

Tema 1. Repaso de Probabilidad

En la vida diaria, así como en muchas situaciones que se presentan en diferentes ámbitos empresariales, se percibe la existencia de la aleatoriedad, y es necesario analizar su comportamiento y modelarla de manera que se favorezca una mejor toma de decisiones.

Como sabemos, la Probabilidad es la disciplina de las matemáticas que nos permite estudiar el comportamiento de la aleatoriedad. Sin embargo, si consideramos aleatorio aquello que bajo las mismas circunstancias no tiene un resultado único, cabría la discusión entre quienes aceptan la existencia de la aleatoriedad y quienes no, por considerar estos últimos que todo está determinado por las circunstancias.

En realidad, ya sea que el mundo sea o no determinista, dado que muchísimas circunstancias que se pueden presentar están fuera de nuestro control, existe la posibilidad de que al repetir ciertas situaciones controlables, obtengamos resultados distintos, caso que se puede analizar a través de la probabilidad.

1.1. Concepto de Probabilidad.

Para poder definir nuestro objeto de estudio, precisaremos primero algunos términos que utilizaremos en adelante.

Entenderemos como **experimento** cualquier procedimiento capaz de producir resultados observables. Existen experimentos tales que al repetirse bajo las mismas condiciones controlables presentan siempre el mismo resultado, los cuales reciben el nombre de **experimentos deterministas**, o bien aquellos que pueden presentar resultados distintos al repetirse bajo las mismas condiciones controlables. Estos últimos se conocen como **experimentos aleatorios**.

En nuestra vida diaria, nos enfrentamos tanto a los experimentos deterministas como a los aleatorios, y necesitamos analizarlos para poder tomar decisiones adecuadas, pero mientras que en el caso de los experimentos deterministas basta con una observación para conocer el resultado que presentará siempre, en el caso aleatorio no es así, y para analizarlo se requerirá de un modelo que posea también la característica de producir resultados distintos a circunstancias iguales. Por tal razón, es claro que los modelos probabilistas no permiten predecir el resultado de un experimento, sino que solamente indican la frecuencia con que cabe esperar que ocurra un resultado específico al repetir el experimento un número grande de veces, o bien la certidumbre que se tiene con respecto a la obtención de ese resultado en una sola ejecución del experimento.

Debido a la gran importancia y necesidad de estudiar este tipo de modelos se ha desarrollado toda una disciplina de las matemáticas, **la Probabilidad**. No obstante, se utiliza el mismo término de probabilidad para denominar a la medida del grado de

certidumbre que se tiene en la ocurrencia de un resultado específico del experimento aleatorio. Esto es, se tienen dos acepciones del término “Probabilidad”:

- 1) La **Probabilidad** es la disciplina de las matemáticas que se encarga del estudio de los modelos matemáticos de tipo probabilista.
- 2) La **Probabilidad** es una medida del grado de certidumbre que se tiene en la ocurrencia o no ocurrencia de un resultado particular de un experimento aleatorio.

1.2. Espacio Muestral. Eventos.

Partiendo entonces de que nuestro objeto de estudio serán los experimentos aleatorios, el primer paso será identificar a todos los resultados posibles del experimento, para posteriormente seleccionar aquellos que sean de interés. Esto da lugar a una serie de definiciones que son la piedra angular de la teoría de la Probabilidad.

Definición:

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **Espacio Muestral** y se denota por S o bien por Ω .

Ejemplo 1

Considere el experimento que consiste en observar el resultado que se obtiene al lanzar un dado con seis caras numeradas del 1 al 6. El espacio muestral de dicho experimento es $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Ejemplo 2

Considere el experimento que consiste en observar el mes de nacimiento de tres personas. El espacio muestral correspondiente a dicho experimento es el conjunto de ternas ordenadas

$$S = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), \dots \}$$

O de otra manera,

$$S = \{ (a, b, c) \mid 1 \leq a \leq 12, 1 \leq b \leq 12, 1 \leq c \leq 12, a, b, c \in \mathbb{N} \}$$

Definición:

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Se acostumbra denotar a los eventos mediante letras mayúsculas, preferentemente las primeras del alfabeto.

