## Определения

**Производной функции в точке:** Пусть функция определена в окрестности точки . Пусть . Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению переменной, когда приращение переменной стремится к нулю, то он называется производной функции в точке :

Геометрический смысл производной: равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к графику функции , проведенной в точке .

Уравнение касательной к графику функции в точке имеет вид:

.

Нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания. Уравнение нормали имеет вид:

**Производной слева/справа:** Пусть функция определена в правосторонней окрестности точки и существует предел , то он называется производной справа функции в точке и обозначается . Аналогично определяется производная слева .

**Дифференцируемой функции:** Функция называется дифференцируемой в точке , если ее приращение в этой точке представимо в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно и бесконечно малого более высокого порядка чем :

, где – не зависит от (но зависит от ), а – бесконечно малая при , т.е. .

**Дифференциала функции:** Дифференциалом функции в точке называется главная часть приращения функции, линейная относительно :

Геометрический смысл дифференциала: приращение ординаты касательной к графику функции в точке .

Для функции , дифференциал , или . Таким образом приращение и дифференциал независимой переменной совпадают. Поэтому формулу дифференциала часто записывают в виде: .

Из этой формулы получаем: производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу переменной:

Поскольку дифференциал отличается от производной множителем (или ), то свойства дифференциала такие же как и свойства производной.

**Функции невозрастающей/неубывающей в области:** Функция называется невозрастающей (неубывающей) в области *D*, если для таких, что выполняется .

**Возрастающей/убывающей в области**: Функция называется возрастающей (убывающей) в области *D*, если для таких, что выполняется / .

**Монотонной/строго монотонной функции**: Невозрастающие и неубывающие в области *D* функции называются монотонными в области D / Возрастающие и убывающие в области D функции называются строго монотонными в области D.

## Теоремы

**Критерий дифференцируемой функции**: Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда существует производная в этой точке.

**Дифференцируемой и непрерывной функции**: Если функция дифференцируема в точке , то она непрерывна в этой точке.

**Условие существования обратной функции**: Пусть на отрезке задана строго монотонная непрерывная функция и пусть , . Тогда эта функция имеет на отрезке (или , если ) строго монотонную и непрерывную обратную функцию .

**О производной обратной функции**: Пусть функция в некоторой окрестности точки возрастает (или убывает) и является непрерывной. Пусть, кроме того, функция дифференцируема в точке и производная отлична от нуля. Тогда обратная функция определена в некоторой окрестности соответствующей точки

, дифференцируема в этой точке и имеет в этой точке производную, равную

.

**О производной сложной функции**: Пусть функция имеет производную в точке , а функция имеет производную в точке . Тогда в некоторой окрестности точки имеет смысл сложная функция и эта функция также имеет производную в точке , причем , или, опуская значения аргументов,

## Вывод производных элементарных функций

, где .

## Определения

**Производной второго порядка**: Пусть функция , определенная на интервале , в каждой точке имеет производную и пусть . Производная функции в точке называется второй производной функции и обозначается или .

**Производной -го порядка**: производная от производной порядка называется производной порядка: .

**Функции раз непрерывно дифференцируемой**: Функция называется раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если на этом промежутке существует производная -го порядка функции и эта производная непрерывна

**Теорема о -ой производной суммы и произведения двух функций**: Пусть функции и имеют производные -го порядка в точке , тогда функции и также имеют производные -го порядка в точке , причем

Последняя формула называется формулой Лейбница.

**Вторая производная сложной функции**: Пусть функция имеет вторую производную в точке , а функция имеет вторую производную в точке . Тогда в некоторой окрестности точки определена сложная функция , которая в точке имеет вторую производную, причем

Имеем , дифференцируя еще раз по получим

**Вторая производная обратной функции:** Пусть функция определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки и пусть в точке существуют производные и , причем , тогда обратная функция имеет вторую производную в точке

, причем она может быть выражена через производные и функции в точке .

Первая производная обратной функции вычисляется по формуле . Берем производную по от обеих частей равенства

**Вторая производная параметрически заданной функции:** Если у функций и существуют производные второго порядка и в точке , то существует вторая производная параметрически заданной функции , причем

**Определение дифференциала второго порядка:** Пусть функция дифференцируема на некотором интервале . Дифференциал функции равен . Пусть функция дифференцируема в некоторой точке . Тогда дифференциал в этой точке функции , рассматриваемой как функции только переменной (при фиксированном ) называется вторым дифференциалом функции в точке и обозначается , т.е.

**Определение дифференциала -го порядка**: Дифференциалом -го порядка функции называется дифференциал от дифференциала (-1)-го порядка, рассматриваемого как функция от , при этом во всех дифференциалах приращения переменной одинаковые:

Из последней формулы получаем -ю производную функции: .

**Второй дифференциал сложной функции:**

Второй дифференциал сложной функции отличается от второго дифференциала простой функции

## Определения

**Возрастающей/убывающей в точке функции**: Функция возрастает (убывает) в точке , если найдется такая окрестность точки , в пределах которой при и при

( при и при ).

**Локального максимума/минимума; локального экстремума**: Функция имеет в точке локальный максимум (минимум), если существует окрестность в которой выполняется неравенство: () для . Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием локальный экстремум.

## Теоремы

**Достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке**: Если функция дифференцируема в точке и (), то эта функция возрастает (убывает) в точке

**Теорема Ферма**: Если функция дифференцируема в точке и имеет в этой точке локальный экстремум, то

**Теорема Ролля**: Пусть функция непрерывна на отрезке , дифференцируема на интервале , и , тогда существует точка такая, что

**Теорема Лагранжа**: Пусть функция непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале , тогда существует точка такая, что .

