Riesgo de longevidad - Hipotecas Inversas

Cálculo de primas de riesgo y anualidades máximas para contratos óptimos en hipotecas inversas sujetas a riesgo de longevidad

Autor:

Sergi López Vergara

Fecha:

05 de enero de 2025

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Declaración de intenciones

En el presente trabajo desarrollaré un modelo y un programa en R Studio que permitirá calcular la anualidad máxima que podría pagarse en un contrato de hipoteca inversa en relación con el riesgo de longevidad.

Para realizar este propósito, me he servido de diversas fuentes de datos del INE en relación con la mortalidad y las tendencias del mercado inmobiliario. También han sido necesarios los conocimientos adquiridos en este primer semestre del máster en Ciencias Actuariales y Financieras (UB), en particular las clases de Cálculo Numérico, Análisis Computacional SAS+R, Estadística de l'Assegurança, Estadística Actuarial Vida y Modelos de Valoración Financiera. Durante el trabajo se utilizarán diversas técnicas adquiridas en estas asignaturas, aplicadas mediante programación, por lo que es necesario tener ciertas nociones en estas disciplinas para comprender el modelo y las implicaciones derivadas del mismo.

Pese a que durante las secciones se demuestra cómo manipular bases de datos y realizar cálculos en R, la versión completa y extendida del código se encuentra en el apéndice. Por otro lado, si el lector requiere conocimientos previos para comprender el programa, los cálculos y los resultados, puede consultar en la bibliografía diversas fuentes relacionadas con las nociones técnicas del programa y el modelo.

Las secciones 1 a 3 contextualizan y aportan relevancia al trabajo. Las secciones 4 y 5 son teóricas; en la cuarta se plantea una versión simplificada del modelo que pone de manifiesto la problemática del riesgo de longevidad en hipotecas inversas, mientras que la quinta plantea el modelo in extenso y demuestra el sistema de ecuaciones que permite calcular primas de riesgo. La sección 6 muestra las estimaciones realizadas para calcular las variables exógenas del modelo. La sección 7 explica cómo funciona el programa. Las secciones 8 y 9 exponen los resultados del trabajo y las conclusiones.

Finalmente, la selección de esta temática, las hipotecas inversas, no solo responde a su actualidad y potencial relevancia, sino también a la necesidad de combinar conocimientos en Ciencias Actuariales, Finanzas y Estadística, en línea con el espíritu del máster.

Conceptos Técnicos

Hipotecas inversas, Ciencias Actuariales, Finanzas, Estadística Aplicada, Riesgo de Longevidad, Cálculo de la Vida Residual, Tablas Actuariales, Interpolación Lineal, Análisis VaR, Progresión Geométrica, Métodos Numéricos, Cálculo de primas de riesgo mediante ecuaciones no lineales, Probabilidades de fallecimiento temporales diferidas, Modelos de Capitalización y Revalorización, Gestión del Riesgo de Longevidad, Modelización Financiera, Método de Newton-Raphson multidimensional.

Índice

1. ¿Qué es una Hipoteca Inversa?

La hipoteca inversa[1] es un producto financiero diseñado para proporcionar ingresos adicionales a personas mayores de 65 años, o en edad de jubilarse, que son propietarias de una vivienda. Este instrumento permite convertir el valor de la propiedad en liquidez sin necesidad de venderla ni abandonar el hogar. Es especialmente útil para quienes desean complementar su pensión y mejorar su calidad de vida durante la jubilación.

El funcionamiento es análogo a un préstamo colateralizado. El prestamista, habitualmente una empresa financiera, y el prestatario, habitualmente una persona que pretende jubilarse, acuerdan un contrato de préstamo en el que el prestamista abona una mensualidad o anualidad al prestatario durante el tiempo de vida restante de este último. De esta forma, las mensualidades o anualidades van acumulándose en un monto de deuda que se capitaliza a un tipo de interés fijo o variable que las partes acuerdan.

La idea es que el monto total de la deuda va a ir incrementándose a medida que pasan los años, de forma que cuando el prestatario fallezca el prestamista se cobrará la deuda total contra el valor del inmueble. En realidad, es un producto financiero análogo a un plan de pensiones, ya que ambos transforman ahorro acumulado en ingresos regulares durante la jubilación. En un plan de pensiones, las personas destinan parte de su renta a un fondo de ahorro que, al jubilarse, se convierte en un flujo de pagos periódicos. Por otro lado, en una hipoteca inversa, el ahorro acumulado está representado por el valor de la vivienda, que se ha generado previamente mediante la inversión en el inmueble. Al contratar una hipoteca inversa, este ahorro inmobiliario se transforma en ingresos regulares, proporcionando renta sin necesidad de vender ni abandonar la propiedad, cumpliendo así un objetivo similar al de un plan de pensiones.

Ventajas

- **Complemento de ingresos:** Permite transformar ahorro inmobiliario en renta, lo cual es conveniente para aquellas personas que pretenden jubilarse o complementar su pensión.
- **Conservación de la vivienda:** El propietario sigue siendo el titular y puede vivir en ella mientras lo desee. Es decir, no hay que renunciar a la propiedad.
- **Beneficios fiscales:** La renta percibida por la hipoteca inversa está sujeta a baja o nula tributación, dependiendo del país. Esto se debe a que las cantidades recibidas no se consideran un ingreso, sino una recomposición del patrimonio del titular, ya que corresponden al valor acumulado de su vivienda transformado en liquidez.

Desventajas

- **Impacto en la herencia:** Los herederos recibirán la vivienda con la deuda pendiente, lo que puede reducir el patrimonio disponible para ellos. Pese a esto, los contratos habitualmente establecen que los herederos tienen derecho a quedarse con el inmueble si saldan la deuda.

[1] Existen otros tipos de hipotecas inversas, como las de renta temporal o de pago único, sin embargo en el contexto de esta publicación estudiaré las hipotecas de renta vitalicia en anualidades.

2. ¿Por qué las hipotecas inversas importan?

En España, no tenemos demasiada cultura financiera. El informe PISA financiero 2022 revelaba que un 42 % de los estudiantes españoles están en el nivel mínimo aceptable de conocimientos financieros o inferior. Personalmente, no creo que sea cosa solo de los estudiantes; de hecho, es posible que las generaciones jóvenes sean precisamente las más interesadas en las finanzas.

Tal vez esto explique por qué los españoles solo hemos ahorrado de dos maneras históricamente: comprando una vivienda y cotizando a la Seguridad Social. Es natural; los sistemas de reparto son muy generosos a priori. Muchos de los primeros perceptores de nuestro sistema público de pensiones ni siquiera llegaron a cotizar para el mismo.

Sin embargo, ha pasado mucho tiempo desde que se puso en marcha el sistema. Los que lo implementaron se fueron y dejaron la deuda[2] atrás; los que cobran ahora pretenden hacer lo mismo, y los que cobraremos luego nos preguntamos qué será de nosotros. Si bien es cierto que las pensiones no se van a dejar de pagar, también es igualmente cierto que la tasa de sustitución no es la misma hoy que hace 30 años, y no será la misma hoy que dentro de otros 30 años. Por no hablar de la edad de jubilación, claro.

En este contexto, aparecen las hipotecas inversas. El razonamiento es simple: las pensiones públicas no van a ser tan generosas y jubilarse debidamente va a ser una tarea financieramente compleja. Pero, como comentaba antes, la otra fuente de ahorro para los españoles ha sido la vivienda.

Cuando alguien contrata una hipoteca, obtiene dinero de inmediato con el compromiso de devolverlo mediante pagos periódicos a lo largo de los años. En una hipoteca inversa, el proceso es el opuesto: el titular recibe un flujo de renta desde el momento presente, y el banco recupera el préstamo una vez que el propietario fallece, tomando como garantía su vivienda. Este mecanismo permite transformar el valor acumulado de la vivienda en liquidez sin perder el derecho a seguir habitándola durante toda la vida.

Existen diversos tipos de hipotecas inversas, adaptadas a las necesidades y circunstancias de cada persona. Las más avanzadas incluyen mecanismos que cubren el riesgo de longevidad: si el titular vive más tiempo del valor equivalente a su vivienda, será el banco quien asuma esa diferencia, garantizando así la continuidad del ingreso. Esto convierte a las hipotecas inversas no solo en una herramienta financiera, sino también en una solución para reducir la incertidumbre económica durante la jubilación.

En el contexto en el cual las pensiones públicas sean menos generosas y la planificación financiera personal se vuelva esencial, este producto puede ser una opción viable para mantener la calidad de vida en el momento de la jubilación.

[2]El principal problema de los sistemas de reparto (pay-as-you-go) no es la deuda financiera, sino las continuas modificaciones unilaterales de contrato a las que el sistema se ve sometido debido a la no sostenibilidad relativa a alteraciones en variables exógenas como la esperanza de vida, la pirámide demográfica, la natalidad o la incapacidad de integrar nuevos contribuyentes al sistema. La deuda financiera emerge del no reconocimiento a corto y medio plazo de estos desajustes. En este sentido, la referencia a una deuda en este contexto es un eufemismo para la suma de estos efectos.

3. Variables del modelo

Como he comentado anteriormente, la idea de una hipoteca inversa es ir acumulando una deuda, que además se va capitalizando, hasta el momento de fallecimiento del prestatario, de tal forma que el prestamista se cobrará la deuda en forma de porcentaje de la venta del inmueble colateralizado por el prestatario de la hipoteca inversa. De esta forma, nos interesa controlar con cierta precisión las tres variables fundamentales del modelo:

- **Duración del contrato:** Fundamental, ya que cuanto más dura el contrato más aumenta la deuda capitalizada por los intereses. La duración del contrato dependerá del tiempo de vida residual del prestatario, es decir, de cuánto tiempo viva. Por tanto, la duración del contrato será una variable aleatoria, ya que no tenemos certeza exacta del momento en el que alguien puede morir. En este sentido, el prestatario le está transfiriendo el riesgo de longevidad al prestamista. En contratos donde el solicitante no busca liquidar todo el valor de su inmueble, el riesgo de longevidad tiende a ser bajo; sin embargo, en mi modelo he tratado de obtener la anualidad máxima, es decir, el solicitante quiere recibir la mayor cantidad posible y no trata de dejar nada a sus herederos. En esta circunstancia, el riesgo de longevidad tiende a ser muy grande y, por tanto, es crucial controlar la variable duración del contrato.

- **Valor del colateral:** Cuánto vale el colateral, en este caso el inmueble, en el momento de fallecimiento del solicitante. Hemos de considerar que entre el inicio y la finalización del contrato el valor del inmueble va a variar. Lo habitual es que se revalorice, debido a las tendencias inflacionarias sobre el valor del suelo, pero también hay que considerar la depreciación material del inmueble.

- **Tasas de interés anuales:** Que servirán para capitalizar la deuda. Habitualmente en los contratos de hipotecas inversas se establecen tipos de interés fijos, ya que al ser contratos de tanta duración y con riesgo, nos interesa estabilizar lo máximo posible las variables del contrato. Sin embargo, también se pueden utilizar tasas variables. Para hacernos una idea del tipo de interés de estos contratos, podemos compararlos con los tipos del mercado SWAP a plazos similares a la duración del contrato. Si el contrato tiene riesgo de longevidad, será necesario calcular una prima para compensarlo.

El cálculo preciso de estas variables es fundamental para estimar correctamente la anualidad que podremos prestar a nuestro cliente. En las siguientes secciones explicaré detalladamente cómo he realizado los cálculos para cada variable. Sin embargo, a modo de resumen, presento los principales aspectos:

1. **Duración del contrato:** A partir de tablas de vida estándar del INE, deduciendo la variable aleatoria Vida Residual, calculando la esperanza, la varianza, y realizando un análisis VaR con significación del 10 %, 5 %, 1 %, interpolando resultados.

2. **Valor futuro del colateral:** En mi modelo, el colateral será el inmueble. Utilizaré un modelo simple de revalorización del mercado inmobiliario en España, basado en datos de tendencias de los últimos 15 años. Los datos están segregados por comunidades autónomas, de forma que el modelo se adaptará a las tendencias regionales.

3. **Tipos de interés anuales:** Utilizaré dos tipos de interés fijo, con riesgo o sin riesgo. La prima se calculará mediante una condición de probabilidad.

PARTE TEÓRICA

4. Modelo base sin prima de riesgo

La primera condición que vamos a imponer en el modelo es que el monto de deuda ha de ser igual al precio de la vivienda en el momento de finalización del contrato, que en este caso podría ser la esperanza de vida del individuo u otras medidas relacionadas con la longevidad. Si, por el contrario, ofrecemos pagos menores, el cliente recibiría menos renta que la máxima, lo cual es deseable en muchos contratos de hipoteca inversa. Sin embargo, para este trabajo nos interesa analizar riesgos de longevidad, por lo que fijaremos esta condición de maximización para resaltar estos riesgos. Esta condición nos garantiza que la mensualidad que podemos llegar a pagar será la máxima que el prestatario puede llegar a percibir.

$$D_T(P, r) = C_T$$

Donde:

- $D_T(P, r)$: El valor total de la deuda capitalizada en el momento T.
- C_T: El valor del colateral en el momento T, que en nuestro modelo será el valor futuro de la vivienda.
- T: Será la duración técnica del contrato.
- P: El pago anual, o anualidad que el prestamista pagará al prestatario.
- r: El tipo de interés anual, en función del tiempo $t = 0, 1, 2, ..., T$.

La condición $D_T(P, r) = C_T$ nos garantiza que la cantidad anual que podemos ofrecer P sea máxima sin asumir pérdidas estadísticas. Si ofreciéramos pagos anuales mayores, tendríamos pérdidas, ya que el inmueble del cliente no se revalorizaría tan rápido como aumentaría el monto de deuda. Para el momento en el que el cliente fallezca, la deuda sería superior al valor del inmueble. Si las anualidades fuesen inferiores, entonces el contrato tendría menor riesgo de longevidad[3]. En mi modelo me interesa resaltar los riesgos de longevidad, por lo que el prestatario espera cobrar lo máximo que le puedan ofrecer. Además, este escenario sigue siendo válido para aquellos individuos que no quieran dejar nada en herencia o necesiten complementar sus ingresos como pensionistas en la máxima cuantía dentro de sus posibilidades.

$D_T(P, r_t)$ es un monto de deuda que se va capitalizando, y al que cada año se le añaden las anualidades, por tanto, funciona con interés compuesto:

$$D_T(P, r_t) = \sum_{t=0}^{T-1} P \cdot \prod_{j=t}^{T-1} (1 + r_j)$$

Como podemos ver, el valor del monto total de deuda $D_T(P, r_t)$ será la suma del valor capitalizado de cada flujo de pagos P, por la serie de tipos de interés anuales r_t. Modelizaremos los contratos con un tipo de interés fijo que detallaré más adelante, pero por ahora podemos simplificar la expresión dado que, a un tipo de interés fijo:

[3] Este escenario suele ser deseable tanto para el prestamista (reduce el riesgo) como para el prestatario (pretende dar en herencia y, por tanto, desea retener algo del valor del inmueble).

$$D_T = \sum_{j=0}^{T-1} P \cdot (1+r)^{T-j} \iff r_t = r \quad \forall\, t \in \{0, 1, \ldots, T\}$$

Además, la expresión sigue una progresión geométrica, por lo que podemos reducirla a un término simplificado:

$$\sum_{j=0}^{T-1} P \cdot (1+r)^{T-j} = P \cdot \frac{1+r}{r} \cdot \big((1+r)^T - 1\big) = D_T \tag{Apéndice}$$

En particular, podemos modelizar el monto de deuda para un momento concreto t de la siguiente forma:

$$D(t, r, P) = P \cdot \frac{1+r}{r} \cdot \big((1+r)^t - 1\big)$$

Por otro lado, C_t va a seguir un modelo de revalorización simple que ajustaremos en función de la ubicación del inmueble:

$$C_t = C_0 \cdot (1+g)^t$$

Donde:

- C_0 es el precio del inmueble al inicio del contrato.
- g es la tasa de revalorización.