Desde esta concepción es útil identificar y definir algunos eventos sobresalientes y

que por su importancia reciben un nombre propio. Algunos de ellos los definimos a continuación.

EVENTOS NOTABLES

Eventos Simples son aquellos que constan de un solo resultado posible, esto es, son de cardinalidad 1.

Eventos Compuestos son los que constan de más de un resultado posible, es decir, tienen cardinalidad mayor o igual a 2

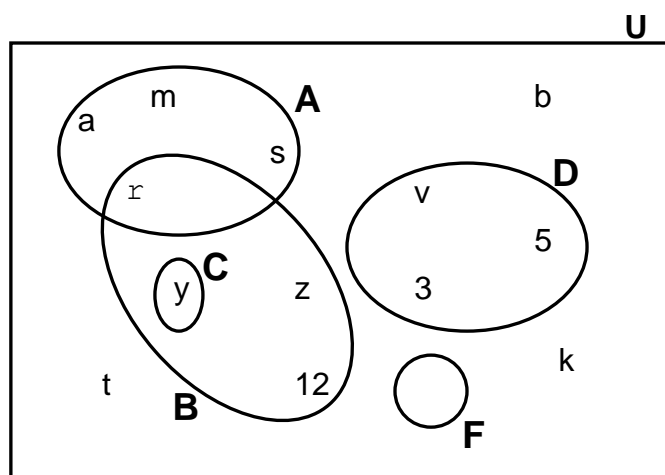
Evento Seguro es aquel que con seguridad ocurrirá. Es, por tanto, el espacio muestral y se denota por S .

Evento Imposible es aquel que nunca ocurrirá. Se denota por \emptyset .

Eventos excluyentes o mutuamente excluyentes son aquellos cuya intersección es vacía.

Ejemplo 3

Consideremos el siguiente espacio muestral, correspondiente a un experimento cualquiera.



C es un evento simple.

C está contenido en B.

A y D son eventos mutuamente excluyentes.

B y D son eventos mutuamente excluyentes.

F es el evento imposible.

A y B no son excluyentes.

1.3. Diversas interpretaciones de la probabilidad. Definición axiomática de Probabilidad.

Existen tres formas principales de asignar probabilidades a los eventos. Estas formas se conocen comúnmente como **interpretaciones de probabilidad o escuelas de probabilidad**, y aunque en algunos casos cualquiera de ellas se podría

utilizar, esa posibilidad no siempre existe. Por tal razón es importante conocer cada una de estas interpretaciones, así como sus premisas no solo para poder aplicarlas adecuadamente, sino también para tratar de encontrar coincidencias entre ellas, que nos permitan desarrollar una teoría general.

1.3.1. Interpretaciones de probabilidad.

1) Interpretación Clásica

Si un experimento tiene un espacio muestral finito y todos los resultados son igualmente factibles, entonces la probabilidad de que ocurra el evento A es el cociente entre el número de eventos simples en A y el número de eventos simples en el espacio muestral S. Esto se denota como

$$P(A) = \frac{\# A}{\# S}$$

Ejemplo 4

En un tiro al blanco se tienen 12 resultados posibles, a saber: -15, -4, 0, 1, 15, 40, 50, 100, 150, 300, 500, 1000, todos igualmente probables. Calcular

- a) La probabilidad de acertar a un número negativo.

Llamemos A al evento de acertar a un número negativo. Entonces $P(A) = 2/12$

- b) La probabilidad de que el resultado sea un número positivo.

Sea B el evento de acertar a un número positivo. Entonces $P(B) = 9/12$

- c) La probabilidad de acertar al cero.

