МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

РЕФЕРАТ

по дисциплине «Уравнения математической физики»
на тему «Задача Коши для трёхмерного волнового уравнения. Формула Кирхгофа. Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Формула Пуассона.»
направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент группы
Б9121-02.03.01мкт

__________ Домашев С.А.
(подпись)

« 27 » июня 2024г.

Оценка

Руководитель______________________________

____
(подпись)

« 05 » июня 2024г.

Регистрационный номер ________

«____»____________________2024г.

г. Владивосток
2024

Оглавление

Классическое волновое уравнение.

Волновое уравнение — линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые колебания струны, колебательные процессы в сплошных средах и в электродинамике.

В общем случае волна, распространяющаяся в пространстве, описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t,x)$$

где:

- a^2 – константа,
- Δ – Оператор Лапласа,
- $u(x,t)$ – неизвестная функция,
- $f(x,t)$ – заданная функция.

Если $f(x,t) \equiv 0$ – волновое уравнение называется **неоднородным**.

Чтобы получить волновое уравнение для трёхмерного и двумерного случая – необходимо расписать оператор Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t,x,y,z)$$

А для двумерного:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(t,x,y)$$

Задачей Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$ называют задачу о поиске решения $u(t,x) \in C^2(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t,x), \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

Удовлетворяющего начальным условиям:

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$u_t(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

Где:

- $f(t,x) \in C \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$
- $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$
- $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^1)$

Задача Коши для трехмерного однородного волнового уравнения. Формула Кирхгофа

Рассмотрим задачу Коши для трехмерного однородного волнового уравнения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad \mathbb{R}^4_+ \equiv \mathbb{R}^3 \times (0,1) \tag{1}$$

Задача коши заключается в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего следуюшим начальным условиям:

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(x), \end{gathered} \tag{2}$$

Для нахождения решения задачи Коши для трехмерного однородного волнового существует *формула Кирхгофа*, которая выглядит следующим образом.

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial a}\int_{S_{at}(x)} \frac{\varphi_0(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r + \int_{S_{at}(x)} \frac{\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r\right].$$

Где интеграл берётся по поверхности сферы. сферы $S_{at}(x)$ представляют собой фронты волны, распространяющиеся со временем t от точки x с радиусом at

Вывод формулы Кирхгофа.

Мы будем предполагать, что $\varphi_0(x,y,z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\varphi_1(x,y,z)$ до второго порядка включительно во всем пространстве.

Покажем сначала, что интеграл

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r\,, \tag{3}$$

взятый по поверхности сферы S_{at} радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x,y,z)$, является решением волнового уравнения (1), здесь $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ – произвольная функция.

Заметим, что координаты точек сферы S_{at} могут быть выражены по формулам

$$\xi=x+\alpha at,\quad \eta=y+\beta at,\quad \zeta=z+\gamma at\,,$$

где (α,β,γ) – направляющие косинусы радиусов сферы S_{at}. Мы их можем записать в виде

$$\alpha=\sin\theta\cos\psi,\ \beta=\sin\theta\sin\psi,\ \gamma=\cos\theta\,,$$

где угол θ меняется от 0 до π и угол ψ от 0 до 2π. Когда точка (ξ,η,ζ) описывает сферу S_{at}, точка (α,β,γ) описывает сферу S_1 радиуса, равного единице, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади $d\sigma_r$ и $d\sigma_1$ обеих сфер имеется соотношение

$$d\sigma_r=r^2d\sigma_1=a^2t^2d\sigma_1=a^2t^2\sin\theta d\theta d\psi\,.$$

Тогда интеграл (3) приводится к виду

$$u(x,y,z,t)=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\varphi(x+\alpha at,y+\beta at,z+\gamma at)d\sigma_1\,. \tag{4}$$

Отсюда легко заметить, что функция $u(x,y,z,t)$ имеет непрерывные производные до $k-$того порядка, если функция $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ непрерывна вместе со своими производными до $k-$ го порядка $(k\ge 2)$.

Из формулы (4) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_1$$

или, возвращаясь к первоначальной области интегрирования

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r\,. \tag{5}$$

Дифференцируя теперь выражение (4) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\varphi(x+\alpha at,y+\beta at,z+\gamma at)d\sigma_1+$$

$$+\frac{at}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)d\sigma_1. \qquad (6)$$

Чтобы вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, перепишем (6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iint_{S_{at}}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)d\sigma_r$$

и, применяя формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iiint_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$

где D_{at} – шар радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x,y,z)$. Полагая

$$I=\iiint_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}.$$

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}\right)-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \qquad (8)$$

В самом деле, переходя в интеграле I к сферическим координатам (ρ,θ,ψ) с центром в точке $M(x,y,z)$, имеем

$$I=\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta d\theta d\psi d\rho$$