4.1. Condición de máxima anualidad

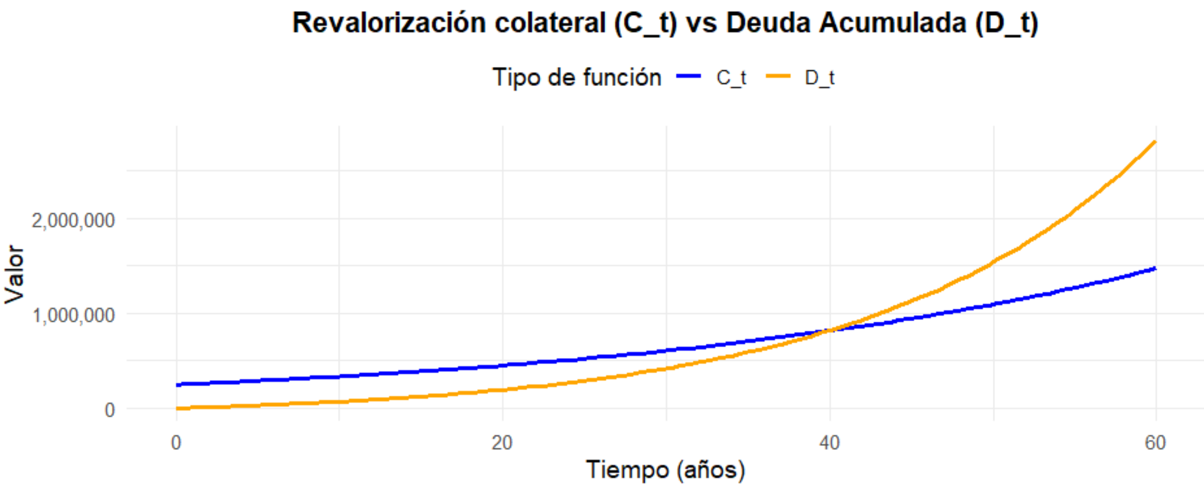
Por tanto, volviendo a la condición de maximización, sustituyendo ambas expresiones y aislando las anualidades y fijando $t = T$ obtenemos la primera condición del modelo:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^T \cdot r}{(1+r) \cdot ((1+r)^T - 1)} \tag{Condición de máxima anualidad}$$

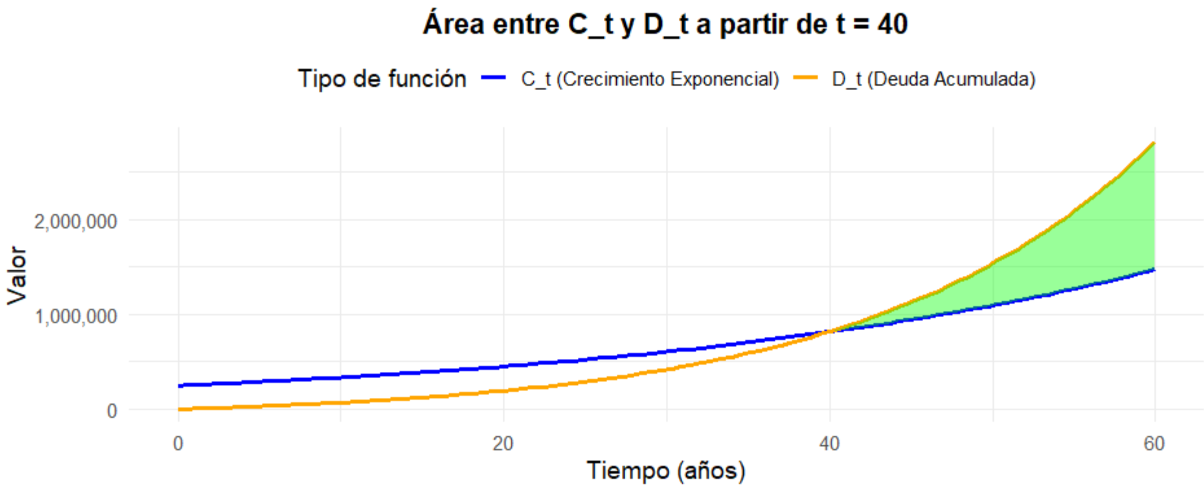
Esta ecuación es fundamental, y servirá para determinar las incógnitas del modelo. Como podemos comprobar, la condición de maximización depende críticamente de las variables mencionadas anteriormente. En particular, la variable T es crucial, porque nos indicará el número de períodos del modelo. Por otro lado, r_t, será el flujo de tipos de interés anuales que esperamos desde el inicio del contrato hasta el vencimiento del mismo. C_T dependerá de cómo estimemos el crecimiento del valor del colateral, en nuestro ejemplo el mercado inmobiliario en España segregado por regiones.

4.2. Explicación del modelo

Aunque C_t parte con ventaja ($C_0 > D_0$), eventualmente el valor acumulado de la deuda tiende a superar el valor revalorizado del inmueble ya que el contrato de deuda establece pagos anuales fijos más capitalización. El punto de corte entre C_t y D_t está determinado por la duración técnica del contrato T, que a su vez es un proxy para el nivel de riesgo.



Una particularidad del modelo base es que no existen situaciones donde el riesgo juegue a nuestro favor. Si el prestatario fallece antes del momento T, para el que hemos diseñado el contrato, entonces no obtenemos ninguna ventaja por el riesgo, es decir, simplemente se presta una cantidad monetaria colateralizada por un inmueble, y nuestra retribución consiste en el tipo de interés r que contempla el coste de financiación y el margen base de la compañía financiera, pero no existen rendimientos extraordinarios.



Por otro lado, si el prestatario fallece después de T, entonces nos veremos afectados por el riesgo de longevidad. El contrato se diseñó esperando que el prestatario falleciera en el momento T, y finalmente ha fallecido más tarde. Todos los periodos donde el prestatario sobrevive por encima del valor para el que se diseñó el contrato representan pérdidas directas para el prestamista, que serán equivalentes a $C_t - D_t < 0$.

Estas pérdidas (área coloreada en el gráfico) serán una variable aleatoria, ya que dependen de t, el número de años vivido, que sigue una variable aleatoria en función de las probabilidades de supervivencia. De esta forma, la mejor manera de medir estas posibles pérdidas por riesgo de longevidad es la siguiente:

$$\text{Pérdidas} = \mathbb{E}[C_t - D_t \,|\, T < t]$$

Notemos que por construcción estas Pérdidas serán un valor negativo, que dependerá de las probabilidades de morir en cada instante $t > T$ y de la intensidad de las pérdidas monetarias $C_t - D_t < 0$ con $T < t$.

Si diseñamos un contrato para una duración técnica muy elevada, la cantidad de periodos que el prestatario puede sobrevivir superando T se reduce. De hecho, una forma de eliminar el riesgo totalmente es diseñar un contrato cuya duración técnica sea igual al infinito actuarial menos la edad del prestatario, $T = w - x$. Por definición, las pérdidas por riesgo de longevidad serán nulas, ya que el contrato se ha diseñado para que el prestatario muera en el límite de sus posibilidades de supervivencia, o dicho de otra manera, la probabilidad de sobrevivir más allá de $w - x$ es igual a 0.

Corolario: En el modelo sin prima de riesgo, la única forma de reducir el riesgo de longevidad es extender la duración técnica del contrato para un valor donde la probabilidad de no sobrevivir al periodo sea del 100 %. Por tanto, en ausencia de primas de riesgo, la única anualidad máxima posible es aquella que no asume riesgo de longevidad.

Sin embargo, este enfoque supone solucionar el problema del riesgo de longevidad moviéndonos hacia un escenario que no lo contempla, es decir, no trabaja sobre el riesgo de longevidad, sino que lo esquiva. Por eso, pese a que puede ser un enfoque razonable, no supone más que un subconjunto de todos los posibles contratos, ya que, como demostraré, es posible establecer contratos óptimos asumiendo riesgo de longevidad y pagando mayores anualidades.

Un enfoque más razonable sería establecer contratos basados en una duración técnica T relacionada con parámetros biométricos[4]. Por ejemplo:

T	**Definición**
Esperanza de vida residual	Media de la vida restante
Esperanza de vida residual + desviación estándar	Media más una medida de dispersión
VaR_{10}	Valor en Riesgo al 10 %
VaR_{5}	Valor en Riesgo al 5 %
VaR_{1}	Valor en Riesgo al 1 %
$w - x$	Sin riesgo

[4]La idea detrás de estas medidas es que cuanto mayor es T, menos riesgo de longevidad estamos asumiendo. En particular, los valores VaR nos sirven para saber el nivel de riesgo que podríamos estar dispuestos a asumir.

5. Modelo con prima de riesgo:

Por cómo funciona el contrato de hipoteca inversa, si el individuo fallece antes de la edad técnica para la que se diseñó el contrato, la empresa financiera no asume ninguna pérdida, ya que el valor del inmueble es superior al de la deuda y, por tanto, la deuda se puede cobrar en su totalidad. Sin embargo, si el individuo supera la edad técnica del contrato, todos esos períodos donde el individuo permanece vivo por encima del valor del inmueble son renta que la empresa financiera tiene que ceder por contrato pero no recuperará. Por tanto, la parte prestamista en el contrato está asumiendo riesgo de longevidad.

El riesgo de longevidad se verá afectado por la duración técnica T del contrato que realicemos. Cuanto mayor sea esta duración, menor será el riesgo de longevidad y viceversa.

Para mejorar la gestión de riesgos del contrato, utilizaré el parámetro k, que es la prima de riesgo. La idea será aplicar una prima de riesgo de tal forma que el riesgo de longevidad esté diversificado en cartera entre los clientes que sobreviven el tiempo diseñado por contrato y los que no. Por tanto, estableceré una distinción entre el tipo de interés libre de riesgo r_0 y el tipo de interés con riesgo r_k, de tal forma que:

$$k = r_k - r_0$$

Además:

$$r_k > r_0 \iff D_{t,r_k} > D_{t,r_0} \quad \forall t \in [0, w - x] \tag{Apéndice}$$

A diferencia del modelo anterior, en este caso trabajaremos con dos duraciones técnicas del contrato T_{contr} y T_{risk}[5]. Donde T_{contr} será el momento t donde el valor del inmueble y la deuda con prima de riesgo interseccionan, y T_{risk} será el valor de t donde el valor del inmueble y la deuda sin prima de riesgo interseccionan. En relación con el modelo anterior: $T_{\text{risk}} = T =$ Duración técnica:

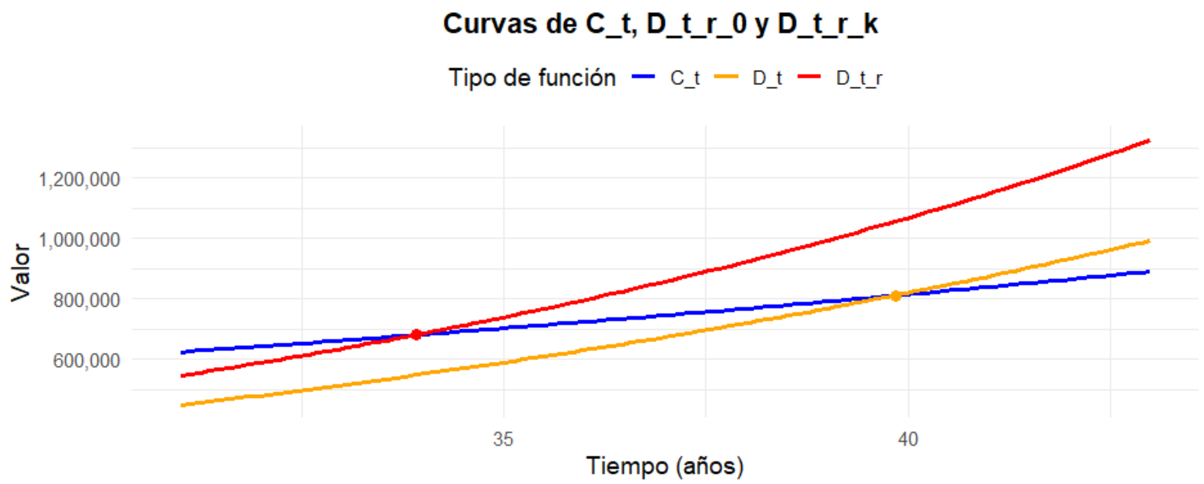
$$T_{\text{contr}} = t \iff C_t = D_{t,r_k} \quad T_{\text{risk}} = t \iff C_t = D_{t,r_0}$$

- T_{contr}: Define la duración técnica contractual, ya que está determinada por el tipo de interés real del contrato r_k.
- T_{risk}: Define el nivel de riesgo real del contrato, ya que está determinado por r_0, que es el tipo de interés al que la financiera prestaría sin riesgo.

Es decir, T_{contr} mide cuál es el tiempo para el que estamos diseñando el contrato prestando al tipo de interés con riesgo r_k. Sin embargo, la introducción de r_k simplemente será un mecanismo para percibir ganancias por prima y compensar las pérdidas del riesgo de longevidad. Aunque por contrato la financiera está prestando a un tipo de interés $r_k > r_0$, en realidad, a nivel empresarial, sigue prestando a r_0, y asumiendo el nivel de

[5]En la sección "Variables del modelo" queda definida la duración del contrato como una variable aleatoria que depende de la vida residual; para el modelo con prima se utilizan dos duraciones, T_{contr} y T_{risk}, entiéndase que la que hace referencia a la sección anterior es T_{risk}.

riesgo asociado a r_0, que es T_{risk}, que de hecho es el mismo valor que T en el modelo anterior donde no hay prima de riesgo.



Como podemos observar, la condición anterior se sostiene, $r_k > r_0 \iff D_{t,r_k} > D_{t,r_0}$. La intersección entre C_t (línea azul) y D_{t,r_0} (línea roja) está determinada por T_{contr}. Análogamente, la intersección entre C_t (línea azul) y D_{t,r_k} (línea naranja) está determinada por T_{risk}.

Para trabajar el riesgo, la idea será definir la variable ganancias por riesgo G_t, que nos indicará cuánto hemos ganado debido al efecto de la prima de riesgo en aquellos individuos que mueren antes de la edad técnica del contrato T_{contr}. Y, por otro lado, la variable L_t[6], que nos indica la situación de la deuda una vez se ha superado la duración técnica del contrato T_{contr}.

$$G(t, r_k, r_0) = D_{t,r_k} - D_{t,r_0} \quad t < T_{\text{contr}}$$

Por otro lado:

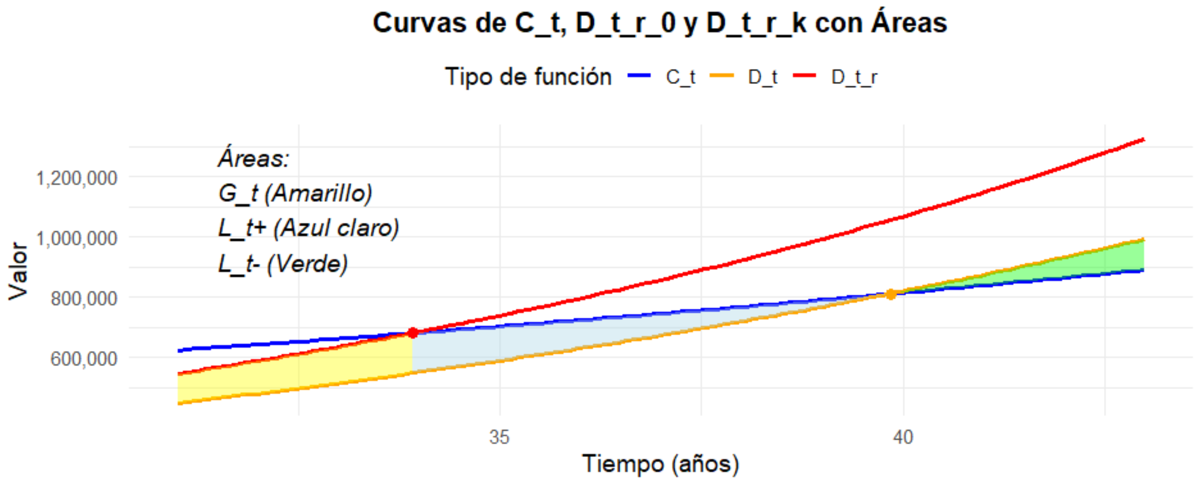
$$L(t, r_0) = C_t - D_{t,r_0} \quad t > T_{\text{contr}}$$

De esta forma, $G(t)$ modeliza el efecto de ganancias por prima de riesgo desde 0 hasta T_{contr}, $L(t)$ modeliza las ganancias por prima de riesgo desde T_{contr} hasta T_{risk} y finalmente $L(t)$ modeliza las pérdidas por riesgo de longevidad desde T_{risk} hasta $w - x$.

La variable $H(t)$ queda construida como la unión de ambos conceptos y modeliza simultáneamente los efectos negativos del riesgo de longevidad y los efectos positivos de la prima de riesgo.

[6] Es importante recalcar que L_t no es una variable estrictamente negativa, ya que entre T_{contr} y T_{risk} se cumple simultáneamente que la deuda con prima de riesgo D_{t,r_k} es mayor que C_t y C_t es mayor que D_{t,r_0}, es decir, $\forall t \in [T_{\text{contr}}, T_{\text{risk}}]$, $L_t > 0$.

$$H(t) = \begin{cases} G(t) & \text{si } t \leq T_{\text{contr}}, \\ L(t) & \text{si } T_{\text{contr}} < t < w - x. \end{cases} \quad \text{o} \quad H(t) = \begin{cases} D_{t,r_k} - D_{t,r_0} & \text{si } t \leq T_{\text{contr}}, \\ C_t - D_{t,r_0} & \text{si } T_{\text{contr}} < t < w - x. \end{cases}$$



El área[7] amarilla es el área donde aplicamos $G(t)$, ya que el efecto de la prima de riesgo es la diferencia entre la deuda con y sin riesgo. En el área azul pasaríamos a aplicar $L(t)$ ya que la deuda sería mayor que el colateral, por lo que nuestro cobro será el valor del colateral. Finalmente, en el área amarilla seguiríamos aplicando $L(t)$, pero ahora obtendríamos valores negativos asociados al riesgo de longevidad.

5.1. Condición de riesgo:

Finalmente, es necesario considerar que t es el momento de fallecimiento del individuo, es decir, es una variable aleatoria basada en las probabilidades actuariales de fallecimiento y supervivencia. Nuestro interés será condicionar los valores que generan el área de la curva de forma que la esperanza matemática sea 0. Esto es, en definitiva, la segunda condición del modelo, a la que he denominado condición de riesgo.

$$\mathbb{E}[H(t)] = 0 \tag{Condición de riesgo}$$

La moralidad de esta condición es forzar que los casos de fallecimiento prematuro, donde la financiera se ve beneficiada por la prima de riesgo, compensen los casos de supervivencia prolongada, donde la financiera tiene pérdidas por riesgo de longevidad.

Por tanto, conociendo la variable $H(t)$:

$$\mathbb{E}[H(t)] = \int_0^{w-x} H(t) \cdot {}_tP_x \cdot \mu(x+t)\, dt,$$

[7]Pese a que en esta sección se ilustra el proceso mediante áreas, es importante recordar que G_t y L_t no representan áreas, sino diferencias entre funciones del modelo. De hecho, las áreas estarían representando las integrales de G_t y L_t o $H(t)$.