Sea C el evento de acertar al cero, entonces, $P(C) = 1/12$

- d) La probabilidad de acertar a un número no negativo.

$$P(B \cup C) = \frac{\#(B \cup C)}{\# S} = 10/12$$

2) Interpretación Frecuentista

De acuerdo con esta interpretación la probabilidad de un evento es la frecuencia relativa con la que se presenta dicho evento en un número grande de experimentaciones. Esto es,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

donde

$n(A)$ es el número de veces que se observa el evento A en n repeticiones del experimento.

Ante la imposibilidad de realizar una infinidad de experimentaciones la probabilidad de A se aproxima mediante el cociente $\frac{n(A)}{n}$ con n suficientemente grande. Es decir,

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n}$$

Es importante insistir en que entre más grande sea n , mejor será la aproximación.

Ejemplo 5

Se tienen 200 cilindros de concreto y se someten a una prueba de compresión. Todos los cilindros son iguales y están bajo las mismas condiciones de humedad y temperatura. Los resultados observados son los siguientes:

Límites	Frecuencias
171 – 180	10
181 – 190	12
191 – 200	25
201 – 210	132
211 – 220	21

La resistencia está medida en kg/cm^2 . Calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

- A: Un cilindro resiste entre 191 y 200 kg/cm^2 .
- B: Un cilindro resiste entre 201 y 210 kg/cm^2 .
- C: Un cilindro resiste entre 191 y 210 kg/cm^2 .
- D: Un cilindro resiste a lo sumo 200 kg/cm^2 .

$$P(A) = 25 / 200 = 0.125$$

$$P(B) = 132 / 200 = 0.66$$

$$P(C) = 157 / 200 = 0.785$$

$$P(D) = 47 / 200 = 0.235$$

3) Interpretación Subjetiva

De acuerdo con esta interpretación la probabilidad de un evento es el grado de certidumbre que tiene quien asigna la probabilidad, en la ocurrencia de un evento. Una probabilidad igual a cero indica la total certeza de que el evento no ocurrirá y una probabilidad igual a uno indica la certeza absoluta de que el evento ocurrirá.

A pesar de ser tres concepciones diferentes de la probabilidad, es posible encontrar aspectos comunes, los cuales permiten desarrollar una sola teoría.

1.3.2. Definición axiomática de la probabilidad.

De lo anterior se desprende que la probabilidad es una función de conjunto cuyo dominio es el conjunto potencia del espacio muestral (conocido como σ - álgebra de eventos) y su contradominio los números reales.

La probabilidad se denota por **P** y satisface las siguientes propiedades, que se deben a la construcción hecha por el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903 – 1987)

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

- 1) Si A es un evento, entonces $P(A) \geq 0$
- 2) $P(S) = 1$
- 3) Si A_1, A_2, \dots, A_n son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

A partir de estos axiomas es posible desarrollar y demostrar los siguientes teoremas, de los cuales omitimos la demostración, aún cuando en general es bastante sencilla, ya que basta con la aplicación, en ocasiones reiterada de los axiomas de probabilidad.

1.4. Cálculo de probabilidades de uniones e intersecciones de eventos.

Teorema 1

$$P(\emptyset) = 0.$$

Teorema 2

Si A es un evento, entonces A^c también lo es, y $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Teorema 3

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 6

Recientemente se ha cuestionado la aceptabilidad de un acueducto ya existente para transportar flujo anticipado. Mediante simulación el ingeniero ha estimado tasas de flujo máximo anual así como sus probabilidades de ocurrencia (suponiendo que el flujo máximo posible es $12 \text{ cm}^2/\text{s}$), como sigue:

Eventos

A: El flujo que se presenta está entre 5 y $10 \text{ cm}^2/\text{s}$, inclusive.

