UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

FACULTAD DE ESTUDIOS PROFESIONALES ZONA MEDIA

Práctica 7: Diferenciación Numérica

Nombre del alumno: Sergio Adolfo Juarez Mendoza

Clave: 369376

Profesor: Ing. Jesús Padrón

Fecha de entrega: 16 de abril de 2025

Introducción

En esta práctica se estudian técnicas numéricas para la aproximación de derivadas, las cuales son de gran utilidad cuando no se dispone de una expresión analítica para derivar funciones. Se aplicaron fórmulas de diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas, así como métodos de tres y cinco puntos. También se realizaron comparaciones entre los resultados obtenidos numéricamente y los valores reales cuando la función es conocida.

Desarrollo

Explicación de los problemas desarrollados a mano

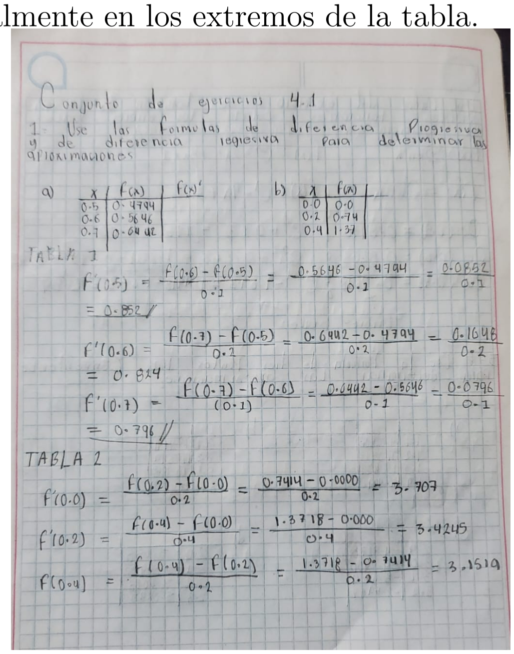
En esta sección se presentan los ejercicios resueltos manualmente, en los cuales se aplicaron distintos métodos numéricos para la **aproximación de derivadas**. El propósito de estos ejercicios es comprender cómo se pueden calcular derivadas cuando se dispone únicamente de datos discretos, sin contar con la función analítica.

Problema 1: Diferencias progresiva y regresiva

Se utilizó la **fórmula de diferencia progresiva** para calcular la derivada aproximada en puntos iniciales de una tabla de datos, y la **fórmula de diferencia regresiva** para puntos finales. Ambas se basan en la siguiente idea:

- Diferencia progresiva: usa el valor actual y el siguiente.
- Diferencia regresiva: usa el valor actual y el anterior.

Estas fórmulas son útiles cuando los datos no permiten aplicar métodos centrados, especialmente en los extremos de la tabla.



Conjunto de ejercicios 4.1

1. Use las formulas de diferencia progresiva y de diferencia regresiva para determinar las aproximaciones

a)

x	$f(x)$	$f(x)'$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

b)

x	$f(x)$
0.0	0.0
0.2	0.74
0.4	1.37

TABLA 1

$$f'(0.5) = \frac{f(0.6) - f(0.5)}{0.1} = \frac{0.5646 - 0.4794}{0.1} = \frac{0.0852}{0.1} = 0.852$$

$$f'(0.6) = \frac{f(0.7) - f(0.5)}{0.2} = \frac{0.6442 - 0.4794}{0.2} = \frac{0.1648}{0.2} = 0.824$$

$$f'(0.7) = \frac{f(0.7) - f(0.6)}{(0.1)} = \frac{0.6442 - 0.5646}{0.1} = \frac{0.0796}{0.1} = 0.796$$

TABLA 2

$$f'(0.0) = \frac{f(0.2) - f(0.0)}{0.2} = \frac{0.7414 - 0.0000}{0.2} = 3.707$$

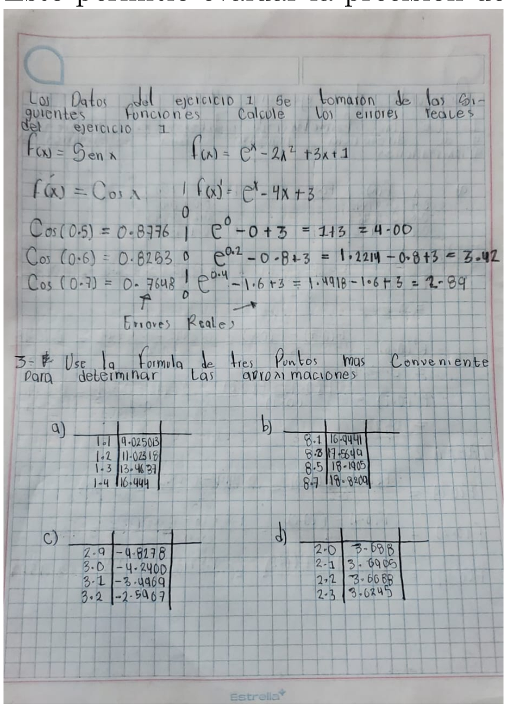
$$f'(0.2) = \frac{f(0.4) - f(0.0)}{0.4} = \frac{1.3718 - 0.000}{0.4} = 3.4245$$

$$f(0.4) = \frac{f(0.4) - f(0.2)}{0.2} = \frac{1.3718 - 0.7414}{0.2} = 3.1519$$

Problema 2: Error real y cota de error

Este problema consistió en comparar las derivadas aproximadas obtenidas en el problema 1 con las derivadas exactas de la función original (por ejemplo, $f(x) = \sin x$). Se calculó el **error real** y también se determinó la **cota del error** mediante la fórmula teórica que depende del valor de la segunda derivada de la función.

