ИДЗ 2

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{((n+2)!)^2} = 0$

. Если $\sum\limits_1^\infty \frac{n^n}{((n+2)!)^2}$ - сх. => по необх. условию сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ => доказываем сходимость ряда (по Д'Аламберу)

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}((n+2)!)^2}{n^n \cdot ((n+3)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (n+3)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n^{n+2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$

$= 0$ => исх. $\lim = 0$

2. $\sum\limits_1^\infty \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, 2^{n+2}((n+1)^3+1)}{(n+2)!\, 2^{n+1}(n^3+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2((n+1)^3+1)}{(n+2)(n^3+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^4} = 0$$

$D < 1$ => сходится

3. $\sum\limits_1^\infty n \arcsin n^n \frac{\pi}{4n}$

по пр. Коши $D = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \arcsin \frac{\pi}{4n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\, \pi}{4n} = 0$ => сходится

4) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(\ln^2(n+7))}$

по пр. сравнения

$$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)} < \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+\cancel{7}1)}$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dn}{(n+1)(\ln^2(n+\cancel{7}1))} = \left| \begin{array}{l} \ln(n+1) = x \\ dn = (\cancel{n}x^n+1)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{\infty} = -\frac{1}{\ln(n+1)}\Big|_{1}^{\infty}$$

$\Rightarrow$ исх. ряд сходится

5) $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim_{n \to \infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ сх.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ по ~~пр. срав~~ предельному признаку

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} = 1 = \text{расх.}$$

$\Rightarrow$ ряд сходится условно

6) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^3} =$

$$= \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2-1)^2 (2n+1)}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2 (2n+1)} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1) 2}$$

$$\frac{1}{8n^2-2} < \varepsilon$$

$$n^2 > \frac{1}{8\varepsilon} + \frac{1}{4}$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{8\varepsilon} + \frac{1}{4}}$$

$\varepsilon = 10^{-3}$ $\quad n \geq 11$ $\quad \sum = -0,03$

$\varepsilon = 10^{-8}$ $\quad n \geq 3535$ $\quad \sum = -0,0355287$