Семинарское занятие №17

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Точечные оценки параметров

1) Оценка $\theta_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется несмещенной, если:

$$E\theta_n(X_1, X_2, ..., X_n) = \theta$$

2) Оценка $\theta_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется состоятельной, если:

$$lim_{n \to \infty} P(|\theta_n(X_1, X_2, ..., X_n) - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

Задание 1. Листок 17

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины, распределённые по закону Бернулли с параметром θ. Проверить на несмещенность и состоятельность оценку:

$$\theta_n(X_1, ..., X_n) = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \bar{X}$$

Решение:

$$E(\bar{X}) = \frac{n\theta}{n} = \theta$$

$$P(|\bar{X} - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2} \to 0$$

Ответ: оценка является несмещённой и состоятельной

Задание 2. Листок 17

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины, распределённые равномерно на отрезке $[0, \theta]$. Проверить на несмещенность и состоятельность оценку:

$$\theta_n(X_1, ..., X_n) = max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

Решение:

$$P(max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \le t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

$$E(max\{X_1, X_2, ..., X_n\}) = \int_0^\theta n\left(\frac{t}{\theta}\right)^n dt = \frac{n}{(n+1)\theta^n} t^{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$P(|max\{X_1, ..., X_n\} - \theta| \ge \varepsilon) \le \frac{E(max\{X_1, ..., X_n\} - \theta)^2}{\varepsilon^2} \qquad (*)$$

$$Emax^2\{X_1, ..., X_n\} = \int_0^\theta tn\left(\frac{t}{\theta}\right)^n dt = \frac{n}{(n+2)\theta^n} t^{n+2}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$(*) = \frac{\frac{n\theta^2}{n+2} - 2\frac{n\theta^2}{n+1} + \theta^2}{\varepsilon^2} \to \frac{\theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2}{\varepsilon^2} = 0$$

Ответ: оценка не является несмещённой и является состоятельной