**Escola Politècnica Superior**
Grau d'Enginyeria Informàtica

**Enunciados de prácticas**

# 1 Métodos implícitos de resolución de EDP's por diferencias finitas

Los esquemas de diferencias finitas para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales están basados en la discretización del dominio, de la función, y de sus derivadas parciales. A continuación proporcionamos las fórmulas que utilizaremos a lo largo de los enunciados.

Consideremos una función $u(x,t)$ definida sobre un dominio $\Omega = [0,L] \times [0,T]$. Construimos la malla equidistribuida

$$\{(x_i, t_j) : 0 \leq i \leq I,\ 0 \leq j \leq J\},$$

donde $x_0 = 0$ y $x_i = ih$ para $i = 1, 2, \ldots, I$, y donde $t_0 = 0$, y $t_j = jk$ para $j = 1, 2, \ldots J$, con $h = L/I$ y $k = T/J$. Además, discretizamos la función sobre la malla según $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$.

Las derivadas parciales de primer y segundo orden se aproximarán por las siguientes expresiones en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} &u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}, \quad u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \\ &u_{tt}(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}, \qquad u_{xx}(x_i.t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Para las derivadas de primer orden presentamos tres aproximaciones diferentes que denominamos avanzadas, atrasadas o centradas.

## 1.1 Ecuación de ondas

Consideremos un hilo de grosos infinitesimal y de longitud $L$, que está fijado por sus dos extremos. Sea $u(x,t)$ la función que define la posición del trozo $x$ del hilo en el instante $t$. La función $u(x,t)$ está definida sobre el dominio $\Omega = [0,L] \times [0,T]$.

Si inicialmente la posición del hilo tenía la forma $f(x)$, entonces la evolución de la posición viene determinada por la ecuación de ondas, las condiciones iniciales, y las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{aligned}$$

Las condiciones $u(0,t) = u(L,t) = 0$ significan que el extremo inicial, $x = 0$, y el extremo final, $x = L$, del hilo, están fijados a lo largo del tiempo.

Discretizando el problema, según

$$u_{tt}(x_i,t_j) = \frac{u_{xx}(x_i,t_{j+1}) + u_{xx}(x_i,t_{j-1})}{2},$$

donde hemos aproximado derivada $u_{xx}(x_i,t_j)$ por la media de la derivada avanzada $u_{xx}(x_i,t_{j+1})$ y atrasada $u_{xx}(x_i,t_{j-1})$, utilizando las expresiones en diferencias finitas (1) y definiendo

$$\alpha = \frac{k}{h},$$

obtenemos que la posición de la cuerda en el instante $t_{j+1}$, esto es

$$\mathbf{u}_{j+1} = (u_{0,j+1}, u_{1,j+1}, \ldots, u_{I,j+1})^T,$$

puede escribirse en función de la posición en el instante $t_j$ y el instante $t_{j-1}$ según:

$$\frac{1+\alpha^2}{2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})-\frac{\alpha^2}{4}(u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1})=u_{i,j}.$$

De donde, partiendo del vector posición en el instante $t_j$, $\mathbf{u}_j$, y resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\alpha^2}{2} & -\frac{\alpha^2}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{4} & \frac{1+\alpha^2}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha^2}{4} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha^2}{4} & \frac{1+\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{I-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{I-1,j} \end{pmatrix}$$

podemos calcular el vector de posición en el instante $t_{j+1}$, $\mathbf{u}_{j+1}$, a partir de la solución $\mathbf{w}$ del SEL anterior y de $\mathbf{u}_{j-1}$ según:

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= u_{I,j+1} = 0, \\ u_{i,j+1} &= w_i - u_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Notemos que para iniciar el proceso, esto es para calcular $\mathbf{u}_1$, necesitamos $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_{-1}$. El valor de $\mathbf{u}_{-1}$ lo obtenemos a partir de la condición inicial $u_t(x,0) = g(x)$ y de su discretización (1), de forma que $u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg(x_i)$. Aplicando (2) para $j = 0$ tenemos que $\mathbf{u}_{-1}$ se puede calcular según

$$\begin{aligned} u_{0,-1} &= u_{I,-1} = 0, \\ u_{i,-1} &= \tfrac{1}{2}w_i - g(x_i)k, \quad i = 1, 2, \dots, I-1. \end{aligned}$$

## Problemas.

Dadas las dimensiones $L$ y $T$ del dominio $\Omega$, los valores de las discretizaciones $I$ y $J$, y las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$, calcular la evolución de la posición de la cuerda en el dominio $\Omega$. La memoria que presentéis con estos calculos consistirá en:

a) Una portada con un título y el nombre de los integrantes del grupo.

b) Una introducción a los contenidos del trabajo.

c) Una sección describiendo el problema matemático y en la que se desarrollan los procesos matemáticos implicados.

d) Una sección con los resultados numéricos obtenidos. Estos resultados serán:

   d1) El conjunto de vectores $M = \{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^{J}$.

   d2) Una matriz $U$ con $I+1$ columnas, y cuyas filas son los vectores $\mathbf{u}_j$.

   d3) Dibujar la matriz $U$.

