Дополнительный вопрос по теме «Получение уравнений акустики и определение звуковой волны».

Уравнение для малых гидродинамических возмущений

Пусть Ω – область пространства $\mathbb{R}^3$, с границей Γ, заполнена жидкостью. При рассмотрении гидродинамического процесса в жидкости будем пренебрегать эффектами вязкости, теплопроводности и солености. Рассмотрим следующую гидродинамическую модель:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\nabla\rho + \rho div u = 0, & (6.1) \\ \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho(u\nabla)u = -\nabla p + \rho f, & (6.2) \\ p = P(\rho), & (6.3) \end{cases}$$

где уравнение (6.1) представляет уравнение неразрывности, (6.2) – уравнение сохранения импульса, (6.3) – уравнение сохранения состояния, u – скорость молекул жидкости, p – давление, ρ – плотность, f – массовая плотность внешних сил.

При рассмотрении этой модели в состоянии покоя $(u = 0)$, получим, что параметры ρ, p – постоянны (проверка представлена в соотношениях (6.4), стр. 52, [1]).

Далее исследуем движение жидкости при малых возмущениях состояния равновесия:

$$\mathrm{u} = u', p = p_0 + p', \rho = \rho_0 + \rho', \qquad (6.5)$$

где u', p', ρ' – малые по модулю величины вместе с их производными по сравнению с p_0, ρ_0 (данные константы получены из состояния равновесия).

С помощью процесса линеаризации, заключающегося в подстановке соотношений при малых возмущениях (6.5) в уравнение неразрешенности (6.1), в уравнение сохранения импульса (6.2) и отбрасывании величин второго и третьего порядка малости, а также при получении зависимости p' от ρ' и ее подстановки в промежуточные результаты, получаем уравнения, которые описывают распространение малых гидродинамических возмущений в жидкости (подробнее с процессом линеаризации и поиска зависимости давления от плотности можно ознакомиться в соотношениях (6.6) – (6.9), стр. 53, [1]):

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p, & (6.10) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 divu = 0. & (6.11) \end{cases}$$

Применяя к (6.10) операцию $c^2 div$, к (6.11) $\frac{\partial}{\partial t}$ и вычитая результаты этих операций, получим уже одно уравнение, вместо четырех скалярных, описывающее распространение малых гидродинамических возмущений в жидкости:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p.$$

Замечание:

Здесь рассмотрен однородный случай $f = 0$, неоднородный случай представлен в п. 1.6.2, стр. 54, [1].

Это уравнение, как выясним дальше описывает процесс распространения волн, поэтому его называют волновым уравнением.

Связь гидродинамических возмущений и волновых процессов

Рассмотрим задачу Коши для трехмерного распространения малых гидродинамических возмущений (волновое уравнение):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \text{ в } \mathbb{R}^4_+, \quad (3.1)$$

заключающуюся в нахождении классического решения уравнения (3.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

Также считаем, что φ_0, φ_1 удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$\varphi_0 \in C^3\left(\mathbb{R}^3\right), \varphi_1 \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right). \, (3.3)$$

Замечание: В физическом смысле классическое решение – функция, описывающая давление малых гидродинамических возмущений среды в жидкости (или газе).

Теорема (доказательство теоремы и получение формулы Кирхгофа представлено в пункте 3.3.1, стр. 188, [1])

Пусть выполняются условия (3.3). Тогда классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^4_+) \cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}^4_+}\right)$ задачи Коши (3.1), (3.2) существует и определяется формулой Кирхгофа (3.19).

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r + \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right]. \qquad (3.19)$$

С помощью формулы Кирхгофа можно увидеть физическую картину распространения малых гидродинамических возмущений в жидкой (или газообразной) среде в пространстве (или на плоскости с помощью формулы Пуассона). Согласно формуле (3.19), значение решения u в точке x в момент времени t определяется значениями начальных функций φ_0, φ_1 в точках, лежащих на сфере $S_{at}(x)$ радиуса at с центром в точке x. Поэтому $u(x,t) \neq 0$ для тех значений t, для которых сфера $S_{at}(x)$ пересекает носители начальных функций φ_0, φ_1, лежащие в Ω.