Si consideramos los cambios de función, podemos expresar la condición directamente con $G(t)$ y $L(t)$:

$$\mathbb{E}[H(t)] = \int_0^{T_{\text{contr}}} G(t) \cdot {}_tP_x \cdot \mu(x+t)\,dt + \int_{T_{\text{contr}}}^{w-x} L(t) \cdot {}_tP_x \cdot \mu(x+t)\,dt.$$

5.2. Problemática: Una disyuntiva actuarial

Llegados a este punto, nos enfrentamos a una fuerte disyuntiva sobre cuál es el mejor método para calcular la condición de riesgo. En realidad, hay diversas maneras de obtener el resultado, y se pueden usar indistintamente en función del enfoque con el que queramos trabajar. Lo ideal sería realizar un enfoque utilizando una modelización con datos continuos. Sin embargo, los datos que ofrecen las tablas de vida actuariales y los métodos estándar del sector están diseñados para ser trabajados en discreto.

La disyuntiva es la siguiente:

Si tratamos de modelizar los datos discretos en tabla hacia modelos continuos de probabilidad de muerte diferida, nos enfrentamos a la siguiente pregunta: *¿La modelización que he realizado de datos discretos a continuos es lo suficientemente robusta?*

Por otro lado, si dado un modelo diseñado con continuidad lo aproximo para encajar en unos datos discretos, la pregunta es la siguiente: *¿La aproximación es lo suficientemente buena como para representar correctamente la realidad?*

Propuesta:

Es necesario decantarse por uno de los dos métodos para continuar el trabajo. En mi caso, ajustaré el modelo continuo para encajar en los datos discretos de las tablas. Sin embargo, no puedo garantizar cuál de las dos aproximaciones es más correcta, y probablemente dependa de la calidad de los datos y la facilidad del ajuste. Por ello, invito al lector a continuar el modelo mediante aproximaciones al tanto instantáneo de mortalidad[8] obtenidas a partir de las tablas.

[8] Una propuesta razonable sería utilizar la transformación ${}_tP_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)\,ds}$ para hacer depender el modelo de $\mu(x+t)$. Una vez realizado ese ajuste, tenemos:

$$\mathbb{E}[H(t)] = \int_0^{T_{\text{contr}}} G(t) \cdot e^{-\int_0^t \mu(x+s)\,ds} \cdot \mu(x+t)\,dt + \int_{T_{\text{contr}}}^{w-x} L(t) \cdot e^{-\int_0^t \mu(x+s)\,ds} \cdot \mu(x+t)\,dt.$$

Llegados a este punto, es cuestión de modelizar las tablas actuariales o las bases de datos para ajustar a un modelo continuo. Ejemplo:
- **Modelo Gompertz:** La sencillez de la aproximación facilita los cálculos:

$$\mu(x) = B \cdot e^{Cx}$$

- **Modelo Gompertz-Makeham:** Un ejemplo de modelo actuarial clásico:

$$\mu(x) = A + B \cdot e^{Cx}$$

- **Modelo de Lee-Carter:** Este es perfecto porque nos interesa modelizar con precisión la longevidad:

$$\ln(\mu(x,t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t$$

5.3. Condición de riesgo: Modelo discretizado

Para realizar el ajuste discreto, utilizaré las tablas actuariales para calcular las probabilidades de fallecimiento diferido y temporal de 1 año. De esta forma, a cada año entre x y $w - x$ se asigna una probabilidad de fallecimiento.

$$
{}_{t/1}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \qquad\qquad \sum_{t=0}^{w-x} {}_{t/1}q_x = {}_{w-x}q_x = 1.
$$

Por lo que las probabilidades de muerte diferida son una buena medida de probabilidad.

Por otro lado, para buscar valores representativos de la función $H(t)$ que me permitan aplicar mi vector de probabilidades, lo que haré será repartir el dominio de $H(t)$[9]. El dominio de $H(t)$ son los posibles valores de t, por tanto es $[0, w - x] \subseteq \mathbb{R}$, que es un compacto sobre el que puedo aplicar una partición finita de disjuntos semiabiertos cuya unión sea $[0, w - x]$. Es decir:

$$
[0, w - x] = \bigcup_{i=1}^{n} U_i
$$

Que además podemos ajustar a nuestra necesidad de que encaje con la forma del vector de probabilidades:

$$
U_i = \begin{cases} [i-1, i) & \text{si } i < n, \\ [n-1, w-x] & \text{si } i = n. \end{cases}
$$

Con este hecho, podemos aproximar la esperanza:

$$
\mathbb{E}[H(t)] \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} H(t) \cdot \mathbb{P}(t \in U_i)\, dt,
$$

Aplicando esta expresión a $H(t)$ a conveniencia y sustituyendo por $G(t)$ y $L(t)$, llegamos a la siguiente expresión.

$$
\mathbb{E}[H(t)] \approx \sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor - 1} {}_{t/1}q_x \cdot \int_{t}^{t+1} G(u)\, du \quad + \sum_{t=\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor + 1}^{w-x+1} {}_{t/1}q_x \cdot \int_{t}^{t+1} L(u)\, du. \quad \text{(Apéndice)}
$$

Si buscamos un ajuste práctico, recomiendo modelos como Lee-Carter u otros más complejos que capten la longevidad, ya que ese es nuestro interés en la temática de las hipotecas inversas. Si, por contra, el objetivo es didáctico, modelos como el Gompertz o incluso modelos con linealidad pueden resultar más sencillos. Adelanto que el sistema al que llegaré requiere métodos numéricos y no tiene soluciones analíticas, por lo que a efectos didácticos puede ser interesante simplificar una de las condiciones del modelo tomando un modelo de mortalidad sencillo.

[9] El uso de integrales nos ofrece mucha flexibilidad. En este sentido, no es necesario separar la integral considerando T_{risk}, ya que si la intersección cae dentro de un intervalo, nos interesa la combinación de áreas positivas y negativas para asignar probabilidades. Es decir, notemos que no ganamos nada particularmente realizando un salto en el dominio de integración de $H(t)$ en T_{risk}. Por otro lado, sí nos interesa considerar el salto para T_{contr}, ya que nos ofrece la posibilidad de descomponer $H(t)$ en $G(t)$ y $L(t)$ nuevamente.

Es importante señalar que esta expresión es una reducción didáctica. La expresión correcta se encuentra en el apéndice y considera casos extremos de T_{contr} y los saltos de función en valores discretos de T_{contr}. Esta expresión simple solo es válida para casos donde $T_{\text{contr}} \in [1, w - x - 1] \cap \mathbb{N}$. Sin embargo, para algunas expresiones utilizaré la fórmula general, por lo que recomiendo encarecidamente revisar el apéndice.

Donde, por un lado, tenemos las probabilidades diferidas de fallecer para cada año del intervalo $[0, w - x]$, y por otro lado la integral de $H(t)$, bajo una partición de $[0, w - x]$ que resulta adecuada para aproximar la esperanza.

A nivel de programación en R Studio, es conveniente transformar el análisis anterior en términos de vectores[10]:

$$\mathbb{E}[H(t)] \approx (\mathbf{H}_{\text{prob}} \odot \mathbf{H}_{\text{value}})$$

donde:

$$\mathbf{H}_{\text{prob}} = \begin{bmatrix} \frac{l(x+0)-l(x+1)}{l_x} \\ \frac{l(x+1)-l(x+2)}{l_x} \\ \vdots \\ \frac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor)-l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor+1)}{l_x} \\ \vdots \\ \frac{l(x+(w-x-1))-l(x+(w-x))}{l_x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{\text{value}} = \begin{bmatrix} \int_0^1 G(u)\,du \\ \int_1^2 G(u)\,du \\ \vdots \\ \int_{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor}^{T_{\text{contr}}} G(u)\,du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lceil T_{\text{contr}} \rceil} L(u)\,du \\ \vdots \\ \int_{w-x-1}^{w-x} L(u)\,du \end{bmatrix}.$$

5.4. Condición de máxima anualidad

La condición de máxima anualidad nos aporta más información en el modelo con prima de riesgo. Para ambos valores D_{t,r_k} y D_{t,r_0} se presta una anualidad P, pero en un caso se capitaliza con mayor fuerza y en el otro con menor fuerza, $r_k > r_0$. Sin embargo, ambos montos de deuda deben igualar C_t para un valor t. En particular:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{risk}}} \cdot r_0}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)} = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k) \cdot ((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)}$$

Esta ecuación es útil, ya que nos permitirá relacionar T_{contr}, T_{risk}, r_k y r_0. Habitualmente, lo normal será conocer los valores de r_0 y T_{risk}, por lo que podemos simplificar la expresión para los casos donde las variables endógenas del modelo son T_{contr} y r_k.

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k) \cdot ((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)} \qquad \text{(Condición de máxima anualidad)}$$

Donde, partiendo de la primera expresión, determinamos P, y luego utilizamos esta condición como parte del sistema de ecuaciones a resolver.

[10] Es suficiente considerar uno de los dos vectores como vector fila y el opuesto como columna. Por cuestiones de presentación, me ha parecido más adecuado expresarlos como columna.

5.5. El modelo con prima de riesgo:

En la práctica, las verdaderas incógnitas del modelo serán T_{contr} y r_k. T_{contr} nos indica el momento en que la deuda con prima de riesgo iguala el colateral; además, la podemos relacionar con T_{risk}. La diferencia $T_{\text{risk}} - T_{\text{contr}}$ nos indica cuánto antes el prestamista se tiene que quedar con el colateral para compensar el riesgo de longevidad. Aunque en la práctica lo que más nos interesa conocer es r_k, que nos servirá para determinar contratos óptimos.

Podemos plantear el sistema de ecuaciones[11] del modelo como las dos condiciones que hemos desarrollado en las secciones anteriores:

$$\mathbb{E}[H(t)] \approx \sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor - 1} {}_{t/1}q_x \cdot \int_t^{t+1} G(u)\, du \quad + \sum_{t=\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor + 1}^{w-x+1} {}_{t/1}q_x \cdot \int_t^{t+1} L(u)\, du. \tag{Cond. Risk}$$

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{risk}}} \cdot r_0}{(1+r_0)\cdot((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)} = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k)\cdot((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)} \tag{Cond. Max}$$

Como podemos observar, el resultado final es problemático, ya que no tiene una solución analítica. Pese a que las integrales son relativamente sencillas de manejar, una de las variables está en el dominio de integración y, además, las condiciones presentan polinomios de grado T. En definitiva, ni T_{contr} ni r_k se pueden aislar o solucionar de forma analítica.

La única manera de obtener resultados consistentes en este modelo es aplicar algoritmos computacionales y métodos numéricos. La ciencia computacional nos abre una ventana en el cálculo de primas, que serían imposibles de calcular de otra forma, siendo este modelo un ejemplo de ello.

En este trabajo, he realizado las aproximaciones mediante el método Newton-Raphson multidimensional, ya que el sistema requiere la solución para las dos ecuaciones no analíticas, y otras soluciones como `Optim()` o `Uniroot()` no convergían correctamente o requerían demasiadas iteraciones. Pese a que el uso de estas funciones de forma anidada convergía, el método de Newton-Raphson multidimensional ha demostrado conseguir convergencia con mayor facilidad.

Conclusión: Dadas las dos condiciones del modelo, queremos encontrar T_{contr} y r_k tal que $\mathbb{E}[H(t)] = 0$ y, a la vez, la anualidad sea máxima. Esto no es posible mediante los métodos de cálculo habituales debido a la naturaleza no analítica de las ecuaciones

[11] La expresión de riesgo aquí está simplificada a efectos ilustrativos. La versión completa es algo más tosca y está diseñada para ser utilizada en programación en R Studio, por lo que es necesario revisar el Apéndice para encontrar la demostración y generalización de esta condición para todos los valores de $T_{\text{contr}} \in (0, w-x]$.

del modelo. Sin embargo, podemos aplicar métodos numéricos para encontrar soluciones virtualmente equivalentes para T_{contr} y r_k. Estas soluciones servirán para establecer contratos óptimos desde el punto de vista del riesgo de longevidad.

5.6. Análisis del modelo:

Aunque encontrar soluciones concretas para este modelo es una tarea imposible sin el uso de algoritmos numéricos, el análisis matemático nos puede aportar algo de luz sobre la naturaleza del sistema.

En esta sección trataré de explorar algunos casos concretos donde el sistema tiende a simplificarse y podemos extraer algunas conclusiones mediante métodos de análisis estándar.

5.6.1. Caso: $T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}}$

Partiendo de la condición de máxima anualidad:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{risk}}} \cdot r_0}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)} = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k) \cdot ((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)}$$

Desarrollando la expresión:

$$(1+g)^{T_{\text{risk}} - T_{\text{contr}}} = \frac{r_0}{r_k} \cdot \frac{(1+r_k) \cdot \left((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1\right)}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)}. \qquad \text{(Apéndice)}$$

La diferencia $T_{\text{contr}} - T_{\text{risk}}$ puede entenderse como el valor temporal bajo el cual el prestamista exige apoderarse de la garantía[12] anticipadamente para compensar el riesgo de longevidad del prestatario. Para el caso $T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}} = T$, vemos que esta diferencia es 0, por lo que la intuición indica que este contrato no debería tener riesgo de longevidad.

$$\frac{r_k \cdot \left((1+r_k)^T - 1\right)}{1+r_k} = \frac{r_0 \cdot \left((1+r_0)^T - 1\right)}{1+r_0}.$$

Por lo que bajo estas condiciones $r_k = r_0 \iff k = 0$. Es importante analizar estos efectos en la condición de riesgo. Para ver qué nos dice el modelo al respecto, es necesario realizar algunas consideraciones previas que simplificarán el sistema.

$$H(t) = \begin{cases} D_{t,r_k} - D_{t,r_0} & \text{si } t \leq T_{\text{contr}}, \\ C_t - D_{t,r_0} & \text{si } T_{\text{contr}} < t < w - x. \end{cases}$$

Siendo $r_k = r_0$ y $T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}} = T$:

[12] El concepto al que aquí se hace referencia puede causar cierta polémica. Es importante recordar que una hipoteca inversa no es un contrato por el cual el prestamista intenta quedarse con el inmueble del prestatario. De hecho, normalmente el prestamista está más interesado en no tener que recurrir al colateral del contrato. Siendo esto cierto, si el contrato exige riesgo de longevidad, la forma en que las primas de interés ajustan es haciendo que el prestamista vea su deuda crecer con más velocidad al valor de la garantía. Esto es necesario, pues el prestamista necesita compensar el riesgo, y la forma de lograrlo es con primas de riesgo, que implican que la deuda supere el colateral anticipadamente.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T, \\ C_t - D_{t,r_0} & \text{si } T < t < w - x. \end{cases}$$

Además, se deduce de la condición de maximización $D(t, r_0) > C(t) \quad \forall t > T_{\text{risk}}$. Esto implica que todos los valores de $H(t)$ serán negativos.

Reordenando en la condición de riesgo:

$$\mathbb{E}[H(t)] \approx \sum_{t=\lceil T \rceil}^{w-x} {}_{t/1}q_x \cdot \int_t^{t+1} L(u)\, du. = 0$$

La solución final del sistema será $T = T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}} = w - x$, ya que cuando $T = w - x$ la probabilidad de fallecimiento diferida es 0[13] y para cualquier otro valor de T tendríamos una suma de áreas negativas ponderadas debido al hecho $D(t, r_0) > C(t) \quad \forall t > T_{\text{risk}}$.

Lo cual es un resultado interesante del modelo. Para el caso $T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}}$, el modelo con prima de riesgo se ha aproximado al modelo sin prima de riesgo básico del apartado anterior, con la diferencia de que, como el modelo con prima está diseñado para gestionar los riesgos, la única solución posible bajo estas condiciones es no asumirlos y tomar la duración del contrato como $w - x$, es decir, la duración sin riesgos.

Corolario

Bajo las condiciones $r_k = r_0 \iff T_{\text{contr}} = T_{\text{risk}}$, el modelo de hipoteca inversa con prima de riesgo converge a la solución de no riesgo del modelo básico sin primas, donde la duración óptima del contrato es $T = w - x$. Este resultado implica que, en ausencia de riesgo de longevidad, el contrato se ajusta para que la deuda acumulada iguale el valor del colateral en el momento donde la probabilidad de que el prestatario no sobreviva es 100 %.

5.6.2. Caso: Apuesta actuarial

Existe una relación fuerte entre los valores de T_{contr} y r_k:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k) \cdot ((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)}$$

La condición de maximización exige a los valores converger a P, que es una constante. Por lo que si $T_{\text{contr}} \to 0$ entonces $r_k \to \infty$, lo que nos podría llevar a resultados indefinidos en el programa y hacer que el algoritmo no encuentre convergencias. Sin embargo, sí podría resultar para valores cercanos a $T_{\text{contr}} = 0$.

A continuación, planteo un pequeño modelo suplementario que podría resultar útil para interpretar los resultados del modelo con prima:

[13] La probabilidad diferida es 0 ya que ${}_{w|n}q_x = {}_wp_x \cdot q_{x+w}$ y ${}_wp_x = 0$.

Modelo: Apuesta actuarial

Imaginemos un contrato donde el prestatario y el prestamista acuerdan que el prestamista realizará pagos anuales P, desde el origen del contrato hasta el momento de fallecimiento. A cambio, el prestatario concede la totalidad del colateral en el momento de fallecer, sea cual sea este momento.

En este contexto, si el prestatario fallece antes de la duración T para la que diseñemos el contrato, tendríamos ganancias extraordinarias; si falleciera después de T, tendríamos pérdidas extraordinarias.

Para poder determinar la anualidad y la duración del contrato, será necesario encontrar un valor de T tal que la esperanza de las pérdidas y ganancias extraordinarias sea 0:

$$\mathbb{E}[C_t - D_t] = 0$$

Este caso lo desarrollaré mediante una versión continua que será útil para ilustrarlo, ya que, a diferencia del modelo con prima, no pretendo hacer un desarrollo práctico:

$$\mathbb{E}[C_t - D_t] = \int_0^{T_{\text{risk}}} (C(u) - D(u)) \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, du + \int_{T_{\text{risk}}}^{\omega - x} (C(u) - D(u)) \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, du$$

Recordemos que $T = T_{\text{risk}}$ se encuentra en algún lugar del dominio de integración y que, por la condición de maximización, todas las integrales cuyo dominio de integración sea mayor que T_{risk} serán negativas y todas las integrales cuyo dominio sea menor serán positivas. Por tanto, si a la condición anterior le aplicamos la de máxima anualidad, llegamos a un modelo similar al de prima de riesgo.