**Atención:** La resolución de los sistemas de ecuaciones implicados debe hacerse mediante la **factorización LU con pivotaje maximal** de la matriz involucrada.

1-1) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 15, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = \sin(x\pi), \quad g(x) = 1$$

.

1-2) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 15, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = \left|\frac{1}{2} - x\right| - \frac{1}{2}, \quad g(x) = x$$

.

1-3) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 2, T = 10, I = 25, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = \sin(x\pi), \quad g(x) = 1$$

.

1-4) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 15, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1), \quad g(x) = 1$$

.

1-5) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 15, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1), \quad g(x) = x$$

.

1-6) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 2, T = 10, I = 25, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1)(x-2), \quad g(x) = 1$$

.

1-7) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 30, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1/3, \\ -x + 1/2, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ x - 1, & x > 2/3. \end{cases}, \quad g(x) = x$$

.

1-8) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 3, T = 10, I = 50, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3), \quad g(x) = x$$

.

1-9) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1/2)(x-1), \quad g(x) = x^2$$

.

1-10) Calculad la evolución de la posición de la cuerda para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$ y las condiciones iniciales

$$f(x) = x(x-1/3)(x-2/3)(x-1), \quad g(x) = x^2$$

.

## 1.2 Ecuación del calor

Consideremos una barra de grosos infinitesimal y de longitud $L$, fijada por sus extremos a dos fuentes de calor. Sea $u(x,t)$ la función definida sobre el dominio $\Omega = [0,L] \times [0,T]$ que define la distribución de temperatura de lo largo de la barrar en el instante $t$. Si la distribución inicial de la temperatura es $f(x)$ y las fuentes de calor de los extremos tienen una distribución de temperatura $l(t)$ y $r(t)$ a la izquierda y derecha, respectivamente, entonces la evolución de la temperatura en la barra viene determinada por la ecuación de calor y las condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \\ &u(x,0) = f(x), \\ &u(0,t) = l(t), \\ &u(L,t) = r(t). \end{aligned}$$

### 1.2.1 Esquema implícito

Discretizando el dominio del problema, las derivadas de la función $u(t,x)$ según (1), donde para $u_t$ utilizamos la diferencia atrasada, y definiendo

$$\alpha = \frac{k}{h^2},$$

obtenemos que la distribución de temperatura en la barra en el instante $t_{j+1}$, esto es $\mathbf{u}_{j+1} = (u_{0,j+1}, u_{1,j+1}, \ldots, u_{I,j+1})^T$, puede escribirse en función de la temperatura en el instante $t_j$ según:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \alpha(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}).$$

De donde, partiendo del vector $\mathbf{u}_j$ y resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \ldots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_{I-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j} + \alpha l(t_{j+1}) \\ \vdots \\ u_{i,j} \\ \vdots \\ u_{I-1,j} + \alpha r(t_{j+1}) \end{pmatrix}$$

podemos calcular el vector $\mathbf{u}_{j+1}$ según

$$u_{i,j+1} = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I-1,$$

y las condiciones de frontera $u_{0,j+1} = l(t_{j+1})$ y $u_{I,j+1} = r(t_{j+1})$.

# Problemas.

Dadas las dimensiones $L$ y $T$ del dominio $\Omega$, los valores de las discretizaciones $I$ y $J$, y las condiciones iniciales $f(x)$ y de frontera $l(x), r(x)$, calcular la evolución de la temperatura a lo largo de la barra, en el dominio $\Omega$. La memoria que presentéis con estos calculos consistirá en:

a) Una portada con un título y el nombre de los integrantes del grupo.

b) Una introducción a los contenidos del trabajo.

c) Una sección describiendo el problema matemático y en la que se desarrollan los procesos matemáticos implicados.

d) Una sección con los resultados numéricos obtenidos. Estos resultados serán:

  d1) El conjunto de vectores $M = \{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^J$.

  d2) Una matriz $U$ con $I+1$ columnas, y cuyas filas son los vectores $\mathbf{u}_j$.

d3) Dibujar la matriz $U$.

**Atención:** La resolución de los sistemas de ecuaciones implicados debe hacerse mediante la **factorización LU con pivotaje maximal** de la matriz involucrada.

1-11) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x(x-1), \quad l(t) = t, \quad r(t) = t$$

.

1-12) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 0, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-13) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 0, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = -\frac{2}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-14) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x(x-1), \quad l(t) = t, \quad r(t) = -t$$

.

1-15) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 3, \quad l(t) = 3 + \frac{2}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = 3 + \frac{2}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-16) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = |1/2 - x| - 1/2, \quad l(t) = t, \quad r(t) = t$$

.

