VARIABLES ALEATORIAS

Dra. Isabel Patricia Aguilar Juárez

Variables Aleatorias

El propósito de la variable aleatoria (v. a.) es, transformar cada punto de un espacio muestral en un punto de un eje real, de tal manera que dicha transformación sea una función.

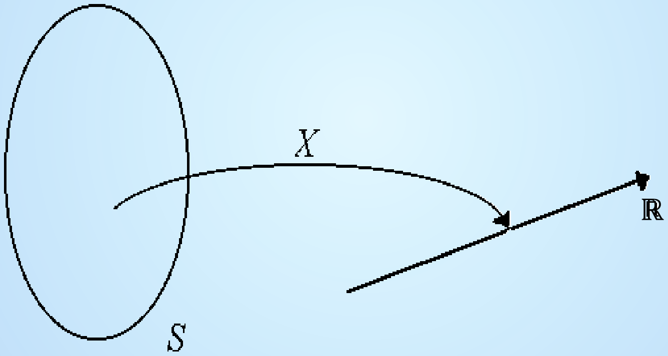
El objetivo de la variable aleatoria es simplificar el planteamiento de los resultados posibles mostrados en el espacio muestral, de manera que permita referirse a los elementos del espacio muestral a través de números reales.

A pesar de que se pueden construir una infinidad de variables aleatorias a partir de un espacio muestral dado, no todas las transformaciones permiten simplificar el problema y por lo tanto no son útiles.

Variables Aleatorias

Definición:

Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función, cuyos valores son números reales, definida en un espacio muestral. De una manera simple puede denotarse por $X\colon S \to \mathbb{R}$.



Usualmente, se denota a una variable aleatoria (v.a.) utilizando las últimas letras mayúsculas del alfabeto, y los valores de la imagen de dicha función, se conocen como valores de la variable aleatoria y se denotan con la misma letra que la función, pero con minúsculas. Finalmente, todos ellos se agrupan en un conjunto llamado rango de la variable.

Variables Aleatorias

Ejemplo

Considere las residencias en las que siembran dos plantas de bugambilia, la pregunta es conocer el número de bugambilias rojas en la residencia. Asignar valores de la variable aleatoria.
Si se denota por R al hecho de que las flores sean rojas, y con M que sea morada, entonces el espacio muestral es:

$$S = \{(R,R),(R,M),(M,R),(M,M)\}$$

Podrían realizarse varias asignaciones:

$$S = \{(R,R),(R,M),(M,R),(M,M)\}$$

	(R,R) ↓	(R,M) ↓	(M,R) ↓	(M,M) ↓
X :	1	2	3	4
Y :	0	1	2	3
Z :	1	2	2	3
W :	0	1	1	2

La construcción de una variable aleatoria es arbitraria, pero una forma adecuada de construirla es hacerlo de tal manera que responda a la pregunta de interés.

Variables Aleatorias

Ejemplo:

En el lanzamiento de dos dados se desea calcular la probabilidad de que la suma de los resultados de los lanzamientos de los dos dados sea par.

a) Definir el espacio muestral del experimento.

b) Definir una variable aleatoria adecuada para el problema.

c) Calcular la probabilidad de que la suma de resultados de los dos lanzamientos sea par.

Resolución:

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo (continuación):

La definición es la siguiente:
Sea X la variable aleatoria que representa la suma de los resultados en el lanzamiento de los dados.

Los posibles valores x de X son entonces:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Esto significa que R_X = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

Sea A el evento en el cual la suma de los resultados es par, es evidente que:

$$A = \{X = 2, X = 4, X = 6, X = 8, X = 10, X = 12\}$$

Por lo que

$$P(A) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12)$$

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Variables Aleatorias

Ejemplo:

En una ciudad se observa el tiempo que transcurre de un sismo a otro, el cual se representa mediante la v.a. T. Obtener el rango de T.