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{risk}}} \cdot r_0}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)}$$

La solución de este sistema calcula la anualidad máxima y la duración técnica mínima del contrato. Al ser un sistema no analítico, no tiene soluciones explícitas y requiere del uso de métodos numéricos.

Esto tiene fuertes implicaciones: significa que el contrato tiene un nivel de riesgo máximo que puede asumir. Si tomáramos $T_{\text{risk}} \to 0$, entonces la condición de riesgo no se sostiene, ya que sería una suma de áreas negativas ponderadas por las probabilidades de fallecimiento. Análogamente, si $T_{\text{risk}} \to w - x$, entonces la condición tampoco se sostiene, ya que sería estrictamente positiva. Para el resto de valores de T_{risk} no podemos afirmar nada analíticamente, pero está claro que si el modelo converge, entonces:

Por otro lado, debido a las relaciones mencionadas anteriormente: si $T_{\text{contr}} \to 0$, entonces $r_k \to \infty$, el modelo con prima de riesgo podría aproximarse a la solución del modelo actuarial cuando estamos prestando con un tipo de interés que tiende a infinito.

Hipótesis:

Bajo condiciones de riesgo extremas, el modelo con prima de riesgo podría estar aproximándose al modelo de apuesta actuarial. Si $r_k \to \infty$, entonces $T_{\text{contr}} \to 0$ y la condición de riesgo tendería a aproximarse a la condición de riesgo del modelo de apuesta actuarial. Esto tendría fuertes implicaciones: la primera es que existe un nivel de riesgo de longevidad máximo que un contrato puede asumir. La segunda es que este nivel máximo sería la solución del modelo de apuesta actuarial y, por tanto, los valores de T_{risk} posibles en el modelo de prima de riesgo estarían acotados entre el valor T_{risk} del modelo de apuesta actuarial y $w-x$. Para otros valores, el sistema no tendría solución y los métodos numéricos no tendrían convergencia.

PARTE PRÁCTICA

6. Estimación de las constantes del modelo

6.1. Cálculo de la duración técnica del contrato: T

La duración técnica del contrato $T_{\text{risk}} = T$ (indistintamente según el modelo) es el valor del tiempo de duración del contrato, que quedará determinado en el momento de fallecimiento, pero que no está determinado a priori. Esto se debe a que el tiempo hasta el fallecimiento en el futuro de una persona de edad x es una variable aleatoria, en particular la variable aleatoria Vida Residual:

$$T_x = X - x \mid X > x$$

Donde X es el momento de fallecimiento, y x es la edad actual de la persona.

El enfoque será el siguiente:

- **Tablas de vida:** Partiré de una tabla de vida del INE, adecuada para el mercado español.
- **Var(T_x):** Obtendré la varianza de la vida residual mediante cálculos sobre la tabla de vida.
- **Probabilidad de vida/muerte temporal:** Utilizaré funciones para definir las probabilidades de supervivencia y fallecimiento temporales.
- **VaR interpolado:** Definiré una función para calcular el VaR interpolado para una tabla discreta.
- **Significación:** Calcularé el VaR para todas las edades y para los niveles de significación 10 %, 5 % y 1 %.

Para realizar estos cálculos, partiré de una tabla Actuarial de mortalidad, en particular la tabla pública del INE, no diferenciada por sexos, del año 2023. La tabla únicamente contiene datos de cohorte clásicos de las tablas de vida:

$$\text{age},\ l_x,\ d_x,\ p_x,\ q_x,\ L_x,\ T_x,\ \text{ESPER}$$

age	lx	dx	px	qx	Lx	Tx	ESPER
0	100000.000	257.980896	0.9974202	2.579809e-03	99871.010	8372465.265	83.724653
1	99742.019	20.952233	0.9997899	2.100643e-04	99731.543	8272594.256	82.939912
2	99721.067	14.547672	0.9998541	1.458836e-04	99713.793	8172862.713	81.957233
3	99706.519	10.964715	0.9998900	1.099699e-04	99701.037	8073148.920	80.969118
4	99695.554	14.005195	0.9998595	1.404796e-04	99688.552	7973447.883	79.977968
5	99681.549	8.564175	0.9999141	8.591535e-05	99677.267	7873759.331	78.989135
6	99672.985	6.929822	0.9999305	6.952558e-05	99669.520	7774082.064	77.995879
7	99666.055	5.326551	0.9999466	5.344398e-05	99663.392	7674412.544	77.001267
8	99660.729	8.893352	0.9999108	8.923627e-05	99656.282	7574749.152	76.005356
9	99651.835	7.338526	0.9999264	7.364165e-05	99648.166	7475092.870	75.012094
10	99644.497	4.848857	0.9999513	4.866156e-05	99642.072	7375444.703	74.017582
11	99639.648	7.297375	0.9999268	7.323766e-05	99635.999	7275802.631	73.021160
12	99632.351	7.919601	0.9999205	7.948825e-05	99628.391	7176166.632	72.026471
13	99624.431	6.408419	0.9999357	6.432578e-05	99621.227	7076538.241	71.032157
14	99618.023	9.613026	0.9999035	9.649886e-05	99613.216	6976917.014	70.036694
15	99608.410	9.195153	0.9999077	9.231302e-05	99603.812	6877303.798	69.043405
16	99599.214	12.621797	0.9998733	1.267259e-04	99592.904	6777699.986	68.049733
17	99586.593	14.849623	0.9998509	1.491127e-04	99579.168	6678107.082	67.058295
18	99571.743	20.225393	0.9997969	2.031238e-04	99561.630	6578527.915	66.068221

6.1.1. Varianza y desviación estándar de la vida residual

Para realizar los cálculos anteriores es necesario incrementar la tabla de vida con la columna varianza de la vida residual y desviación estándar de la vida residual. Para calcular la varianza, utilizaré la fórmula del momento de segundo orden $M_x^{(2)}$ en tablas discretas.

$$M_x^{(2)} = 2 \cdot \sum_{t=1}^{w-x} t \cdot \prod_{i=0}^{t-1} p_{x+i}$$

```
# Definir el infinito actuarial
w <- 100
# Productorio de Px+i desde i=0 hasta t-1
productorio_px <- function(x, t, data) {
  product <- 1
  for (i in 0:(t-1)) {
    product <- product * data$px[data$age == (x + i)]
  }
  return(product)
}
# Función para calcular el momento de segundo orden
segundo_momento <- function(x, data) {
  integral_sum <- 0
  for (t in 1:(w - x)) {
    integral_sum <- integral_sum + t * productorio_px(x, t, data)
  }
  return(2 * integral_sum)
}
```

```
# Calcular el segundo momento para cada edad de manera discreta
TABLA_VIDA$SEGUNDO_MOMENTO <- sapply(TABLA_VIDA$age,
function(x) segundo_momento_discreto(x, TABLA_VIDA))
# Calcular la varianza de la vida residual
TABLA_VIDA$VAR <- TABLA_VIDA$SEGUNDO_MOMENTO - (TABLA_VIDA$ESPER ^ 2)
# Reemplazar valores negativos cercanos a 0 en la varianza para las filas 99
# y 100
TABLA_VIDA$VAR[TABLA_VIDA$VAR < 0] <- 0
# Calcular la desviación estándar de la vida residual
TABLA_VIDA$SD <- sqrt(TABLA_VIDA$VAR)
```

Las varianzas de las edades 99 y 100 son aproximadamente 0. Las he sustituido por 0. Como las hipotecas inversas son productos financieros que no tienen sentido para personas de edades tan avanzadas, puedo sustituirlas por 0 o eliminarlas de la base de datos sin que el análisis pierda propiedad.

6.1.2. Análisis VaR

La función de distribución acumulada de la variable vida residual es:

$$F_{T_x}(t) =_t q_x = 1 -_t p_x \qquad\qquad {}_tp_x = \prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k}$$

Donde:

- ${}_tq_x$ es la probabilidad acumulada de fallecer antes de cumplir $x + t$ años, para un individuo de edad x, y se calcula como $1 -_t p_x$.

- ${}_tp_x$ es la probabilidad de sobrevivir durante t años adicionales a partir de la edad x, que se obtiene como el producto de las probabilidades p_{x+k} de sobrevivir cada año desde x hasta $x + t - 1$.

La idea es obtener la función de distribución a partir de las tablas y con ello obtener los valores del VaR a diferentes niveles de significación. Como en los contratos de hipotecas inversas la longevidad es el principal riesgo, realizaré también una interpolación en los datos de los VaR. Esto es porque al trabajar desde la tabla tenemos datos discretos. Sin embargo, los costes financieros de morir en enero del año X o diciembre del año X pueden ser significativos atendiendo a la capitalización del contrato. Por tanto, al interpolar tiendo a minimizar el problema de trabajar con datos discretos.

Con estas funciones calcularé la función de distribución:

```r
# tPx
calcular_tPx <- function(x, t, tabla_vida) {
  inicio <- which(tabla_vida$age == x)
  fin <- inicio + t - 1
  if (fin > nrow(tabla_vida)) return(0) # Fuera de rango
  px_vals <- tabla_vida$px[inicio:fin]
  tPx <- prod(px_vals)
  return(tPx)
}

# tQx
calcular_tQx <- function(x, t, tabla_vida) {
  tPx <- calcular_tPx(x, t, tabla_vida)
  tQx <- 1 - tPx
  return(tQx)
}
```

La fórmula de interpolación lineal para calcular un valor decimal de t es la siguiente:

$$t_{\text{decimal}} = t - 1 + \frac{\alpha -_{t-1} q_x}{{}_tq_x -_{t-1} q_x}$$

Donde:

- ${}_tq_x$ es la probabilidad acumulada de fallecer antes de cumplir $x + t$ años,

- ${}_{t-1}q_x$ es la probabilidad acumulada de fallecer antes de cumplir $x + t - 1$ años,

- α es el valor de significación del VaR, que representa el nivel de confianza,
- t_{decimal} es el valor interpolado de t, que corresponde a la probabilidad acumulada deseada α.

El valor de t en la fórmula de interpolación no es simplemente un valor arbitrario, sino el primer valor de t tal que la probabilidad acumulada ${}_tq_x$ supera o es igual al nivel deseado α. Es decir:

- Se busca el primer t tal que ${}_tq_x \geq \alpha$,
- Si ${}_tq_x$ no coincide exactamente con α, se realiza la interpolación lineal entre los valores de $t-1$ y t para obtener un valor decimal de t que esté más cerca de α,
- Este valor t_{decimal} es el que corresponde a la probabilidad acumulada α, que es el valor de significación del VaR.

```
# Función para calcular VaR con interpolación
calcular_VaR_interpolado <- function(x, nivel, tabla_vida) {
  for (t in 1:(nrow(tabla_vida) - which(tabla_vida$age == x) + 1)) {
    tQx_actual <- calcular_tQx(x, t, tabla_vida)
    tQx_anterior <- calcular_tQx(x, t - 1, tabla_vida)
    # Busco el valor de t que supera el VaR.
    if (tQx_actual >= nivel) {
      if (t == 1) return(t - 1)
      # Interpolación lineal
      return(t - 1 + (nivel - tQx_anterior) / (tQx_actual - tQx_anterior))
    }
  }
}
```

Con esto, las funciones quedan definidas. Si le añadimos la tabla de vida y los niveles de significación del 10 %, 5 %, 1 %, podemos obtener los valores VaR para cada riesgo. En este caso, los añadiré al dataframe `TABLA_VIDA`.

```
TABLA_VIDA <- TABLA_VIDA %>%
  mutate(VaR_10 = NA_real_,
         VaR_5 = NA_real_,
         VaR_1 = NA_real_)
# Niveles de significación
niveles <- c(0.90, 0.95, 0.99)
# Calcular VaR para cada edad con interpolación
for (i in 1:nrow(TABLA_VIDA)) {
  edad <- TABLA_VIDA$age[i]
  # Calcular VaR
  TABLA_VIDA$VaR_10[i] <- calcular_VaR_interpolado(edad, niveles[1], TABLA_VIDA)
  TABLA_VIDA$VaR_5[i] <- calcular_VaR_interpolado(edad, niveles[2], TABLA_VIDA)
  TABLA_VIDA$VaR_1[i] <- calcular_VaR_interpolado(edad, niveles[3], TABLA_VIDA)
}
```

6.2. Cálculo del valor del inmueble: C_t

Para calcular C_t utilizaré un modelo simple de revalorización basado en una base de datos histórica del mercado inmobiliario español.

$$C_t = C_0 \cdot (1 + g)^t$$

Donde:

- C_t: Precio estimado de la vivienda en el año t.
- C_0: Precio inicial de la vivienda (en el año base, cuando $t = 0$).
- g: Tasa de revalorización media anual del mercado inmobiliario, calculada a partir de datos históricos.

El modelo no es muy sofisticado, pero trataré de ganar precisión utilizando datos de buena calidad. La base de datos que utilizaré es la serie histórica de revalorización trimestral del mercado inmobiliario en España en los últimos 12 años. Además, la base de datos está separada por provincias, lo que nos servirá en el programa para calcular según el lugar geográfico del inmueble.

```r
# Ajusto los datos para que estén en decimales
VIVIENDA[, -1] <- VIVIENDA[, -1] / 100
# Calculo la media trimestral
VIVIENDA$MEDIA_TRIMESTRAL <- rowMeans(VIVIENDA[, -1])
# Calculo la media anual
VIVIENDA$MEDIA_ANUAL <- (1 + VIVIENDA$MEDIA_TRIMESTRAL)^4 - 1
# Creo y exporto un nuevo dataframe con la información relevante para el modelo
VIVIENDA_FINAL <- VIVIENDA[, c("COMUNIDAD_AUTONOMA", "MEDIA_ANUAL")]
```

En el programa añadiré una extensión para indicar la comunidad autónoma en la que se ubica el inmueble. De esta forma, podremos estimar el modelo por regiones.

ID	COMUNIDAD_AUTONOMA	MEDIA_ANUAL
1	Nacional	0.037538421
2	Andalucía	0.036488923
3	Aragón	0.025430469
4	Asturias	0.020150501
5	Baleares	0.050018096
6	Canarias	0.035877083
7	Cantabria	0.035352865
8	Castilla y León	0.019027902
9	Castilla - La Mancha	0.009737484
10	Cataluña	0.044027949
11	Valencia	0.032124581
12	Extremadura	0.008195279
13	Galicia	0.021706398
14	Madrid	0.049312038
15	Murcia	0.023350665
16	Navarra	0.016526983
17	País Vasco	0.024996916
18	La Rioja	0.023783696

6.3. Cálculo del tipo de interés sin riesgo: r_0

Para calcular r_0 partiremos de un valor base que será el tipo de interés SWAP (IRS) a 20 años. Este valor no es casual, ya que las personas interesadas en pedir una hipoteca inversa suelen tener entre 65 y 80 años, donde la esperanza de vida está en torno a los 20 años.

$$r = IRS20 + k + m$$

Donde $IRS20$ es el IRS a 20 años a la fecha de realización del trabajo, es decir, $IRS20 = 2{,}640\,\%$, k es la prima de riesgo, que nos servirá para ajustar el contrato en función del riesgo de longevidad que estemos asumiendo, y m será la tasa de ganancia que aplicaremos al modelo, basándome en los márgenes de hipotecas en bancos entre 0,5 % y 1,5 %, como los contratos de hipotecas inversas se entienden como riesgosos tomaré el valor máximo $m = 1{,}5\,\%$.

El tipo de interés fijo puede parecer algo modesto desde el punto de vista financiero, sin embargo, es el más habitual en hipotecas inversas, ya que aporta certidumbre a las partes. Este tipo de contratos con plazos conllevan riesgos como la longevidad y la revalorización/depreciación del colateral, por tanto, las financieras tratan de atarse a un tipo de interés fijo para estabilizar las variables del modelo y minimizar riesgos. Además, tratar de anticipar flujos de tipos de interés durante periodos elevados, como 20 años, es una tarea compleja y especulativa.

En particular, para este trabajo tenía pensado estimar los tipos variables mediante un modelo discretizado de Vasicek, sin embargo, tras analizarlo detenidamente, creo que el tipo variable genera más distorsiones que soluciones, tanto para el prestamista como para el prestatario. Sumado a las razones por las que en la práctica lo habitual es utilizar un tipo fijo, descarto modelizar los tipos variables.

En cualquier caso, si alguien intentase hacer una modelización variable, sería necesario adaptar la ecuación fundamental del modelo teniendo en cuenta cómo evoluciona $D_T(P, r_t)$ frente a una serie estocástica de r_t.

Finalmente:

$$r = IRS20 + k + m = 2{,}640\,\% + 1{,}500\,\% + k = 4{,}14\,\% + k$$

La prima de riesgo k es un parámetro que queda abierto, ya que lo trabajaré junto a los diferentes niveles de riesgo de longevidad T. En el modelo utilizaré tanto el interés con riesgo como sin riesgo, definidos de la siguiente manera:

$$r_0 = IRS20 + m = 0{,}0414$$

$$r_k = IRS20 + k + m = 0{,}0414 + k$$

$$k = r_k - r_0$$

7. Funcionamiento del programa

El programa, compactado y ejecutado desde `source()`, realizará una toma de datos interactiva, donde el usuario introducirá la edad (x), el valor de su inmueble (C_0) y la comunidad autónoma donde se ubica, mediante la cual obtendremos el parámetro (g) haciendo una selección desde la base de datos `VIVIENDA`. El programa, además, admite modificar el tipo de interés libre de riesgo (r_0) y la tasa de revalorización del colateral (g) a conveniencia del usuario, y solo tomará los valores prediseñados en caso de que el usuario lo desee. Seguidamente, el programa pedirá la verificación de los datos por parte del usuario; en caso negativo, reiniciará la toma de datos.