1-17) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = |1/2 - x| - 1/2, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-18) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x - 1, \quad l(t) = 1, \quad r(t) = 0$$

.

1-19) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = (x - 1/2)^2, \quad l(t) = 1/4, \quad r(t) = 1/4$$

.

1-20) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1/3, \\ 3x & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 1 & x \ge 2/3. \end{cases}, \quad l(t) = t, \quad r(t) = 1 - t$$

.

### 1.2.2 Esquema de Crank-Nicholson

Discretizando el problema utilizando la media de las diferencias centrales

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + u_{xx}(x_i, t_j)}{2}$$

introducidas en (1), y definiendo

$$\alpha = \frac{k}{h^2},$$

obtenemos que la distribución de temperatura en la barra en el instante $t_{j+1}$, esto es $\mathbf{u}_{j+1} = (u_{0,j+1}, u_{1,j+1}, \ldots, u_{I,j+1})^T$, puede escribirse en función de la temperatura en el $t_j$ según:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \alpha \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2}.$$

Que puede reescribirse como

$$(1 + \alpha)(u_{i,j+1} + u_{i,j}) - \frac{\alpha}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) = 2u_{i,j}.$$

De donde, partiendo del vector $\mathbf{u}_j$ y resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_{I-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{1,j} + \alpha\frac{l(t_{j+1})+l(t_j)}{2} \\ \vdots \\ 2u_{i,j} \\ \vdots \\ 2u_{I-1,j} + \alpha\frac{r(t_{j+1})+r(t_j)}{2} \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$u_{i,j+1} = w_i - u_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, I - 1,$$

y de las condiciones de frontera obtenemos

$$u_{0,j+1} = l(t_{j+1}), \quad u_{I,j+1} = r(t_{j+1}).$$

## Problemas.

Dadas las dimensiones $L$ y $T$ del dominio $\Omega$, los valores de las discretizaciones $I$ y $J$, y las condiciones iniciales $f(x)$ y de frontera $l(x), r(x)$, calcular la evolución de la temperatura a lo largo de la barra, en el dominio $\Omega$. La memoria que presentéis con estos calculos consistirá en:

a) Una portada con un título y el nombre de los integrantes del grupo.

b) Una introducción a los contenidos del trabajo.

c) Una sección describiendo el problema matemático y en la que se desarrollan los procesos matemáticos implicados.

d) Una sección con los resultados numéricos obtenidos. Estos resultados serán:

d1) El conjunto de vectores $M = \{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^{J}$.

d2) Una matriz $U$ con $I+1$ columnas, y cuyas filas son los vectores $\mathbf{u}_j$.

d3) Dibujar la matriz $U$.

**Atención:** La resolución de los sistemas de ecuaciones implicados debe hacerse mediante la **factorización LU con pivotaje maximal** de la matriz involucrada.

1-21) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x(x-1), \quad l(t) = t, \quad r(t) = t$$

.

1-22) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 0, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-23) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 0, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = -\frac{2}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-24) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x(x-1), \quad l(t) = t, \quad r(t) = -t$$

.

1-25) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = 3, \quad l(t) = 3 + \frac{2}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = 3 + \frac{2}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-26) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = |1/2 - x| - 1/2, \quad l(t) = t, \quad r(t) = t$$

.

1-27) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = |1/2 - x| - 1/2, \quad l(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t), \quad r(t) = \frac{6}{\pi}\arctan(10t)$$

.

1-28) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = x - 1, \quad l(t) = 1, \quad r(t) = 0$$

.

1-29) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = (x - 1/2)^2, \quad l(t) = 1/4, \quad r(t) = 1/4$$

.

1-30) Calculad la evolución de la temperatura de la barra para los valores $L = 1, T = 10, I = 25, J = 50$, las condiciones iniciales y de frontera

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1/3, \\ 3x & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 1 & x \geq 2/3. \end{cases}, \quad l(t) = t, \quad r(t) = 1 - t$$

.

# 2 Ceros de funciones no lineales: Método Newton

Uno de los problemas más comunes en las aplicaciones consiste en calcular los valores donde una función se anula. En otras palabras, dada una función $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, el problema consiste en calcular un valor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de forma que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Para resolver este problema se utiliza habitualmente el método de Newton basado en aproximar la función por su polinomio de Taylor de orden 1, y por tanto, aproximar el cero de la función por el cero del polinomio. Bajo condiciones favorables, este proceso puede converger a la solución real del problema. El proceso se interrumpe cuando se alcanza la precisión deseada $\varepsilon$ o el número de pasos es excesivo $NMAX$.

