

Лабораторная работа № 1.02А

Исследование движения тел под воздействием силы тяжести

Содержание

Введение	2
Экспериментальная установка	6
Техника безопасности	11
Проведение измерений	12
Обработка результатов	13
Контрольные вопросы	17
Литература	18
Приложение	19

Цели работы

1. Измерение модуля ускорения свободного падения.
2. Экспериментальная проверка эквивалентности гравитационной и инертной массы.

Задачи

1. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту.
2. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения.

Введение

Для векторных физических величин в тексте приняты следующие обозначения:

- выделение литер жирным шрифтом, например — **A**, **b**, указывает на то, что величины **A** и **b** являются векторами;
- A , b — модули векторов **A**, **b**;
- A_x , b_x — проекции векторов **A** и **b** на ось OX ;
- $[\mathbf{A}; \mathbf{b}]$ — векторное произведение **A** и **b**.

Равноускоренное движение тела вдоль некоторой оси OX , описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_x; \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V_{0x}, \quad (2)$$

где x_0 — координата в момент времени $t = 0$, V_{0x} — проекция начальной скорости на ось OX в момент времени $t = 0$, a_x — проекция ускорения на ту же ось.

Решение уравнения (1) относительно 1-й производной (скорости), даст зависимость проекции скорости на ось OX от времени:

$$V_x(t) = V_{0x} + a_x t, \quad (3)$$

а решение относительно 2-й производной (координаты x) — зависимость координаты x от времени:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{a_x}{2}t^2. \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что за промежуток времени $t_2 - t_1$, тело пройдёт расстояние:

$$x(t_2) - x(t_1) = V_{0x}(t_2 - t_1) + \frac{a_x}{2}(t_2^2 - t_1^2). \quad (5)$$

Если в начальный момент времени тело покоилось, то из формулы (5) получим:

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{a_x}{2}(t_2^2 - t_1^2). \quad (6)$$

Из формулы (3) видно, что между перемещением $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ и полуразностью квадратов значений времени $\frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)$, существует линейная зависимость, коэффициент пропорциональности которой, равен проекции ускорения тела на ось OX .

В качестве тела, совершающего равноускоренное движение, рассмотрим тележку, скатывающуюся по наклонной плоскости. Второй закон Ньютона для такой тележки записывается в виде

следующего векторного уравнения:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}}, \quad (7)$$

где \mathbf{a} — ускорение тележки, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, \mathbf{N} — сила реакции опоры, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ — сила трения качения, возникающая в следствии неупругих деформаций колёс и плоскости качения при движении тележки, m — масса тележки.

Направим ось OX вдоль наклонной плоскости, а ось OY перпендикулярно ей (рис. 1), тогда уравнение (7) в проекциях на эти оси принимает вид системы:

$$\begin{cases} OX : ma_x = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ OY : N = mg \cos \alpha \end{cases} \quad (8)$$

где α — угол наклона плоскости к горизонту.

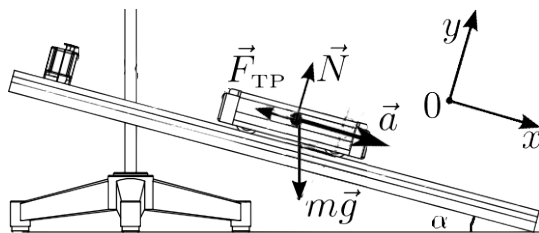


Рис. 1. Векторная диаграмма сил, действующих на тело, расположенное на наклонной плоскости

Модуль силы трения качения колеса тележки:

$$F_{\text{тр}} = \frac{f}{R_{\text{к}}} N, \quad (9)$$

где f — коэффициент силы трения качения, имеющий размер-

ность длины, $R_{\text{к}}$ — радиус колеса. В данной лабораторной работе зависимость $F_{\text{тр.}}$ от радиуса колеса роли не играет, поэтому заменим $\frac{f}{R_{\text{к}}}$ на безразмерный коэффициент μ .

