Семинарское занятие №10

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Дифференциал

Рассмотрим приращение функции $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Если Δy в точке x_0 представимо в виде:

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Причём $A(x_0)$ не зависит от Δx и $\alpha(\Delta x) \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, а произведение $A(x_0)\Delta x$ есть дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается как $df(x_0)$ или $dy|_{x=x_0}$

Для существования дифференциала в точке $x = x_0$ необходимо и достаточно, чтобы функция в этой точке имела конечную производную

Связь дифференциала и производной в точке $x = x_0$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Если функция дифференцируема при $\forall x \in (a, b)$, то:

$$df = f'(x)dx, \;\; x \in (a, b)$$

Приближенное вычисление с помощью дифференциала

Рассмотрим выражение:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Если $dy(x_0) \neq 0$, то для приближенного значения функции в точке $x_0 + \Delta x$, можно пользоваться формулой:

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$$

Свойства дифференциала

$$d(\alpha v + \beta u) = \alpha dv + \beta du$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

u, v - дифференцируемые функции, α, β-константы

Задание 1.Найти значение определителя в точке $t_0 = 0$:

$$detT = \begin{vmatrix} y'_x & x'_t \\ y''_{xx} & x''_{tt} \end{vmatrix}$$

$$x = arctg(e^t), \quad y = ln(1 + e^{2t})$$

Решение

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{e^t}{1+e^{2t}}} = 2e^t$$

$$y'_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2e^t}{\frac{e^t}{1+e^{2t}}} = 2(1 + e^{2t})$$

$$x'_t = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$$

$$x''_{tt} = \frac{e^t(1 + e^{2t}) - 2e^{3t}}{(1 + e^{2t})^2}$$

$$detT = \begin{vmatrix} y'_x & x'_t \\ y''_{xx} & x'_{tt} \end{vmatrix}_{t_0=0} = 2 * 0 - \frac{1}{2} * 4 = -2$$

Ответ: -2

Задание 2.Найти производную:

$$f(x) = x^{x^x} \quad f'(x) =?$$

Решение

Найдем сначала производную для $\hat{f}(x) = x^x$

$$\hat{f}'(x) = (e^{xlnx})' = e^{xlnx}(lnx + 1) = x^x(lnx + 1)$$

Теперь найдем производную $f(x)$

$$f'(x) = \left(x^{x^x}\right)' = \left(e^{x^x lnx}\right)' = e^{x^x lnx}(x^x(lnx+1)lnx+x^x*\frac{1}{x}) = x^{x^x}(x^x(lnx+1)lnx+x^x*\frac{1}{x})$$

Ответ: $x^{x^x}(x^x(lnx+1)lnx + x^x * \frac{1}{x})$

Задание 3. Найти производную в точке $x_0 = 2019$

$$f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2019)$$

Решение

$$f'(x) = \left(e^{ln(x(x-1)(x-2)...(x-2019))}\right)' = \left(e^{ln(x)+ln(x-1)+ln(x-2)+...+ln(x-2019))}\right)' =$$

$$= x(x-1)(x-2)...(x-2019)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-2019}\right) =$$

$$= (x-1)(x-2)...(x-2019)+x(x-2)...(x-2019)+...+x(x-1)(x-2)...(x-2018)$$

$$f'(2019) = 2019!$$

Ответ: 2019!

Задание 4*

Алиса выбирает точку (x, y) из единичного круга $B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ согласно равномерному распределению на B. Боб выбирает точку (x, y) следующим образом: он выбирает (ϕ, r) из прямоугольника $\prod = [0, 2\pi) \times [0, 1]$ согласно равномерному распределению на $\prod$, а затем полагает $x = rcos\phi, y = rsin\phi$. Отличаются ли вероятностные меры у Алисы и Боба?

Решение:

Выберем из прямоугольника $[0, 2\pi) \times [0, 1]$ радиус, равный $r \in [0, 1]$. Вероятность множества с данным радиусом в прямоугольнике равна $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$

Теперь перейдем к множеству $x^2+y^2 \leq 1$. В данном случае, вероятность выбора множества с радиусом r равна r^2. Как видим, вероятностные меры не совпадают

Ответ: Да, отличаются

Задание 5

Найти дифференциал с помощью вычисления приращения и с помощью производной в точке $x_0 = 2$:

$$f(x) = x - 3x^2$$

Решение:

Первый способ:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(2+\Delta x)-3(2+\Delta x)^2-(2-12)=$$

$$=2+\Delta x-3(4+4\Delta x+\Delta x^2)+10=-11\Delta x-3\Delta x^2$$

$$df|_{x=2}=-11dx$$

Второй способ:

$$f'(x)=1-6x$$

$$f'(2)=-11$$

$$df|_{x=2}=-11dx$$

Ответ: $-11dx$

Задание 6

Найти дифференциал:

$$f(x)=x\sqrt{64-x^2}+64arcsin\left(\frac{x}{8}\right),\ \ |x|<8$$

Решение:

$$d(x\sqrt{64-x^2}+64arcsin\left(\frac{x}{8}\right))=xd(\sqrt{64-x^2})+\sqrt{64-x^2}dx+64*\frac{d\left(\frac{x}{8}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{8}\right)^2}}=$$

$$=\frac{-x^2}{\sqrt{64-x^2}}dx+\sqrt{64-x^2}dx+\frac{64}{\sqrt{64-x^2}}dx=\frac{128-x^2}{\sqrt{64-x^2}}dx$$

Ответ: $\frac{128-x^2}{\sqrt{64-x^2}}dx$

Задание 7

Найти дифференциал df, если u, v дифференцируемые функции и du, dv известны:

$$f=arctg\left(\frac{u}{v}\right)+ln\sqrt{u^2+v^2},\ \ u^2+v^2\neq 0$$

Решение:

$$df=\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+(\frac{u}{v})^2}+\frac{d(\sqrt{u^2+v^2})}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{\frac{vdu-udv}{v^2}}{\frac{v^2+u^2}{v^2}}+\frac{\frac{d(u^2+v^2)}{2\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$= \frac{vdu + udu - udv + vdv}{v^2 + u^2}$$

Ответ: $\frac{vdu+udu-udv+vdv}{v^2+u^2}$

Задание 8
Найти приближенное значение функции в точке $x = 3.98$:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Решение:
Положим $\Delta x = -0.02, x_0 = 4$

$$\sqrt{4 - 0.02} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} dx|_{x=-0.02} = 2 - \frac{1}{4} * 0.02 = 2 - 0.005 = 1.995$$

Ответ: 1.995