El método de Newton se estructura de la siguiente forma:

(1) Calcular la matriz jacobiana del sistema:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

La expresión

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

representa la derivada parcial de la componente $f_i$ de función $\mathbf{f}$ respecto de la coordenada $x_j$ y evaluada en el valor $\mathbf{x}$. Para calcular la parcial de $f_i$ respecto de la coordenada $x_j$ se deriva la expresión de $f_i$ respecto de $x_j$, dejando como constantes el resto de las coordenadas que aparezcan en la expresión de $f_i$.

Por ejemplo, si $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1^2+2x_1x_2, x_1-3x_2)$, entonces la componente $f_1(x_1, x_2) = x_1^2+2x_1x_2$ y la componente $f_2(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= 2x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= 1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= -3. \end{aligned}$$

(2) Partiendo de una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, se construye la sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k\geq 1}$ mediante la siguiente fórmula recurrente

$$\left.\begin{array}{lrcl} (i) & D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} & = & -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \\ (ii) & \mathbf{x}^{(k+1)} & = & \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}, \end{array}\right\} k = 1, 2, \ldots$$

hasta que $\|\mathbf{d}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$ y $k \leq NMAX$. En ese caso el número de pasos necesarios para resolver el problema es $N = k$, y la solución buscada es $\mathbf{x}^{(N)}$.

Si $k > NMAX$ se supone que NO hemos alcanzado la solución y debemos abandonar el proceso con un mensaje de error de "número de pasos máximmo excedido".

Notad que para calcular el valor de $\mathbf{x}^{(k+1)}$ a partir de $\mathbf{x}^{(k)}$ teneis que calcular antes el vector $\mathbf{d}^{(k)}$ resolviendo el sistema de ecuaciones lineales planteado en (i).

(3) Proporcionad el vector $\mathbf{x}^{(N)}$ como solución del problema original

**Problemas** Dada la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, y fijados los valores de $NMAX = 25$ y $\varepsilon = 1e-4$, calculad los ceros de $\mathbf{f}$ que están próximos a los valores $\mathbf{x}_0$ que se proporcionan. La memoria que presentéis con los calculos consistirá en:

a) Una portada con un título y el nombre de los integrantes del grupo.

b) Una introducción a los contenidos del trabajo.

c) Una sección describiendo el problema matemático y en la que se desarrollan los procesos matemáticos implicados.

d) Una sección con los resultados numéricos obtenidos. Estos resultados serán:

   d1) La solución $\mathbf{x}^{(N)}$ obtenida, junto con el número de pasos $N$ necesarios para obtenerla.

   d2) Dibujad las dos primeras coordenadas de los puntos intermedios necesarios para obtener la solución $\{(\mathbf{x}_1^{(k)}, \mathbf{x}_2^{(k)})\}_{k=0}^N$. De esta forma vemos cómo converge el método de Newton.

   d3) Repetir el cálculo del apartado (d1) considerando los valores $\varepsilon = 1e-6$ y $\varepsilon = 1e-8$, en caso que el programa haya excedido el número de pasos máximo, reintentar aumentando $NMAX$ hasta un máximo de 50. Si el mensaje persiste dar por concluido el problema y reflejar este hecho en la memoria.

**Atención:** La resolución de los sistemas de ecuaciones implicados debe hacerse mediante la **factorización LU con pivotaje maximal** de la matriz jacobiana.

2-1) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 \\ x_2^2 - x_4 - x_5 - 1 \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 \\ x_1 - x_2 + x_5 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 1 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, -0.6, 0, 0, -0.7)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 0.1, -0.5, -0.5, -0.3)$.

2-2) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_5 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_4 - x_5 - 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (0.4, 1, 0.5, 0.6, -0.4)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.7, -1, -0.3, -0.2, 0.6)$.

2-3) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_5 + x_6 \\ 2x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 - 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_4 - x_5^2 - 1 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 - x_6 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.5, -0.8, -0.3, -0.3, 0.5, -0.1)$ y
$\mathbf{x}^{(0)} = (0.3, -0.6, -0.8, -0.7, -0.4, 0.8)$.

2-4) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 4x_3^2 + x_5^2 - x_6^2 - 1 \\ -3x_2 + 4x_3 - x_5 + x_6 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_4 - x_5^2 + x_6 - 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 \\ -x_1 - x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 - x_6 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (0.8, -0.6, -0.3, -0.4, 1, 0.4)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (-3, 3, 2, 2, -3, -2)$.

2-5) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_5 + x_6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1^2 - 4x_3^2 + x_5^2 - x_6^2 - 1 \\ x_1 + x_2^2 - x_4 - x_5 + x_6^2 - 1 \\ x_1 + x_3^2 - 3x_4 - x_6 - 1 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (-16, -2, -8, 12, -2, 5)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (-10, 2, -4, 4, -0.7, -3)$.

2-6) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 - 3x_4 - x_6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_5 + x_6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 \\ x_1 + x_2^2 - x_3^2 + x_5 + x_6 - 1 \\ x_1^2 - 4x_3^2 + x_5^2 - x_6^2 - 1 \\ x_1 + x_2^2 - x_4 - x_5 + x_6^2 - 1 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (-2, 1, 1, -1, 1, 1)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 2, -0.7, -0.4, 1, -0.8)$.