Из системы (8), с учётом силы трения (9), следует:

$$ma_x = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha. \quad (10)$$

Запишем уравнение (10), разделяя понятия инертной и гравитационной массы :

$$m_{\text{и}}a_x = m_{\text{г}}G \sin \alpha - \mu m_{\text{г}}G \cos \alpha. \quad (11)$$

Поскольку в лабораторной установке угол α достаточно мал, то в формуле (11) можно положить $\cos \alpha \approx 1$. С учётом этого выражение для проекции ускорения будет иметь вид:

$$a_x = \frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}G (\sin \alpha - \mu). \quad (12)$$

Таким образом, теоретическая зависимость проекции ускорения от $\sin \alpha$ является линейной. Угловой коэффициент этой зависимости

$$\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}G = a_{\text{тяж}} \quad (13)$$

равен модулю ускорения силы тяжести $a_{\text{тяж}}$, а поскольку инертная и гравитационная массы равны, то ускорение силы тяжести равно гравитационному потенциалу и не зависит от массы тела.

В ходе лабораторной работы мы попробуем проверить равенство инертной и гравитационной массы с доступной нам точностью.

Экспериментальная установка

Лабораторная установка представлена на (рис. 2).



Рис. 2. Лабораторная установка

В комплект входят:

1. Алюминиевый рельс на регулируемых ножках, оборудованный сантиметровой шкалой с ценой деления 1 мм.
2. Две тележки — красная и синяя, снабжённые пусковым пружинным механизмом (для данной работы не используется) и встроенным bluetooth датчиком (включается нажатием кнопки расположенной на тележке).
3. Утяжелитель — деревянный брусок.
4. Угольник для измерения высоты с ценой деления 1 мм.
5. Штатив.
6. Компьютер с установленным программным обеспечением «SPARKvue».

Для измерения угла наклона рельса к горизонту используется угольник при помощи которого, в заданных точках рельса измеряется его высота относительно стола при горизонтальном и наклонённом положениях.

Измерение ускорения тележки при помощи программного обеспечения «SPARKvue».

Программное обеспечение «SPARKvue» предназначено для получения данных от одного или нескольких bluetooth датчиков расположенных в тележках. Для измерения ускорения тележки необходимо произвести следующие действия:

1. Запустить программу «SPARKvue» (ярлык расположен на рабочем столе);
2. Выбрать блок «Получить данные с датчика» (рис. 3)



РИС. 3. Получить данные с датчика

3. Включить bluetooth датчик синей тележки нажатием соответствующей кнопки на её корпусе;
4. Активировать тележку в интерфейсе программы одинарным щелчком левой кнопки мыши по изображению тележки (рис. 4);

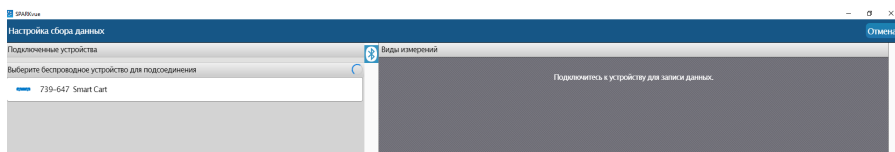


Рис. 4. Выбрать беспроводное устройство для подсоединения

5. В появившемся окне **«Виды измерений»** (рис. 5) отключить все Smart Cart датчики за исключением датчика положения, в меню которого оставить активным пункт **«Скорость»** (рис. 6);

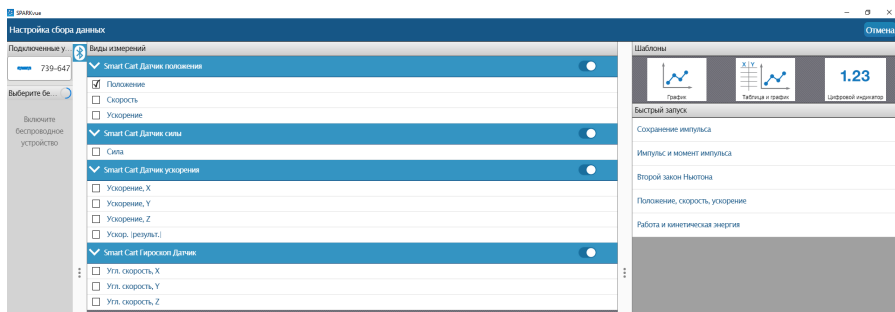


Рис. 5. Выбор измеряемой величины

6. В блоке **«Шаблоны»**, расположенном в том же окне, выбрать **«Таблица и график»**;
7. При помощи штатива поднять рельс на определённую высоту;
8. Установить тележку на правом конце рельса;
9. Нажать кнопку **«Старт»**, одновременно отпустив тележку (тележка начнёт скатываться вниз, а программа будет при-