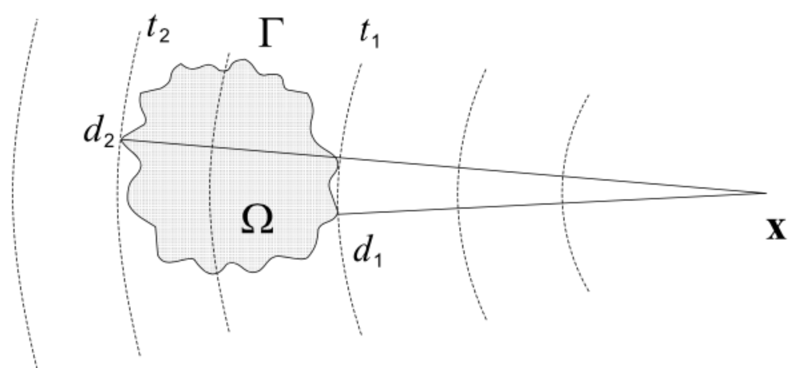

Рис. 3.3

Пусть $\mathrm{t}_1 = \frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{a}}, \mathrm{t}_2 = \frac{\mathrm{d}_2}{\mathrm{a}}, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ – наименьшее и наибольшее расстояние от x до точек Г.

Как видим из рис (3.3) для

1. $0 \leq t < t_1$. Сфера не пересекается с Ω, следовательно $u(x,t) \equiv 0$. Физически это интерпретируется, как начальное возмущение еще не дошло до точки x;
2. $t_1 \leq t \leq t_2$. Для указанных моментов времени сфера будет пересекать или касаться $\overline{\Omega}$. Тогда для $t \in (t_1, t_2)$ $u(x,t) \not\equiv 0$. Физически это означает, что в точке x есть возмущение;
3. $t_2 < t < \infty$. $\overline{\Omega}$ – будет внутри сферы $S_{at}(x) \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$. Физически это означает, что возмущение уже прошло через точку x.

На основании анализа выше и его физической интерпретации можно сделать вывод, что возмущение среды, возникшее в начальный момент времени в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ распространяется по всем направлениям пространства с одной и той же скоростью, равной коэффициенту a из уравнения (3.1) (более строгий анализ приведен на стр. 195-196, [1]). А также давление малых гидродинамических возмущений среды отлично от нуля на интервале $t \in (t_1, t_2)$.

Благодаря таким свойствам классического решения задачи Коши (3.1) – (3.2), вводится определение волны [1]:

- **Физический аспект понятие волны** - (в однородной изотропной среде) следует понимать особое возмущенное состояние среды, при котором возмущение, возникшее в произвольной точке y среды, передается с постоянной скоростью a в любую другую точку x пространства $\mathbb{R}^3$ за конечное время, равное отношению $|x - y|/a$, где $|x - y|$ – расстояние между этими точками. В случае неоднородной среды, когда скорость распространения возмущений a зависит от координат точки x, это время зависит не только от расстояния $|x - y|$, но и от степени неоднородности среды, входящей в переменную скорость $a = a(x)$;
- В математическом плане под волной в пространстве (в однородной изотропной среде) понимается решение задачи Коши (3.1) – (3.2) для однородного волнового уравнения.

Из этого понятия как раз и следует, почему уравнение $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p$ – волновое, и система уравнений (6.10) – (6.11) – система уравнений линейной акустики.

А сами волны являются звуковыми, поскольку, когда звук распространяется через газ или жидкость, он вызывает возмущения молекул или частиц среды, что приводит к изменениям в давлении и плотности. Эти колебания давления и плотности распространяются в виде волн по среде, передавая энергию и информацию.

Источник

1. Алексеев, Г. В. Классические модели и методы математической физики: Учеб. Пособие. – Владивосток: Дальнаука, 2011. – 452с.