Media y varianza de una variable aleatoria

Dra. Isabel Patricia Aguilar Juárez

Parámetros Numéricos de una Variable Aleatoria

Si bien, el comportamiento probabilísta de las variables aleatorias queda completamente especificado mediante las funciones de probabilidad o de densidad, según sea el caso, en ocasiones es conveniente trabajar con algunas características numéricas que describen el comportamiento de la variable aleatoria.

Las características numéricas se clasifican en tres:

- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión
- Parámetros de forma.

Medidas de Tendencia Central

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

El concepto de valor esperado es sin duda uno de los más importantes en el estudio de las distribuciones de probabilidad. Tiene sus orígenes en los juegos de azar, debido a que los apostadores querían saber cuál era su expectativa en un juego después de participar en él muchas veces.

Medidas de Tendencia Central

Definición

Sea X una v.a. con distribución de probabilidad $f_X(x)$. El valor esperado de X es:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\forall x} x f_X(x) & \text{para X discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx & \text{para X continua} \end{cases}$$

Es muy común denotar al valor esperado de una v.a. X mediante μ_X, y en ocasiones, simplemente μ .

Medidas de Tendencia Central

Ejemplo

Un automovilista desea asegurar su coche por 50,000 U.M. La compañía aseguradora estima que una pérdida total puede ocurrir con una probabilidad de 0.002, un 50% de pérdida con una probabilidad de 0.01, y un 25% de pérdida con una probabilidad de 0.1. Ignorando todas las otras pérdidas parciales,)qué prima deberá cobrar anualmente la compañía aseguradora para tener una utilidad promedio por automóvil de 500 U.M.?

Resolución:

Sea c la prima y X la v.a. que representa la utilidad, entonces

x	$c - 50{,}000$	$c - 25{,}000$	$c - 12{,}500$	c
$f_X(x)$	0.002	0.01	0.1	0.888

Medidas de Tendencia Central

Resolución:

Sea c la prima y X la v.a. que representa la utilidad, entonces

x	c – 50,000	c – 25,000	c – 12,500	c
$f_X(x)$	0.002	0.01	0.1	0.888

Para que la utilidad promedio sea de 500 , se debe satisfacer E(X) = 500, de donde

E(X) = (c – 50,000)(0.002) + (c – 25,000)(0.01) + (c – 12,500)(0.1)

+ c (0.888)

E(X) = 500

Por lo que c = 2,100 U.M.

La prima deberá de ser de 2,100 u.m.

Medidas de Tendencia Central

Ejemplo

La función de densidad de la v.a. continua , el número total de horas, en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora durante un año está dado por

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Obtener el número promedio de horas por año que la familia utiliza la aspiradora.

Resolución:

$$E(X) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2 - x) dx = 1$$

La aspiradora se usa en promedio 100 horas al año.

Medidas de Tendencia Central

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

1. El valor esperado de una constante es la misma constante, es decir, $E(c) = c$.
2. El valor esperado de una v.a. por una constante es la constante por el valor esperado de la v.a. Esto es, $E(cX) = c\,E(X)$
3. El valor esperado de la cantidad $aX + b$, donde y son constantes es el producto de por el valor esperado de más .

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

Medidas de Tendencia Central

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

4. El valor esperado de una suma de funciones es igual a la suma de los valores esperados. Es decir, si $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones de X , entonces

$$E\left(g_1(x)+g_2(x)\right)=E\left(g_1(x)\right)+E\left(g_2(x)\right)$$

5. Si es una función de X , entonces:

$$E\left(g(x)\right)=\begin{cases}\sum_{\forall x} g(x) f_X(x) & \text{para X discreta}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx & \text{para X continua}\end{cases}$$

Medidas de Tendencia Central

INTERPRETACIONES DEL VALOR ESPERADO

El valor esperado de una v.a. discreta puede ser interpretado como el centro de masa de una distribución de masas $f_X(x_i)$ colocadas en los puntos x_i del eje X

El valor esperado de una v.a. continua puede ser interpretado como la abscisa del centroide de la figura formada por la función f_X junto con el eje X (y los extremos de f_X si los hubiera).

EJEMPLO

Por ejemplo, considérese una pequeña rifa que depende del resultado de un dado. El boleto para participar en la rifa cuesta un peso, y el apostador recibe cinco pesos si el resultado es 6 (tiene una ganancia de 4 pesos), y en caso contrario pierde el valor del boleto con el que participó en la rifa. Después de un gran número de juegos, □cuál será su pérdida o ganancia?

Para contestar se debe considerar a la distribución de probabilidad como la frecuencia relativa a largo plazo de los resultados que se obtendrán, de manera que, si X es la v.a. que representa el resultado del dado, la probabilidad de ganar es $P(X = 6) = 1/6$, mientras que la probabilidad de perder es $P(X \neq 6) = 5/6$, de donde la ganancia esperada promedio por rifa es:

$$4\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

Es decir, después de jugar un gran número de veces, el apostador pierde un sexto de peso en promedio por rifa.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión indican la lejanía de los valores que puede tomar la variable aleatoria. Las principales medidas de dispersión son el rango, la desviación media, la variancia, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Definición

La varianza se denota por o bien por y se define como el promedio del cuadrado de la diferencia de la variable aleatoria y su media.

Matemáticamente:

$$
Var(X) = \begin{cases} \sum_{\forall x} (x - \mu_X)^2 f_X(x) & \text{para } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\, dx & \text{para } X \text{ continua} \end{cases}
$$

De la definición de la varianza, y utilizando las propiedades del valor esperado, se puede escribir la varianza como:

$$
Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2
$$

Dra. Isabel Patricia Aguilar Juárez

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

PROPIEDADES DE LA VARIANZA

1. La varianza de una constante es cero. Es decir, $Var(c) = 0$.
2. La varianza de una v.a. por una constante es la constante elevada al cuadrado, por la varianza de la v.a. Esto es,
$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$
3. La varianza de la cantidad $aX + b$, donde a y b son constantes es el producto del cuadrado de a por la varianza de X.

$$Var(aX + b) = Var(aX) = a^2 Var(X)$$