Семинарское занятие №26

Воробьёв Сергей

Апрель 2020

Функциональные ряды

Рассмотрим ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in C \quad x \in E$.

Будем говорить, что ряд S сходится в точке $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

Будем говорить, что S сходится абсолютно в точке $x_0 \in E$, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$

Будем говорить, что S сходится на множестве E, если сходимость выполнена для любого $x \in E$. Множество всех значений x, для которых сходится S называется областью сходимости ряда S

Равномерная сходимость

Будем говорить, что S называется равномерно сходящимся на E, если

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in E$$

$$r_n(x) \rightrightarrows 0, x \in E$$

$$r_n(x) = S_n(x) - S(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Для равномерной сходимости S на множестве E необходимо и достаточно, чтобы:

$$sup_{x \in E} |r_n(x)| \to 0 \quad n \to \infty$$

Признак Вейерштрасса

Если существует $S^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что:

$$|u_k(x)| \leq a_k$$

то S сходится равномерно

Признак Дирихле

Рассмотрим ряд $S^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Если выполнены:

1) $\exists M \geq 0 \quad \forall n \in N \quad \forall x \in E : \left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq M$
2) $a_{n+1}(x) \leq a_n(x), \quad a_n(x) \rightrightarrows 0 \quad x \in E$
То S^{**} равномерно сходится на E

Признак Абеля
Рассмотрим ряд $S^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Если выполнены:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows, \quad x \in E$
2) $\{a_n(x)\}$ монотонна и ограничена на E

Задание 1. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^n x}{n}$$

Решение:
Заметим, что если $|ln(x)| \geq 1$, то ряд абсолютно не сходится. Рассмотрим $|ln(x)| < 1$

$$|ln(x)| < 1 \Rightarrow -1 < ln(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Для условной сходимости нам еще подходит случай, когда $ln(x) = -1$
Ответ: $[e^{-1}, e), \quad (e^{-1}, e)$

Задание 2. Доказать, что ряд сходится равномерно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + (n-1)x)(1 + nx)} \quad x \in (a; +\infty) \; a > 0$$

Решение:

$$\frac{x}{(1 + (n-1)x)(1 + nx)} = \frac{1}{1 + (n-1)x} - \frac{1}{1 + nx}$$

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1 + nx} \Rightarrow S(x) = 1 \quad r_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$$

Заметим, что:

$$0 \leq r_n(x) \leq \frac{1}{1 + na}$$

Отсюда видно, что $r_n(x) \rightrightarrows 0$
Ответ: доказали

Задание 3. Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg(n^2 x) cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}} \quad E = R$$

Решение:
Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$\left|\frac{arctg(n^2x)cos(\pi nx)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt{n}} \rightarrow$$

Ответ: сходится равномерно

Задание 4. Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad E=[0,1]$$

Решение:
Воспользуемся признаком Абеля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \rightrightarrows$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e$$

Ответ: сходится равномерно