Семинарское занятие №8

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Задание 1. Листок 8

Из квадрата со стороной 1 наудачу выбирается точка (x, y). Совпадают ли распределения случайных величин $min\{x, y\}$ и $|x - y|$?

Решение:

Рассмотрим случайную величину $\xi = min\{x, y\}$:

$$P(\xi \leq t) = 1 - P(\xi > t) = 1 - P(x > t, y > t)$$

$$t < 0 : 1 - P(x > t, y > t) = 0$$

$$t > 1 : 1 - P(x > t, y > t) = 1$$

$$0 \leq t \leq 1 : 1 - P(x > t, y > t) = 1 - (1 - t)^2$$

Теперь рассмотрим случайную величину $\eta = |x - y|$

$$t \leq 0 : P(\eta \leq t) = 0$$

$$t \geq 1 : P(\eta \leq t) = 1$$

$$0 < t < 1 : 1 - (1 - t)^2$$

Ответ: совпадают

Задание 2. Листок 8

Боб загадал случайным образом число от 0 до 4. Алиса независимо от него также загадала число от 0 до 4. Найдите распределение каждого из полученных чисел, а также их совместное распределение

Решение:

Пусть ξ - случайная величина, равная числу, которое загадал Боб, η - случайная величина, равная числу, которое загадала Алиса.

$$P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)P(\eta = j)$$

Полагая, что Алиса и Боб загадывают числа равновероятно, получаем, что вероятность загадать Бобом число $i = 0, 1, 2, 3, 4$ равна $\frac{1}{5}$, аналогично это выполняется и для Алисы: вероятность выбора числа $j = 0, 1, 2, 3, 4$ равна $\frac{1}{5}$

Тогда:

$$P(\xi = i, \eta = j) = \frac{1}{25}$$

Ответ: $\frac{1}{25}$

Задание 3. Листок 8

Боб загадал случайным образом число от 0 до 4. Алиса прибавила к нему 2 по модулю 5. Найдите распределение каждого из полученных чисел, а также их совместное распределение

Решение:

Если Боб выбирает число 0, то Алиса выбирает 2. Если Боб выбирает 1, то Алиса выбирает 3 и т.д. Таким образом, выбор числа набора Алисы задается выбором Боба. Следовательно, возможные пары с вероятностью $\frac{1}{5}$ будут выглядеть следующим образом:

$$M = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$$

Распределение на остальных парах значений равно нулю

Задание 4. Листок 8

Пространство исходов Ω состоит из пяти элементов, каждый из которых имеет положительную вероятность. Существуют ли на Ω две независимые случайные величины, каждая из которых принимает пять различных значений?

Решение:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$
$$P(\{\omega_i\}) = p_i$$

Пусть $\xi_i = \xi(\omega_i), \eta_i = \eta(\omega_i)$. Рассмотрим совместное распределение случайных величин ξ, η на фиксированном исходе. Получим:

$$P(\xi = \xi_i, \eta = \eta_i) = P(\{w_i\}) = p_i \neq P(\xi = \xi_i)P(\eta = \eta_i) = p_i^2$$

Ответ: не существуют

Задание 5. Листок 8

Опишите все случайные величины ξ такие, что ξ и $sin\xi$ независимы

Решение:

Очевидно, что если ξ или $sin(\xi)$ принимают константные значения, то тогда они независимы. Докажем, что других случаев быть не может.

Рассмотрим функцию распределения случайной величины $sin(\xi)$, а также отрезки $[a, b]$ и $[c, d] : [a, b] \cap [c, d] = \emptyset$. Так как случайная величина непрерывная, то вероятность попасть в отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ ненулевая(на соответствующих прообразах), следовательно, произведение вероятностей не равно нулю

Задание 6. Листок 8

Случайно выбирается точка (x, y) из квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Найдите распределения случайных величин $\xi(x, y) = x, \eta(x, y) = y$ и выясните являются ли эти величины независимыми?

Решение:

Проверим определение независимости:

$$P(x \leq t_1, y \leq t_2) = \int_{-1}^{t_1} \int_{-1}^{t_2} \frac{1}{4} dxdy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{t_1} (t_2 + 1) dx = \frac{(t_1 + 1)(t_2 + 1)}{4}$$

$$P(x \leq t_1) P(y \leq t_2) = \int_{-1}^{t_1} \int_{-1}^{t_2} \frac{1}{2} * \frac{1}{2} dxdy = \frac{(t_1 + 1)(t_2 + 1)}{4}$$

Ответ: величины независимы

Задание 7. Листок 8

Случайно выбирается точка (x, y) из круга $x^2 + y^2 \leq 1$. Найдите распределения случайных величин $\xi(x, y) = x, \eta(x, y) = y$ и выясните являются ли эти величины независимыми?

Решение:

Проверим определение независимости. Рассмотрим вероятность события $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$:

$$P(\xi, \eta \in D) = \frac{1}{4} \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{1}{4}$$

Теперь рассмотрим произведение плотностей:

$$P(\xi, \eta \in D) = \frac{1}{4} \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{2} * \frac{1}{2} dxdy = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{\pi}{16}$$

Ответ: величины зависимы

Задание 8. Листок 8

Случайные величины ξ, η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотность распределения для случайной величины $\xi + \eta$

Решение:
Пусть $0 < t \leq 1$:

$$P(\xi + \eta \leq t) = \int\int_{x+y\leq t} dxdy = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \rho_{\xi+\eta}(t) = t$$

Пусть $1 < t$:

$$P(\xi + \eta \leq t) = \int\int_{x+y\leq t} dxdy = \frac{1 - \frac{(2-t)^2}{2}}{1} \Rightarrow \rho_{\xi+\eta}(t) = 2 - t$$

Ответ:

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2 - t & t \geq 1 \\ 0 & t \notin [0, 1] \end{cases}$$