B: El flujo que se presenta está entre 8 y $12 \text{ cm}^2/\text{s}$, inclusive

$$C = A \cup B$$

Probabilidades de ocurrencia

$$P(A) = 0.6 \quad ; \quad P(B) = 0.6 \quad ; \quad P(C) = 0.7$$

Calcular las siguientes probabilidades:

- a) $P(A \cap B)$
- b) $P(A \cap C)$
- c) $P(A^c \cup B^c)$
- d) $P(A^c)$
- e) $P(B \cup A^c)$

Resolución

$$\text{a) } P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.6 + 0.6 - 0.7 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A \cap C) &= P(A \cap (A \cup B)) = P((A \cap A) \cup (A \cap B)) \\ &= P(A \cap A) + P(A \cap B) - P(A \cap A \cap B) \\ &= P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) = 0.6 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\text{d) } P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } P(B \cup A^c) &= P(B) + P(A^c) - P(B \cap A^c) \\
 &= 0.6 + 0.4 - P(B) + P(A \cap B) \\
 &= 0.6 + 0.4 - 0.6 + 0.5 \\
 &= 0.9
 \end{aligned}$$

1.5. Probabilidad Condicional.

Es común en la vida cotidiana, que quien está haciendo el análisis de una situación, ya sea problemática o no, tenga alguna información acerca del comportamiento aleatorio del experimento, lo cual puede hacer que la probabilidad de un evento sea diferente a la que tendría ante un desconocimiento total de la situación.

Dado que estas probabilidades son quienes nos darán la pauta para la toma de decisiones, es importante que seamos capaces de involucrar en nuestros cálculos la información que se va generando durante el desarrollo del experimento, de manera que nuestras conclusiones sean más certeras, y las decisiones más eficientes.

Por lo expuesto anteriormente, es necesario tratar el tema de probabilidad condicional, lo cual nos permitirá, además, analizar algunas relaciones que podrían existir entre los eventos.

Definición:

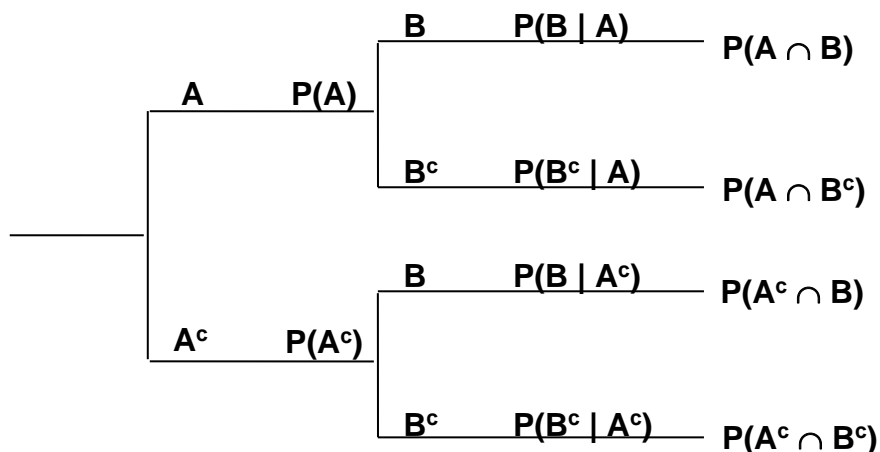
Si A y B son dos eventos, se define la **probabilidad condicional de A dado B** como la probabilidad de que ocurra el evento A cuando el evento B ya ocurrió o se tiene la certeza de que ocurrirá, y se calcula como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ; \quad P(B) \neq 0$$

De la misma manera, se define la **probabilidad condicional de B dado A** como la probabilidad de que ocurra el evento B cuando el evento A ya ocurrió o se tiene la certeza de que ocurrirá. Esta probabilidad se calcula como

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} ; \quad P(A) \neq 0$$

A partir de esta definición de probabilidad condicional, es posible obtener una forma de cálculo para la probabilidad de la intersección de dos eventos, cuando se desconoce la probabilidad de su unión, de acuerdo con el siguiente resultado.



Teorema 4 (Regla de la multiplicación)

Si A y B son dos eventos, entonces

y también

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$$

Ejemplo 7

En un pedido de dos sandías se desconoce si son rojas o amarillas y se desea calcular las siguientes probabilidades:

- La probabilidad de que las dos sandías sean rojas.
- La probabilidad de que si una de las sandías es roja, las dos lo sean.

