Семинарское занятие №9

Воробьёв Сергей

Ноябрь 2019

Производная от функций, заданных неявно

1) Функции заданы параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t(x) \\ y = y(t(x)) \end{cases}$$

тогда производная $\frac{dy}{dx} = y'_x$ будет выглядеть следующим образом:

$$y'_x = y'_t * t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2) Если функкция задана неявно $F(x, y) = 0$, то производная $\frac{dy}{dx} = y'_x$ находится из уравнения

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$$

Задание 1. Найти производную

$$f(x) = \frac{sin^2x}{1 + ctgx} + \frac{cos^2x}{1 + tgx}$$

Решение

$$f(x) = \frac{sin^2x}{1 + ctgx} + \frac{cos^2x}{1 + tgx} = \frac{sin^3x + cos^3x}{cosx + sinx} = 1 - sinx * cosx$$

$$f'(x) = -cos^2x + sin^2x = -cos(2x)$$

Ответ: $-cos(2x)$

Задание 2. Найти производную в точке $x_0 = 1$

$$f(x) = xsh(2x)$$

Решение

$$f'(x) = (x)'sh(2x)+x(sh(2x))' = sh(2x)+x*(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2})' = sh(2x)+x*(e^{2x}+e^{-2x})$$

$$f'(1) = \frac{3e^2+e^{-2}}{2}$$

Ответ: $\frac{3e^2+e^{-2}}{2}$

Задание 3. Найти производную в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2019)$$

Решение Заметим, что при вычислении производной мы получим выражение следующего вида:

$$f'(x) = h(x) + (-1)(-2)...(-2019)$$

$$f'(0) = -2019!$$

Ответ: $-2019!$

Задание 4. Найти производную в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = ln(1+sin^2x) - 2sinx * arctg(sinx)$$

Решение

$$f'(x) = \frac{2*sinx*cosx}{1+sin^2x} - 2*cosx*arctg(sinx) - \frac{2*sinx*cosx}{1+sin^2x}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Ответ: 0

Задание 5. Найти производную y'_x

$$\begin{cases} x = R_0 * cost \\ y = R_0 * sint \end{cases}$$

Решение

$$y'_x = \frac{(R_0*sint)'_t}{(R_0*cost)'_t} = \frac{cost}{-sint} = -ctgt$$

Ответ: $-ctgt$

Задание 6. Найти производную y'_x
Пусть функция y задана уравнением:

$$r = a(1 + cos\phi), \phi \in (0; \frac{2\pi}{3})$$

где r, ϕ - полярные точки (x, y)
Решение

$$x = rcos\phi = a(1 + cos\phi)cos\phi$$
$$y = rsin\phi = a(1 + cos\phi)sin\phi$$

$$y'_x = \frac{y'_\phi}{x'_\phi} = -\frac{cos\phi + cos(2\phi)}{sin\phi + sin(2\phi)} = -\frac{cos(\frac{3\phi}{2})cos(\frac{\phi}{2})}{sin(\frac{3\phi}{2})cos(\frac{\phi}{2})} = -ctg(\frac{3\phi}{2})$$

Ответ: $-ctg(\frac{3\phi}{2})$

Задание 7. Найти производную y'_x

$$F(x, y) = y^5 + y^3 + y - x = 0$$

Решение

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 5y^4y' + 3y^2y' + y' - 1 = 0$$
$$y' = \frac{1}{5y^4 + 3y^2 + 1}$$

Ответ: $\frac{1}{5y^4+3y^2+1}$