Una vez que el usuario ha introducido los datos, se le pedirá seleccionar el método de análisis entre el simple y el avanzado.

Para realizar el análisis simple, el programa utiliza la variable x introducida para obtener la esperanza de vida, la esperanza de vida más la desviación estándar dividida entre dos, la esperanza de vida más la desviación estándar, los valores $\mathrm{VaR}_{10\,\%}$, $\mathrm{VaR}_{5\,\%}$ y $\mathrm{VaR}_{1\,\%}$, y finalmente el valor libre de riesgo $w - x$. Esto se realiza a partir de la base de datos `TABLA_VIDA`. Después, se genera un vector T_{risk} con los valores respectivos de cada estadístico, y se procede a generar una tabla para guardar los resultados y ejecutar un bucle `for()` con el algoritmo Newton-Raphson para estimar los resultados del modelo para cada estadístico. Finalmente, se presentan los resultados en forma de tabla y gráfico.

Para realizar el método avanzado, se sigue el mismo proceso, pero se toma un vector T_{risk} que contempla todos los valores desde $w - x$ hasta 0, se ejecuta el bucle `for()` para este vector y se genera una tabla de resultados y un gráfico. Este método requiere algo más de potencia computacional, pero ofrece modelizaciones más interesantes. En general, es el método que utilizo yo, pero he creado el método simple por si el tiempo de convergencia para el avanzado fuese demasiado elevado[14].

Finalmente, el programa permite al usuario probar un método distinto, volver a la toma de datos o cerrar.

Sin embargo, la mayor parte del desarrollo del programa tiene que ver con las funciones empleadas por el algoritmo de Newton-Raphson, que se encuentran en el Apéndice del trabajo. En particular, las funciones `vector_val_H()`, `vector_prob_H()` y `H()`.

Ruego encarecidamente revisar el Apéndice, donde voy explicando qué hace cada función detalladamente, en particular los procesos para el Newton-Raphson y las calibraciones necesarias, ya que, por la naturaleza no analítica de las funciones, ha sido necesario ajustar diversos parámetros en la jacobiana y en las restricciones.

[14] A mí particularmente me tarda unos 7 segundos en el caso de $x = 65$, que es el valor con más iteraciones. En principio, no debería dar problema; además, he diseñado el código para que, cuando el método entra en la zona de divergencia, deje de realizar iteraciones. Esto ha reducido sustancialmente el tiempo de computación.

8. Resultados del programa

8.1. Escenario 1: Ejemplo base

Utilizando el programa, se han proyectado resultados para un cliente típico de 65 años con un inmueble valorado inicialmente en 250,000 euros, ubicado en la comunidad autónoma de Cataluña. Este escenario representa un contrato estándar de hipoteca inversa, dado que este producto financiero está diseñado principalmente para personas mayores de 65 años. Para este caso, se ha asumido una tasa de revalorización anual del inmueble del 4.4 %, basada en las tendencias de los últimos años del mercado inmobiliario en la región.

Referencias	T_risk	T_contr	r_k	r_0	Prima_riesgo	Anualidad	Mensualidad	Total_error	Estimación
No_risk	36.00000	36.00000	0.04140000	0.0414	0.00000000	14172.61	1207.21	0.0000e+00	Éxito
VaR_1	35.75461	35.75082	0.04140174	0.0414	0.00000174	14206.82	1210.12	0.0000e+00	Éxito
VaR_5	34.42554	34.27920	0.04147710	0.0414	0.00007710	14403.69	1226.89	0.0000e+00	Éxito
VaR_10	32.09186	31.43714	0.04185217	0.0414	0.00045217	14802.55	1260.86	3.0000e-08	Éxito
E[]+sd()	30.17243	28.73328	0.04268443	0.0414	0.00128443	15190.77	1293.93	0.0000e+00	Éxito
E[]+sd()/2	25.90113	19.26670	0.05632927	0.0414	0.01492927	16313.73	1389.59	0.0000e+00	Éxito
E[]	21.62984	0.00010	440891.11329872	0.0414	440891.07189872	17966.85	1530.40	2.5093e+05	Fracaso

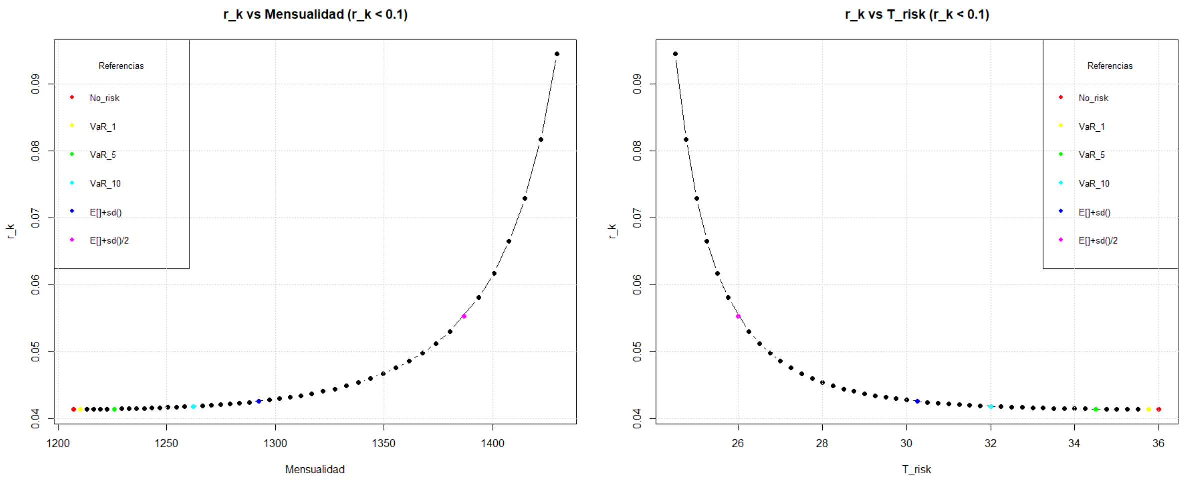
Un resultado fascinante del modelo es que *contrariamente a lo que pudiéramos intuir inicialmente, la esperanza de vida puede no ser una buena referencia para la duración técnica del contrato*. En particular, para el caso estudiado, el riesgo de longevidad es tan elevado en la esperanza de vida que el modelo diverge y no encuentra una prima lo suficientemente elevada.

Otro resultado interesante lo ofrece el análisis del VaR. A medida que reducimos el riesgo de longevidad $T \to (w - x)$, sucede que $(r_k, P_k) \to (r_0, P_0)$, es decir, $k \to 0$ y la prima de riesgo desaparece. En particular, para el VaR al 1 % la prima de riesgo es aproximadamente 0. Por lo que, si queremos establecer contratos donde no asumimos riesgo por longevidad, es suficiente tomar como duración del contrato la variable $T = \mathrm{VaR}_{1\,\%}$ o $T = w - x$.

Este resultado es consistente con el Corolario 2; por tanto, podemos concluir tanto por la práctica como por la teoría que *el modelo con prima de riesgo converge a la solución de no riesgo del modelo sin prima de riesgo cuando $T_{risk} = T_{contr}$, además, para esta condición $r_k = r_0$, es decir, $k = 0$ y esto solo puede suceder para la duración técnica del contrato de no riesgo $w - x$.*

El resto de contratos de la tabla son óptimos para el riesgo de longevidad; sin embargo, algunos pagan mayores anualidades que otros. Los contratos que pagan mejores anualidades son aquellos que asumen mayor riesgo de longevidad, pero a cambio exigen mayores tasas de interés debido a la prima de riesgo del parámetro r_k.

Este resultado es relevante para aquellas personas que necesitan complementar su pensión con la mayor anualidad posible. Por ejemplo, personas cuya vivienda no es muy valiosa o se revaloriza poco podrían no obtener suficiente anualidad para sus objetivos financieros si el contrato se establece sin asumir riesgo de longevidad.



Desde el punto de vista de la financiera, los resultados del modelo también son relevantes. Los contratos sin riesgo de longevidad establecen $T = w - x$ o $T = \text{VaR}_{1\%}$; de esta forma, el riesgo de longevidad es bajo o nulo, ya que necesariamente el cliente fallecerá antes de que la deuda exceda el valor del inmueble. Pero, aunque la financiera se libra de asumir riesgo de longevidad, se expone a otro problema: el monto de la deuda será potencialmente menor y, por tanto, el beneficio absoluto también. En los modelos con riesgo, por contra, es natural y está calculado que el cliente fallezca después de la duración técnica del contrato y que la deuda pueda potencialmente ser mayor que el valor del inmueble. Si el contrato está bien optimizado, el volumen de deuda será siempre mayor y la rentabilidad en términos absolutos también, porque la financiera estará en disposición de prestar más. Por tanto, *si las primas y anualidades están bien calculadas, los contratos que, en lugar de evitar el riesgo de longevidad, tratan de gestionarlo, ofrecerán mayores rentabilidades y beneficios, tanto a prestamistas como prestatarios*, validando la afirmación de que -*en el mercado los riesgos no se evitan, los riesgos se gestionan*-.

Este resultado es importante para el análisis de los riesgos, porque podemos establecer contratos que paguen mayores anualidades $P_k > P_0$ si estamos dispuestos a asumir el riesgo, siempre y cuando a cambio se pacte un mayor tipo de interés $r_k > r_0$. Por tanto, existen contratos de equilibrio en condiciones de riesgo que pueden ser superiores a contratos sin riesgo de longevidad en términos de anualidades y mensualidades.

Por otro lado, el modelo deja de converger a medida que aumenta el riesgo de longevidad. En particular, a medida que aumenta el riesgo de longevidad, T_{contr} tiende a 0, tal y como hemos demostrado en la teoría. Sin embargo, lo que no acababa de aclarar el análisis teórico era la relación, velocidad o fuerza con la que T_{contr} tendía a 0 a medida que el riesgo de longevidad aumentaba.

El análisis empírico es claro: la relación es no lineal y tiende de forma exponencial. Para ver este resultado con más detalle, veamos el final de una tabla obtenida mediante el método de análisis avanzado del programa:

NA	25.00	15.638782	0.07294610	0.0414	0.03154610	16609.25	1414.76	1.2057e-07	Éxito
NA	24.75	14.425707	0.08175621	0.0414	0.04035621	16695.65	1422.12	3.5074e-10	Éxito
NA	24.50	13.088956	0.09448880	0.0414	0.05308880	16784.07	1429.65	1.5175e-09	Éxito
NA	24.25	11.606986	0.11393114	0.0414	0.07253114	16874.58	1437.36	1.7501e-10	Éxito
NA	24.00	9.964152	0.14573980	0.0414	0.10433980	16967.24	1445.25	1.4217e-08	Éxito
NA	23.75	8.114893	0.20466424	0.0414	0.16326424	17062.12	1453.33	1.7464e-10	Éxito
NA	23.50	6.061346	0.33402532	0.0414	0.29262532	17159.29	1461.61	5.8266e-11	Éxito
NA	23.25	3.810524	0.74052180	0.0414	0.69912180	17258.83	1470.09	1.3970e-09	Éxito
NA	23.00	1.289286	6.86717679	0.0414	6.82577679	17360.81	1478.78	5.8208e-11	Éxito
NA	22.75	0.000100	1207222.47503170	0.0414	1207222.43363170	17465.32	1487.68	2.5001e+05	Fracaso
NA	22.50	0.000100	32883858.68732463	0.0414	32883858.64592463	17572.43	1496.80	2.5007e+05	Fracaso
E[]	22.25	0.000100	371961.03768211	0.0414	371960.99628211	17682.23	1506.15	2.5022e+05	Fracaso

Como podemos observar, a medida que T_{risk} tiende a 0, T_{contr} también lo hace, pero a diferentes velocidades. La teoría indica que por necesidad $0 < T_{\text{contr}} \leq T_{\text{risk}}$, pero además, la práctica demuestra que esta relación es muy fuerte. Este resultado podría no ser comparable a otros contextos del modelo, pero ilustra una relación que puede establecerse entre la convergencia del modelo y el nivel de riesgo.

El tipo de interés con riesgo r_k sigue una relación proporcional exponencial respecto T_{risk}, tal como indicaba la teoría.

8.2. Escenario 2: Moderación de la tasa de revalorización

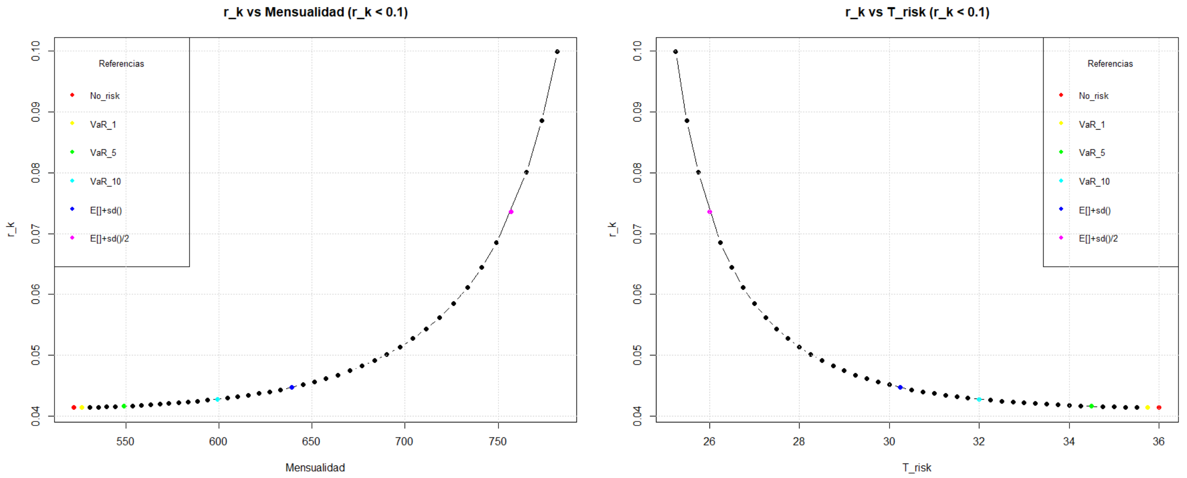
Para este ejemplo tomaré un valor de $g = 2\,\%$, para representar un escenario donde el mercado inmobiliario NO sigue la tendencia de los últimos años, sino que se modera sustancialmente. A diferencia del ejemplo anterior, mi intención no es entrar en especial detalle, sino únicamente ilustrar un escenario con un mercado inmobiliario menos alentador.

En este ejemplo, el mercado inmobiliario se revaloriza con $g = 0{,}02$, la edad del prestamista es 65 años y el valor del inmueble es 250 mil euros.

Referencias	T_risk	T_contr	r_k	r_0	Prima_riesgo	Anualidad	Mensualidad	Total_error	Estimación
No_risk	36.00000	36.00000	0.04140000	0.0414	0.00000000	6129.422	522.10	0.0000e+00	Éxito
VaR_1	35.75461	35.75081	0.04140583	0.0414	0.00000583	6179.422	526.36	0.0000e+00	Éxito
VaR_5	34.42554	34.27709	0.04164569	0.0414	0.00024569	6461.962	550.42	0.0000e+00	Éxito
VaR_10	32.09186	31.41246	0.04271482	0.0414	0.00131482	7011.729	597.25	1.0000e-07	Éxito
E[]+sd()	30.17243	28.65277	0.04485263	0.0414	0.00345263	7524.501	640.93	0.0000e+00	Éxito
E[]+sd()/2	25.90113	18.40814	0.07590955	0.0414	0.03450955	8925.700	760.28	0.0000e+00	Éxito
E[]	21.62984	0.00010	795850.25941547	0.0414	795850.21801547	10858.053	924.88	2.5216e+05	Fracaso

Como podemos observar, la anualidad máxima cae sustancialmente, a una renta de entre 760 y 522 euros mensuales. Por otro lado, la estructura de los tipos de interés respecto al riesgo se mantiene, aunque las primas de riesgo aumentan sustancialmente

Esto ilustra la sensibilidad del modelo a los parámetros de rendimiento, como la tasa de revalorización del mercado inmobiliario o la tasa de interés libre de riesgo. Como las anualidades se calculan bajo la condición de maximización, el valor futuro del colateral juega un papel crucial en su determinación, por esta razón, un colateral que se revaloriza con fuerza permite anualidades mayores y viceversa. En este ejemplo, el colateral se revaloriza con mucha mas modestian, entonro a los objetivos de inflación del 2 % del BCE. Es un escenario que correlaciona mal con las tasas de revalorización de los últimos años en las principales ciudades de España, pero que podría proyectarse en el futuro si la oferta inmobiliaria en España se reactivase y en el futuro oferta y demanda se ajustasen.



Finalmente, es importante darse cuenta de que en este ejemplo, el ajuste ha recaído en los tipos de interés y en las anualidades, pero no se ha modificado la zona de no convergencia del modelo, nuevamente la esperanza de vida es una medida demasiado riesgosa para establecer un contrato de hipoteca inversa con máxima anualidad.

