ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

«Основы математического анализа» В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

«Математический анализ» Л. Д. Кудрявцев

Используемые обозначения:

– любой; – существует; ! – единственный; – принадлежит; **:** – такое(ой), что;

– следует

**Определение 1: Множество** – совокупность объектов произвольной природы.

Объекты, входящие в множества, будем называть *элементами множества.*

**Определение 2:** Число называется **верхней гранью** числового множества .

**Определение 3:** Множество называется **ограниченным сверху**, если .

Если множество ограничено, то верхняя грань не является единственной. Верхних граней в этом случае бесконечное число.

Аналогично введем определения нижней грани множества и ограниченности множества снизу.

**Определение 4:** Число называется **нижней гранью** множества .

**Определение 5:** Множество называется **ограниченным снизу**, если .

**Определение 6:** Множество называется **ограниченным**, если оно ограничено и сверху и снизу.

Наименьшая среди всех верхних граней называется **супремумом** множества. Обозначается . Аналогично, наибольшая среди всех нижних граней называется **инфинумом** множества и обозначается *A*. Супремум и инфинум множества называются **точными верхней и нижней гранями множества**.

**Определение 7:** Число называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества , если: 1) ; 2) .

Второе условие можно сформулировать так: 2) .

Сформулировать определение точной нижней грани.

**Определение 8:** Если , то называется **максимальным** (наибольшим) **элементом** множества и обозначается .

**Определение 9:** Если , то называется **минимальным** (наименьшим) **элементом** множества и обозначается .

**Примеры.** Назвать верхние и нижние грани, точные верхние и точные нижние грани, максимальные и минимальные элементы следующих множеств:

1. [3; 5]; 2) [0; 8); 3) (2; 6]; 4) (1; 4).

Для множества , не ограниченного сверху (снизу), никакое число не может являться верхней (нижней) гранью, в этом случае считается по определению (для множества неограниченного снизу ).

**Определение 10:** Пусть каждому натуральному числу по некоторому закону ставится в соответствие некоторое действительное число . Отображение множества натуральных чисел *N* в множество действительных чисел называется **числовой последовательностью .** Число называется **элементом числовой последовательности,** а число *n* – номером элемента.

Таким образом, числовая последовательность является функцией, зависящей от натуральной переменной *n*. С другой стороны, числовую последовательность можно рассматривать как множество, состоящее из элементов числовой последовательности.

**Примеры**. 1) .

2. .

**Определение 11:** Для любого, сколь угодно малого положительного действительного числа , интервал называется **окрестностью** **точки** .

**Определение 12:** Число называется **пределом числовой последовательности** , если .

Обозначение:.

Раскроем модуль в конце определения: , .

Это означает, что все члены последовательности принадлежат точки . Т.е. , если каково бы не было число , найдется такое число , начиная с которого все члены последовательности с индексами попадут в точки .

( )

*a*

*a-*

*a+*

Если последовательность имеет конечный предел, то вне находятся **конечное** число элементов последовательности, а в попадают бесконечное число элементов последовательности.

**Определение 13:** Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся последовательностью**. В противном случае – расходящейся.

2 ТЕОРЕМЫ О СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

**Теорема 2.1.** Если последовательность имеет предел, то он единственный.

**Доказательство:** Будем доказывать эту теорему методом доказательства от противного. Итак, предположим противное . Пусть последовательность имеет два различных конечных предела: и .

Так как оба предела различны, то можно подобрать такое , что точек и не пересекаются :

( )

*a*

*a-*

*a+*

b

b-

b+

( )

Так как , то в находятся бесконечное число членов последовательности , в вне ее – конечное число. Но, тогда в находятся, быть может, только конечное число членов последовательности . Следовательно, не может являться пределом исходной последовательности, так как в точки не находятся бесконечное число элементов последовательности. Получили противоречие . Теорема доказана .

**Теорема 2.2.** Если последовательность сходится, то она ограничена.

**Доказательство:** По условию последовательность сходится, значит она имеет конечный предел. По определению предела, имеем:

.

Неравенство в определении может не выполняться для элементов последовательности с номерами 1,2,3,…. Оно выполняется для элементов с номерами .

Пусть . Понятно, что . Таким образом получим, что для элементов последовательности с номерами выполняется:

, ,…,.

А для элементов последовательности с номерами по определению предела:

. Таким образом, для всех натуральных будет выполняться неравенство:

. Или . А это означает, что исходная последовательность ограничена. Теорема доказана .

*Замечание:* Ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости (если последовательность сходится, то она ограничена), но не является достаточным. Т.е., если последовательность ограничена, то она не обязана сходиться.

**Пример:** Рассмотрим последовательность .

Очевидно, что эта последовательность ограничена . Но предела у этой последовательности не существует. Дело в том, что по определению не существует такого натурального номера , начиная с которого все элементы последовательности находятся в какой-либо точки.

3 ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ

**Теорема 3.1.** Если элементы сходящейся последовательности , начиная с некоторого номера , удовлетворяют неравенству , то предел этой последовательности , удовлетворяет неравенству .

Математическая запись этой теоремы имеет вид:

Если , и , то .