2-7) Calculad los ceros de la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 \\ x_1 + x_2^2 - x_3^2 + x_5 + x_6 - 1 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 - x_6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_5 + x_6 \\ x_1^2 - 4x_3^2 + x_5^2 - x_6^2 - 1 \\ x_1 + x_2^2 - x_4 - x_5 + x_6^2 - 1 \end{pmatrix}$$

cercanos a los valores $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0.4, -0.3, 0.4, 0, -0.2)$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0.3, -0.2, 0, 2)$.

# 3 Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son una herramienta matemática que sirve para modelar diferentes situaciones que aparecen en diferentes contextos como en biología, química, ingeniería, física, los negocios y otros campos. Dicho modelo describe un experimento o medición que se realiza varias veces de la misma forma, donde el resultado de cada ensayo del experimento es una de varias posibilidades y viene representado por un número finito $k$ de estados distribuidos según los valores $x_1, \ldots, x_k$. El estado al que el proceso se mueve en el siguiente paso de tiempo y la probabilidad de hacerlo dependen solamente del estado presente. Estas probabilidades se conocen como probabilidades de transición y se supone que son constantes, es decir, la probabilidad de moverse del estado $j$ al estado $i$ es una probabilidad constante $t_{i,j}$.

Para describir el modelo mencionado anteriormente, denotaremos por $\mathbf{x}^n = (x_1^n, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^k$ al **vector de estado** en el paso $n$, donde el valor $x_i^n$ indica la distribución de cada estado $i$ en el paso $n$, y por $T$ a la **matriz de transición** dada por:

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,k} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{k,1} & t_{k,2} & \cdots & t_{k,k} \end{pmatrix},$$

que verifica que $0 \leq t_{i,j} \leq 1$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, y que $\sum_{i=1}^k t_{i,j} = 1$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Con estos elementos, el proceso de Markov viene determinado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}^n = T\mathbf{x}^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Partiendo de un estado inicial $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$, y teniendo en cuenta la ecuación anterior, se tiene que $\mathbf{x}^1 = T\mathbf{x}^0$; $\mathbf{2}^n = T\mathbf{x}^1 = T(T\mathbf{x}^0) = T^2\mathbf{x}^0$; $\mathbf{x}^3 = T\mathbf{x}^2 = T(T^2\mathbf{x}^0) = T^3\mathbf{x}^0$. De forma recursiva llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}^n = T^n\mathbf{x}^0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

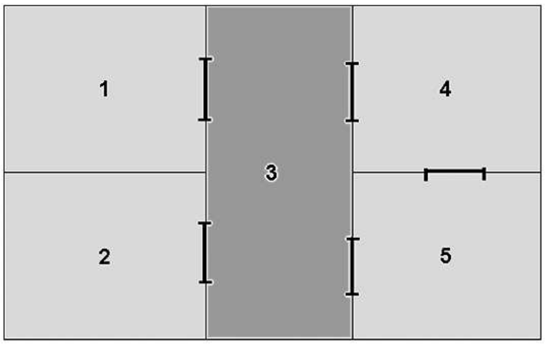


Figure 1: Movimiento

## 3.1 Movimiento posicional

Para estudiar el movimiento entre 5 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos figura 1 que representa las 5 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas marcadas en el dibujo con trazo grueso.

Se estudia la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Para ello supondremos lo siguiente como resultado de estudios que se han realizado:

- Si en una etapa, el individuo está en los compartimentos 1, 2, 4 o 5, al pasar a la siguiente etapa, el individuo tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o puede cambiar misma zona, con la misma probabilidad.
- Si en una etapa el individuo está en la zona 3, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la zona 3.

Bajo estas hipótesis, y atendiendo a la figura 1, se tiene la siguiente matriz de transición:

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si un individuo está en el compartimento 1, al pasar a la siguiente etapa puede permanecer en el compartimento 1 o pasar al compartimento 3, con la misma probabilidad. Por tanto, $t_{2,1} = t_{4,1} = t_{5,1} = 0$, $t_{1,1} = 1/2$ y $t_{3,1} = 1/2$. Dado que las características del compartimento 2 son idénticas a las del compartimento 1, tenemos que $t_{1,2} = t_{4,2} = t_{5,2} = 0$, $t_{2,2} = 1/2$ y $t_{3,2} = 1/2$ En cambio, si un individuo está en el compartimento 3, al pasar a la siguiente etapa puede quedarse, con probabilidad de 1/3, o cambiar de zona, con probabilidad 2/3. Además, si el individuo cambia de zona, la probabilidad de cambiar a cualquiera de las otras zonas es de 1/4. Por tanto, $t_{1,3} = t_{2,3} = t_{4,3} = t_{5,3} = 2/3 \cdot 1/4 = 1/6$ (ya que son sucesos independientes) y $t_{3,3} = 1/3$. Finalmente, si un individuo está en el compartimento 4, al pasar al siguiente paso, puede permanecer en el compartimento 4 (con probabilidad 1/2/) o cambiar (con probabilidad 1/2/) al compartimento 3 o al 5, con la misma probabilidad. Por tanto, $t_{1,4} = t_{2,4} = 0$, $t_{4,4} = 1/2$ y $t_{3,4} = t_{5,4} = 1/2 \cdot 1/2$. Análogamente, se deduce que $t_{1,5} = t_{2,5} = 0$, $t_{5,5} = 1/2$ y $t_{3,5} = t_{4,5} = 1/4$.