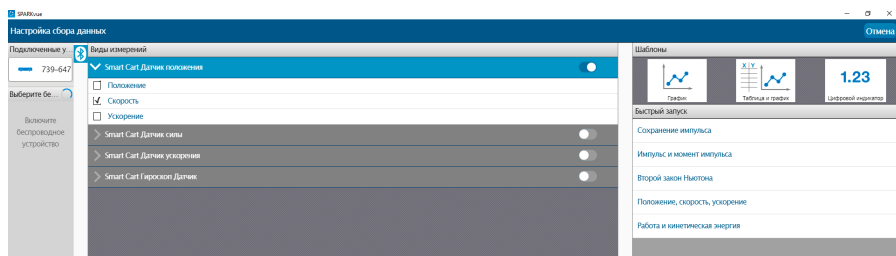


Рис. 6. Датчик положения – Скорость

- нимать данные о скорости тележки, записывая их в таблицу, одновременно с этим будет строиться график зависимости скорости от времени);
10. До взаимодействия тележки с левым упором рельса нажать кнопку «Стоп», выключив сбор данных;
 11. Нажать кнопку с изображением прямоугольного контура, нарисованного пунктирной линией, расположенную под графиком;
 12. Выделить линейный участок графика;
 13. На выделенном участке нажать правую кнопку мыши и выбрать пункт «**Линейная аппроксимация**» (программа построит аппроксимационную прямую (рис. 7), описываемую уравнением $y = mx + b$, где y – скорость, x – время, а m , согласно уравнению (3), является ускорением).