Para poder resolver el problema es necesario empezar por definir algunos eventos.

Sean A: el evento de que la primera de las dos sandías sea roja, y
B: el evento de que la segunda de las sandías sea roja.

Si observamos el espacio muestral $S = \{ (r, r), (r, a), (a, r), (a, a) \}$ y consideramos que todos los eventos simples son igualmente probables, los cálculos solicitados se realizan como sigue:

a) $A \cap B = \{ (r, r) \}$, de donde, $P(A \cap B) = 1 / 4 = 0.25$

b) $A \cup B = \{ (r, r), (a, r), (r, a) \}$, de donde, $P(A \cup B) = 3 / 4 = 0.75$

Utilizando la definición de probabilidad condicional, la probabilidad que se nos pide calcular en el inciso (b), la podemos expresar como $P[A \cap B \mid A \cup B]$, que se obtiene como

$$P[A \cap B \mid A \cup B] = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Pero analicemos ahora lo que pasa al imponer una condición. En este mismo ejemplo consideremos la condición impuesta de que al menos uno de los sandías es roja, entonces, el evento (a, a) no es factible, con lo cual, el espacio muestral se modifica, es más, se reduce al conjunto

$$S_{A \cup B} = \{ (r, r), (r, a), (a, r) \}$$

Si calculamos ahora $P(A \cap B)$ a partir de este espacio muestral reducido, se puede observar con toda claridad que $P(A \cap B) = 1/3$. ¡Exactamente lo que habíamos calculado usando la definición! y esto se debe a que en absolutamente todos los casos, el hecho de imponer una condición equivale a restringir al espacio muestral únicamente al evento que está dando la condición. Este hecho puede hacer que la probabilidad buscada cambie con respecto a aquella que está referida al espacio muestral original S aunque también podría no haber cambio alguno.

Ejemplo 8

Se lanzan dos dados balanceados y se definen los eventos

A: el resultado del lanzamiento del primer dado es par.

B: el resultado del lanzamiento del segundo dado es 4.

C: el resultado del lanzamiento del primer dado es 3.

Calcular

a) $P(A \mid B)$

$$S = \{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6 \} \quad \#S = 36$$

Entonces, $P(A \mid B) = 1/2$

b) $P(B \mid C) = 1/6$

c) $P(A \mid C) = 0$

d) $P(C \mid A) = 0$

e) $P(A) = 1/2$

f) $P(B) = 1/6$

g) $P(C) = 1/6$

1.6. Independencia de eventos.

En relación a un mismo experimento aleatorio pueden existir eventos que estén relacionados entre sí y aquellos que no lo estén. El hecho de que dos eventos estén relacionados entre sí, producirá cambios en sus probabilidades de ocurrencia de ellos cuando se tenga información acerca de la ocurrencia o no ocurrencia de alguno de los eventos relacionados. Esta idea nos lleva a hablar del concepto de independencia de eventos.

Definición:

Dos eventos A y B son **independientes** si la probabilidad de A dado B es igual a la probabilidad de A, y también la probabilidad de B dado A es igual a la probabilidad de B, es decir, si la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no modifica en nada la probabilidad de ocurrencia del otro. Esto es, A y B son independientes si

$$P(A | B) = P(A)$$

y también

$$P(B | A) = P(B)$$

En el ejemplo anterior, A y B son independientes al igual que B y C, mientras que A y C no lo son.

Teorema 5

Dos eventos A y B son eventos independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Así como la probabilidad de una unión de eventos está relacionada con una suma de probabilidades, la probabilidad de la intersección está relacionada con el producto de probabilidades de eventos.

1.7. Teorema de Bayes.

Un resultado muy importante de la probabilidad es el teorema de Bayes, pues permite incorporar información adicional para el cálculo de las probabilidades actualizadas de los eventos.

Cabe mencionar que este teorema es fundamental en la Estadística Bayesiana.

