# Семинарское занятие №13

Воробьёв Сергей

Февраль 2020

**Задание 1. Листок 13**

Пусть $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Докажите, что $P(a \le \xi \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$. Найдите $P(\mu - 3\sigma \le \xi \le \mu + 3\sigma)$? Здесь и далее считаем, что $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

**Решение:**

$$P(a \le \xi \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \left\{ \frac{t-\mu}{\sigma} = x, dt = \sigma dx \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Найдём теперь: $P(\mu - 3\sigma \le \xi \le \mu + 3\sigma)$

$$P(\mu - 3\sigma \le \xi \le \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0,9972$$

**Ответ:** $0,9972$

**Задание 2. Листок 13**

Известно, что рост жителей города М. является нормально распределённой случайной величиной с параметрами $\mu = 170, \sigma = 10$. Пусть $X_1, X_2, X_3$ - значения роста трёх случайно выбранных человек. Найдите $P(X_1 > 200)$, $P(X_1 < 150)$, $P(\frac{X_1+X_2+X_3}{3} > 180)$

**Решение:**

$$P(X_1 > 200) = 1 - \Phi(3) = 0,0014$$

$$P(X_1 < 150) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$$

$$P(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} > 180) = 1 - \Phi(\sqrt{3}) = 1 - 0,9582 = 0,0418$$

**Ответ:** $0,0014; 0,0228; 0,0418$

**Задание 3. Листок 13**
$\xi, \eta \sim N(0,1)$, также известно, что данные величины независимы. Доказать, что $\xi cos\alpha + \eta sin\alpha \sim N(0,1)$

**Решение:**

$$\phi_{\xi cos\alpha+\eta sin\alpha}(t) = \phi_{\xi cos\alpha}(t)\phi_{\eta sin\alpha}(t) = \phi_{\xi}(tcos\alpha)\phi_{\xi}(tsin\alpha) =$$

$$= e^{-\frac{t^2 sin^2\alpha}{2}} e^{-\frac{t^2 cos^2\alpha}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

**Ответ: ЧТД**

**Задание 4. Листок 13**
$\xi, \eta \sim N(0,4)$, также известно, что данные величины независимы. Найти $P(4 \le x^2 + y^2 \le 9)$

**Решение:**

$$P(4 \le x^2 + y^2 \le 9) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_2^3 \rho e^{\frac{-\rho^2}{8}} d\rho = \frac{8\pi(e^{\frac{5}{8}} - 1)}{8\pi e^{\frac{9}{8}}}$$

**Ответ:** $\frac{e^{\frac{5}{8}}-1}{e^{\frac{9}{8}}}$