Repaso de Probabilidad

Febrero 19 y 21, 2024

Prof. Sergio Béjar

Departamento de Estudios Políticos, CIDE

Objetivos para hoy

- Las próximas dos clases las vamos a dedicar a repasar conceptos básicos de probabilidad.
- Hoy nos enfocaremos en entender (i) probabilidad de eventos simples, (ii) probabilidad de dos eventos, y (iii) teorema de Bayes.

Probabilidad

Probabilidad se refiere a la posibilidad de que algún evento ocurra.

- Es una característica inevitable del mundo en que vivimos y hay que entenderla.
- Encuentra sus orígenes en las apuestas en los siglos XVII y XVIII.

Consciente o inconscientemente, siempre pensamos en términos probabilísticos.

- e.g., Si voy a 150 en una zona de 95km/hr, puedo recibir una infracción.

La teoría de la probabilidad es la forma matemática de modelar la realidad incierta.
Probability theory is a precursor to statistics and applied mathematics.

Reglas de Probabilidad

Estas son algunas (no todas) reglas de probabilidad imporrtantes.

1. El conjunto de todos los eventos posibles ($E_1 \ldots E_n$) es el **espacio muestra**.
    - S es el **conjunto** para un volado $S = \{$ Soles, Águilas $\}$.
2. Las probabilidades deben satisfacer la desigualdad $0 \leq p \leq 1$.
3. La suma de las probabilidades en el espacio muestra debe ser igual a 1.
    - Formalmente: $\Sigma_{E_i \in S} \; p(E_i) = 1$

PROBABILIDAD DE EVENTOS SIMPLES

1. Cuando los resultados de un evento (o experimento) no pueden ocurrir al mismo tiempo, se dice que son *mutuamente excluyentes*.
2. Si un resultado cualquiera tiene la misma probabilidad de ocurrir que todos los demás, se dice que todos son *igualmente probables*.

Si el experimento puede tener n resultados igualmente probables y mutuamente excluyentes, r número de los cuáles corresponden a la ocurrencia de algun evento **A**, entonces la probabilidad de que **A** ocurra es:

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{Resultados\ Favorables}{Total\ de\ Resultados}$$

EJEMPLOS PROBABILIDAD DE EVENTOS SIMPLES

Ejemplo 1: Encontrar la probabilidad de sacar una carta de color negro, al azar, de una baraja común y corriente.

$$P(sacar\ una\ carta\ negra) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2: Encontrar la probabilidad de sacar una espada al azar.

$$P(sacar\ una\ espada) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 3: Encontrar la probablidad de sacar un as de espadas al azar.

$$P(sacar\ un\ as\ de\ espadas) = \frac{1}{52}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS

Para calcular la probabilidad de eventos más complicados (que pueden ser considerados como combinaciones de eventos) necesitamos algunas reglas.

1. La probabilidad de que ocurra el Evento B, dado que el Evento A ya se ha presetado (o es seguro de presentarse) se llama *probabilidad condicional de B* y se simboliza de la siguiente forma:

$$P(B \mid A)$$

Ejemplo: Sacamos dos cartas de una baraja sin reemplazar la primera (i.e. distribución sin reemplazo). El Evento A consiste en sacar una espada en el primer intento. Calcular la probabilidad de sacar una espada en el Evento B.

$$P(sacar\ espada\ en\ B \mid sacar\ espada\ en\ A) = P(B \mid A) = \frac{12}{51}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

Se puede demostrar que para cualquier par de eventos A y B,

$$P(AB) = P(A) * P(B \mid A)$$

Ejemplo:: Encontrar la probabilidad de sacar una espada en dos intentos sucesivos, sin reemplazar la primera carta.

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \mid A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

Si la ocurrencia o no ocurrencia del Evento A no afecta la ocurrencia del Evento B, entonces se conocen como *independientes*. Simbólicamente:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

y

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Ejemplo: Tenemos 2 dados, uno negro y uno rojo, y una baraja. Calcular la probabilidad de que el evento A, sacar una espada en un intento, y el B, tirar un total de 7 con dos dados ocurran.

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(AB) = P(A) * P(B) = \frac{1}{24}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

La probabilidad de que **por lo menos** uno de los eventos A y B ocurra la vamos a denotar como $P(A + B)$. Y,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Esta fórmula es válida para dos eventos cualesquiera, dependientes o independientes, ya sean mutuamente excluyentes o no.

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que de una baraja se saque una espada o una carta con figura, o ambas al primer intento.
Evento A: sacar una espada. Evento B: sacar una carta con figura.

$$P(A) = \frac{13}{52}$$

En cada palo hay 3 cartas con figura, entoces

$$P(B \mid A) = \frac{3}{13}$$

Por tanto:

$$P(AB) = \frac{13}{52} . \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

Nos falta calcular la probabilidad del Evento B (i.e. sacar una carta con figura)

$$P(B) = \frac{12}{52}$$

De tal forma que la probabilidad de sacar una espada, una carta con figura o ambas es:

$$P(A+B) = \frac{13}{52} + \frac{3}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$$

PROBABILIDAD DE DOS EVENTOS (CONT.)

