Вычмат 4.1

Метод сплайн коллокации

1. Метод сплайн-коллокации. Общие положения

Простая коллокация:

$$Lu = f, \text{на} [a, b]$$

Задаём точки ξ_k на отрезке, через которые будем определять сплайн.

Пусть дана задача, в которой достаточно гладкое для этой задачи решение.

$$\begin{cases} L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Ищем решение в виде сплайна $S(x) \in C^2[a, b]$ с помощью сетки
$\Delta : a = x_0 < \cdots < x_N = b$.
Выбираем узлы коллокации $\xi_k, k = \overline{0, N}$:

$$\begin{cases} L[S(\xi_k)] \ = r(\xi_k), \\ \alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Размерность пространства сплайнов $N + 3$ (лекеции сплайнов; кол-во уравнений для замыкания системы)
Точность зависит от выбора узлов.

- Нельзя брать больше 3 узлов на одном подинтервале $[x_i, x_{i+1}]$ иначе уже там будет замыкание системы.

2. Сплайн-разностная схема

Будем строить сплайн через моменты (2 производные):

$$S(x) = u_i \cdot (1 - t) + u_{i+1} \cdot t - \frac{h_i^2}{6} t(1 - t) \left[(2 - t)M_i + (1 + t)M_{i+1}\right]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad M_i = S''(x_i)$$

Пусть изначальный диффур имеет $p(x) \equiv 0$, а узлы коллокации совпадают с сеткой $\xi_k = x_k$. Тогда уравнение в i точке сетки имеет вид:

$$M_i + q_i \cdot u_i = r_i, \quad i = \overline{0, N} \text{ - условие коллокации.}$$

(Из лекций по сплайнам) Имеем 3-диагональную систему для нахождения сплайна интерполирования (запоминать не надо):

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + (1-\mu_i)M_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1+h_i}}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right), i = \overline{1, N-1}; \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$$

Подставляем $M_i = r_i - q_i u_i$ в систему и получаем систему для $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}), i = \overline{1, N-1}$.
Аналогично подставляем в краевые и получаем ещё 2 уравнения. Прогонкой u_i, потом M_i и получаем решение $S(x)$.
Для прогонки нужно диагональное преобладание:

$$\beta_1 \le 0; \quad \beta_2, \alpha_j \ge 0; \quad |\alpha_j| + |\beta_j| \ne 0; \quad q(x) \le q < 0; \qquad h_{i-1}^2 \cdot \max(|q_{i-1}|, |q_i|) \le b, i = \overline{1, N}$$

Теорема сходимости

Пусть выполняются условия диагонального преобладания и $p(x) \equiv 0$, то если точное решение $y(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4[a, b]$, тогда $||S(x) - y(x)||_C = O\left(\overline{h^2}\right), \quad \overline{h} = \max h_i$.

3. Использование B-сплайнов в методе сплайн-коллокации

Будем искать решение по базису B(базисных)-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i(x)$$

Где B_i - кубический (нормализированный) базисный сплайн, ненулевой на интервале (x_{i-2}, x_{i+2})
Обычной сетки недостаточно, поэтому к Δ добавляем по 3 точки на концах $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}; x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$.
Точки коллокации $\xi_k = x_k$ (и нет ограничения на $p(x)$)
Имеем $L[S(x)] = r(x)$, при этом в узлах коллокации у сплайна $S(x_k)$ ненулевые B-сплайны только $B_{k-1}(x_k), B_k(x_k), B_{k+1}(x_k)$, т.е:

$$b_{i-1} L[B_{i-1}(x_i)] + b_i L[B_i(x_i)] + b_{i+1} L[B_{i+1}(x_i)] = r(x_k), \quad i = \overline{0, N}$$

После чего (например) из таблицы значений B-сплайнов получаем систему уравнений вида:

$$b_{i-1} A_i + b_i C_i + b_{i+1} B_i = D_i$$

Аналогично получаем для краевых условий $(-1, N+1)$. Однако, это не 3-диаг. матрица, поэтому нужно исключить b_{-1} из уравнений $-1, 0$ и b_{N+1} из уравнений $N, N+1$.
Прогонкой получаем $b_0, \ldots, b_N$, после чего из ур. $-1, N+1$ получаем b_{-1}, b_{N+1}

4. Основные свойства схем МСК

1. Одинаковая эффективность на любых схемах.
2. Высокая точность аппроксимации 1-х производных.
3. Простота построения схем повышенной точности и уравнений с переменными коэфами.
4. Решение и его производную можно вычислить в любых точках области.

5. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} Lu \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y) \\ u|_\Gamma = g(x,y) \end{cases}$$

В области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ сетки $\Delta_x : a = x_0 < \dots < x_N = b, \quad \Delta_y : c = y_0 < \dots < y_M = d$
Строим решение по базису B-сплайнов -- бикубический сплайн:

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} B_i(x) \overline{B}_j(y)$$

Также добавляем по 3 точки на концы обоих сеток.
Получается сложная 9-точечная схема, поэтому делаем другим методом.
Найдём в таком виде:

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \overline{\alpha}_i(y) B_i(x), \quad \overline{\alpha}_i(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} \overline{B}_j(y)$$

Или

$$S(x,y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_i(x) \overline{B}_j(y), \quad \alpha_j(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} B_i(x)$$

Для этого воспользуемся методом установления:

$$\Delta u = -f \quad \to \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v = -f, \quad v \xrightarrow{t \to \infty} u$$

Введём фиктивное время. А этот диффур решим схемой переменных направлений (одна из схем расщепления).

Для этого подставим одно из представлений $S(x,y)$ в схему и получаем из этого итерационный процесс. Остановка: $\max_{i,j} |\alpha_{ij}^{\nu} - \alpha_{ij}^{\nu+1}| < \varepsilon$.