Considerando que de un sismo a otro debe de transcurrir algún tiempo, y que no se sabe cuánto tardará en ocurrir el nuevo sismo, se tiene:

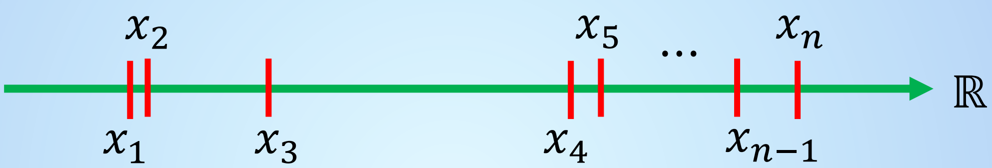
$$R_T = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

Como se puede observar en los ejemplos, el rango de una variable aleatoria puede ser un conjunto discreto (finito o infinito numerable) o continuo (infinito no numerable). Dependiendo de ello, las variables aleatorias se pueden clasificar como discretas, continuas o mixtas. Sin embargo, se estudiarán las características de las discretas y de las continuas, dejando las mixtas como una combinación de los casos anteriores.

Cuando el rango de la v.a. es un conjunto discreto, la v.a. se llama ***discreta***. Cuando el rango es un conjunto continuo, entonces la v.a. se dice ***continua***.

Variables Aleatorias

Un conjunto es discreto si su cardinalidad es finita o infinita contable



Un conjunto es continuo si su cardinalidad es infinita no contable

Clasificación de variables aleatorias

Ejercicio:

En cada uno de los siguientes casos determine si la variable aleatoria planteada es discreta o continua.

- X: El número de errores encontrados en una auditoría de los registros financieros de una compañía.

  $R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ n: número de registros revisados $\boxed{X \text{ es discreta}}$

- Y: El tiempo que espera un cliente para que le atienda la cajera en un supermercado.

  $R_Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ $\#R_Y = \infty$ no contable $\boxed{Y \text{ es continua}}$

- T: El número de automóviles que General Motors retirará el próximo año.

  $R_T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ R_T es contable $\boxed{T \text{ es discreta}}$

- W: La cantidad real de onzas de cerveza que contiene una lata de 12 onzas.

  $R_W = \{w \in \mathbb{R} \mid 0 \leq w \leq 12 + k\}$ $\#R_W = \infty$ no contable $\boxed{W \text{ es continua}}$

Variables Aleatorias Discretas

Definición:

Una variable aleatoria se dice discreta si su rango es un conjunto discreto, es decir, finito o infinito contable.

Una vez definida una variable aleatoria discreta, la probabilidad de cada uno de los elementos de su rango queda descrito por una función.

Definición:

Sea X una v.a. discreta, se define su función de probabilidad $f_X(x)$ como:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

donde

$$f: R_X \to [0, 1]$$

Variables Aleatorias Discretas

Propiedades de una función de Probabilidad

1) $0 \leq f_X(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in R_X$

2) $$\sum_{\forall x \in R_X} f_X(x) = 1$$

3) $$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} f_X(x)$$

Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo :

Al examinar pozos de agua en un distrito respecto a dos impurezas encontradas frecuentemente en el agua potable, se encontró que el 20% de los pozos no revelaban impureza alguna, el 40% tenían la impureza A, y el 50% la impureza B (naturalmente, algunas tenían ambas impurezas). Si se selecciona un pozo del distrito al azar, obtener la distribución de probabilidad para Y , esto es, el número de impurezas encontradas en el pozo.

Resolución:

Sea A el evento en el cual se tiene la impureza A, y B el evento en el cual se tiene la impureza B, entonces:

	A	A^C	Total
B	0.1	0.4	0.5
B^C	0.3	0.2	0.5
Total	0.4	0.6	1

Variables Aleatorias Discretas

Resolución (Continúa):

	A	A^C	Total
B	0.1	0.4	0.5
B^C	0.3	0.2	0.5
Total	0.4	0.6	1

De donde

$P(Y = 0) = P(A^C \cap B^C) = 0.2$

$P(Y = 1) = P(A^C \cap B) + P(A \cap B^C) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

