Семинарское занятие №10

Воробьёв Сергей

Декабрь 2019

Задание 1. Листок 10

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$

Решение:

Плотность случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ выглядит следуюшим образом:

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$E[\xi] = \int_R \frac{x}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$E[\xi^2] = \int_R \frac{x^2}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Ответ: $\frac{a+b}{2}$, $\frac{(a-b)^2}{12}$

Задание 2. Листок 10

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ

Решение:

Плотность случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, выглядит следуюшим образом:

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$E[\xi] = \int_R x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x d\Big(e^{-\lambda x}\Big) =$$

$$= -(xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[\xi^2] = \int_R x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = -\int_0^\infty x^2 d\Big(e^{-\lambda x}\Big) =$$

$$= -(x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx) = \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx$$

Заметим, что „похожий"интеграл мы уже считали выше.

$$\int_0^\infty \lambda xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ответ: $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}$

Задание 3. Листок 10

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение с параметрами μ, σ^2

Решение:

Пусть η случайная величина такая, что: $\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma}$. Тогда η распределена нормально как $N(0,1)$. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины η:

$$E[\eta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$$

Интеграл выше равен нулю, так как мы интегрируем нечётную функцию по симметричной области. Найдём дисперсию:

$$E[\eta^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} xd\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} * \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

$$D[\eta] = 1 - 0 = 1$$

$$E[\xi] = \sigma E[\eta] + E[\mu] = \mu$$

$$D[\xi] = \sigma^2 D[\eta] + D[\mu] = \sigma^2$$

Ответ: μ, σ^2

Задание 4. Листок 10

Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ_1, а η имеет показательное распределение с параметром λ_2. Также известно, что случайные величины ξ и η независимы. Найдите математическое ожидание случайных величин: $\xi + \eta, \xi\eta$

Решение:

$$E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta] = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}$$

$$E[\xi\eta] = E[\xi]E[\eta] = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Ответ: $\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$