Вычмат 4.2

Методы решения интегральных уравнений.

1. Интегральные уравнения, классификация.

$$g(x)y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in Q$$

$K(x,s)$ -- ядро интегрального оператора.

1. Если $\Omega = const$, то уравнение - Фредгольма; Если $\Omega = \Omega(x)$, то Вольтерра.
2. Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение 1 рода, иначе 2 рода.
3. Если $f(x) \equiv 0$, то ур. однородное, иначе неоднородное.
4. (?) При $g(x) \equiv 1$, λ - собственное значение.
   $Ay \equiv \int_{\Omega} K(x,s)y(s)ds$ - в операторном виде. A - вполне непрерывный, т.е. $\nexists A^{-1}$ ограниченного, но $(I-A)^{-1}$ - ограниченный.

2.Метод квадратур решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры 2 рода.

Приближаем интеграл квадратурной формулой.
Используем общий вид квадратурной формулы на сетке $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}} \subset [a,b]$:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{m} A_i \varphi(x_i) + R[\varphi]$$

$A_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} A_i = b-a$, R - погрешность формулы.

- Для Вольтерра 2 рода:

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b)$$

$$y(x_i) - \lambda \int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = \overline{1,n}$$

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^{i} K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x_i) + \cancel{R}$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{i} A_j K_{ij} y_j = f_i$$

Матрица данной системы треугольная, можно вычислять постепенно.

$$-\lambda \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - \lambda A_i K_{ii}) y_i = f_i$$

$$y_i = \frac{f_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j}{1 - \lambda A_i K_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad 1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0$$

- Для Фредгольма 2 рода:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \, y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Получилась система линейных уравнений (СЛАУ), которая при решении даёт y_i.

3.Метод вырожденных ядер решения интегрального уравнения Фредгольма 2 рода.

Если ядро можно представить вырожденным ядром, то решение можно найти в аналитическом виде.
$K(x, s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s)$ - вырожденное ядро, где α_i, β_i - линейно независимые.

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s) \right] y(s) ds = f(x)$$

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \underbrace{\int_a^b \beta_i(s) y(s) ds}_{C_i} = f(x)$$

Находим решение в виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) C_i$$

Подставим его в уравнение, чтобы найти C_i:

$$\cancel{f(x)} + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) C_i - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(s) C_i \right] ds = \cancel{f(x)}$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \left(C_i - \int_a^b \left[\beta_i(s) f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i \alpha_i(s) \beta_i(s) \right] ds \right) = 0$$

Поскольку $\alpha_i(x)$ - линейно независимые, то сумма = 0, только когда скобка = 0.

$$C_i - \underbrace{\int_a^b \beta_i(s) f(s) ds}_{f_i} - \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i \underbrace{\int_a^b \alpha_i(s)\beta_i(s) ds}_{a_{ij}} = 0$$

Получаем систему, из которой можно найти C_i :

$$C_i - \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1, n}$$

4.Преобразование уравнения Вольтерра 1 рода к уравнению 2 рода.

$$\int_a^x K(x,s) y(s) ds = f(x)$$

1. Производная

$$\frac{d}{dx}(\dots) \Rightarrow K(x,x)y(x) + \int_a^x K'_x(x,s)y(s)ds = f'(x)$$

$$y(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)y(s)}{K(x,x)} ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}, \quad K(x,x) \neq 0$$

   Если $K(x,x) = 0$, то повторяем.

2. Интегрирование по частям. Пусть $Y(x) = \int_a^x y(s)ds$, тогда

$$(\dots) \Rightarrow K(x,s)Y(s)\Big|_a^x - \int_a^x K'_s(x,s)Y(s)ds = f(x)$$

   Т.к. $Y(a) = 0$:

$$K(x,x)Y(x) - \int_a^x K'_s(x,s)Y(s)ds = f(x)$$

$$Y(x) - \int_a^x \frac{K'_s(x,s)Y(s)}{K(x,x)} ds = \frac{f(x)}{K(x,x)}$$

Находим $Y(x) \Rightarrow y(x) = \frac{dY}{dx}$.

5.Интегральные уравнения Фредгольма 1 рода, общая характеристика.

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x); \qquad Ay = f$$

Покажем некорректность задачи, невыполнимость одного из условий корректности Адамара.

(Несуществование) На практике правая часть f получается с погрешностью, поэтому её производной в некоторых точках может и не существовать. Поскольку решение $y \in C[a,b]$, то взяв производную всего уравнения окажется, что f' необходимо быть

тоже из C. Значит первое условие существования решение не выполняется.
(необходимо гладкое f, хотя бы из C^1)

(Неединственность) Например: $\int_0^1 xs\, y(s)ds = 0$.

1. $y = 0$,
2. $y = (x - 0.5)(x - 1) : x\int_0^1 s(s - 0.5)(s - 1)ds = 0$.