**Доказательство:** Предположим противное . Пусть . Так как , то для ,

тогда , из второй части неравенства следует , что противоречит условию теоремы. Значит предположение, что не верно. Теорема доказана .

*Замечание:* Элементы сходящейся последовательности могут удовлетворять строгому неравенству: , но при этом предел последовательности удовлетворяет не строгому неравенству.

**Пример**  . , для ; .

Аналогично: если , и , то .

**Теорема 3.2.** Если и , то .

**Доказательство:** Пусть . По определению предела

, или , . Получили . Теорема доказана

Аналогично: Если и , то .

**Теорема 3.3.** Если , и выполняется неравенство

, то .

**Доказательство:** Предположим противное . Пусть . Выберем равное: .

Так как , то по определению предела числовой последовательности, получим: . Это означает, что

, начиная с некоторого натурального .

Так как , то по определению предела числовой последовательности, получим: . Это означает, что

, начиная с некоторого натурального .

Пусть . Тогда для любого можем записать:

.

Получили противоречие условию: . Теорема доказана

***Следствие:***Если все элементы сходящейся последовательности принадлежат отрезку , то предел этой последовательности тоже принадлежит этому отрезку.

**Теорема 3.4.** Если , и , то .

**Доказательство:** Выберем произвольное .

Так как , то по определению предела числовой последовательности, получим: . Это означает, что

, начиная с некоторого натурального .

Так как , то по определению предела числовой последовательности, получим: . Это означает, что

, начиная с некоторого натурального .

Пусть . Тогда для любого выполняются неравенства:

. А это значит, что . Теорема доказана

**Теорема 3.5.** Если , то .

**Доказательство:** Так как , то по определению предела числовой последовательности, получим: . Поскольку , то . Следовательно .

Теорема доказана

*Замечание:* Обратное утверждение не верно. То есть из не следует, что . Привести пример.

4 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 1:** Последовательность называется *бесконечно малой последовательностью* (б м),если или .

**Теорема 4.1.** Для того, чтобы числовая последовательность имела конечный предел, равный необходимо и достаточно , чтобы , где – бесконечно малая последовательность.

,

**Доказательство:**  Пусть числовая последовательность имеет конечный предел, равный . Т.е. . Обозначим . По определению предела

, то есть , значит .

Пусть , где . Тогда по определению бесконечно малой последовательности , то есть , значит . Теорема доказана

**Теорема 4.2:** Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью: и – б м, – б м.

**Доказательство:** Пусть и – бесконечно малые последовательности. Выберем произвольное . По определению бесконечно малых последовательностей для

, и .

Тогда для выполняется , то есть – бесконечно малая последовательность. Теорема доказана

**Теорема 4.3:** Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью: – б м, – ограниченная – б м.

**Доказательство:** Пусть последовательность является бесконечно малой последовательностью, а последовательность – ограниченной последовательностью. По определению ограниченной последовательности .

Выберем произвольное . По определению бесконечно малой

для .

Тогда , то есть последовательность

является бесконечно малой. Теорема доказана .

***Следствие:*** Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью. (Поскольку бесконечно малая последовательность является ограниченной, как имеющая конечный предел.)

*Замечание:* Теорема 4.2 и следствие из теоремы 4.3 выполняются и в случае суммы и произведения конечного числа бесконечно малых последовательностей.

**Определение 2:** Последовательность называется бесконечно большой последовательностью (б б), если

. Это обозначается .

Сформулировать определения и .

Очевидно, что бесконечно большая последовательность не является ограниченной.

Обратное утверждение не выполняется. То есть, из неограниченности последовательности не следует, что она бесконечно большая.

Привести пример неограниченной последовательности не являющейся бесконечно большой последовательностью.

**Теорема 4.4:** Если бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера , определена последовательность , которая является бесконечно малой последовательностью.

**Доказательство:** У бесконечно большой последовательности лишь конечное число членов может быть равно нулю. Так как для , следовательно . Значит с некоторого номера определена последовательность . Выберем произвольное . Для числа можно указать номер , такой, что при элементы последовательности удовлетворяют неравенству . Поэтому начиная с указанного номера будет выполняться неравенство , т.е. является бесконечно малой последовательностью. Теорема доказана .

**Теорема 4.5:** Если все элементы бесконечно малой последовательности , то последовательность является бесконечно большой.

**Доказательство:** Так как , то определена последовательность . Выберем произвольное . Так как – бесконечно малая последовательность, то для

или . Тогда , следовательно – бесконечно большая последовательность. Теорема доказана .

*Замечание:* Из теорем 4.3 и 4.4 следует, что отношение ограниченной последовательности на бесконечно большую является бесконечно малой последовательностью. Это символически можно записать следующим образом:

, если .

Отношение бесконечно больших последовательностей может быть бесконечно малой, бесконечно большой последовательностью, последовательностью, имеющей конечный предел или не имеющей предела, поэтому такое отношение называется неопределенностью. Можно указать еще неопределенности: , , , , , . Говорят, что найти предел неопределенного выражения – значит *раскрыть неопределенность.*