Семинарское занятие №20

Воробьёв Сергей

Май 2020

Разбор проверочной

1) Рассмотрим оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона:

$$\hat{\lambda}_n(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{X}_2}}{2}, \quad \bar{X}_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n}$$

Найти предел $lim_{n\to\infty}\hat{\lambda}_n(X_1, X_2, ..., X_n)$

2) Получить оценку методом максимального правдоподобия неизвестного параметра θ, а также найти информацию Фишера, где:

$$\rho_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0$$

Решение

1) По закону больших чисел и теореме непрерывности получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_n(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 + 4\lambda}}{2} = \frac{-1 + 2\lambda + 1}{2} = \lambda$$

2) Получим оценку с помощью ММП:

$$p_\theta(X) = \theta^n e^{-\theta x_1 - \theta x_2 - ... - \theta x_n}$$

$$L(\theta, X) = nln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \theta$$

Найдем информацию Фишера:

$$I(\theta) = E\left(\frac{1}{\theta} - X_1\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}E(1 - 2\theta X_1 + \theta^2 X_1^2) = \frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{2\theta}{\theta} + \frac{2\theta^2}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

Ответ: искомое найдено

Доверительные интервалы

$$\theta \in (\hat{\theta}_1(X_1, X_2, ..., X_n); \hat{\theta}_2(X_1, X_2, ..., X_n))$$

$$P(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, ..., X_n) < \theta < \theta_2(X_1, X_2, ..., X_n)) \geq 1 - \alpha$$

Энтропия

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i log_2(p_i)$$

$$log_2(x) = \frac{ln(x)}{ln(2)}$$

$$\lim_{x \to 0} xln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow 0ln(0) = 0$$

Задание 1. Листок 20

В коробке имеется 20 шаров, из которых 9 красных и 11 белых. Посчитать энтропию состояния

Решение:

$$S_0 = -\frac{9}{20}log_2\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{11}{20}log_2\left(\frac{11}{20}\right) \approx 1$$

На следующем шаге разложим шары в исходной коробке в две другие следующим образом: 8 красных и 5 белых положим в первую коробку, а 1 красный шар и 6 белых положим во вторую коробку. Получим:

$$S_1 = -\frac{8}{13}log_2\left(\frac{8}{13}\right) - \frac{5}{13}log_2\left(\frac{5}{13}\right) \approx 0.96$$

$$S_2 = -\frac{1}{7}log_2\left(\frac{1}{7}\right) - \frac{6}{7}log_2\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0.6$$

Теперь разложим 20 шаров по двум коробкам следующим образом: все красные шары в первую коробку, а все белые во вторую. Получим:

$$S_3 = -1log_2(1) - 0log_2(0) = 0$$

$$S_4 = -0log_2(0) - 1log_2(1) = 0$$

Ответ: посчитали

Задание 2. Листок 20

Пусть дана выборка из нормального распределения $N(\theta, 1)$. Построить доверительный интервал для параметра θ

Решение:

Рассмотрим случайную величину $\xi = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta)$:

$$E\xi = \sqrt{n}E(\bar{X} - \theta) = 0$$

$$D\xi = nD(\bar{X} - \theta) = 1$$

$$P(z_{\frac{\alpha}{2}} < \xi < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Ответ: нашли

Задание 3. Листок 20

Пусть дана выборка из распределения Бернулли с параметром θ. Построить доверительный интервал для параметра θ

Решение:

Рассмотрим случайную величину $|\bar{X} - \theta|$. По неравенству Чернова:

$$P(|\bar{X} - \theta| \geq t) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4}} = \alpha$$

$$-\frac{nt^2}{4} = ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{-4ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{n}}$$

$$P\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{-4ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{n}} < \theta < \bar{X} + \sqrt{\frac{-4ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{n}}\right) \geq 1 - \alpha$$

Ответ: нашли

Задание 4. Листок 20

В условиях задачи 3 построить интервал с помощью неравенства Чебышёва

Решение:

$$P(|\bar{X}-\theta| \geq t) \leq \frac{D\bar{X}}{t^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{nt^2} = \alpha$$

$$\frac{\theta(1-\theta)}{nt^2} = \alpha \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha}}$$

$$P(|\bar{X}-\theta| \leq t) \geq 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha}} \leq \theta \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha}}\right) \geq 1-\alpha$$

В качестве θ находящегося на концах интервала можно взять эффективную оценку параметра

Ответ: нашли