Tras realizar el análisis anterior y establecer el modelo matricial correspondiente, se puede responder a las siguientes cuestiones:

1. Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 4 y otro en la zona 5. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 1?

2. Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 3 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 4. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

3. En los supuestos de la cuestión 1, ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

4. En los supuestos de la cuestión 2, calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

**Resolución:**

1. Dadas las hipótesis, tenemos dos vectores iniciales $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 1, 0)^T$ y $\mathbf{y}^0 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$.

   Para conocer la probabilidad de estar en cada una de las celdas después de 10 etapas tendríamos que resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

   $$\mathbf{x}^{10} = T^{10}\mathbf{x}^0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y}^{10} = T^{10}\mathbf{y}^0.$$

   Para resolver las anteriores ecuaciones matriciales mediante la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, procederíamos de la siguiente manera:

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathbf{x}^n = T\mathbf{x}^{n-1}$. En el caso de que la matriz $T$ sea invertible, entonces $T^{-1}\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0$. Por tanto, $\mathbf{x}^1$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales que tiene por matriz de coeficiente $T^{-1}$ (la matriz inversa de $T$) y por vector de términos independientes $\mathbf{x}^0$. Es decir, $\mathbf{x}^1$ es solución del sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = T^{-1}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{x}^0$. Por tanto, para todo $n \in \{1, \ldots, 10\}$, calculamos $\mathbf{x}^n$ resolviendo el sistema que tiene por matriz de coeficientes $T^{-1}$ y por vector de términos independientes $\mathbf{x}^{n-1}$.

   Con el algoritmo de factorización LU con pivotaje, calculamos la inversa de $T$ que resulta:

   $$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 9 & 9 & -9 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Finalmente, resolvemos para cada $i \in \{1, \ldots, 10\}$, los sistemas de ecuaciones lineales en los cuales, la matriz de coeficientes es $T^{-1}$ y los vectores de términos son independientes los vectores $\mathbf{x}^{i-1}$. Para ello podemos volver a utilizar el algoritmo de factorización LU con pivotaje. Con lo cual obtenemos como solución el vector $\mathbf{x}^{10} = (0.10895, 0.10895, 0.33142, 0.22534, 0.22533)^T$.

   La interpretación del resultado obtenido sería la siguiente: Para un individuo que está en la zona 4, después de 10 etapas, la probabilidad de que esté en la zona 1 es de 0.10895, en la zona 2 es de 0.10895, en la zona 3 es de 0.33142, en la zona 4 es de 0.22534 y ne la zona 5 es de 0.22533.

   Procediendo de manera análoga, para $\mathbf{y}^0 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$, obtenemos como resultado $\mathbf{y}^{10} = (0.10895, 0.10895, 0.33142, 0.22533, 0.22534)$.

   Dado que los movimientos de cada individuo (el que empieza en la zona 4 y el que empieza en la zona 5) son independientes de los movimientos del otro individuo, los sucesos son independientes. Por tanto, la probabilidad de que coincidan en la zona 1, después de 10 etapas es de $x_1^{10} \cdot y_1^{10} = 0.10895 \cdot 0.10895 = 0.011870$.

2. Si inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 3 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas, entonces el vector inicial sería $\mathbf{z}^0 = (1/6, 1/6, 1/3, 1/6, 1/6)^T$. Al igual que en el apartado anterior, el vector inicial para el individuo que está en la zona 4 es $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 1, 0)^T$.

   Procediendo como en el apartado anterior, obtendríamos el vector

$$\mathbf{z}^{10} = (0.11168, 0.11168, 0.33384, 0.22140, 0.22140).$$

   El vector $\mathbf{x}^{10}$ ya ha sido calculado en el apartado anterior.

   Por tanto, la probabilidad de que coincidan en la zona 1, después de 10 etapas es de $\mathbf{z}_1^{10} \cdot x_1^{10} = 0.11168 \cdot 0.10895 = 0.012168$.