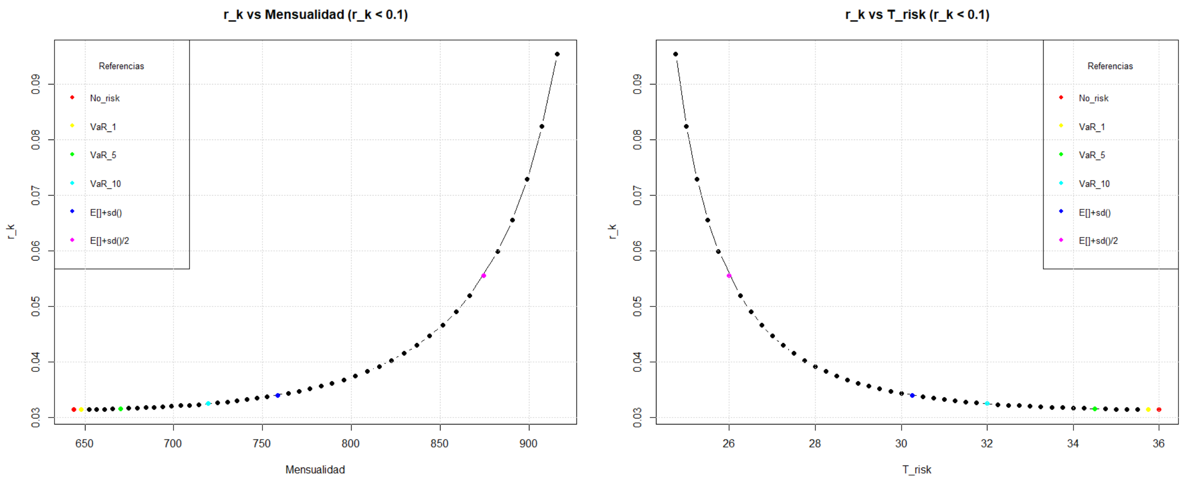
8.3. Escenario 3: Ajuste sobre el tipo de interés libre de riesgo

Este ejemplo es el equivalente al anterior, pero voy a modificar el tipo de interés libre de riesgo $r = IRS20 + k + m$. Voy a tomar $m = 0{,}01$. Es decir, reduciré la tasa de interés un 0.5 % vía márgenes: $r_0 = 0{,}0314$.

Referencias	T_risk	T_contr	r_k	r_0	Prima_riesgo	Anualidad	Mensualidad	Total_error	Estimación
No_risk	36.00000	36.00000	0.03140000	0.0314	0.00000000	7597.474	643.79	0.0000e+00	Éxito
VaR_1	35.75461	35.75104	0.03140450	0.0314	0.00000450	7646.719	647.96	0.0000e+00	Éxito
VaR_5	34.42554	34.28662	0.03159073	0.0314	0.00019073	7925.042	671.55	0.0000e+00	Éxito
VaR_10	32.09186	31.45789	0.03243201	0.0314	0.00103201	8466.884	717.46	4.0000e-08	Éxito
E[]+sd()	30.17243	28.76063	0.03412624	0.0314	0.00272624	8972.696	760.32	0.0000e+00	Éxito
E[]+sd()/2	25.90113	19.21484	0.05714174	0.0314	0.02574174	10357.325	877.65	0.0000e+00	Éxito
E[]	21.62984	0.00010	633456.11077891	0.0314	633456.07937891	12272.555	1039.94	2.5091e+05	Fracaso

Como podemos ver, el efecto sobre las anualidades es positivo. En este caso, la renta quedaría entre 877 y 643 euros al mes, dependiendo del nivel de riesgo.

Este escenario podría darse sin duda, ya que, frente a una desaceleración en la tendencia del mercado inmobiliario, los productos con exposición a dicho mercado, como es



el caso de las hipotecas inversas, verían su margen afectado por una caída en la demanda de hipotecas inversas (ya que el pago anual sería más bajo y los tipos de interés los mismos). Por ello, las financieras podrían verse obligadas a reducir márgenes siguiendo el hilo conductor del escenario 2 al escenario 3.

Es complicado saber cuál será la tasa de interés libre de riesgo, ya que depende de la estructura de costes de la empresa financiera. En particular, no es evidente para mí cuál es el coste de financiación que la empresa pretende cargar y, mucho menos, el margen que puede aplicar. Lo primero porque depende de las expectativas de los costes de financiación al plazo; lo segundo, porque depende de los costes operativos y las condiciones de mercado de la financiera.

Por eso, se podría tildar mi selección con el IRS20 de arbitraria. El programa admite que el usuario cargue otro tipo de interés libre de riesgo si lo desea, por lo que se puede ajustar manualmente. Una opción sería cargar EURIBOR más margen. A continuación, un ejemplo con otro tipo de interés $r_0 = \text{EURIBOR1} + m = 0{,}02436 + 0{,}01 = 0{,}03436$.

Tanto IRS20 como EURIBOR1 podrían ser representativos como base de los costes de financiación, aunque EURIBOR1 tiene más sentido en el contexto de tipos de interés variables. En cualquier caso, es decisión de las empresas decidir cómo cargan sus costes y, desde luego, excede el propósito de un trabajo académico. Personalmente, me convence más IRS20 con tipo fijo, pero invito al lector a estructurar series de tipo variable con EURIBOR1 y cargarlas en el programa. Por otro lado, los márgenes son mucho más idiosincráticos; en este modelo, valoro que se encuentran entre 0.5 y 1.5, dependiendo del contexto.

8.4. Escenario 4: Alteración de parámetros, zona de divergencia

Hasta ahora hemos tomado como referencia un individuo de 65 años con una vivienda de 250 mil euros y hemos probado distintas tasas de revalorización y de tipos de interés. Sin embargo, llama poderosamente la atención el hecho de que la zona de convergencia del modelo, para cualesquiera modificaciones, se ha estabilizado un poco antes de la esperanza de vida.

En este ejemplo trataré de realizar experimentos manipulando diferentes parámetros para ver cómo reacciona el modelo.

Experimento: $x = 65$, $C_0 = 1M$, **Cataluña**

Realizaremos el mismo experimento multiplicando el valor del inmueble por 4.

NA	23.75	8.114893	0.20466424	0.0414	0.16326424	68248.48	5813.33	6.9856e-10	Éxito
NA	23.50	6.061346	0.33402532	0.0414	0.29262532	68637.18	5846.44	2.3306e-10	Éxito
NA	23.25	3.810524	0.74052180	0.0414	0.69912180	69035.33	5880.35	5.5881e-09	Éxito
NA	23.00	1.289286	6.86717679	0.0414	6.82577679	69443.25	5915.10	2.3283e-10	Éxito
NA	22.75	0.000100	1207222.47503170	0.0414	1207222.43363170	69861.27	5950.71	1.0000e+06	Fracaso
NA	22.50	0.000100	32883858.68732463	0.0414	32883858.64592463	70289.71	5987.20	1.0003e+06	Fracaso
E[]	22.25	0.000100	371961.03768211	0.0414	371960.99628211	70728.92	6024.61	1.0009e+06	Fracaso

Como podemos observar, el modelo no altera su zona de divergencia.

Experimento: $x = 73$, $C_0 = 250$ **mil, Cataluña**

En este ejemplo alteramos la edad.

NA	17.25	6.7502459	0.22886984	0.0414	0.18746984	20624.31	1756.76	2.3296e-10	Éxito
NA	17.00	5.4143228	0.33728435	0.0414	0.29588435	20820.77	1773.49	1.1659e-10	Éxito
NA	16.75	3.9486091	0.58900413	0.0414	0.54760413	21023.47	1790.76	1.1892e-09	Éxito
NA	16.50	2.3613900	1.51900941	0.0414	1.47760941	21232.69	1808.58	1.1642e-10	Éxito
NA	16.25	0.6245692	58.04330389	0.0414	58.00190389	21448.75	1826.98	3.1699e-08	Éxito
NA	16.00	0.0001000	125207990.08696102	0.0414	125207990.04556102	21671.94	1845.99	2.5001e+05	Fracaso
NA	15.75	0.0001000	3389336.22033737	0.0414	3389336.17893737	21902.62	1865.64	2.5015e+05	Fracaso
E[]	15.50	0.0001000	313769.14942293	0.0414	313769.10802293	22141.16	1885.96	2.5042e+05	Fracaso

Nuevamente, la zona de divergencia sucede cerca de la esperanza de vida, y esta diverge. En este caso, hemos obtenido éxito en $T_{\text{contr}} = 0{,}624$. Esto significa que la hipótesis era cierta, y *el modelo con prima de riesgo para casos donde T_{contr} tiende a 0 converge con el modelo de apuesta actuarial.* Además, el valor T_{risk} del modelo de apuesta actuarial debería ser el nivel de riesgo de longevidad máximo que el modelo con prima de riesgo puede asumir[15].

Experimento: $x = 95$, $C_0 = 250$ **mil, Cataluña**

En este ejemplo daremos un valor extremo para la edad.

Nuevamente, la zona de no convergencia queda determinada por la esperanza de vida.

[15] Este desarrollo queda pendiente para futuros trabajos.

Referencias	T_risk	T_contr	r_k	r_0	Prima_riesgo	Anualidad	Mensualidad	Total_error	Estimación
VaR_1	6.00	6.000000	0.04140000	0.0414	0.00000000	46704.45	3978.23	0.0000e+00	Éxito
VaR_5	5.75	5.725912	0.04250076	0.0414	0.00110076	48467.79	4128.43	1.7536e-10	Éxito
VaR_10	5.50	5.390518	0.04700440	0.0414	0.00560440	50392.54	4292.38	1.1617e-07	Éxito
NA	5.25	4.954691	0.05895205	0.0414	0.01755205	52501.75	4472.04	4.8072e-10	Éxito
NA	5.00	4.445772	0.08105067	0.0414	0.03965067	54823.09	4669.77	1.2420e-11	Éxito
E[]+sd()	4.75	3.929489	0.11369913	0.0414	0.07229913	57390.05	4888.42	1.1135e-07	Éxito
NA	4.50	3.401494	0.16453108	0.0414	0.12313108	60243.57	5131.48	1.2946e-08	Éxito
NA	4.25	2.867506	0.24705909	0.0414	0.20565909	63434.21	5403.26	5.8986e-10	Éxito
NA	4.00	2.319672	0.39676580	0.0414	0.35536580	67025.18	5709.13	1.1645e-10	Éxito
E[]+sd()/2	3.75	1.770252	0.70321541	0.0414	0.66181541	71096.56	6055.93	5.9890e-11	Éxito
NA	3.50	1.199359	1.59257745	0.0414	1.55117745	75751.27	6452.41	6.8256e-08	Éxito
NA	3.25	0.625389	7.41798061	0.0414	7.37658061	81123.93	6910.05	1.4006e-09	Éxito
E[]	3.00	0.000100	95550.75508625	0.0414	95550.71368625	87394.03	7444.13	2.4999e+05	Fracaso

Estos resultados sugieren que la zona de convergencia está determinada únicamente por la distribución de probabilidades de la tabla actuarial. Esto podría ser así por el hecho de que la condición de máxima anualidad garantiza que el contrato *esté siempre y en cualquier duración técnica expuesto a riesgo de longevidad independientemente del colateral, la tasa de revalorización o el tipo de interés libre de riesgo*. Por tanto, parece que, por lo menos para los datos de distribuciones de supervivencia oficiales, *la esperanza de vida es un muy mal indicador para establecer la duración técnica de un contrato de hipotecas inversas.*

8.5. Limitaciones del programa

Sin duda, el programa ofrece resultados consistentes, pero no está libre de flaquezas:

El modelo trabaja con polinomios no lineales de grado T. Por esta razón, es especialmente sensible a alteraciones en las tasas de crecimiento del mercado inmobiliario y en los tipos de interés. Por este motivo, me parece recomendable evitar el tipo de interés variable en este tipo de contratos, ya que introduce una enorme cantidad de incertidumbre en el modelo.

La tasa de crecimiento del mercado inmobiliario g juega un papel muy relevante en la determinación de P_T. Si la tasa es alta, podemos llegar a financiar cantidades de deuda muy elevadas, ya que el colateral se revaloriza muy rápido; si es baja, el modelo modera vía reducción de P_T. En el modelo he utilizado la revalorización anual media de los últimos años, segregada por regiones. Sin embargo, el mercado inmobiliario tiene tendencias cíclicas. Es necesario, de cara a la aplicación práctica, considerar detenidamente esta variable y, a ser posible, nutrir el programa con estimaciones de g realizadas por un equipo profesional.

Por otro lado, el riesgo de longevidad, que depende de T, es una de las piedras angulares del modelo. Su correcta determinación es crucial para evaluar la cantidad de riesgo del contrato y determinar adecuadamente la prima de riesgo. Las fuentes para la tabla actuarial son los datos del INE. Sin embargo, podría mejorar mucho la calidad de los resultados si nutrimos al programa con diversas tablas de vida ajustadas al perfil del prestamista, por ejemplo, segregando por sexo, renta, trabajo, etc. En la práctica, sabemos que la longevidad es heterogénea y se ve afectada por razones biológicas, culturales y clínicas [6] (Ayuso, Bravo y Holzmann, 2017). Mientras mejor adaptemos los datos a esta idiosincrasia, mayor precisión lograremos en la gestión de riesgos.

La determinación del tipo de interés libre de riesgo $r = r_0$ podría considerarse algo arbitraria. Cualquier empresa podría modificar este parámetro a su disposición, cambiando el margen o el coste de financiación. Podría aplicarse EURIBOR + margen, por ejemplo. En la mayoría de contratos de este estilo, el tipo de interés que aplica es bastante alto, por lo que no sorprende encontrarse un tipo de interés de entre el 3.5 % y el 5 % con riesgo. Sin embargo, el margen que he aplicado podría ser algo excesivo y no mantenerse en diferentes contextos crediticios e inmobiliarios, por lo que sería necesario ajustarlo a estimaciones más prácticas.

Finalmente, aunque el programa termina siendo una herramienta de análisis potente, de cara a una implementación práctica sería necesario considerar una serie de factores: simplicidad de las suposiciones iniciales, ausencia de factores exógenos, fiabilidad de los datos de entrada, riesgo de correlación entre variables, falta de testeo empírico, entre otros. Este comentario no es una crítica a mi propio modelo y programa, sino un reconocimiento honesto de sus propias limitaciones y de aquellos factores que deberían considerarse de cara a la aplicación práctica en contratos tan riesgosos como las hipotecas inversas con anualidades máximas.

9. Conclusiones

Las hipotecas inversas son un producto que tenderá a ganar relevancia en el futuro a medida que jubilarse de la manera tradicional se vuelva más complejo. En este sentido, la propiedad de un inmueble puede convertirse en una fuente de renta equivalente a un plan de pensiones.

Análogamente a las pensiones, los contratos de hipoteca inversa pueden conllevar riesgos de longevidad significativos, especialmente si, al igual que en mi modelo, se diseñan para cobrar la mayor anualidad/mensualidad posible. En particular, el análisis demuestra que parámetros como la esperanza de vida, que pueden resultar intuitivos, son demasiado riesgosos para establecer contratos de hipotecas inversas. Estos contratos son riesgosos, no solamente por la dificultad de estimar la longevidad del prestatario, sino por los riesgos asociados al valor del colateral y los costes de financiación. Esta enorme sensibilidad de los contratos a los riesgos se debe, en gran medida, a la duración del contrato, ya que, al ser diseñados para personas de 65 años y finalizar en el momento de fallecimiento, se hace necesario especular con las tasas de revalorización del mercado inmobiliario y los tipos de interés en periodos de alrededor de 20-25 años. En este sentido, se hace imprescindible trabajar con datos de buena calidad y realizar prospecciones razonables sobre la situación de estas variables en el futuro.

Pese a estas dinámicas, la teoría económica y el modelo demuestran que los riesgos no deben evitarse, sino gestionarse. Las pruebas realizadas en el modelo muestran que tratar de evitar el riesgo de longevidad en los contratos conduce a un equilibrio Pareto inferior y, por tanto, a ineficiencia en la asignación de recursos. Los escenarios realizados indican que pueden diseñarse contratos con anualidades más altas si se asume riesgo de longevidad, lo cual beneficia tanto al prestamista como al prestatario, pero, a cambio, se exige un mayor tipo de interés para compensar el riesgo que el prestatario transfiere al prestamista.

Además, el programa pone en relevancia la potencia y necesidad de herramientas informáticas en las Ciencias Actuariales y Financieras. La manipulación de bases de datos como tablas de vida y la capacidad de almacenamiento y procesamiento de datos que ofrecen los programas estadísticos modernos son indispensables para gestionar riesgos de forma eficiente. En particular, el uso de métodos numéricos ha sido esencial para resolver el modelo y aproximar con gran precisión la prima de riesgo.

El trabajo queda de tal manera que cualquier usuario o empresa podría actualizarlo cargando nuevas tablas de vida o datos. Mi recomendación personal sería centrarse en la tasa de revalorización del mercado inmobiliario, ya que es una de las variables más sensibles del modelo. Por otro lado, de cara a una aplicación práctica extensa, sería imprescindible nutrir al programa con diversas tablas de vida ajustadas a la realidad del prestamista, prestando especial atención a variables como el sexo y el estado clínico, ya que podrían alterar los resultados del modelo sustancialmente debido a la sensibilidad del parámetro T.