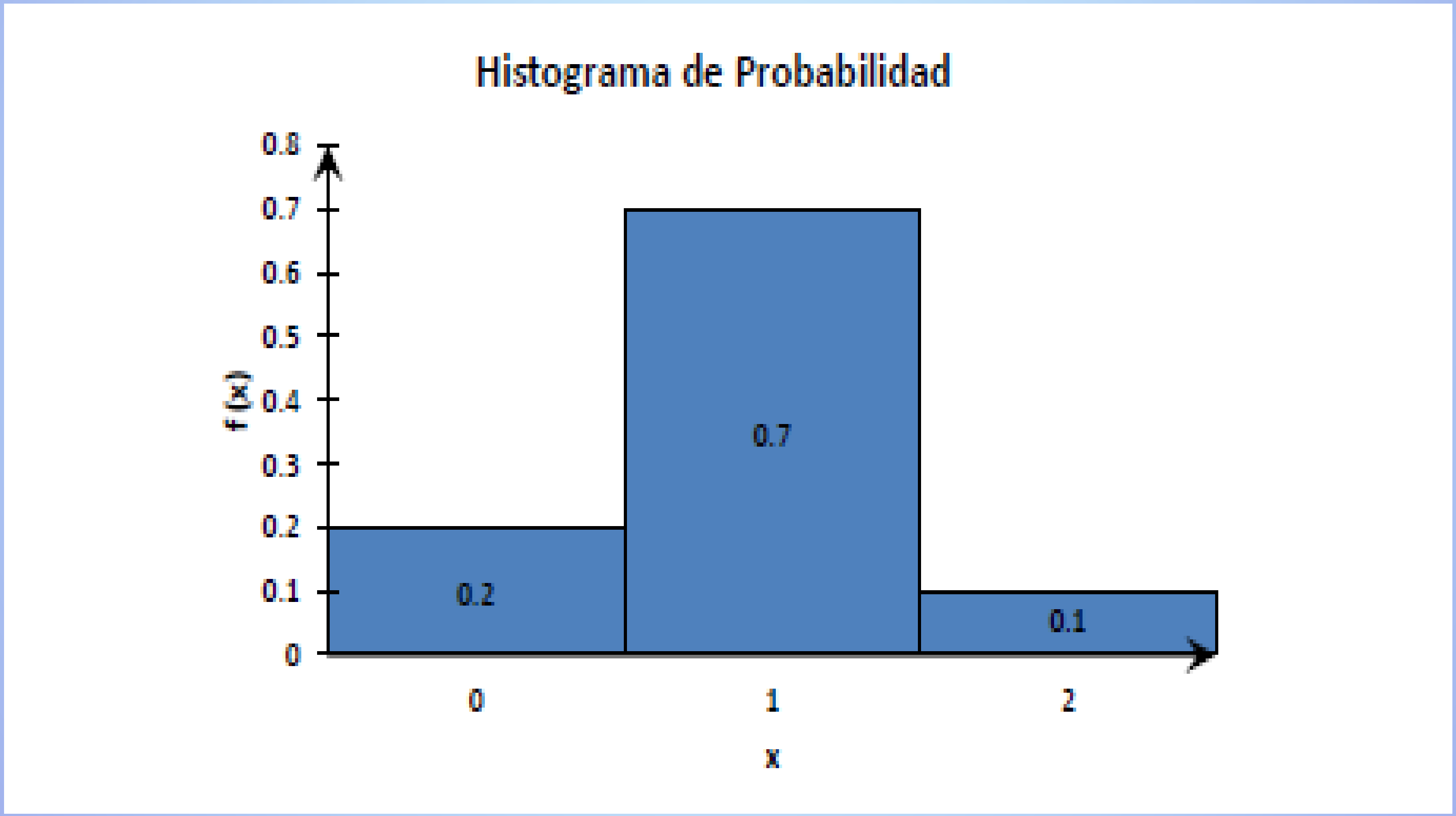
$P(Y = 2) = P(A \cap B) = 0.1$

Por lo que la función de probabilidad es:

y	0	1	2
$f_Y(y)$	0.2	0.7	0.1

Variables Aleatorias Discretas

Resolución (Continúa):



Ejemplo:

Considérese la v.a. cuyos posibles valores son 0, 1, 2, 3 y 4; y que tiene la siguiente función de probabilidad.

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1+k}{6}$	$\frac{1+2k}{6}$	$\frac{1+3k}{6}$	$\frac{1+4k}{6}$

a) Determinar el valor de la constante k para que $f_X(x)$ sea una función de probabilidad.

b) Calcular $P\ (X < 3)$.

Resolución:

a) Para que $f_X(x)$ sea una función de probabilidad, deben de cumplirse las propiedades 1 y 2.