3. Para responder a este apartado, tenemos que encontrar el mayor de los valores entre $x_1^{10} \cdot y_1^{10} = 0.011870$, $x_2^{10} \cdot y_2^{10} = 0.011871$, $x_3^{10} \cdot y_3^{10} = 0.109841$, $x_4^{10} \cdot y_4^{10} = 0.050776$ y $x_5^{10} \cdot y_5^{10} = 0.050776$. Por tanto, la zona más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas es la zona 3.

4. Las probabilidades vendrían dadas por: $x_1^{10} \cdot z_1^{10} = 0.012168$, $x_2^{10} \cdot z_2^{10} = 0.012168$, $x_3^{10} \cdot z_3^{10} = 0.110642$, $x_4^{10} \cdot z_4^{10} = 0.049889$ y $x_5^{10} \cdot z_5^{10} = 0.049888$.

   Por tanto, la probabilidad de que ambos individuos coincidan en la zona 1 es de 0.012168, en la zona 2 es de 0.012168, en la zona 3 es de 0.110642, en la zona 4 es de 0.049889 y en la zona 5 es de 0.049888.

**Atención:** La resolución de los sistemas de ecuaciones implicados debe hacerse mediante la **factorización LU con pivotaje maximal** de la matriz involucrada.

## Problemas.

3-1) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 2 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

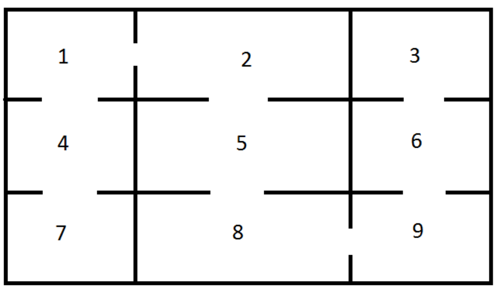


Figure 2: Movimiento 1

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 7 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 9. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-2) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 3 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

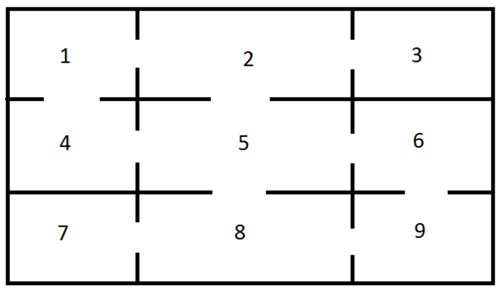


Figure 3: Movimiento 2

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 2 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 7? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-3) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 4 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

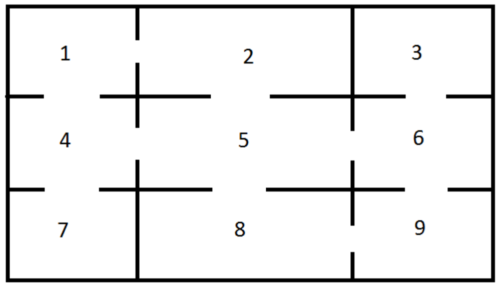


Figure 4: Movimiento 3

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 7 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 9. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-4) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 5 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 1 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 2? ¿ Y en la zona 5?

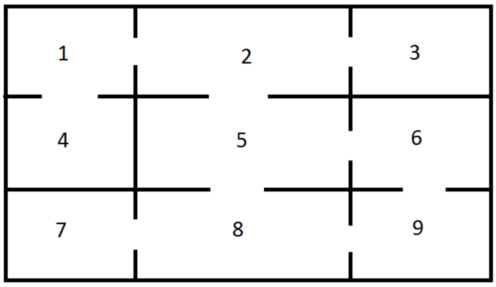


Figure 5: Movimiento 4

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-5) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 6 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

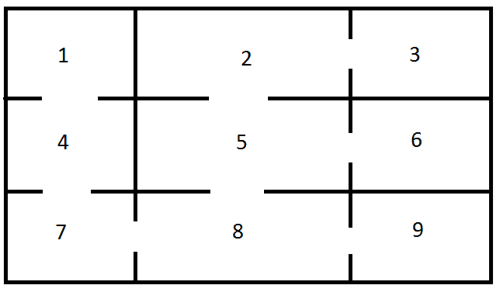


Figure 6: Movimiento 5

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 2 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 2? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-6) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 7 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

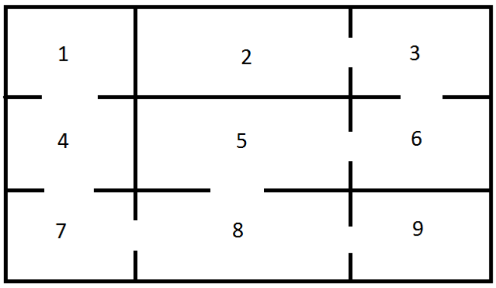


Figure 7: Movimiento 6

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el doble de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 1 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 2. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 7?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-7) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 8 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

