Курс лекцій
Диференціальні рівняння
Ст. гр. ІПЗ-21
Ст. викладач Ковальчук Ірина Ігорівна

$\boxed{\text{Ф.Р.Н.Р.}}$ Диференціальні рівняння (Диференціальні)

$\boxed{\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_2}{dx_2}=\frac{dy_3}{dx_3}=\frac{dy_n}{dx_n}}$ $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_2}{dx_2}=\frac{dy_3}{dx_3}=\frac{dy_n}{dx_n}$

1) Змінні можуть бути розділені — $\frac{y}{x}$

2) Змінні можуть бути розділені (з приведенням) — $F(x,y,C_1)=0$

3) Однорідні рівняння — $\boxed{F(x,y,C_1)=0}$ $\boxed{y=\frac{y}{x}}$

4) Лінійні рівняння — $\boxed{F(x,y,C_1)=C_2}$ Лінійні рівняння

5) Сірий рівняння — n-порядку

6) Інші рівняння — $F(x,y,C_1,C_2)=C_3$

Кожне n-го рівняння — Співвідношення між змінними.

1) Змінні можуть бути розділені.

$\begin{cases}\dot{y}_1=f_1(x)\\ \dot{y}_2=f_2(x)\\ \dots\\ \dot{y}_n=f_n(x)\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=\frac{f_1}{1}\\ \frac{dy_2}{dx}=\frac{f_2}{1}\\ \dots\\ \frac{dy_n}{dx}=\frac{f_n}{1}\end{cases}$ $\frac{dy_1}{dx}=\frac{f_1}{1}$ $\forall i=\overline{1,n}$, тобто

$\frac{dy_1}{dx}=\frac{f_1}{1}$ — рівняння з розділ. змінними

$\frac{dy_2}{dx}=\frac{f_2}{1}$ — рівняння з розділ. змінними

$\dots$

$\frac{dy_n}{dx}=\frac{f_n}{1}$ — рівняння з розділ. змінними

$\boxed{\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}=\dots=\frac{dy_n}{dx}}$

$\frac{dy_i}{dx}=\frac{f_i}{1}$ $\forall i=\overline{1,n}$, тобто

$y_i\in X\setminus\{x_0\}$: f_i — x_0 — x_0 — x_0

$x_0=X_0(t)$ — $x_0=X_0(x_0(t))=X_0(x_0)$

$x_0(t)$

$\frac{dy_i}{dx}=\frac{f_i}{1}$ $\frac{dy_i}{dx}=\frac{f_i(x)}{1}=f_i(x)$

$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x)$

$y_i\in X\setminus\{x_0\}$: f_1 — x_0 — x_0 — x_0

$x_0=X_0(t)$ — $x_0=X_0(x_0(t))=X_0(x_0)$

$x_0(t)$

2) Лінійно залежні бувають як комплексні

$\dot{x}=f(x,y)$

$\begin{cases}\dot{y}_1=f_1(x,y)\\ \dot{y}_2=f_2(x,y)\\ \dots\\ \dot{y}_n=f_n(x,y)\end{cases}$ $\begin{cases}dy_1=f_1(x,y)\\ dy_2=f_2(x,y)\\ \dots\\ dy_n=f_n(x,y)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=dx\\ \frac{dy_2}{dx}=dx\\ \dots\\ \frac{dy_n}{dx}=dx\end{cases}$

$\boxed{\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}=\dots=\frac{dy_n}{dx}}$

Лінійні рівн. 1-го:

2) Функція (лінійна) зробити, якщо можна лінійні комбінації

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{C_1}{C_2}$ $\frac{y_1}{y_2}=\frac{\alpha x+\beta}{\theta x+\delta}$ $\frac{\alpha x+\beta}{\theta x+\delta}=\frac{a(\alpha x)}{b(\theta x)}=\frac{a}{b}$

C_1 — α

C_2 — θ

$\boxed{\frac{y_1}{y_2}=\frac{\alpha x+\beta}{\theta x+\delta}=\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\theta}}$

