\frac{-2}{n^3+n^2+n+1}\right)^{\frac{2019}{n^3}\frac{-2}{n^3+n^2+n+1}\frac{n^3+n^2+n+1}{-2}}$$

Перейдём к пределу:

$$lim_{n\to\infty} e^{ln(1+\frac{-2}{n^3+n^2+n+1})^{\frac{2019}{n^3}\frac{-2}{n^3+n^2+n+1}\frac{n^3+n^2+n+1}{-2}}} =$$

$$= lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2}{n^3+n^2+n+1}\frac{2019}{n^3} ln(1+\frac{-2}{n^3+n^2+n+1})^{\frac{n^3+n^2+n+1}{-2}}} = e^{0lne} = 1$$

**Ответ:** 1

**Задание 3**

Найти предел последовательности, если $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k}{n}) = -1$:

$$lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

**Решение:**

$$lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = lim_{n\to\infty} e^{ln(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n})} = lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}ln(n!)-ln(n)} =$$

$$= lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(k)-ln(n)} = lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k}{n})} = \frac{1}{e}$$

**Ответ:** $\frac{1}{e}$

**Задание 4**

Найти предел функции при $x \to 0$

$$f(x) = ln(1 + arctg(\frac{sinx}{x} - e^{\frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x} - \frac{n\alpha^{n-1}sh(x^2)}{x^2}}))$$

**Решение:**

Посмотрим как ведет себя $arctg(\frac{sinx}{x} - e^{\frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x} - \frac{n\alpha^{n-1}sh(x^2)}{x^2}})$ при $x \to 0$

Чтобы узнать как ведет себя $arctg$, необходимо посмотреть как ведет себя его аргумент при $x \to 0$

Заметим, что $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, так как это замечательный предел. Далее, посмотрим к чему сходится экспоненциальная функция:

$$lim_{x\to 0} e^{\frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x} - \frac{n\alpha^{n-1}sh(x^2)}{x^2}} = lim_{x\to 0} e^{n\alpha^{n-1}+o(1) - \frac{n\alpha^{n-1}sh(x^2)}{x^2}}$$

Заметим, что $\frac{sh(x^2)}{x^2}$ также является замечательным пределом, который сходится к 1 при $x \to 0$. Получаем, что:

$$lim_{x\to 0} e^{\frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x} - \frac{n\alpha^{n-1}sh(x^2)}{x^2}} = e^0 = 1$$

Таким образом, получаем, что $arctg$ сходится к нулю, следовательно, логарифм будет сходится к нулю:

$$lim_{x\to 0} f(x) = ln(1 + arctg(1-1)) = 0$$

**Ответ:** 0

**Задание 5**
Найти предел функции при $x \to 2$

$$f(x) = \frac{arctg(2-x) + sin((x-2)^2)}{x^2-4}$$

**Решение:**
Аргумент $arctg$ и $sin$ при $x \to 2$, стремится к нулю. Следовательно, воспользуемся эквивалентностью, так как порядок малости знаменателя нам это позволяет сделать

$$lim_{x\to2} f(x) = lim_{x\to2} \frac{2-x+(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

**Ответ: -$\frac{1}{4}$**