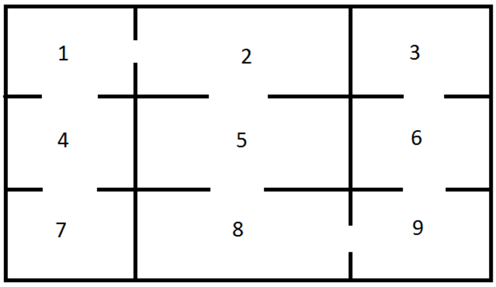


Figure 8: Movimiento 1

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 2 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 7? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-8) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 9 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 7 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

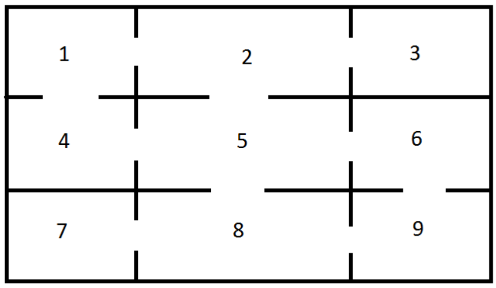


Figure 9: Movimiento 2

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 9. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-9) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 10 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

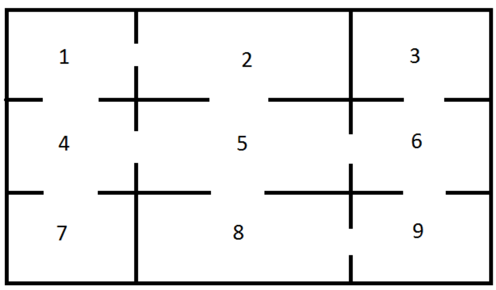


Figure 10: Movimiento 3

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 7 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 9. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-10) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 11 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

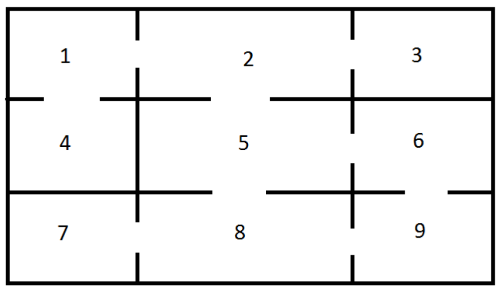


Figure 11: Movimiento 4

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 1 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 2? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-11) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 12 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

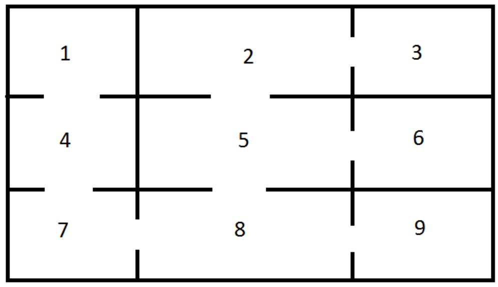


Figure 12: Movimiento 5

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 2 y otro en la zona 8. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 2? ¿ Y en la zona 5?

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 1?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.

3-12) Para estudiar el movimiento entre 9 zonas de una ciudad cubiertas cada una de ellas por una antena de telefonía móvil, utilizamos la figura 13 que representa las 9 zonas y las posibilidades de movimiento mediante unas puertas.

Se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas en este sistema de zonas. Como resultado de dicho estudio supondremos lo siguiente:

Si en una etapa el individuo está en una zona, en la siguiente etapa tiene la posibilidad de permanecer en la misma zona o cambiar de zona, pero la probabilidad de cambiar de zona (a cualquier otra) es el triple de la probabilidad de permanecer en la misma zona.

(a) Supongamos que, inicialmente, hay un individuo en la zona 1 y otro en la zona 3. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, los dos individuos coincidan en la zona 8? ¿ Y en la zona 5?

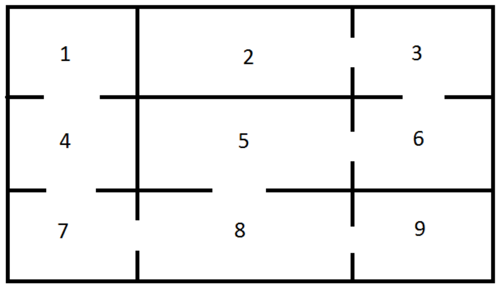


Figure 13: Movimiento 6

(b) Supongamos que, inicialmente, un individuo puede estar en cualquier zona, aunque la probabilidad de que esté en la zona 5 es el doble de la de estar en cualquiera de las otras zonas; mientras que, inicialmente, otro individuo está en la zona 2. ¿ Cuál es la probabilidad de que, en 10 etapas, ambos individuos coincidan en la zona 7?

(c) En los supuestos de la cuestión (a), ¿ en qué zona será más probable que coincidan ambos individuos al cabo de 10 etapas?

(d) En los supuestos de la cuestión (b), calculad las probabilidades de que coincidan ambos individuos, para cada una de las zonas, al cabo de 10 etapas.