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_1}{y_2}$ $\frac{\alpha x+\beta}{\theta x+\delta}=\frac{\alpha x}{\theta x}=\frac{\alpha}{\theta}$

$\frac{\alpha x}{\theta x}=\frac{\alpha}{\theta}$

$\forall x: x=\frac{\beta}{\delta}$

$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_2}{dx_2}$: $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_2}{dx_2}$

$x_1(x)\cdot y_1(x_1)\cdot x_2(x)\cdot y_2(x_2)$ $x_1(x)\cdot y_1(x_1)\cdot x_2(x)\cdot y_2(x_2)$

$x_1(x)\cdot y_1(x_1)\dots$ $x_1(x)\cdot y_1(x_1)\cdot x_2(x)\cdot y_2(x_2)$

$\boxed{\text{ПЛ}}$

$\frac{dy_1}{0}=1$ $\Big|\cdot 0$ $\frac{dy_1}{dx}=1$

$dy_1=0$

$\boxed{y_1=C}$

Лінійні рівняння

2.1) Якщо лінійний порядок

$\dot{x}=f(x)$ — $y=f$

$\dot{x}=f(x)$

$\dot{y}=x\cdot y(x)$

$\int\frac{dy}{dx}f(x)\,dx$ $y=2\int\frac{dy}{dx}$

$\dot{x}=f(x)$ $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=2\int\frac{f(x)}{y(x)}\,dx+C_1$

$\dot{y}=f(x)$

2.2) Якщо лінійний порядок

$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)\\ \dot{y}=f(x,y)\end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}y=f\\ \dot{y}=f\end{cases}$

$\dot{y}=f(x,y)$ $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=2\int\frac{f(x,y)}{y(x)}\,dx+C_1$

$\dot{y}=f(x,y)$

$\boxed{y(x)=C_1}$ — загальний інт.

2.3) Якщо лінійний порядок

$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y,z)\\ \dot{y}=f(x,y,z)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}y=f\\ \dot{y}=f\end{cases}$

$\dot{y}=f(x,y,z)$ $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=2\int\frac{f(x,y,z)}{y(x)}\,dx+C_1$

$\boxed{F(x,y,\dot{x},\dot{y},t)=0}$

Приклад 1

$\begin{cases}\dot{x}+x=0\\ t\dot{x}^2=\dot{y}\end{cases}$ $\Big|\cdot t$ — лінійні

$\boxed{\text{Підстановка Лагранжа}}$

$(xt)'=0$ $\boxed{\sqrt{xt}=C_1}$ — перший інтеграл

$\boxed{x=\frac{C_1}{t}}$ $x(t)$

$t\cdot\frac{C_1^2}{t^2}+\dot{y}=0$ $\Big|\cdot t$

$t\cdot\frac{C_1^2}{t^2}+\dot{y}=0$

$(ty)'+2\frac{C_1^2}{t}=0$

$\boxed{(ty)'=-2\frac{C_1^2}{t}}$ $\int dt$

$\boxed{ty=-2C_1^2\ln t+C_2}$ ЗЛ інтеграл, другий інтеграл

$x=\frac{C_1}{t}$ $y=\frac{C_1^2}{t}$

$\boxed{\begin{cases}y=-2C_1^2\ln t+C_2\\ x=\frac{C_1}{t}\end{cases}}$ ЗЛ інтеграл

$\begin{cases}t+x=C_1\\ t\dot{y}+y=C_2\end{cases}$ — общ. формула

$\begin{cases}t+x=C_1\\ t\dot{y}+C_2=\frac{C_1}{t}\end{cases}$ — общ. формула

Приклад 2.

$\begin{cases}t\dot{x}=\frac{x^2}{y}\\ t\dot{y}=\frac{y}{x-y}\end{cases}$ $\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{ty}$ $\frac{dy}{dt}=\frac{y}{x-y}$

Лінійні рівняння — рівняння

$\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{x^2}{y}$ $\frac{dx}{dy}$

$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$

$\boxed{y=Cx}$ $\boxed{\frac{x}{y}=C}$ — лінійні інт., лінійні інт.

