7 ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ, ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО – ВЕЙЕРШТРАССА

**Теорема 7.1.** Пусть задана последовательность отрезков , , вложенных друг в друга, то есть таких, что с длинами, стремящимися к нулю (. Тогда существует и притом единственная точка *C*, одновременно принадлежащая всем отрезкам .

**Доказательство:** Так как **, ,…** то

.

Это значит, что последовательность неубывающая и ограничена сверху. Тогда по теореме 6.1 о монотонных последовательностях, она сходится и . Обозначим .

Получили . При , имеем: . Значит .

Докажем, что точка единственная. Предположим противное . Пусть , и для определенности Тогда . Следовательно,

. Очевидно, что . Получили противоречие условию, что длины отрезков стремятся к нулю. Следовательно, точка единственная. Теорема доказана.

*Замечание: .*

**Определение 1:** Пусть задана последовательность . Выберем из нее бесконечное множество элементов с номерами . Полученная последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности .

Последовательность , , называется подпоследовательностью последовательности , если для , что , причем , тогда и только тогда, когда . Последовательность обозначается

Очевидно, что из исходной последовательности можно извлечь бесконечное число подпоследовательностей.

**Утверждение 1:** Если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность сходится и притом ее предел совпадает с пределом исходной последовательности.

**Утверждение 2:** Если **все** подпоследовательности данной последовательности сходятся, то пределы всех подпоследовательностей равны одному и тому же числу , и последовательность сходится к числу .

**Утверждение 3:** Если последовательность является бесконечно – большой, то все ее подпоследовательности являются бесконечно – большими.

**Утверждение 4:** Если последовательность является неограниченной, то из нее можно извлечь хотя бы одну бесконечно – большую подпоследовательность.

**Теорема 7.2** *(Больцано – Вейерштрасса)* Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность .

**Доказательство:** По условию теоремы последовательность является ограниченной. Это значит, что все ее элементы лежат на некотором отрезке. Обозначим его . Теперь выберем произвольно какой либо элемент последовательности . Дадим этому элементу номер . Очевидно, что . Разделим отрезок на 2 равных отрезка. Тогда, по крайней мере на одном из них (обозначим его ) окажется бесконечно много элементов последовательности и потому среди них найдется элемент этой последовательности с номером . Обозначим этот номер . Тогда , , .

Далее поделим на два равных отрезка. Обозначим отрезок, содержащий бесконечное число элементов последовательности . Выберем элемент с номером . Обозначим его . Тогда , , .

Продолжая таким образом процесс, получим подпоследовательность такую, что

, , , ,

, , .

Получили систему вложенных отрезков , длины которых стремятся к нулю. Тогда по теореме 7.1. существует единственная точка , принадлежащая одновременно всем отрезкам и .

Кроме того, . Тогда по теореме 3.4. о трех последовательностях . Таким образом, мы показали алгоритм построения сходящейся подпоследовательности. Теорема доказана

8 ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

**Определение 1:** Предел любой сходящейся подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом, или предельной точкой.

**Определение 2:** Символ +∞ (*–*∞) называется бесконечным частичным пределом последовательности , если существует подпоследовательность , такая, что .

**Утверждение 1:** У любой последовательности существует по крайней мере один частичный предел, конечный или бесконечный.

**Доказательство:** Если последовательность ограничена, то по теореме 7.2 *(Больцано – Вейерштрасса)* существует сходящаяся подпоследовательность . Если последовательность не ограничена сверху, то существует подпоследовательность стремящаяся к +∞. Если последовательность не ограничена снизу, то существует подпоследовательность стремящаяся к *–*∞.

**Определение 3:** Наибольший частичный предел последовательности называется ее верхним пределом и обозначается , а наименьший частичный предел называется нижним пределом и обозначается .

**Утверждение 2:** У любой последовательности существует верхний предел (конечный или равный +∞.), вычисляемый по формуле: .

**Утверждение 3:** У любой последовательности существует нижний предел (конечный или равный *–*∞.), вычисляемый по формуле: .

**Утверждение 4:** Для того, чтобы число было верхним пределом последовательности необходимо и достаточно выполнения для совокупности двух условий:

1) ;

2) .

Условие 1 означает, что при любом фиксированном в последовательности существует конечное число членов правее . Это члены с номерами .

Условие 2 означает, что при любом фиксированном в последовательности существует бесконечное число членов правее .

**Доказательство:** (необходимое условие)Пусть . Докажем, что выполняются условия 1 и 2.

Выберем произвольное . Если бы на полуинтервале оказалось бесконечно много членов последовательности , то нашлась бы подпоследовательность , элементы которой принадлежат этому полуинтервалу, и которая имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим этот предел . Очевидно, что . Это противоречит тому, что – наибольший частичный предел (условие 1).

Так как верхний предел является частичным пределом, то существует подпоследовательность такая, что . Значит все члены подпоследовательности , начиная с некоторого номера больше чем . Следовательно существует бесконечно много членов последовательности , больших чем (свойство 2).

(достаточное условие) Пусть число удовлетворяет условиям 1 и 2. Надо доказать, что – частичный предел.

Выберем Для каждого натурального существует номер такой, что по свойству 2, и по свойству 1. Так как для множество элементов данной последовательности, для которых выполняется неравенство бесконечно, то номер можно последовательно выбирать так, чтобы при . В результате получили подпоследовательность последовательности . Так как , то , то есть является частичным пределом последовательности . Теорема доказана

*Замечание:* Разница между обычным пределом и верхним пределом заключается в том, что в случае обычного предела левее имеется не более, чем конечное число точек последовательности , а в случае верхнего предела левее может быть и бесконечное число элементов последовательности .

Сформулировать аналогичное утверждение для нижнего предела последовательности.

**Утверждение 5:** Для того, чтобы последовательность имела предел (конечный или бесконечный) необходимо и достаточно, чтобы . В этом случае

.

9 КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 1:** Последовательность называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:

.

Это определение можно записать в другом виде:

.

*Леммы о фундаментальных последовательностях*

**Лемма 1:** Если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальная.

**Доказательство:** Пусть последовательность имеет конечный предел, т.е. . Тогда, по определению .

Пусть . Тогда рассмотрим

. Значит последовательность фундаментальная. Лемма доказана

**Лемма 2:** Если последовательность фундаментальная, то она ограничена.

**Доказательство:** Пусть последовательность является фундаментальной. Тогда по определению . Так как в определении указано, что , то зафиксируем его: . Тогда

или , при

Таким образом получили, что последовательность , получающаяся из исходной последовательности отбрасыванием первых ее членов является ограниченной. Поэтому ограничена и вся последовательность . Лемма доказана

**Лемма 3:** Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то ее предел является пределом всей последовательности.

**Доказательство:** Пусть последовательность является фундаментальной, а ее подпоследовательность сходящейся, т.е. . Выберем произвольное . Согласно условию Коши . По определению предела

Выберем . Тогда получим, что при всех и при фиксированном выполняется:

. А это значит, что . Лемма доказана

**Теорема 9.1** *(Критерий Коши)* Для того, чтобы последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (удовлетворяла условию Коши).

**Доказательство:** (необходимое условие). Пусть последовательность имеет конечный предел, тогда по Лемме 1 она фундаментальная.

(достаточное условие) Пусть последовательность является фундаментальной. Тогда по Лемме 2 она ограничена. Следовательно, по теореме 7.2. (Больцано – Вейерштрасса) из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Тогда по Лемме 3 последовательность будет иметь такой же предел, как и извлеченная подпоследовательность. Теорема доказана