Дифференцируя по t, получим

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)_{\rho=at}a^2t^2\sin\theta d\theta d\psi=$$

$$= a\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r .$$

Сравнивая равенства (5), (7) и (8), мы видим, что функция $u(x,y,z,t)$, определяемая формулой (3), удовлетворяет волновому уравнению (1), какова бы ни была функция $\varphi(x,y,z)$, имеющая непрерывные производные до второго порядка. Из формул (4) и (6) непосредственно следует, что функция $u(x,y,z,t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \tag{9}$$

Если $u(x,y,z,t)$ есть решение волнового уравнения (1) с начальными данными (9), то легко видеть, что функция

$$v(x,y,z,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

будет также решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$\begin{gathered} v\Big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \\ \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Взяв теперь за $\varphi(x,y,z)$ в случае начальных условий (9) функцию $\varphi_1(x,y,z)$, а в случае начальных условий (10) функцию $\varphi_0(x,y,z)$ и сложив построенные таким образом решения, будем иметь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Таким образом, решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), запишется в виде

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi_0(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r + \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r \tag{11}$$

Теорема 1

Пусть выполняются условия

$$\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3),$$
$$\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3).$$

Тогда классическое решение

$$u \in C^2(\mathbb{R}^4_+) \cap C^2(\overline{\mathbb{R}}^4_+)$$

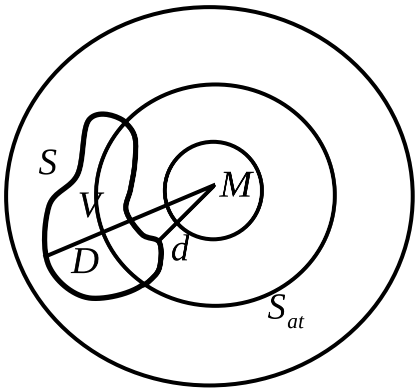
задачи Коши (1), (2) существует и определяется *формулой Кирхгофа*

Физическая интерпретация

1. **Распространение волн**:
   - Волна, исходящая из начальной точки или начальной поверхности, распространяется со скоростью c во всех направлениях.
   - Формула Кирхгофа учитывает, как начальные условия (значения функции и ее производные) распространяются и влияют на значение волновой функции u в точке x в момент времени t
2. **Вклад начальных условий**:
   - Начальные условия вносят свой вклад в значение функции u(x, t) через нормальные производные и через сами значения функции u на поверхности сферы.
   - Эти начальные условия определяют, как волна будет распространяться и как её амплитуда будет изменяться во времени и пространстве.
3. **Энергия и поток**:

   - Нормальная производная функции u по направлению нормали к поверхности сферы может быть связана с потоком энергии через эту поверхность.
   - Если нормальная производная положительна, это может указывать на исходящий поток энергии, а отрицательная производная может указывать на входящий поток энергии.

Чтобы более ясно представить себе физическую картину распространения волн в трехмерном пространстве, описываемую формулой Кирхгофа (11), положим, что начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области V с границей S, т.е. что функции φ_0 и φ_1 равны нулю вне области V.



Пусть точка $M(x, y, z)$ находится вне области V. Обозначим через d и D соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от $M(x, y, z)$ до точек поверхности S. При $t < \dfrac{d}{a}$ сфера S_{at} находится вне V, обе функции φ_0 и φ_1 равны нулю на сфере S_{at} и из формулы (11) имеем $u(M, t) = 0$, т.е. начальные возмущения ещё не успеем дойти до точки M. В момент $t=\frac{d}{a}$ сфера S_{at} коснётся поверхности S и передний фронт волны пройдет через точку M. Начиная с момента времени $t=\frac{d}{a}$ до момента времени $t=\frac{D}{a}$, сфера S_{at} будет пересекать область V и формула (11) даёт $u(M,t)\neq 0$. Наконец, при $t>\frac{D}{a}$ сфера S_{at} не будет иметь общих точек с поверхностью S (вся область V будет лежать внутри сферы S_{at}) и из формулы (11) будем иметь $u(M,t)=0$, т.е. начальные возмущения уже прошли через точку M. Моменту $t=\frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M. Передний фронт волна в заданный момент времени t представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от S, равное at. Передний фронт волны есть огибающая для семейств сфер, имеющих центры на поверхности S и радиус at. Задний фронт волны в заданный момент t представляет собою поверхностью, отделяющую точку, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Постоянная a является скоростью распространения фронта волны.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M пространства действие, локализованное во времени, при этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтом волн (принцип Гюйгенса).

