Семинарское занятие №6

Воробьёв Сергей

Октябрь 2019

Непрерывность функции. Определение

Функция f непрерывна в точке $x_0 \in E$, если:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Также говорят, что функция f непрерывна в точке $x_0 \in E$, если предел функции(и левый, и правый) в точке $x_0 \in E$, равен значению функции в этой точке:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Классификация точек разрыва

1) Разрыв первого рода: односторонние пределы конечны (не равны значению функции в точке). Возможно два случая:

$$lim_{x \to x_{0-0}} f(x) = lim_{x \to x_{0+0}} f(x)$$
$$lim_{x \to x_{0-0}} f(x) = a \neq lim_{x \to x_{0+0}} f(x) = b$$

В первом случае, говорят, что x_0 тока устранимого разрыва. Во втором случае, точка конечного разрыва. Модуль разности односторонних пределов $|lim_{x \to x_{0-0}} f(x) - lim_{x \to x_{0+0}} f(x)|$ называется скачком функции.

2) Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, либо равен бесконечности в точке $x_0 \in E$, то говорят, что функция терпит разрыв второго рода

Примеры

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$lim_{x \to a-0} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = lim_{x \to a+0} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

Но функция неопределена в точке a. Следовательно, функция $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$ терпит разрыв первого рода в точке a. Так как точка $x = a$, точка устранимого разрыва, то можем доопределить функцию f. Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-a^2}{x-a} & x \neq a \\ 2a & x = a \end{cases}$$

Рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = \frac{sinx}{x}$$

$$lim_{x\to 0-0}\frac{sinx}{x} = lim_{x\to 0+0}\frac{sinx}{x} = 1$$

Точка $x = 0$ точка устранимого разрыва, значит можно доопределить функцию. Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Упражнения Исследовать на непрерывность функции:

1)$e^{\frac{x}{1-x^2}}$

2)$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ 5x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

3)$f(x) = \begin{cases} 2^x & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x - 1 & 1 < x < \infty \end{cases}$

4)$arctg\frac{1}{x}$

5)$x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$

Решение

1)$f(x) = e^{\frac{x}{1-x^2}}$. Проблемные точки: $x = 1, x = -1$. Рассмотрим пределы в этих точках:

$$lim_{x\to -1-0}\ e^{\frac{x}{1-x^2}} = \infty$$

$$lim_{x\to -1+0}\ e^{\frac{x}{1-x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$lim_{x\to 1-0}\ e^{\frac{x}{1-x^2}} = \infty$$

$$lim_{x\to 1+0}\ e^{\frac{x}{1-x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

Заключаем, что в обеих точках функция терпит разрыв второго рода

2)$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ 5x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$. Проблемные точка: $x = 0$. Рассмотрим пределы в этой точке:

$$lim_{x\to 0-0}\ f(x) = \infty$$

$$lim_{x\to 0+0}\ f(x) = 0$$

Заключаем, что в точке функция терпит разрыв второго рода

3)$f(x) = \begin{cases} 2^x & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x-1 & 1 < x < \infty \end{cases}$. Проблемные точка: $x = 1$. Рассмотрим пределы в этой точке:

$$lim_{x\to 1-0}\ f(x) = 2$$

$$lim_{x\to 1+0}\ f(x) = 0$$

Пределы в этой точке конечны, значит разрыв первого рода со скачком равным 2

4)$f(x) = arctg\frac{1}{x}$. Проблемные точка: $x = 0$. Рассмотрим пределы в этой точке:

$$lim_{x\to 0-0}\ f(x) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$lim_{x\to 0+0}\ f(x) = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Пределы в этой точке конечны, значит разрыв первого рода со скачком равным π

5)$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x > -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$$

Проблемные точка: $x = -1$. Рассмотрим пределы в этой точке:

$$lim_{x\to 0-0}\ f(x) = 1$$

$$lim_{x\to 0+0}\ f(x) = -1$$

Пределы в этой точке конечны, значит разрыв первого рода со скачком равным 2