10. Apéndice

10.1. Demostraciones:

10.1.1. Demostración: Progresión geometrica para D_t

Consideremos la expresión de D_T definida como:

$$D_T = \sum_{j=0}^{T-1} P \cdot (1+r)^{T-j}$$

Factorizamos P y $(1+r)^T$ de la expresión:

$$D_T = P \cdot (1+r)^T \cdot \sum_{j=0}^{T-1} (1+r)^{-j}$$

La suma geométrica está dada por:

$$\sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad \text{si } |x| < 1.$$

En nuestro caso, $x = \frac{1}{1+r}$ y $n = T$. Por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{T-1} (1+r)^{-j} = \frac{1-(1+r)^{-T}}{1-(1+r)^{-1}}$$

Sustituyendo en la fórmula de la suma:

$$\sum_{j=0}^{T-1} (1+r)^{-j} = \frac{1-(1+r)^{-T}}{\frac{r}{1+r}} = \frac{(1+r) \cdot \left(1-(1+r)^{-T}\right)}{r}.$$

Sustituyendo la suma geométrica en D_T, obtenemos:

$$D_T = P \cdot (1+r)^T \cdot \frac{(1+r) \cdot \left(1-(1+r)^{-T}\right)}{r}.$$

Factorizamos $(1+r)$ y simplificamos:

$$D_T = P \cdot \frac{(1+r)}{r} \cdot \left((1+r)^T - 1\right).$$

En particular, podemos modelizar el monto de deuda para un momento t de la siguiente forma:

$$D(t, r, P) = P \cdot \frac{1+r}{r} \cdot \left((1+r)^t - 1\right)$$

10.1.2. Demostración: $D(t, r_k) \geq D(t, r_0)$.

Voy a demostrar la siguiente expresión: $\forall t \in [0, \infty) \quad D(t, r_k) \geq D(t, r_0)$.

$$D(t, r_k) - D(t, r_0) = P \cdot \left[\frac{1 + r_k}{r_k} \cdot \big((1 + r_k)^t - 1 \big) - \frac{1 + r_0}{r_0} \cdot \big((1 + r_0)^t - 1 \big) \right].$$

Por definición:

$$k = r_k - r_0 \iff k + r_0 = r_k \iff r_0 \leq r_k, \quad \forall k \in [0, \infty).$$

Se deduce que:

$$\frac{1 + r_k}{r_k} \leq \frac{1 + r_0}{r_0}. \iff r_0(1 + r_k) \leq r_k(1 + r_0) \iff r_0 + r_0 r_k \leq r_k + r_k r_0 \iff r_0 \leq r_k.$$

Que es cierto por hipotesis. Por tanto podemos aplicar esta desigualdad en la expresión

$$D(t, r_k) - D(t, r_0) = P \cdot \left[\frac{1 + r_k}{r_k} \cdot \big((1 + r_k)^t - 1 \big) - \frac{1 + r_k}{r_k} \cdot \big((1 + r_0)^t - 1 \big) \right].$$

Simplificando:

$$D(t, r_k) - D(t, r_0) \geq P \cdot \frac{1 + r_k}{r_k} \cdot \left[\big((1 + r_k)^t - 1 \big) - \big((1 + r_0)^t - 1 \big) \right].$$

Entonces el término que nos indica el signo de la expresión es:

$$\big((1 + r_k)^t - 1 \big) - \big((1 + r_0)^t - 1 \big).$$

Que debido a las condiciones $r_0 \leq r_k$ y $t \in [0, \infty)$, podemos deducir que será una expresión[16] de valor 0 o positivo. Cumpliendose de esta forma que:

$$\forall t \in [0, \infty) \quad D(t, r_k) \geq D(t, r_0).$$

[16]Notemos que esta demostración implica que la variable G(t) será siempre 0 o positiva para cualquier valor de t

10.1.3. Demostración: $T_{\mathbf{contr}} \leq T_{\mathbf{risk}}$

Por definición:

$$T_{contr} = t \iff C_t = D_{t,r_k} \quad T_{risk} = t \iff C_t = D_{t,r_0}$$

Además acabamos de demostrar que:

$$\forall t \in [0, \infty) \quad D(t, r_k) \geq D(t, r_0).$$

Para el caso T_{contr}:

$$C(T_{\text{contr}}) = D(T_{\text{contr}}, r_k) \geq D(T_{\text{contr}}, r_0)$$

Para el caso T_{risk}:

$$C(T_{\text{risk}}) = D(T_{\text{risk}}, r_0) \leq D(T_{\text{risk}}, r_k)$$

Tanto $D(t)$[17] como $C(t)$[18] son funciones monotonas crecientes. Por lo que cumple:

$$\forall t_1, t_2 \in [0, \infty),\, t_1 < t_2 \implies C(t_1) \leq C(t_2).$$

Por lo que:

$$T_{\text{risk}} < T_{\text{contr}} \implies C(T_{\text{risk}}) < C(T_{\text{contr}}) \iff D(T_{\text{risk}}, r_0) < D(T_{\text{contr}}, r_k)\,!$$

Lo cual es contradictorio, ya que ese hecho implicaría que $r_k < r_0$, que es falso por hipotesis. Por tanto podemos concluir:

$$T_{\text{contr}} \leq T_{\text{risk}}$$

Esta modesta demostración es fundamental ya que nos servirá de cota superior para T_{contr} en el algoritmo de Newton-Raphson multidimensional.

[17]Para el caso de $D(t)$, es suficiente comprobar que:

$$D'(t) = P \cdot \frac{1+r}{r} \cdot (1+r)^t \cdot \ln(1+r) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$$

[18]Esto es cierto en el modelo considerando que g es positiva, que es lo habitual y ademas es una condición del modelo. La tasa de revalorizacion media anual g, es un valor que debe estimar el crecimiento del mercado inmobiliario durante la cantidad de tiempo que dure el contrato, si bien es cierto que esta tasa podría ser negativa, esto plantearía una reformulación interesante del contrato donde el nivel de riesgo sería muy elevado porqué la vivienda sería una mala garantía. Por otro lado, el modelo es muy sensible al riesgo, y como demuestran los resultados, no todos los niveles de riesgo permiten la existencia de una prima de riesgo de equilibrio, por lo que en un contexto de g negativo deberían haber pocas soluciones para el sistema. En cualquier caso, para las restricciones del modelo, donde g es positiva, ya que aunque durante un tiempo el mercado pueda ser bajista, a largo plazo la tendencia anual media suele como minimo compensar la inflación, Baste mirar:

$$C'(t) = C_0 \cdot (1+g)^t \cdot \ln(1+g) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$$

10.1.4. Relaciones de la condición de máxima anualidad:

Partiendo de la condición de máxmia anualidad:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{risk}}} \cdot r_0}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)} = \frac{C_0 \cdot (1+g)^{T_{\text{contr}}} \cdot r_k}{(1+r_k) \cdot ((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1)} \quad \text{(Condición de máxima anualidad)}$$

$$(1+g)^{T_{\text{risk}} - T_{\text{contr}}} = \frac{r_0}{r_k} \cdot \frac{(1+r_k) \cdot \left((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1\right)}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)}.$$

Por definicíon sabemos que:

$$k = r_k - r_0 \iff k + r_0 = r_k \iff r_0 \leq r_k, \quad \forall k \in [0, \infty).$$

Aprovechando este hecho podemos realizar la siguiente demostración:

$$\frac{r_0}{r_k} \leq \frac{1+r_0}{1+r_k} \iff r_0(1+r_k) \leq r_k(1+r_0) \iff r_0 + r_0 r_k \leq r_k + r_k r_0 \iff r_0 \leq r_k.$$

podemos sustituir el término r_0/r_k de la expresión anterior, simplificar y llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\frac{r_0}{r_k} \cdot \frac{(1+r_k) \cdot \left((1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1\right)}{(1+r_0) \cdot ((1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1)} \leq \frac{(1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1}{(1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1}.$$

Finalmente, nos interesa la siguiente expresión:

$$(1+g)^{T_{\text{risk}} - T_{\text{contr}}} \leq \frac{(1+r_k)^{T_{\text{contr}}} - 1}{(1+r_0)^{T_{\text{risk}}} - 1}.$$

10.1.5. Demostración: $\mathbb{E}[H(t)]$

Partiendo de la aproximación teorica:

$$\mathbb{E}[H(t)] \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} H(t) \cdot \mathbb{P}(t \in U_i)\, dt,$$

Ajustamos para la partición de las probabilidades en tabla de t:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(t)] \approx & \sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor - 1} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} H(u)\, du \\
& + \frac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor + 1)}{l_x} \cdot \left(\int_{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor}^{T_{\text{contr}}} H(u)\, du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lceil T_{\text{contr}} \rceil} H(u)\, du \right) \\
& + \sum_{t=\lceil T_{\text{contr}} \rceil}^{w-x} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} H(u)\, du.
\end{aligned}$$

Además, una vez separado el dominio de $H(t)$ a conveniencia podemos sustituir por $G(t)$ y $L(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(t)] \approx & \sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor - 1} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} G(u)\, du \\
& + \frac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor + 1)}{l_x} \cdot \left(\int_{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor}^{T_{\text{contr}}} G(u)\, du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lceil T_{\text{contr}} \rceil} L(u)\, du \right) \\
& + \sum_{t=\lceil T_{\text{contr}} \rceil}^{w-x} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} L(u)\, du.
\end{aligned}$$

Analogamente, la versión extendida considerando la el valor de $G(t)$ y $L(t)$ con las variables fundamentales del modelo $D(t,r)$ y C_t.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(t)] \approx & \sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor - 1} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} \left(D_{r_k}(u) - D_{r_0}(u) \right) du \\
& + \frac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor + 1)}{l_x} \cdot \left(\int_{\lfloor T_{\text{contr}} \rfloor}^{T_{\text{contr}}} \left(D_{r_k}(u) - D_{r_0}(u) \right) du \right. \\
& \left. + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lceil T_{\text{contr}} \rceil} \left(C(u) - D_{r_0}(u) \right) du \right) \\
& + \sum_{t=\lceil T_{\text{contr}} \rceil}^{w-x} \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} \left(C(u) - D_{r_0}(u) \right) du.
\end{aligned}$$

10.1.6. Demostración: Versión para casos extremos $\mathbb{E}[H(t)]$

La formula que de $\mathbb{E}[H(t)]$ es correcta en la mayoría de casos pero no maneja adecuadamente casos extremos de T_{contr}, por ejemplo $T_{\text{contr}} \in [0,1)$ o $T_{\text{contr}} \in [w-x-1, w-x]$, por tanto es necesario, especialmente para el código, ajustar $\mathbb{E}[H(t)]$ considerando estos casos extremos:

$$\mathbb{E}[H(t)] = \begin{cases} \dfrac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1)}{l_x} \cdot \left(\displaystyle\int_{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor}^{T_{\text{contr}}} G(u)\,du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1} L(u)\,du \right) \\ + \displaystyle\sum_{t=\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1}^{w-x} \dfrac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} L(u)\,du, \\ (\text{si } T_{\text{contr}} \in [0,1)) \\ \\ \displaystyle\sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor-1} \dfrac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} G(u)\,du \\ + \dfrac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1)}{l_x} \cdot \left(\displaystyle\int_{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor}^{T_{\text{contr}}} G(u)\,du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1} L(u)\,du \right) \\ + \displaystyle\sum_{t=\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1}^{w-x} \dfrac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} L(u)\,du, \\ (\text{si } T_{\text{contr}} \in [1, w-x)) \\ \\ \displaystyle\sum_{t=0}^{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor-1} \dfrac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l_x} \cdot \int_t^{t+1} G(u)\,du \\ + \dfrac{l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor) - l(x+\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1)}{l_x} \cdot \left(\displaystyle\int_{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor}^{T_{\text{contr}}} G(u)\,du + \int_{T_{\text{contr}}}^{\lfloor T_{\text{contr}}\rfloor+1} L(u)\,du \right), \\ (\text{si } T_{\text{contr}} \in (w-x-1, w-x]). \end{cases}$$

La primera y la tercera condición sirven para manejar los casos críticos, la condición segunda es la misma que en la demostración anterior. La formula general es algo tosca, y en general no la utilizaré en las expresiones analíticas del modelo, aunque es la única que maneja correctamente todos los valores de T_{contr}. En la parte del Apéndice donde aparecen los programas se puede encontrar una versión en código de esta formula que posiblemente sea más fácil de entender. Basicamente, a nivel de programación es mas sencillo hacer un vector con las probabilidades de muerte diferida, y otro con los valores de $H(t)$ para la partición que nos interesa. Luego los multiplico vectorialmente y obtengo la esperanza.

10.2. Funciones del enviroment

10.2.1. C_t

$$C(t, g, C_0) = C_0 \cdot (1 + g)^t$$

```r
C <- function(t, g, C0) {
  q <- C0 * (1 + g)^t
  return(q)
}
```

10.2.2. D_t

$$D(t, r, P) = P \cdot \frac{(1 + r)}{r} \cdot \left((1 + r)^t - 1\right)$$

```r
D <- function(t, r, P) {
  q <- P * ((1 + r) / r) * ((1 + r)^t - 1)
  return(q)
}
```

10.2.3. P_t

$$P(C_0, g, t, r) = \frac{C_0 \cdot (1 + g)^t \cdot r}{(1 + r) \cdot ((1 + r)^t - 1)}$$

```r
P <- function(C0, g, t, r) {
  numerador <- C0 * (1 + g)^t * r
  denominador <- (1 + r) * ((1 + r)^t - 1)
  q <- numerador / denominador
  return(q)
}
```

10.2.4. $\int D(t)\,dt$

$$\text{integrar\_D} = \int_{\text{lower}}^{\text{upper}} D(x, r, P)\,dx$$

```r
integrar_D <- function(lower, upper, r, P) {
  integral <- integrate(function(x) D(x, r, P), lower = lower, upper = upper)
  return(integral$value)
}
```

10.2.5. $\int C(t)$

$$\text{integrar\_C} = \int_{\text{lower}}^{\text{upper}} C(x, g, C_0)\, dx$$

```r
integrar_C <- function(lower, upper, g, C0) {
  integral <- integrate(function(x) C(x, g, C0), lower = lower, upper = upper)
  return(integral$value)
}
```

10.2.6. $\int G(t)$

$$G(t, r_0, r_k, P_T) = \int_t^{t+1} D(x, r_k, P_T)\, dx - \int_t^{t+1} D(x, r_0, P_T)\, dx$$

```r
G <- function(t, r_0, r_k, P_T) {
  q <- integrar_D(t, t+1, r_k, P_T) - integrar_D(t, t+1, r_0, P_T)
  return(q)
}
```

10.2.7. $\int L(t)$

$$L(t, g, C_0, r_0, P_T) = \int_t^{t+1} C(x, g, C_0)\, dx - \int_t^{t+1} D(x, r_0, P_T)\, dx$$

```r
L <- function(t, g, C0, r_0, P_T) {
  q <- integrar_C(t, t+1, g, C0) - integrar_D(t, t+1, r_0, P_T)
  return(q)
}
```

10.2.8. Vector de probabilidades de $H(t)$

$$P_H(t, x) = \begin{cases} q_x, & \text{si } t = 0 \\ \left(\prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k}\right) \cdot q_{x+t}, & \text{si } 1 < t < w - x \end{cases}$$

```r
vector_prob_H <- function(TABLA_VIDA, x, w) {
  vector_probabilidades <- c()
  # Bucle para calcular probabilidades de muerte diferida
  for (t in 0:(w - x)) {
    if (t == 0) {
      # Probabilidad de morir en el primer año (qx de la edad actual)
      prob_muerte_t <- TABLA_VIDA$qx[TABLA_VIDA$age == x]
    } else {
```

```
      # Probabilidad de sobrevivir t años y morir en el año t+1
      px_t <- prod(TABLA_VIDA$px[TABLA_VIDA$age >= x & TABLA_VIDA$age < (x + t)])
      qx_t <- TABLA_VIDA$qx[TABLA_VIDA$age == (x + t)]
      prob_muerte_t <- px_t * qx_t
    }
    # Agregar la probabilidad calculada al vector
    vector_probabilidades <- c(vector_probabilidades, prob_muerte_t)
  }
  return(vector_probabilidades)
}
```

En este caso, generamos un vector que asigna las probabilidades de de fallecimiento en cada año desde la edad x hasta la edad w, utilizando las formulas de probabilidades de fallecimiento diferidas

10.2.9. vector_val_H(t)

$$
vector\_val\_H = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=0}^{\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor - 1} \int_t^{t+1} G(x, r_0, r_k, P_T)\, dx \\ \displaystyle + \int_{\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor}^{t_{\text{contr}}} D(x, r_k, P_T)\, dx - \int_{\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor}^{t_{\text{contr}}} D(x, r_0, P_T)\, dx \\ \displaystyle + \int_{t_{\text{contr}}}^{\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor + 1} C(x, g, C_0)\, dx - \int_{t_{\text{contr}}}^{\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor + 1} D(x, r_0, P_T)\, dx \\ \displaystyle + \sum_{t=\lfloor t_{\text{contr}} \rfloor + 1}^{w-x} \int_t^{t+1} L(x, g, C_0, r_0, P_T)\, dx, \\ (\text{si } t_{\text{contr}} \in [0, w - x]). \end{cases}
$$

```
vector_val_H <- function(t_contr, g, C0, r_0, r_k, P_T) {
  resultados <- c()
  if (t_contr >= 1) {
    for (t in 0:(floor(t_contr) - 1)) {
      G_t <- G(t, r_0, r_k, P_T)
      resultados <- c(resultados, G_t)
    }
  }
  if (length(resultados) >= (w - x + 1)) {
    return(resultados)

  }
  G_contrib = integrar_D(floor(t_contr), t_contr, r_k, P_T) - integrar_D(floor(t_contr), t_
  L_contrib = integrar_C(t_contr, floor(t_contr)+1, g, C0) - integrar_D(t_contr, floor(t_co
  salto <- G_contrib + L_contrib
  resultados <- c(resultados, salto)

```

```
  if (length(resultados) >= (w - x + 1)) {
    return(resultados)
  }
  if (floor(t_contr) + 1 <= w - x) {
    for (t in (floor(t_contr) + 1):(w - x)) {
      L_t <- L(t, g, C0, r_0, P_T)
      resultados <- c(resultados, L_t)
    }
  }
  return(resultados)
}
```

Esta ha sido una de las funciones que con mayor detalle y precisión hay que programar. Lo que hace la función es calcular los valores de $H(t)$, desde 0 hasta $w - x$ y los mete en un vector de dimensiones $w - x + 1$. Es importante considerar casos extremos de T_{contr}, ya que en caso de no hacerlo tendremos problemas de dimensionalidad entre el vector de esta funcion y el de la anterior.