Si $k > 0$ entonces se cumple que $f_X(x) > 0$

Y por otro lado:

$$\sum_{x=0}^{4} f_X(x) = \frac{1}{6} + \frac{1+k}{6} + \frac{1+2k}{6} + \frac{1+3k}{6} + \frac{1+4k}{6} = 1$$

De donde $k = \frac{1}{10}$

b) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1 + \frac{1}{10}}{6} + \frac{1 + \frac{2}{10}}{6} = \frac{11}{20}$$

Variables Aleatorias Continuas

Definición:

Una variable aleatoria se dice continua si su rango es un conjunto continuo, es decir, infinito no contable.

Definición:

Sea X una v.a. continua, se define su función de densidad $f_X(x)$ como una función con las siguientes propiedades:

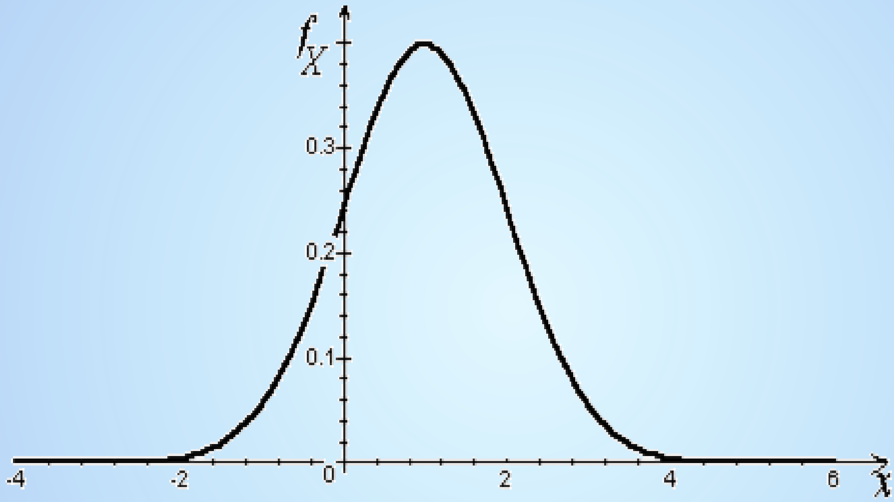
1) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in R_X$

2) $\int_{R_X} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3) $P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx$

Variables Aleatorias Continuas

Gráficamente, la función de densidad de una variable aleatoria continua, es la gráfica de una función continua o continua a pedazos.



Y de las propiedades y recordando las propiedades de la integral definida se tienen los siguientes resultados:

1) $P(X = x) = 0$

2) $P(a \le X \le b) = P(a < X < b)$

Variables Aleatorias Continuas

Ejemplo:

El tiempo requerido por los estudiantes para presentar un examen de una hora es una variable aleatoria Y con una función de densidad dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} c\,y^2 + y\,, & 0 \le y \le 1 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c que hace de $f_Y(y)$ una función de densidad.
b) Trazar la gráfica de $f_Y(y)$.
c) Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.
d) Dado que cierto estudiante necesita al menos 15 minutos para presentar el examen, obtener la probabilidad de que necesite al menos 30 minutos para terminarlo.

Resolución

Para determinar el valor de c, se debe considerar que la función $f_Y(y)$ debe ser no negativa e integrar uno, sobre el rango de la v.a.

Variables Aleatorias Continuas

a) $\int_0^1 (cy^2 + y)\, dy = 1$

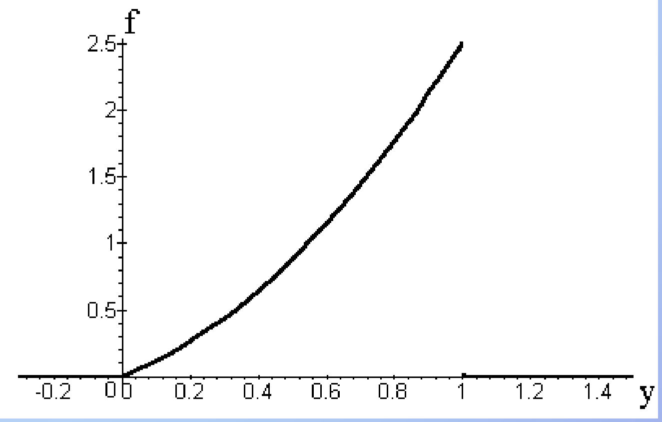
$$\int_0^1 (cy^2 + y)\, dy = c\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{3}{2}$$