Regresamos al lanzamiento de dos dados (uno negro y uno rojo)
Ejemplo:: Calcular la probabilidad de que en un tiro de dos dados occura por lo menos uno de los siguientes eventos:
Evento A: Se obtiene un número par. Evento B: se obtiene un número mayor a 8.

$$P(A) = ?$$

$$P(B \mid A) = ?$$

$$P(B) = ?$$

RECAPITULANDO LAS REGLAS DE PROBABILIDAD QUE HEMOS ACUMULADO

La regla de la suma:

$$P(A\,o\,B) = P(A) + P(B) - P(B\,|\,A)$$

La regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A\,o\,B) = P(A) + P(B)$$

La regla de la resta:

$$P(A) = 1 - P(No\,A)$$

La regla de la multiplicación:

$$P(A\,y\,B) = P(B\,|\,A) * P(B)$$

Regla especial de multiplicación cuando A y B son independientes:

$$P(A\,y\,B) = P(A) * P(B)$$

EJEMPLO REGLA DE LA RESTA

Asumamos que el evento A es obtener al menos un 6 aventando cuatro veces un dado. Calcular la probabilidad de A.

$$P(No\,A) = \frac{5}{6}$$

Esta es la probabilidad de no sacar un 6 en una tirada del dado. Recordemos que aventamos el dado 4 veces. Entonces:

$$P((No\,A) = (\frac{5}{6})^4 = 0.482$$

La probabilidad de A es dada por:

$$P(A) = 1 = P(no\,A) = 1 - 0.482 = 0.518$$

TEOREMA DE BAYES O LOS FALSOS POSITIVOS

EJEMPLO 1: La probabilidad de que a un alumno seleccionado al azar le guste hacer ejercicio es 35% y la probabilidad de que le guste beber smoothies es 65%. Además se sabe que la probabilidad de que a un alumno le guste el smoothie dado que le gusta hacer ejercicio es 40%. Calcular la probabilidad de que a un alumno le guste hacer ejercicio dado que le gustan los smoothies.

Evento A: Al alumno le gusta hacer ejercicio.

Evento B: Al alumno le gustan los smoothies.

EJEMPLO 1 BAYES (CONT.)

Sabemos que:

$$P(A) = .35$$

$$P(B) = .65$$

$$P(B \mid A) = .4$$

Queremos saber P(A | B)?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)} = 0.21$$

Decimos entonces que la probabilidad de que a alumno le gusten los smoothies dado que le gusta hacer ejercicio es 21%

UN EJEMPLO MAS DEL TEOREMA DE BAYES

Ejemplo 2: Supongamos que una de cada mil personas estan infectados con un bicho raro. Y supongamos que existe una prueba que es buena, pero no perfecta, para detectarlo. Si la persona tiene el bicho, la prueba sale positiva el 99% de los casos. Pero la prueba también produce algunos **falsos positivos**. Aproximadamente el 2% de quienes no tienen el bicho salen positivos.

Esa persona se hace la prueba y sale positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga el bicho?

TEOREMA DE BAYES (CONT.)

Tenemos dos eventos:

Evento A: El paciente tiene el bicho.

Evento B: El paciente sale positivo.
- Un paciente de cada mil tiene el bicho

$$P(\textit{tener bicho}) = .001$$

- La probabilidad de un test positivo dado que se tiene la infección es:

$$P(\textit{salir positivo dado que bicho}) = 0.99$$

- La probabilidad de un falso positivo dado que no hay infección:

$$P(\textit{positivo dado que no tiene bicho}) = 0.02$$

- Estamos buscando:

$$P(A \mid B) = ??? = 0.0495$$

EJEMPLO BAYES (CONT.)

Vamos a dividir el espacio muestra en cuatro eventos mutuamente excluyentes. La tabla abajo tiene todas las combinaciones posibles del estado de la infección y el resultado.

	A	No A
B	A y B	No A y B
No B	A y No B	No A y No B

Encontremos las probabilidades de cada evento en la tabla.

	A	No A	Suma
B	P(A y B)	P(No A y B)	P(B)
No B	P(A y No B)	P(No A y No B)	P(No B)
	P(A)	P(No A)	1

EJEMPLO (CONT.)

Calculamos:

$$P(A\,y\,B) = P(B \mid A) * P(A) = (.99) * (.001) = .00099$$

$$P(no\,A\,y\,B) = P(B \mid no\,A) * P(no\,A) = (.02) * (.999) = .01998$$

$$P(no\,A\,y\,B) = P(B \mid no\,A) * P(Not\,A) = (.02)(.999) = 0.01998$$

	A	No A	Suma
B	.00099	.01998	.0297
No B	P(A y No B)	P(No A y No B)	P(No B)
	.001	.999	1

LA TABLA FINAL ES:

	A	No A	Suma
B	.00099	.01998	.0297
No B	.00001	.97902	.97903
	.001	.999	1

De lo que derivamos:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\,y\,B)}{P(B)} = \frac{.00099}{.0297} = .0472$$

Menos del 5% de los que se hacen la prueba son positivos.

EJEMPLO BAYES (CONT.)