$F(x,y,C)=0$

$y'\cdot C_1x$

$t\cdot(y)'=\frac{x}{t-C_1x}$ $\Big|\cdot\frac{t-C_1x}{x}$ $\int dt$

$t\cdot\frac{x}{t-C_1x}$ $\Big|\cdot\frac{t-C_1x}{x}$ $\int dt$

$\int\frac{t-C_1x}{x}\,dx=\int\frac{dt}{t}$

$\ln x-C_1x=\ln t+C_2$

$x\cdot e^{-C_1x}=t\cdot\tilde{C}_2$

$\boxed{\frac{x}{t}e^{-C_1x}=\tilde{C}_2}$ ЗЛ інтеграл, другий інтеграл

$\begin{cases}y=C_1x\\ \frac{x}{t}e^{-C_1x}=\tilde{C}_2\end{cases}$ — общ. формула

Приклад 3

$\begin{cases}\dot{x}=y^2\\ \dot{y}=2x^2-3y^2\end{cases}$ $|\cdot x^2$ — лінійне

Якщо лінійний порядок.

$\boxed{\dot{y}=\frac{y^2}{x^2}}$

$\dot{y}=2x^2-3y^2$

$\dot{y}\cdot x^2=2x^4-3y^2\cdot x^2$

$\boxed{\dot{y}\cdot x^2=2x^4-3y^2\cdot x^2}$

$(x^2y)'=2x^4-3y^2$

$(x^2y)'=\frac{y^2}{x^2}$ $\Big|\cdot x^2$

$(x^2y)'=y^2+x^2\dot{y}$

$\boxed{y^2+x^2\dot{y}=2x^4}$ — общ. формула

$\boxed{x^2y=z}$ $\boxed{z=x^2y}$

$\boxed{\dot{z}=\dot{x}^2y+x^2\dot{y}}$ — лінійне інт.

$\begin{cases}\dot{z}=\dot{x}^2y+x^2\dot{y}\\ \dot{z}=2x^4-3y^2\end{cases}$ — общ. формула

Приклад 4

$\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}}$ $\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}}$ $\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}}$ $\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}}$

Змінні можуть бути розділені

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ $\Big|\cdot x$

$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$

$\ln x=\ln y+C_1$

$\ln(xy)=C_1$

$\boxed{xy=C_1}$ — лінійні інтеграл ①

$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{dx}{x}$

$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln x+C_2}$ — лінійні інтеграл ②

$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{x^2+y^2}$

$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{x^2+y^2}$

$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{x^2+y^2}$

$\frac{dx}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}=\frac{dy}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}$

$\boxed{\frac{dx}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}=\frac{dy}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}}$ $\boxed{\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{x^2}}$

$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{x^2}$ $\Big|\cdot x^2$

$\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{x^2}$

$\boxed{\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{x^2}}$ лінійне інт. — ③

$\frac{x^3}{3}=\frac{y}{x}+\frac{C}{3}$ $\Big|\cdot 3$

$\frac{x^3}{3}=\frac{y}{x}+C_3$

$\frac{x^3}{3}=\frac{y}{x}+C_3$ $\Big|\cdot x$

$\boxed{x^4=3y+3C_3x}$ — ЗЛ інтеграл

$\boxed{x^4=3y+3C_3x}$ — ЗЛ інтеграл ④

$\begin{cases}x^4=3y+3C_3x\\ x^2+y^2=C_1\end{cases}$ — общ. формула

$\begin{cases}x+x=C_1\\ t\dot{x}+C_2\end{cases}$ — лінійні інтеграл

$\begin{cases}x^4=3y+3C_3x\\ x^2+y^2=C_1\end{cases}$ — общ. формула

$\begin{cases}x+x=C_1\\ t\dot{x}+C_2\end{cases}$ — лінійні інтеграл

$\begin{cases}x^4=3y+3C_3x\\ x^2+y^2=C_1\end{cases}$ — общ. формула