Задача Коши для двумерного волнового уравнения

Рассмотрим частный случай, когда функции φ_0 и φ_1 зависят только от x и y, т.е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси z. Если передвигать точку $M(x,y,z)$ параллельно оси z, то, очевидно, правая часть формулы Кирхгофа (11) не будет менять своего значения, т.е. функция u также не будет зависеть от z, и формула (11) даёт решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{12}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,y). \tag{13}$$

Мы можем рассматривать решение (11), оставаясь исключительно на плоскости xy. Для этого надо интегралы формулы (7,1,11) которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости xy. Возьмём точку $M(x,y)$ на плоскости xy. Точки с координатами (ξ,η,ζ), определяемые по формулам

$$\xi = x+\alpha at,\ \ \eta = y+\beta at,\ \ \zeta = z+\gamma at$$

при $z=0$, суть переменные точки сферы S_{at} с центром $M(x,y,0)$ и радиусом at. Части этой сферы находящиеся над и под плоскостью xy, проектируются на плоскость xy в виде круга C_{at} с центром $M(x,y)$ и радиусом at. Известно, что

$$dC_{at} = \cos(n\ z)d\sigma_{at},$$

где $n-$ направление нормали к S_{at}, т.е. радиуса этой сферы, образующей острой угол с осью Oz. Если N – переменная точка сферы, N_1 – ее проекция на плоскость xy, то

$$\cos(n\ z) = \frac{|NN_1|}{|MN|} = \frac{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at},$$

где (ξ,η) – координаты переменной точки круга C_{at}.

В результате преобразования формулы (11) мы получим

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\varphi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \qquad (14)$$

Эта формула даёт решение волнового уравнения (12) удовлетворяющее начальным данным (13). *Формула (14) называется формулой Пуассона.*

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью B на плоскости xy с контуром l, т.е. $\varphi_0(x,y)$ и $\varphi_1(x,y)$ равны нулю вне B. Пусть точка $M(x,y)$ лежит вне области B. Для моментов времени $t<\frac{d}{a}$, где $d-$ наименьшее расстояние от $M(x,y)$ до контура l, круг C_{at} не имеет общих точек с областью B, функции $\varphi_0(x,y)$ и $\varphi_1(x,y)$ равны нулю во всем круге C_{at} и формула (14) даёт $u(M,t)=0$ – до точки M возмущение еще не дошло. В момент $t=\frac{d}{a}$ в точку M придёт передний фронт волны. Для значений $t>\frac{D}{a}$, где D – наибольшее расстояние от M до контура l, круг C_{at} будет содержать внутри себя всю область B и мы получим

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_B \frac{\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_B \frac{\varphi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\ . \qquad (15)$$

В случае, после момента времени $t=\dfrac{D}{a}$ функция $u(x,y,t)$ не обращает нуль, как в случае трёхмерного пространства. Но ввиду присутствия a^2t^2 в знаменателе мы может утверждать, что $u(x,y,t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, начальное возмущение, локализованное на плоскости, не локализовано во времени. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт волны, но не имеет заднего фронта (принцип Гюйгенса не имеет места). В трехмерном пространстве уравнению (12) соответствуют так называемые *цилиндрические волны.*

Замечание!

Все выведенные формулы, дающие решения задачи Коши для волнового уравнения, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определённые функции, и производные по времени от таких интегралов. Поэтому если изменить начальные функции φ_0 и φ_1 так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно изменились, то при этом мало изменится и функция u, дающая решение задачи Коши, т.е. имеем непрерывную зависимость решения от начальных данных. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения t, если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

Единственность решения задачи Коши

Если решение задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения (1),(2) существует, то оно единственно.

Из теоремы 1 следует, что решение единственно. Действительно, если бы существовало второе решение, то оно тоже определялось бы формулой (11) и совпадало бы с первым решением.

По аналогии можно доказать единственность решения задачи Коши для двумерного волнового уравнения (12), (13), используя формулу (14)

Заключение

В данном тексте рассмотрены классические волновые уравнения в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах, а также задачи Коши для этих уравнений. Волновые уравнения описывают распространение малых колебаний в различных средах и имеют широкий спектр приложений в физике и инженерии.

Одним из ключевых результатов является формула Кирхгофа для решения задачи Коши в трехмерном случае, которая показывает, как начальные условия определяют поведение волновой функции в пространстве и времени. Аналогично, для двумерного волнового уравнения получена формула Пуассона.

Физическая интерпретация формул Кирхгофа и Пуассона помогает понять, как начальные возмущения распространяются в пространстве, создавая передние и задние фронты волн (в трехмерном случае) или только передние фронты (в двумерном случае).

Рассмотрены также вопросы единственности решений задачи Коши и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Список литературы

1. Алексеев Г. В. Классические методы. Часть 1. Владивосток. Изд-во Дальневосточного университета, 2005.
2. Levitan, B.M., & Sargsyan, I.S. (1970). "Introduction to the Theory of Boundary Value Problems".
3. Evans, L.C. (2010). "Partial Differential Equations"
4. Образовательный портал НИЯУ МИФИ "Волновое уравнение"