Семинарское занятие №7

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Задание 0. Листок 7

'Добрый' преподаватель принимает экзамен следующим образом: что бы ни случилось он ставит 10. Нарисуйте график функции распределения случайной величины ξ, равной оценке за экзамен у 'доброго' преподавателя. Объясните почему, если функция распределения оценки у некоторого преподавателя принимает значение $\frac{1}{2}$, то этот преподаватель точно не является 'добрым'

Решение:

'Добрый' преподаватель ставит 10 всегда. Значит:

$$\xi = 10$$

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = \begin{cases} 0 & t < 10 \\ 1 & t \ge 10 \end{cases}$$

Если функция распределения принимает значение $\frac{1}{2}$, то это значит, что преподаватель использует другие оценки помимо 10, а значит точно не является 'добрым'

Задание 1. Листок 7

Один человек забыл последнюю цифру пин кода банковской карточки. После трёх неудачных попыток карточка блокируется. Случайная величина ξ - число попыток при случайном подборе цифры (цифру, которую уже пробовали вводить, больше не используется). Найдите вероятности событий $\{\xi = 1\}, \{\xi = 2\}, \{\xi = 3\}$ и постройте график функции распределения случайной величины ξ. Найдите вероятность того, что карточка не будет заблокирована.

Решение:

Найдем вероятности событий $\{\xi = 1\}, \{\xi = 2\}, \{\xi = 3\}$ и укажем значения функции распределения, сделав это, построить график не составит труда:

1)Если у нас одна попытка, то это значит, что мы угадали число с первого раза, значит вероятность соответствующего события равна:

$$P(\{\xi = 1\}) = \frac{1}{10}$$

2)Если у нас две попытки, то это значит, что мы угадали число со второго раза, значит вероятность соответствующего события равна:

$$P(\{\xi = 2\}) = \frac{9}{10} * \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

3)Если у нас три попытки, то это значит, что мы не угадали число с первого раза и не угадали со второго, однако при третьей попытке мы можем вводить все, что угодно, так как четвертой попытки у нас не будет из-за блокировки карты:

$$P(\{\xi = 3\}) = \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * 1 = \frac{8}{10}$$

Таким образом, получив искомые вероятности мы можем записать функцию распределения:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \le t < 2 \\ \frac{2}{10} & 2 \le t < 3 \\ 1 & 3 \le t \end{cases}$$

Осталось найти вероятность того, что карточка не будет заблокирована. Введем новую случайную величину η - номер успешной попытки. Найдем искомую вероятность:

$$p = P(\{\eta = 1\}) + P(\{\eta = 2\}) + P(\{\eta = 3\}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} * \frac{1}{9} + \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

Задание 2. Листок 7

Для оценки числа некоторого редкого вида рыб в озере биологи выловили 5 рыб и пометили их. На следующий день они выловили 2 рыбы. Случайная величина ξ - число помеченных рыб среди выловленных. При каком количестве N рыб в озере вероятность $P(\xi = 1)$ максимальна. Нарисуйте график функции распределения ξ при таком N

Решение:

Посчитаем вероятность $P(\xi = 1)$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 C_{N-5}^1}{C_N^2} = \frac{10(N-5)}{N(N-1)}$$

Исследуем последовательность на монотонность. Пусть $a_N = \frac{10(N-5)}{N(N-1)}$. Рассмотрим $a_N - a_{N+1}$:

$$\frac{10(N-5)}{N(N-1)} - \frac{10(N-4)}{N(N+1)} =$$

$$= \frac{10(N^2+N-5N-5-N^2+N+4N-4)}{(N-1)N(N+1)} = \frac{10(N-9)}{(N-1)N(N+1)}$$

Таким образом, до $N < 9 \rightarrow a_N < a_{N+1}$, а при до $N > 9 \rightarrow a_N > a_{N+1}$
Мы нашли N теперь найдем распределение случайной величины ξ

$$P(\xi = 0) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36}$$

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{6}{36} & 0 \le t < 1 \\ \frac{26}{36} & 1 \le t < 2 \\ 1 & 2 \le t \end{cases}$$

Ответ: $N = 9$

Задание 3. Листок 7

Из отрезка $[0,1]$ случайным образом выбирается точка x. Найдите функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ, равной площади квадрата со стороной x?