Por lo que la función de densidad es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + y\,, & 0 \le y \le 1 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

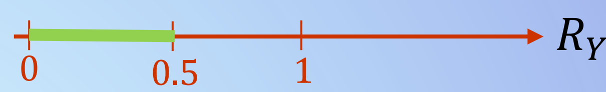
b)

y tiene la siguiente gráfica:



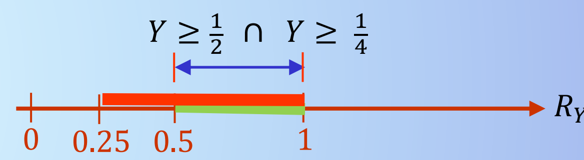
Variables Aleatorias Continuas

c) $P(0 \le Y \le 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy$



$$\int_0^{0.5} \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{2}\Bigg]_0^{0.5} = \frac{3}{16}$$

d) $P\left(Y \ge \frac{1}{2} \,\middle|\, Y \ge \frac{1}{4}\right) = \dfrac{P\left(Y \ge \frac{1}{2} \cap Y \ge \frac{1}{4}\right)}{P\left(Y \ge \frac{1}{4}\right)}$



$$= \frac{P\left(Y \ge \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y \ge \frac{1}{4}\right)} = \frac{\int_{0.5}^{1} \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy}{\int_{0.25}^{1} \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy}$$

$$= 0.8455$$

Variables Aleatorias Continuas

Ejemplo:

La temperatura de encendido de un interruptor con control termostático de un sistema de acondicionamiento de aire se ajusta a 60° F, pero la temperatura real X a cual el interruptor acciona es una variable aleatoria que tiene la función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 59 \leq x \leq 61 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular la probabilidad de que sea una temperatura mayor de 60° F la necesaria para que accione el interruptor.

b) Si se utilizan en forma independiente dos de tales interruptores, calcular la probabilidad de que ambos necesiten que la temperatura sea mayor de 60° F para que accionen.

Variables Aleatorias Continuas

Resolución

a) $P(X > 60) = \int_{60}^{61} \frac{1}{2} dy = \frac{y}{2}\Big]_{60}^{61}$ $\qquad P(X > 60) = \frac{1}{2}$

b) Sea X_i la variable aleatoria que representa la temperatura a la cual el interruptor i se acciona, entonces:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 59 \le x_i \le 61 \\ 0 , & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Como los interruptores funcionan de manera independiente, las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes, por lo que:

$$P(X_1 > 60 \;\cap\; X_2 > 60) = P(X_1 > 60)\,\mathrm{P}(X_2 > 60)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Función de distribución de una Variable Aleatoria

En el caso de una variable aleatoria es muy útil el análisis de la forma en que se va acumulando probabilidad conforme se incrementan los valores del rango de la v.a. Este análisis se realiza a través de la ***función de distribución***, también llamada ***función de distribución acumulativa***

Función de distribución de una Variable Aleatoria

Definición:

Si X es una v.a., entonces su función de distribución, se define como una función que asocia a cada valor real, la probabilidad de que la variable aleatoria asuma valores menores o iguales que él.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Por tal razón, la función de distribución de una v.a. X es una función tal que

$$F_X\colon R_X \rightarrow [0, 1]$$

Función de distribución de una Variable Aleatoria

A pesar de que la definición no hace distinción entre una variable aleatoria discreta y una continua, sino que la definición de la función de distribución es la misma en ambos casos,

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

La forma de construcción sí cambia con el tipo de variable, es así que

$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{x} f_X(i) & \text{para } X \text{ discreta} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt & \text{para } X \text{ continua} \end{cases}$$

Propiedades de la Función de distribución

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad , \quad -\infty < x < \infty$

2) Para el mayor valor en el rango de la v.a. $X,\ F_X(x) = 1$; es decir:

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

3) Para un valor menor al primer valor en el rango de la v.a. $X,\ F_X(x) = 0$; es decir:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

4) La función $F_X(x)$ es no decreciente; es decir:

Si $a \leq b$ entonces, $F_X(a) \leq F_X(b)$

5) La probabilidad de que la v.a. X esté en el intervalo $(a, b]$, está dada por:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Función de distribución

Ejemplo 25

Sea una v.a. con función de probabilidad ,

x	**-5**	**-1**	**1**	**1.5**	**3**
f_X (x)	0.2	0.01	0.3	0.29	0.2

a) Construir la función de distribución de en forma tabular.
b) Trazar su gráfica.