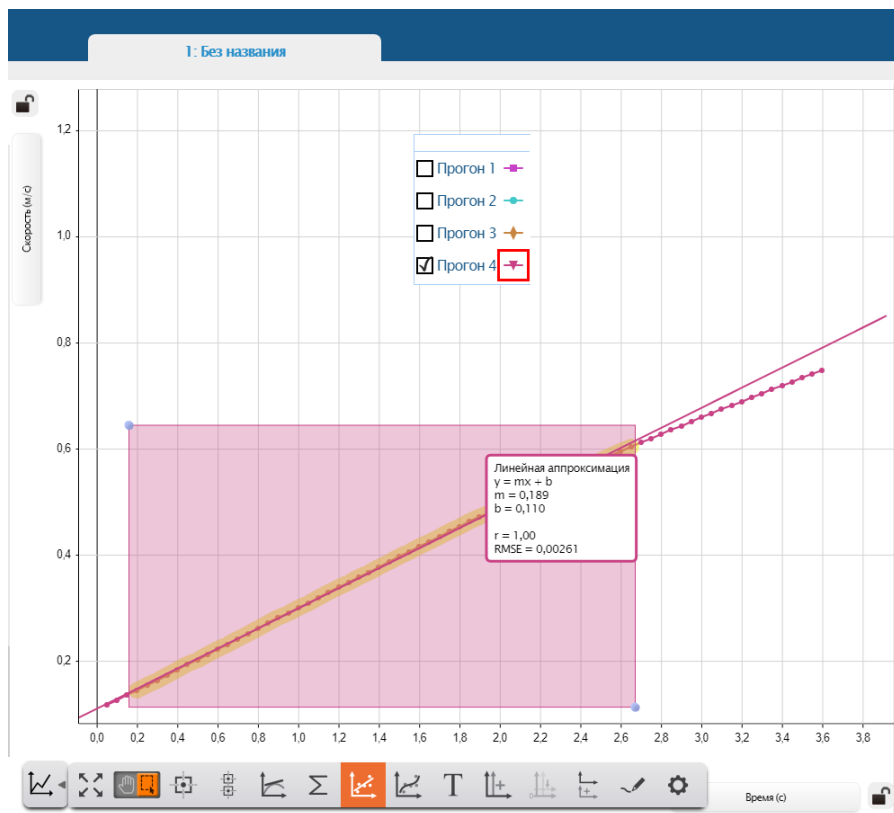


Рис. 7. Вычисление ускорения тележки

Техника безопасности

1. Не разрешается включать установку в отсутствие преподавателя или лаборанта.
2. Нельзя оставлять без наблюдения лабораторную установку во включенном состоянии.
3. Тележки запрещается ронять и использовать не по назначению.
4. Все электрические провода и кабели должны свободно лежать на столе и не должны быть натянуты.
5. В случае искрения, появления дыма немедленно обесточить установку и сообщить преподавателю или лаборанту.
6. После окончания работы все электроприборы должны быть выключены из сети, а тележки необходимо выключить.

Проведение измерений

1. Измерить вертикальные координаты h_0 и h'_0 верхнего края горизонтально расположенного рельса в точках $x = 0.7$ м и $x' = 1.7$ м соответственно, данные измерений занести в таблицу (1);
2. При помощи штатива поднять правый конец рельса на высоту 3-й риски и измерить вертикальные координаты h и h' наклонённого рельса в точках $x = 0.7$ м и $x' = 1.7$ м соответственно, данные измерений занести в таблицу (1);
3. Подготовить оборудование к работе (см. раздел **«Измерение ускорения тележки при помощи программного обеспечения «SPARKvue»»**);
4. Произвести серию из 5-ти измерений ускорения тележки без утяжелителя и с утяжелителем (см. раздел **«Измерение ускорения тележки при помощи программного обеспечения «SPARKvue»»**), полученные значения ускорения занести в таблицу (1) (столбцы 6 и 8);
5. Повторить действия описанные в пунктах 2 и 4 для 4-й, 5-й, 6-й и 7-й риски штатива, полностью заполнив 2-й, 3-й, 6-й и 8-й столбец таблицы.
6. После окончания измерений отключить bluetooth датчик на тележке и закрыть программу «SPARKvue».

Обработка результатов

1. Для каждой серии измерений из таблицы (1), вычислить значение синуса угла α по следующей формуле:

$$\sin(\alpha) = \frac{(h'_0 - h') - (h_0 - h)}{x' - x}. \quad (14)$$

Результаты расчётов записать в 4-й столбец таблицы (1).

2. Для каждой серии измерений вычислить среднее значение ускорения $\langle a \rangle$ и погрешность Δa :

$$\langle a \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{N}; \sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i - \langle a \rangle)^2}{N - 1}}; \Delta a = \frac{\alpha_{0.95, N} \sigma}{\sqrt{N}} \quad (15)$$

где N - количество измерений, σ_a - стандартное отклонение отдельного измерения, а $\alpha_{0.95, N}$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности 0.95 и количества измерений N .

3. Результаты расчёта среднего ускорения в виде доверительного интервала $\langle a \rangle \pm \Delta a$ внести в 7-й и 9-й столбцы таблицы (1).
4. Теоретическая зависимость a от $\sin(\alpha)$ в соответствии с формулой (12), является линейной:

$$a = A + B \sin(\alpha), \quad (16)$$

где $A = -\frac{m_\Gamma}{m_\Pi} \mu g$, а $B = g$ в случае если инертная и гравитационные массы равны, в противном случае $B = \frac{m_\Gamma}{m_\Pi} G$. Най-

ти коэффициенты линейной зависимости можно, используя метод наименьших квадратов (МНК), по следующим формулам :

$$B = \frac{\sum_{j=1}^n a_j \sin(\alpha)_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \sum_{j=1}^n \sin(\alpha)_j}{\sum_{j=1}^n \sin^2(\alpha)_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \sin(\alpha)_j \right)^2}, \quad (17)$$

$$A = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j - B \sum_{j=1}^n \sin(\alpha)_j \right),$$

где a_j - значение среднего ускорения при фиксированном угле α , берётся из 7-го столбца таблицы (1), а $n = 5$ - число углов наклона рельса, при которых проводились измерения.