Teorema 6 (Fórmula de Probabilidad Total)

Sean los eventos B_1, B_2, \dots, B_n una partición colectivamente exhaustiva del espacio muestral S , y sea A otro evento, entonces,

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

Pero sabemos que $P(A \cap B_i) = P(B_i) P(A | B_i)$, de donde se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 7 (Teorema de Bayes)

Sean los eventos B_1, B_2, \dots, B_n una partición colectivamente exhaustiva del espacio muestral S , y sea A otro evento, entonces,

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

Ejemplo 9

Una fábrica de artículos eléctricos recibe un cierto tipo de partes de tres proveedores conocidos como A, B, C. De acuerdo con las pruebas de calidad que efectúa la fábrica al recibir cada remesa, se sabe que el 10% de las partes recibidas de A no satisface las especificaciones, mientras que por parte de B y C dichos porcentajes son 5% y 8% respectivamente. Ante tal experiencia, la política de la fábrica ha sido requerir el 20% de los pedidos a A, el 50% a B y el 30% a C. Una vez recibidas y revisadas las remesas se juntan todas las partes recibidas. Si se selecciona aleatoriamente una parte de las almacenadas,

- ¿Cuál es la probabilidad de que cumpla con las especificaciones?
- Si la parte seleccionada no cumple con las especificaciones, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vendida por A?

Resolución:

Definamos los siguientes eventos:

- A: La parte seleccionada fue fabricada por A
- B: La parte seleccionada fue fabricada por B
- C: La parte seleccionada fue fabricada por C
- D: El producto seleccionado está defectuoso.

Del enunciado sabemos que $P(A) = 0.20$, $P(B) = 0.50$, $P(C) = 0.30$,
 $P(D|A) = 0.10$, $P(D|B) = 0.05$, $P(D|C) = 0.08$

a. $P(D^c) = 1 - P(D)$

$$P(D) = P(A) P(D|A) + P(B) P(D|B) + P(C) P(D|C) \\ = 0.2 (0.1) + 0.5 (0.05) + 0.3 (0.08) = 0.069$$

$$P(D^c) = 0.931$$

b. $P(A|D) = \frac{P(A) P(D|A)}{P(C) P(D|C) + P(B) P(D|B) + P(A) P(D|A)} = \frac{0.20 (0.10)}{0.069} = 0.2898$

Ejemplo 10

En una ciudad determinada, el 30% de las personas son conservadores, el 50% liberales y el 20% son independientes. Los registros muestran que en unas elecciones concretas votaron 65% de los conservadores, el 82% de los liberales, y el 50% de los independientes.

- Si se selecciona al azar una persona de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado?
- Si se selecciona al azar una persona de la ciudad y se sabe que no votó en las elecciones pasadas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un liberal?

Resolución

Definamos los eventos siguientes:

A: La persona seleccionada al azar es conservadora.

B: La persona seleccionada al azar es liberal.

C: La persona seleccionada al azar es independiente.

D: La persona seleccionada al azar votó en las elecciones pasadas.

a. $P(D) = ?$

$$\text{Entonces, } P(D) = 0.195 + 0.41 + 0.10 = 0.705$$

b. $P(B|D^c) = 0.09 / 0.295 = 0.305$

Esta forma de cálculo se puede visualizar a través de la utilización del siguiente diagrama de árbol de probabilidades,

A	P(A) = 0.30	D	$P(D A) = 0.65$	$P(A \cap D) = P(A) P(D A) = 0.195$
		D ^c	$P(D^c A) = 0.35$	$P(A \cap D^c) = P(A) P(D^c A) = 0.105$
	P(B) = 0.50	D	$P(D B) = 0.82$	$P(B \cap D) = P(B) P(D B) = 0.41$
		D ^c	$P(D^c B) = 0.18$	$P(B \cap D^c) = P(B) P(D^c B) = 0.09$
	P(C) = 0.20	D	$P(D C) = 0.50$	$P(C \cap D) = P(C) P(D C) = 0.10$
		D ^c	$P(D^c C) = 0.5$	$P(C \cap D^c) = P(C) P(D^c C) = 0.10$