En particular hay que considerar los casos en que T_{contr} se encuentre en el conjunto $[0, 1)$ y $(w - x - 1, w - x]$. Para estos casos existen los `if()`. Además hay que considerar que cuando esta función se ejecute en el Newton-Raphson, este podría explorar valores no positivos de T_{contr}, que sabemos que no pueden darse por teoría, y además están en la zona de divergencia. Si permitimos que el algoritmo explore estos valores, no perderemos analisis, pero tendremos problema de dimensionalidad para esos valores, no convergencia, y alertas de `warnings()`. Por eso he condicionado directamente la variable desde el codigo de ejecución del Newton-Raphson.

10.2.10. $E[H(t, r_k)]$

```
H <- function(C_T, r_k, r, t_contr, w, r_0, g, C0, TABLA_VIDA, x) {
  # Calcular VAL_H
  VAL_H <- vector_val_H(C_T, r_k, r, t_contr, w, r_0, g, C0)
  # Calcular PROB_H
  PROB_H <- vector_prob_H(TABLA_VIDA, x, w)
  # Calcular H
  return(sum(VAL_H * PROB_H))
}
```

La esperanza se calcula como la multiplicación y suma del vector de valores y el vector de probabilidades.

10.2.11. Newton-Raphson

```r
newtonraphson_rktcontr <- function(x, w, g, C0, r_0, P_T, t_risk,
                                   t_contr_inicial, r_k_inicial,
                                   error_tolerancia = 1e-6, max_iter = 100) {
  iter <- 1
  error <- Inf
  variables <- c(t_contr = t_contr_inicial, r_k = r_k_inicial)  # Valores iniciales
  # El sistema de ecuaciones
  f <- function(vars) {
    t_contr <- vars["t_contr"]
    r_k <- vars["r_k"]
    c(
      D(t_contr, r_k, P_T) - C(t_contr, g, C0), # Condición de máxima anualidad
      H(TABLA_VIDA, x, w, t_contr, g, C0, r_0, r_k, P_T) # Condición de riesgo
    )
  }
  # Aproximar la jacobiana numéricamente
  jacobiana <- function(vars) {
    t_contr <- vars["t_contr"]
    r_k <- vars["r_k"]
    h <- 1e-8  # Aproximar desde la definición
    J <- matrix(0, nrow = 2, ncol = 2)
    # Derivadas parciales respecto a t_contr
    vars_t_contr <- vars
    vars_t_contr["t_contr"] <- t_contr + h
    J[, 1] <- (f(vars_t_contr) - f(vars)) / h
    # Derivadas parciales respecto a r_k
    vars_r_k <- vars
    vars_r_k["r_k"] <- r_k + h
    J[, 2] <- (f(vars_r_k) - f(vars)) / h
    return(J)
  }
  # Manejo de errores durante la iteración
  tryCatch(
    {
      while (error > error_tolerancia && iter <= max_iter) {
        # Evaluar las funciones y la jacobiana
        F <- f(variables)
        J <- jacobiana(variables)
        # Actualización de Newton-Raphson:
        delta <- solve(J, -F)  # Resolver sistema lineal
        variables <- variables + delta
        # Restringir t_contr y r_k a los límites
        variables["t_contr"] <- max(1e-4, min(variables["t_contr"], t_risk)) # 1e-4
        variables["r_k"] <- max(r_0, variables["r_k"]) # r_k >= r_0 por definición
        # Calcular el error como la norma de F
        error <- sqrt(sum(F^2))
        iter <- iter + 1
      }
    },
```

```
    error = function(e) {
      cat("Error en la iteración de Newton-Raphson:", conditionMessage(e), "\n")
      return(list(t_contr = NA, r_k = NA, error = Inf))
    }
  )
  if (iter > max_iter) {
    cat("No se alcanzó la convergencia después de", max_iter, "iteraciones.\n")
  }
  return(list(t_contr = variables["t_contr"], r_k = variables["r_k"], error = error))
}
```

El algoritmo requiere una serie de valores iniciales, el error y el número de iteraciones. Seguidamente, define la función objetivo con las condiciones del modelo. Calcula la matriz jacobiana con las derivadas parciales. Aquí, muy interesante, en lugar de derivad directamente he realizado una aproximación mediante h utilizando directamente la definición de derivada. La función TryCatch, permite que si el programa genera errores este no se detenga, después de todas las pruebas el programa no debería generar errores pero la he dejado para que el programa no se cuelge si se testea algún valor inusual. Finalmente se realiza un while con el condicionante del error y el número de iteraciones, se generan unos comentarios en caso de fracaso y se retorna la solución del sistema.

10.2.12. Cálculo mensualidades

```
calcular_pago_mensual <- function(P, r) {
  r_m <- (1 + r)^(1/12) - 1
  suma_factores <- sum((1 + r_m)^(12 - 1:12))
  m <- P*(1 + r) / suma_factores
  return(round(m, 2))
}
```

Este código permite aproximar las mensualidades a partir de las anualidades y una regla de indiferencia.

10.3. Código principal

```r
#####################################################################################
#Esto guarda el entorno. El programa lo elimina cada vez que reinicias para no acumular
#problemas, lo puedes eliminar cuando acabes la sesión, debería estar en tu directorio
#usa getwd(), para encontrar la ubicación
save.image(file = "HIPOTECAINVERSAENTORNO.RData")
#####################################################################################
cat("\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n")
cat("\n")
cat("         Bienvenido a la calculadora        \n")
cat("\n")
cat("Por favor, introduzca los datos para que el sistema calcule los contratos óptimos
acorde a su nivel de riesgo de longevidad.\n\n")
#####################################################################################
###-----------------------------TOMA DE DATOS MANUAL-------------------------------###
#####################################################################################
repetir <- 1
while(repetir == 1){
  rm(list = ls())
  repetir <- 1
  options(scipen = 999)
  load("HIPOTECAINVERSAENTORNO.RData")
  w <- 101
  confirmacion <- 1
  while (confirmacion == 1) {
    #Pido los datos
    cat("Edad del prestatario (entre 65 y 95 años): ")
    x <- as.numeric(readline())
    while (x < 65 || x > 95) {
      cat("Por favor, ingrese una edad válida entre 60 y 95 años: ")
      x <- as.numeric(readline())
    }
    cat("Valor actual de la vivienda: ")
    C0 <- as.numeric(readline())
    cat("Lea la tabla y seleccione la comunidad autónoma del inmueble:\n")
    print(VIVIENDA[, c("ID", "COMUNIDAD_AUTONOMA")], row.names = FALSE)
    cat("Introduce el ID de la comunidad autónoma del inmueble: ")
    comunidad_id <- as.numeric(readline())
    g <- VIVIENDA$MEDIA_ANUAL[VIVIENDA$ID == comunidad_id]
    comunidad_nombre <- VIVIENDA$COMUNIDAD_AUTONOMA[VIVIENDA$ID == comunidad_id]
    cat("Comunidad autónoma seleccionada:", comunidad_nombre, "\nLa tasa de crecimiento med
        "\nSi por contra considera que el mercado futuro tendrá otra tendencia de revaloriz
    g <- as.numeric(readline())
    if (g == 0) {
      g <- VIVIENDA$MEDIA_ANUAL[VIVIENDA$ID == comunidad_id]
    }
    cat("Introduzca la tasa de interés libre de riesgo (en formato decimal, por ejemplo, 0.
    cat("En caso de no saberla, introduzca el valor 0 y el programa tomará un valor por def
    r_0 <- as.numeric(readline())
    if (r_0 == 0) {
```

```r
    r_0 <- 0.0414
  }
  # Mostrar Datos
  cat("\n--- Confirmación de datos ---\n")
  cat("Edad:", x, "\n")
  cat("Valor actual de la vivienda:", C0, "\n")
  cat("Comunidad autónoma:", comunidad_nombre, "\n")
  cat("Tasa de revalorización inmobiliaria:", g, "\n")
  cat("Tasa de interés libre de riesgo:", r_0, "\n")
  # Confirmar Datos
  cat("\nSi los datos son correctos, introduce 0 para continuar. Si no son correctos, pul
  confirmacion <- as.numeric(readline())
  if (confirmacion == 1) {
    cat("Reiniciando la toma de datos.\n\n\n")
  }
}
#####################################################################################
###----------------------- BUCLE ITERATIVO PARA EL PROGRAMA ----------------------###
#####################################################################################
rep2 <- 1
while (rep2 == 1) {
  cat("\nEsta calculadora ofrece dos niveles de analisis:\n")
  cat("El análisis avanzado ofrece una amplia gama de resultados y contratos óptimos, sin
  cat("\nPor otro lado el análisis simple es mucho más veloz que el avanzado y las conclu
  cat("\n\n\nSeleccione el nivel del análisis que desea ejecutar:\n")
  cat("Para el Análisis avanzado, introduce 1\n")
  cat("Para el Análisis simple, introduce 2\n")
  opcion <- as.numeric(readline(prompt = "Ingrese 1 o 2: "))
  ####################################################################
  if (opcion == 1) {
    cat("\nRealizando Analisis avanzado, este proceso podría demorarse unos segundos...\n
    ------------------------- ANALISIS ESTADISTICO EXTENSO --------------------
    # Calcular los valores necesarios a partir de TABLA_VIDA
    fila_edad <- TABLA_VIDA[TABLA_VIDA$age == x, ]
    esperanza_vida <- fila_edad$ESPER
    sd_vida <- fila_edad$SD
    var_10 <- fila_edad$VaR_10
    var_5 <- fila_edad$VaR_5
    var_1 <- fila_edad$VaR_1
    no_risk <- w - x
    t_refer <- c(no_risk, var_1, var_5, var_10, esperanza_vida + sd_vida, esperanza_vida
    Refer <- c("No_risk", "VaR_1", "VaR_5", "VaR_10", "E[]+sd()", "E[]+sd()/2", "E[]")
    t_risk <- seq(w - x, 0, by = -0.25)
    # Inicializar la tabla de resultados
    resultados <- data.frame(
      Referencias = character(),
      T_risk = numeric(),
      T_contr = numeric(),
      r_k = numeric(),
      r_0 = numeric(),
      Prima_riesgo = numeric(),
```

```
      Anualidad = numeric(),
      Mensualidad = numeric(),
      Total_error = numeric(),
      Estimación = character()
    )
    # Inicializar contador de errores consecutivos
    errores_consecutivos <- 0
    # Bucle principal para calcular los resultados
    for (t_risk_actual in t_risk) {
      # Calcular P_T
      P_T <- P(C0, g, t_risk_actual, r_0)
      # Condiciones iniciales para Newton-Raphson
      t_contr_inicial <- t_risk_actual*0.7
      r_k_inicial <- r_0 + 0.03
      # Ejecutar Newton-Raphson
      result <- newtonraphson_rktcontr(
        x = x,
        w = w,
        g = g,
        C0 = C0,
        r_0 = r_0,
        P_T = P_T,
        t_risk = t_risk_actual,
        t_contr_inicial = t_contr_inicial,
        r_k_inicial = r_k_inicial
      )
      # Extraer los resultados
      t_contr <- result$t_contr
      r_k <- result$r_k
      total_error <- result$error
      # Verificar si el error es mayor que 10
      if (total_error > 10) {
        errores_consecutivos <- errores_consecutivos + 1
      } else {
        errores_consecutivos <- 0
      }
      # Detener el bucle si hay más de 3 errores consecutivos, esto sirve para ahorrar CP
      if (errores_consecutivos > 3) {
        cat("El programa ha detectado más de 3 errores consecutivos con Total_Error > 10.
        break
      }
      # Calcular para agregar a la tabla
      prima_riesgo <- r_k - r_0
      anualidad <- P_T
      mensualidad <- calcular_pago_mensual(P_T, r_0)
      # Agregar los resultados a la tabla
      resultados <- rbind(resultados, data.frame(
        Referencias = NA,
        T_risk = round(t_risk_actual, 8),
        T_contr = round(t_contr, 8),
        r_k = r_k,
```

```
          r_0 = round(r_0, 8),
          Prima_riesgo = round(prima_riesgo, 8),
          Anualidad = anualidad,
          Mensualidad = mensualidad,
          Total_error = formatC(total_error, format = "e"),
          Estimación = ifelse(total_error < 10, "Éxito", "Fracaso")
        ))
      }
      #Esto aproxima el valor de los estadísticos de la tabla y los selecciona
      rownames(resultados) <- NULL
      for (i in 1:length(t_refer)) {
        # Encontrar el índice del t_risk más cercano al t_refer actual
        idx <- which.min(abs(resultados$T_risk - t_refer[i]))
        # Asignar la referencia
        resultados$Referencias[idx] <- Refer[i]
      }
      # Mostrar la tabla de resultados
      print(subset(resultados, select = -Referencias))
      generar_plots(resultados)
      generar_plots_rk_menor_0_1(resultados)
    } else if (opcion == 2) {
      cat("\n\nRealizando Análisis simple, este proceso podría demorarse unos segundos...\n
      ------------------------- ANALISIS ESTADISTICO RESUMIDO ------------------
      # Calcular los valores necesarios a partir de TABLA_VIDA
      fila_edad <- TABLA_VIDA[TABLA_VIDA$age == x, ]
      esperanza_vida <- fila_edad$ESPER
      sd_vida <- fila_edad$SD
      var_10 <- fila_edad$VaR_10
      var_5 <- fila_edad$VaR_5
      var_1 <- fila_edad$VaR_1
      no_risk <- w - x
      # Definir t_risk
      t_risk <- c(no_risk, var_1, var_5, var_10, esperanza_vida + sd_vida, esperanza_vida +
      Refer <- c("No_risk", "VaR_1", "VaR_5", "VaR_10", "E[]+sd()", "E[]+sd()/2", "E[]")
      # Inicializar la tabla de resultados
      resultados <- data.frame(
        Referencias = character(),
        T_risk = numeric(),
        T_contr = numeric(),
        r_k = numeric(),
        r_0 = numeric(),
        Prima_riesgo = numeric(),
        Anualidad = numeric(),
        Mensualidad = numeric(),
        Total_error = numeric(),
        Estimación = character()
      )
      # Inicializar contador de errores
      errores_consecutivos <- 0
      # Bucle principal para calcular los resultados
      for (t_risk_actual in t_risk) {
```

```r
        # Calcular P_T
        P_T <- P(C0, g, t_risk_actual, r_0)
        # Condiciones iniciales para Newton-Raphson
        t_contr_inicial <- t_risk_actual * 0.7
        r_k_inicial <- r_0 + 0.03
        # Ejecutar Newton-Raphson
        result <- newtonraphson_rktcontr(
          x = x,
          w = w,
          g = g,
          C0 = C0,
          r_0 = r_0,
          P_T = P_T,
          t_risk = t_risk_actual,
          t_contr_inicial = t_contr_inicial,
          r_k_inicial = r_k_inicial
        )
        # Extraer los resultados, redondeo por presentación
        t_contr <- round(result$t_contr, 8)
        r_k <- round(result$r_k, 8)
        total_error <- round(result$error, 8)
        # Verificar si el error es mayor que 10
        if (total_error > 10) {
          errores_consecutivos <- errores_consecutivos + 1
        } else {
          errores_consecutivos <- 0
        }
        # Detener el bucle si hay más de 3 errores consecutivos, esto sirve para ahorrar CP
        if (errores_consecutivos > 3) {
          cat("El programa ha detectado más de 3 errores consecutivos con Total_Error > 10.
          break
        }
        # Calcular prima de riesgo
        prima_riesgo <- round(r_k - r_0, 8)
        # Calcular anualidad y mensualidad
        anualidad <- P_T
        mensualidad <- calcular_pago_mensual(P_T, r_0)
        # Agregar los resultados a la tabla
        resultados <- rbind(resultados, data.frame(
          Referencias = NA,
          T_risk = round(t_risk_actual, 8),
          T_contr = round(t_contr, 8),
          r_k = r_k,
          r_0 = round(r_0, 8),
          Prima_riesgo = round(prima_riesgo, 8),
          Anualidad = round(anualidad, 8),
          Mensualidad = round(mensualidad, 8),
          Total_error = formatC(total_error, format = "e"),
          Estimación = ifelse(total_error < 10, "Éxito", "Fracaso")
        ))
      }
```

```
      resultados$Referencias <- Refer[1:nrow(resultados)]
      rownames(resultados) <- NULL
      # Mostrar la tabla de resultados
      print(resultados)
      # Graficar los resultados
      generar_plots(resultados)
    } else {
      cat("\nOpción no válida.\n")
    }
    cat("\nPara cambiar de método pulse 1, para volver a la toma de datos o cerrar el progr
    rep2 <- as.numeric(readline())
    if (rep2 == 1) {
      cat("\nReiniciando el programa...\n")
    }
}
  --------------------------------- FIN/REINICIO ----------------------------------
  #Reintroducir datos o cerrar el programa
  cat("Para volver a calcular su hipoteca inversa pulse 1, para cerrar el programa pulse 0"
  repetir <- as.numeric(readline())
  if(repetir == 1){
    cat("\n\n\nReiniciando el programa:\n\n\n")
  }
}
cat("\n\n\nFin del programa. ¡Espero que le haya sido útil!")
```

11. Bibliografía

Referencias

[1] Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E. (2019). *Loss Models: From Data to Decisions* (Wiley Series in Probability and Statistics). Wiley. ISBN: 978-1119523787.

[2] Ayuso, M., Corrales Herrero, H., Guillén, M., Pérez-Martín, A. M., & Rojo, J. L. (2009). *Estadistica actuarial vida.* Universitat de Barcelona. ISBN: 978-8447531301.

[3] Instituto Nacional de Estadística (INE). (Última actualización 2023). Estadísticas de mortalidad.

[4] Instituto Nacional de Estadística (INE). (Última actualización 2023). Índice de Precios de Vivienda.

[5] Instituto Nacional de Estadística (INE). (Última actualización 2023). Índice de Precios de Vivienda.

[6] Ayuso, M., Bravo, J. M., Holzmann, R. (2017). *Addressing longevity heterogeneity in pension scheme design.* Journal of Finance and Economics, 61(1), pp. 1–21. ISSN: 2328-7276.