Решение:

$$\xi = x^2$$

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = P(x^2 \le t) = P(x \le \sqrt{t}) = \sqrt{t}$$

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sqrt{t} & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}$$

$$\rho_\xi(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}},\ t \in [0,1]$$

$$\rho_\xi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}$$

Задание 4. Листок 7

Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ:

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \ge 0)$$

Найти плотности распределения случайных величин $\sqrt{\xi}, \xi^2, \frac{1}{\lambda} ln\xi$

Решение:

$$F_{\sqrt{\xi}}(t) = P(\sqrt{\xi} \le t) = P(\xi \le t^2) = 1 - e^{-\lambda t^2}$$

$$\rho_{\sqrt{\xi}}(t) = \frac{dF}{dt} = 2\lambda t e^{-\lambda t^2}$$

$$F_{\xi^2}(t) = P(\xi^2 \le t) = P(\xi \le \sqrt{t}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}}$$

$$\rho_{\xi^2}(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}}$$

$$F_{\frac{1}{\lambda}ln\xi}(t) = P(\frac{1}{\lambda}ln\xi \le t) = P(\xi \le e^{\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda e^{\lambda t}}$$

$$\rho_{\frac{1}{\lambda}ln\xi}(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t} e^{-\lambda e^{\lambda t}}$$

Ответ: $2\lambda t e^{-\lambda t^2}, \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}}, \lambda^2 e^{\lambda t} e^{-\lambda e^{\lambda t}}$

Задание 5. Листок 7

Пусть функция распределения случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(t) = C_1 + C_2 arctg(\frac{t}{2}) \quad t \in R$$

Найти $C_1, C_2, \rho_\xi(t), P(-1 \le \xi \le 1)$

Решение:

Воспользуемся свойством функции распределения, устремим аргумент в бесконечность:

$$F_\xi(+\infty) = C_1 + C_2 arctg(+\infty) = 1$$

$$F_\xi(-\infty) = C_1 + C_2 arctg(-\infty) = 0$$

Из первого уравнения выразим C_1:

$$C_1 = 1 - C_2\frac{\pi}{2}$$

Подставим во второе:

$$1 - C_2\frac{\pi}{2} - C_2\frac{\pi}{2} = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

Теперь найдем плотность $\rho_\xi(t)$ и вероятность $P(-1 \leq \xi \leq 1)$:

$$\rho_\xi(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2\pi(1+\frac{t^2}{4})} = \frac{2}{\pi(4+t^2)}$$

$$P(-1 \leq \xi \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi(4+x^2)}dx = \frac{2}{\pi} * \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(arctg\left(\frac{1}{2}\right) - arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$P(-1 \leq \xi \leq 1) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{\pi(4+t^2)}$, $\frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

Задание 6. Листок 7

Распределение вероятности положения броуновской частицы в одномерной системе $\rho(x,t)$ меняется с течением времени в соответствии с уравнением диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Показать, что если начальное условие $\rho(x, t = 0)$ является распределением вероятности, т.е. обладает свойствами:

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \rho(x, t = 0)dx = 1$$

$$\rho(x, t = 0) \geq 0$$

а также $\frac{\partial \rho}{\partial x}(+\infty) = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}(-\infty) = 0$ то эти же свойства выполняются для всех $t > 0$

Решение:

Рассмотрим функцию:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)dx$$

Продифференцируем по параметру t, получим:

$$I'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}dx =$$

$$= D\left(\frac{\partial p}{\partial x}(+\infty) - \frac{\partial p}{\partial x}(-\infty)\right) = 0$$

Мы получили, что $\rho(x,t)$ не зависит от времени, значит, если при $t = 0$ $\rho(x, t = 0)$ - распределение, то и для $t > 0$, свойства сохраняются