5. Рассчитать стандартное отклонение σ_B для коэффициента B по следующей формуле:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n d_j^2}{D(n-2)}}, \quad (18)$$

где

$$d_j = a_j - (A + B \sin(\alpha)_j), \quad (19)$$

$$D = \sum_{j=1}^n \sin^2(\alpha)_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \sin(\alpha)_j \right)^2.$$

6. Рассчитать абсолютную ΔB и относительную ε_B погрешности для доверительной вероятности 0.90 по формулам:

$$\Delta B = 2\sigma_B, \quad (20)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta B}{B} 100\%.$$

7. По данным 4-го и 7-го столбца таблицы (1) построить график экспериментальной зависимости a от $\sin \alpha$ для тележки без утяжелителя.
8. Используя значения коэффициентов A и B , на том же рисунке построить график линейной зависимости (16) из пункта (4) для тележки без утяжелителей.
9. По данным 4-го и 9-го столбца таблицы (1) построить график экспериментальной зависимости a от $\sin \alpha$ для тележки с утяжелителем.
10. Используя значения коэффициентов A и B , на том же рисунке построить график линейной зависимости (16) из пункта (4) для тележки с утяжелителем.

В отчет по лабораторной работе должны входить:

- графики зависимости $a = f(\sin(\alpha))$ для тележки без утяжелителя и с утяжелителем;
- значение коэффициентов B линейной зависимости (16) с абсолютной и относительной погрешностями;
- абсолютное отклонение измеренного значения модуля ускорения свободного падения от его табличного значения на широте

Санкт-Петербурга — $|g_{\text{эксп.}} - g_{\text{таб.}}|$;

- вывод о достоверности результатов проведённых измерений, сформулированный на основании сравнения абсолютной погрешности ΔB с величиной $|g_{\text{эксп.}} - g_{\text{таб.}}|$.

Контрольные вопросы

1. В первом случае некоторому телу придали начальную скорость параллельно шероховатой наклонной плоскости в направлении вверх, а во втором случае — вниз. В каком случае модуль ускорения тела будет больше и почему?
2. Дайте определение инерциальной и неинерциальной системы отсчёта.
3. Почему модуль ускорения свободного падения зависит от географической широты? Какой фактор вносит наибольший вклад в эту зависимость?
4. Дайте определение инертной и гравитационной массы.
5. Что понимается под эквивалентностью гравитационного поля и неинерциальной системы отсчёта?

Литература

1. Матвеев А.Н., Механика и теория относительности, том 1.
2. Пантелеев В.Л., Теория фигуры Земли: Курс Лекций. МГУ им. Ломоносова. Физический факультет. Москва, 2000
3. Phys. Rev. Lett. 119 231101 (2017) The MICROSCOPE mission: first results of a space test of the Equivalence Principle
4. Курепин В.В., Баранов И.В., Обработка экспериментальных данных: Учеб.-метод. пособие - СПб.: НИУИТМО; ИХиБТ, 2012.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М: Высшая школа, 2002. - 840 стр.
6. Демидович Б.П., Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗОВ. Москва: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС. 1997 г.

Приложение

Таблица 1: Измерение зависимости ускорения от синуса угла наклона.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_p	h , м	h' , м	$\sin\alpha$	i	a_i , м/с ²	a_i , м/с ²	a_i , м/с ²	a_i , м/с ²
2				1				
				2				
				3				
				4				
				5				
3				1				
				2				
				3				
				4				
				5				
4				1				
				2				
				3				
				4				
				5				
5				1				
				2				
				3				
				4				
				5				
6				1				
				2				
				3				
				4				
				5				

- $h_0 = \underline{\hspace{1cm}}$ м — высота точки не наклонённого рельса с координатой $x = 0.7$ м;
- $h'_0 = \underline{\hspace{1cm}}$ м — высота точки не наклонённого рельса с координатой $x = 1.7$ м;
- n_r — количество рисок;
- h — высота точки рельса в координате $x = 0.7$ м;
- h' — высота рельса с координатой $x = 1.7$ м;
- i — номер измерения.