En un grupo de 1000 pacientes sólo 21, en promedio, saldrá positivo – y solo **UNO** de ellos tiene el bicho. Hay 20 **falsos positivos** que vienen del grupo grande de personas que **no están infectadas**.

	Bicho	No Bicho	Suma
$+$	1	20	21
No $+$	0	979	979
	1	999	1000

TEOREMA DE BAYES

Los pasos anteriores se pueden expresar formalmente con la siguiente fórmula:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(A) * P(B \mid A) + P(No\, A) * P(B \mid No\, A)}$$

PERMUTACIONES

Cuando cada resultado es igualmente posible, para poder calcular la probabilidad del evento A necesitamos contar el número de elementos en evento A **y** el número de elementos en el espacio muestra.

Permutación: Es el número de formas posibles en que podemos ordenar objetos.

Ejemplo: Tenemos tres objetos A, B, y C. Hay 6 formas únicas de acomodarlos: {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}

¿Cómo podemos calcular el número de permutaciones sin tener que listar cada acomodo posible?

PERMUTACIONES (CONT.)

1. Primero podemos escoger A, B, o C.
2. Una vez que el primer objeto es seleccionado, hay dos formas de escoger el segundo objeto. Esto nos deja con una sola forma para escoger el tercer objeto.

Veámoslo en un árbol de decisión. En el árbol, el número total de hojas es igual al número de permutaciones. Entonces, para calcular el número total de hojas solo tenemos que multiplicar secuencialmente el número de ramas en cada nivel (3x2x1)

PERMUTACIONES (CONT.)

Generalizando la idea, podemos calcular el número de permutaciones de *k* objetos de un conjunto de *n* objetos únicos, denotado por ${}_{n}P_{k}$ en donde $k \geq n$ usando la siguiente fórmula:

$$n\ P\ k\ = n * (n-1) * ... * (n-k+2) * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

! es el *factorial*. Cuando *n* es un número entero no negativo, n! = (n)*(n-1)*. . . 2*1. Nótese que 0! = 1.

PERMUTACIONES (CONT.)

En el ejemplo previo (i.e. el de los objetos A, B, y C), $n = 3$ y $k = 3$, por lo tanto:

$$3 \ P \ 3 \ = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

Ejemplo 2: Calcular la forma en que se pueden arreglar 4 cartas de un total de 13 cartas únicas.
$n = 13 \ k = 4$

$$13 \ P \ 4 \ = \frac{13!}{(13-4)!} = 13 * 12 * 11 * 10 = 17160$$

PERMUTACIONES (CONT.)

Ejemplo 3: Si hay 15 estudiantes en una clase, y contamos con seis sillas en la primera fila, ¿cuántos arreglos con dichos estudiantes se pueden hacer en la primera fila?
$n=$? $k=$?

3,603,600 es el resultado.

COMBINACIONES

Otro método de conteo son las *combinaciones*. Las combinaciones son parecidas a las permutaciones, pero las primeras ignoran el orden mientras que las segundas no.

Esto es, las *combinaciones* son formas de escoger k elementos distintos de n elementos sin importarnos su órden. Esto es, cuando escogemos 2 elementos, dos permutaciones diferentes, AB y BA, representan un combinación *idéntica*.

Dado que el orden no importa, el número de combinaciones *nunca* es mayor al número de permutaciones.

COMBINACIONES (CONT.)

Por ejemplo, si escogemos 2 elementos distintos de un total de 3 elementos A, B, C, el número de permutaciones será 6 (i.e. ${}_3P_2$), mientras que el número de combinaciones será 3 (AB, AC, BC).

De hecho, para calcular el número de combinaciones, primero calculamos permutaciones ${}_nP_k$ y las dividimos por $k!$.

En el ejemplo anterior, por cada conjunto de dos elementos (e.g., A y B), tenemos 2! formas de acomodarlos (AB y BA) pero estas dos permutaciones cuentan como una sola combinación.

Para obttener el número de combinaciones podemos hacer la división entre ${}_3P_2$ y 2! que es igual a 3.

COMBINACIONES (CONT.)

Recapitulando, el número de **combinaciones** cuando escogemos k elementos distintos de n elementos es denotada como ${}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}$ 0 $\binom{n}{k}$ y se calcula de la siguiente forma:

$$n\ C\ k = \binom{n}{k} = \frac{n\ P\ k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

COMBINACIONES (CONT.)

Ejemplo 1: Si un club tiene 10 miembros, ¿cuántos comités de tres se pueden formar?

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{6!(7)!} = 120$$

COMBINACIONES (CONT.)

Ejemplo 2: Supongamos que tenemos tres partidos (Liberal, Demócrata Cristiano, Verdes). Los Liberals tienen 6 miembros senior, DCs tienen 5 miembros senior y los Verdes tienen 4 miembros senior.
¿Cuántas formas distintas hay de escoger un gabinete con 3 liberales, 2 demócratas cristianos y 3 verdes?

Esta es una sucesión de combinaciones.

$$\binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{4}{3} = \frac{720}{6(6)} * \frac{120}{2(6)} * \frac{24}{6(1)} = 20 * 10 * 4 = 800$$

Table of Contents