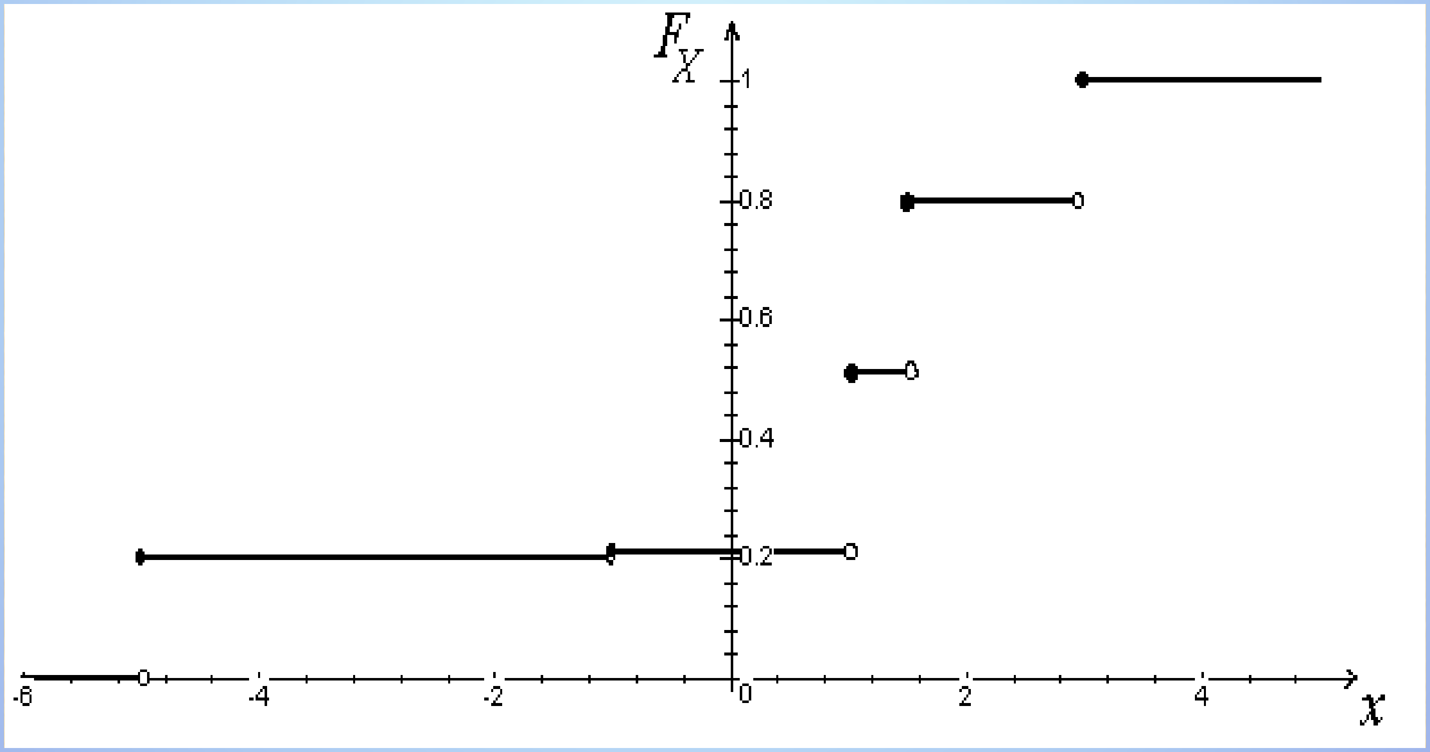
Resolución

a) La forma tabular de la función de distribución se obtiene directamente de la función de probabilidad, sumando las casillas a la izquierda y la del valor que se desea.

x	**-5**	**-1**	**1**	**1.5**	**3**
f_X (x)	0.20	0.01	0.3	0.29	0.20
F_X (x)	0.20	0.21	0.51	0.80	1.00

Función de distribución

x	-5	-1	1	1.5	3
f_X (x)	0.20	0.01	0.3	0.29	0.20
F_X (x)	0.20	0.21	0.51	0.80	1.00



Dra. Isabel Patricia Aguilar Juárez