(Неустойчивость) A - вполне непрерывный (переводит ограниченное подмножество X в предкомпактное (т.е. его замыкание компактно) подмножество Y), т.е. если существует A^{-1}, то он не обязательно ограниченный.

6.Метод регуляризации Тихонова. Корректность по Тихонову, регуляризирующий оператор. Псевдорешение, нормальное решение, сглаживающий функционал.

Корректность по Тихонову задачи $Ay = f$ (условная корректность):

1. Априори известно, что $\exists y \in M$ - некоторое заданное множество (мн-во корректности),
2. $\exists! y \in M$ (единственное в классе функций множества M),
3. $Ay_1 = f_1 : ||f - f_1|| \le \delta, y_1 \in M \Rightarrow ||y - y_1|| < \varepsilon$ (бесконечно малым вариациям f, не выводящим y за пределы M, соответствуют бесконечно малые вариации решения y).
   f - точная правая часть, $\tilde{f}_\delta$ - приближённое с погрешностью δ.

Регуляризирующий оператор для случая $Ay = \tilde{f}$:
$R(f, \alpha)$ - рег. оператор для уравнения в окрестности f, если

1. $R(f, \alpha)$ определён $\forall \tilde{f}_\delta \in F$, где $0 \le \delta \le \delta_0, 0 \le \alpha \le \alpha_0$.
2. $\exists \alpha = \alpha(\delta) : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \rho_F(\tilde{f}_\delta, f) \le \delta \Rightarrow \rho_Y(\tilde{y}_\alpha, y) \le \varepsilon$, $(\delta \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0, \varepsilon \to 0)$
   $\tilde{y}_\alpha = R(\tilde{f}_\delta, \alpha(\delta))$

Решения:

1. Точное (классическое) решение - $\tilde{y} : Ay = f$: $||A\tilde{y} - f||_F = 0$
2. Псевдорешение - y_1: $||Ay_1 - f||_F = \min\limits_y ||Ay - f||_F$
3. Нормальное решение - псевдорешение $y_0 : ||y_0||_Y = \min\limits_y ||y||$

Метод регуляризации:
$Ay = f, y \in Y, f \in F$ - гильбертовы пространства, A - вполне непрерывный оператор (Фредгольма).
A, f - неизвестные, $\tilde{A}, \tilde{f}$ - известные приближённые: $||\tilde{f} - f|| \le \delta, ||\tilde{A} - A|| \le \xi$.
Сглаживающий функционал:

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = ||\tilde{A}y - \tilde{f}||_F^2 + \alpha\Omega[y]$$

$\Omega[y] > 0$ - стабилизирующий функционал. Чаще всего $\Omega[y] = ||y||_Y^2$.
Минимум функционала - решение задачи регуляризации.

7.Задача минимизации сглаживающего функционала. Уравнение Эйлера.

Задача: найти $y_\alpha : \Phi_\alpha[y, \tilde{f}] \to \min$, т.е. $\Phi_\alpha[y_\alpha, \tilde{f}] = \inf\limits_{y \in Y} \Phi_\alpha[y, \tilde{f}]$

Уравнение Эйлера - изначальное уравнение/задача, которому соответствует задача минимизации функционала.
Пример: для $Ay = f$ имеем $J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$.

Для уравнения Фредгольма 1 рода имеем функционал:

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = (\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}) + \alpha(y, y) = (\tilde{A}y, \tilde{A}y) - (\tilde{A}y, \tilde{f}) - (\tilde{f}, \tilde{A}y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) =$$

$$= (\tilde{A}^*\tilde{A}y, y) - 2(\tilde{A}y, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = (\tilde{A}^*\tilde{A}y, y) - 2(\tilde{A}^*\tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + (\alpha y, y) =$$

$$= (\tilde{A}^*\tilde{A}y + \alpha y, y) - 2(\tilde{A}^*\tilde{f}, y) + \cancel{(\tilde{f}, \tilde{f})}$$

Т.к. $(\tilde{f}, \tilde{f}) = const$ и для вариации (нахождения минимума) не влияет, поэтому соответствующее уравнение Эйлера:

$$\tilde{A}^*\tilde{A}y + \alpha y = \tilde{A}^*\tilde{f}$$

Получили уравнение Фредгольма 2 рода. При этом решение y_α - нормальное.

8.Метод регуляризации Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма 1 рода. Определение параметра регуляризации по невязке.

Конкретной регуляризации уравнения Фредгольма не было на лекциях.

Определение α по невязке:
Имеем $||f_\delta - f||_F \leq \delta$.
Поэтому будем искать по невязке $||Ay_\alpha - f_\delta||_F = \delta$.
Выбираем монотонную последовательность $\{\alpha_i\}$ (например $\alpha_k = \alpha_0 q^k, q > 0$)
Для каждого значения находим решение y_{α_k} и подставляем в невязку:
$||Ay_{\alpha_k} - f_\delta||_F \approx \delta$ и выбираем решение, при котором невязка ближе всего.

9.Метод подбора решения. Метод Иванова.

Не нужен