Эту формулу называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений

**Теорема Коши**: Если функции и непрерывны на отрезке и дифференцируемы на интервале , производная отлична от нуля всюду на интервале , то существует точка такая, что выполняется формула

Эту формулу называют формулой Коши или обобщенной формулой конечных приращений.

**Достаточное условие постоянной функции**: Если функция дифференцируема на интервале и в каждой точке этого интервала , то функция является постоянной на интервале .

**Необходимое и достаточное условие неубывающей/невозрастающей функции**: Для того чтобы дифференцируемая на интервале функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) на этом интервале.

**Достаточное условие возрастающей/убывающей функции**: Для того чтобы функция возрастала (убывала) на интервале достаточно, чтобы производная была положительной (отрицательной) всюду на этом интервале.

**Правило Лопиталя**: Пусть две функции и определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки , за исключением, быть может, самой точки . Пусть

И производная в окрестности точки . Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел , то существует предел , причем выполняется равенство .

**Правило Лопиталя для бесконечно удаленной точки, для бесконечно больших функций**:

Пусть две функции и определены и дифференцируемы на полупрямой . Пусть и производная на указанной полупрямой. Тогда, если существует предел , то существует предел , причем выполняется формула .

**Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пиано**: Пусть функция определена на интервале , , и пусть функция имеет в точке производные до -го порядка включительно, тогда

Или

Полученная формула называется формулой Тейлора -го порядка с остаточным членом в форме Пеано

**Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**: Положим . Очевидно, что . Тогда

Где , , …, ,

но , .

Поэтому , .

## Формулы Маклорена для элементарных функций:

**,**

,

, ,

, …,

.

Тогда

Поскольку , то и формула Маклорена имеет вид

## Теоремы

**Первое достаточное условие экстремума**: Пусть точка является стационарной точкой функции , и пусть функция дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки . Тогда, если в пределах указанной окрестности производная положительна слева от точки и отрицательна справа от точки , то функция имеет в точке локальный максимум. Если производная отрицательна слева от точки и положительна справа от точки , то функция имеет в точке локальный минимум. Если производная имеет один и тот же знак слева и справа от точки , то в точке нет экстремума.

**Второе достаточное условие экстремума, использующее вторую производную функции**: Пусть функция имеет в стационарной точке конечную вторую производную. Тогда функция имеет в точке максимум, если , и минимум, если .

**Второе достаточное условие экстремума, использующее -ую производную функции**: Пусть функция определена в некоторой окрестности точки и пусть в точке у функции существуют производные до порядка включительно, причем для , . Тогда, если – четное число, то функция имеет в точке локальный экстремум, а именно максимум при и минимум при . Если же – нечетное число, то функция не имеет в точке экстремума, эта точка является точкой возрастания при и убывания при .

**Достаточные условия экстремума функции, не дифференцируемой в точке**: Пусть функция дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки , за исключением самой точки , и непрерывна в точке . Тогда, если в пределах указанной окрестности производная положительна (отрицательна) слева от точки и отрицательна (положительна) справа от точки , то функция имеет в точке локальный максимум (минимум). Если же производная имеет один и тот же знак слева и справа от точки , то экстремума в точке нет.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 6.1. Только на этот раз применимость к функции теоремы Лагранжа устанавливается следующим образом: по условию функция дифференцируема (а следовательно и непрерывна) всюду на полуинтервале и, кроме того, непрерывна в точке . Значит функция непрерывна на отрезке и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка.

## Определения

**Функции выпуклой вниз/вверх**: Функция на интервале называется выпуклой вниз (вверх), если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (не выше) любой своей касательной

**Точки перегиба**: Точка графика функции называется точкой перегиба этого графика, если существует окрестность точки оси абсцисс, в пределах которой график функции слева и справа от имеет разные направления выпуклости

## Теоремы

**Достаточные условия выпуклости на интервале**: Если функция имеет на интервале конечную вторую производную и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то функция на интервале выпукла вниз (вверх)

**Достаточные условия выпуклости в окрестности точки**: Пусть вторая производная функции непрерывна и положительна (отрицательна) в точке . Тогда существует такая окрестность точки , в пределах которой график функции является выпуклым вниз (вверх)

**Необходимое условие точки перегиба**: Если график функции имеет перегиб в точке и если функция имеет в точке непрерывную вторую производную, то .

**Первое достаточное условие точки перегиба**: Пусть функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки и . Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная имеет разные знаки слева и справа от , то график этой функции имеет перегиб в точке .

**Второе достаточное условие перегиба**: Если функция имеет в точке конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям , , то график этой функции имеет перегиб в точке .

**Третье достаточное условие экстремума и перегиба**: Пусть – некоторое целое положительное число, и пусть функция имеет в некоторой окрестности точки производную порядка , причем указанная производная непрерывна в самой точке . Пусть

, .

Тогда, если – нечетное число, то график функции имеет перегиб в точке . Если – четное число и , то функция имеет локальный экстремум в точке , а именно: максимум, если , и минимум, если .

## Определения

**Вертикальной асимптоты**: Прямая является вертикальной асимптотой графика функции , если хотя бы одно из предельных значений или равно или .

Пусть функция определена для сколь угодно больших значений аргумента

**Наклонной асимптоты к графику функции**: Прямая является наклонной асимптотой графика функции при (), если функция представима в виде , где .

## Теоремы

**Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты**: Для того чтобы график функции имел при (), наклонную асимптоту , необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения и

.