Семинарское занятие №12

Воробьёв Сергей

Январь 2020

Задание 1. Листок 12

Доказать, что сумма независимых случайных величин распределённых согласно Пуассоновскому закону имеет распределение Пуассона

Решение:

Пусть:

$$P(\xi_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$$

$$P(\xi_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_1}$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ

$$\phi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$$

Теперь рассмотрим характеристическую функцию $\xi_1 + \xi_2$

$$\phi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \phi_{\xi_1}(t)\phi_{\xi_2}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^{it}}$$

Ответ: ЧТД

Задание 2. Листок 12

Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ Доказать, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} \xi + \eta$

Решение:

$$\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$P(\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) + P(\{|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Ответ: ЧТД

Задание 3. Листок 12

$\xi_n \xrightarrow{d} C$. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Решение:

$$F_{\xi_n}(t) \to F_C(t) = \begin{cases} 0 & t < C \\ 1 & t \geq C \end{cases}$$

Рассмотрим

$$P(|\xi_n - C| < \varepsilon) = P(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) =$$

$$= F_{\xi_n}(C+\varepsilon) - F_{\xi_n}(C-\varepsilon) \overset{n\to\infty}{\to} F_C(C+\varepsilon) - F_C(C-\varepsilon) = 1 - 0 = 1$$

Ответ: ЧТД

Задание 4. Листок 12

Покажите, что в общем случае, если есть сходимость по распределению, то нет сходимости по вероятности

Решение:

Рассмотрим набор случайных величин ξ_n, таких, что ξ_n имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а также:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} (-1)^n & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2} \\ (-1)^{n-1} & \frac{1}{2} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Легко видеть, что:

$$P(\xi_n = -1) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$$

Однако сходимости по вероятности нет

Ответ: ЧТД