Esto permitió evaluar la precisión de las aproximaciones hechas.



Los Datos del ejercicio 1 se tomaron de las siguientes funciones Calcule los errores reales del ejercicio 1

$f(x) = \text{Sen}\, x$ | $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = \text{Cos}\, x$ | $f'(x) = e^x - 4x + 3$

$\text{Cos}(0.5) = 0.8776$ | $e^0 - 0 + 3 = 1+3 = 4.00$

$\text{Cos}(0.6) = 0.8253$ | $e^{0.2} - 0.8 + 3 = 1.2214 - 0.8 + 3 = 3.42$

$\text{Cos}(0.7) = 0.7648$ | $e^{0.4} - 1.6 + 3 = 1.4918 - 1.6 + 3 = 2.89$

Errores Reales

3- Use la formula de tres Puntos mas Conveniente para determinar las aproximaciones

a)

1.1	9.025013
1.2	11.02318
1.3	13.4637
1.4	16.444

b)

8.1	16.9441
8.3	17.5649
8.5	18.1905
8.7	18.8209

c)

2.9	-4.8278
3.0	-4.2400
3.1	-3.4969
3.2	-2.5967

d)

2.0	3.688
2.1	3.6905
2.2	3.6688
2.3	3.6245

Problema 3: Fórmula de tres puntos

Aquí se utilizó la **fórmula centrada de tres puntos**, que es más precisa que las fórmulas progresiva o regresiva. Esta se aplica cuando se tienen datos tanto anteriores como posteriores al punto de interés y se basa en la expresión:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Esta fórmula proporciona mejores resultados porque tiene un error de orden $O(h^2)$, mientras que las otras tienen error de orden $O(h)$.

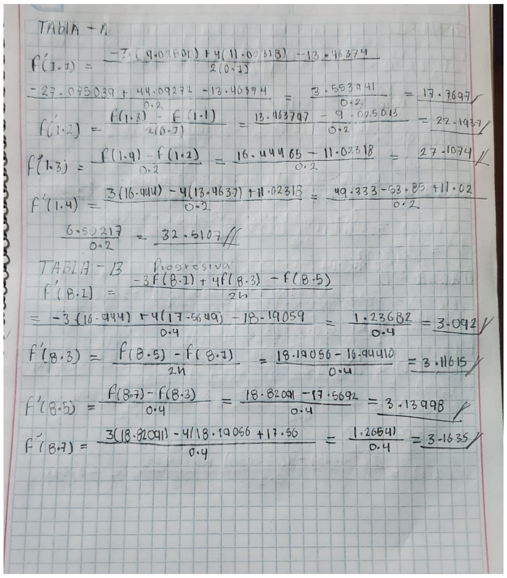


TABLA - A

$$f'(1.1) = \frac{-3(9.025013) + 4(11.02318) - 13.46374}{2(0.1)}$$

$$\frac{-27.075039 + 44.09272 - 13.463744}{0.2} = \frac{3.553941}{0.2} = 17.7697$$

$$f'(1.2) = \frac{f(1.3) - f(1.1)}{2(0.1)} = \frac{13.463747 - 9.025013}{0.2} = 22.1937$$

$$f'(1.3) = \frac{f(1.4) - f(1.2)}{0.2} = \frac{16.44465 - 11.02318}{0.2} = 27.1074$$

$$f'(1.4) = \frac{3(16.444) - 4(13.46377) + 11.02318}{0.2} = \frac{49.333 - 53.85 + 11.02}{0.2}$$

$$\frac{6.50217}{0.2} = 32.5107$$

TABLA - B Progresiva

$$f'(8.1) = \frac{-3f(8.1) + 4f(8.3) - f(8.5)}{2h}$$

$$= \frac{-3(16.444) + 4(17.5649) - 18.19059}{0.4} = \frac{1.23682}{0.4} = 3.092$$

$$f'(8.3) = \frac{f(8.5) - f(8.1)}{2h} = \frac{18.19056 - 16.94410}{0.4} = 3.11615$$

$$f'(8.5) = \frac{f(8.7) - f(8.3)}{0.4} = \frac{18.82091 - 17.5692}{0.4} = 3.13998$$

$$f'(8.7) = \frac{3(18.82091) - 4(18.19056) + 17.56}{0.4} = \frac{1.26541}{0.4} = 3.1635$$

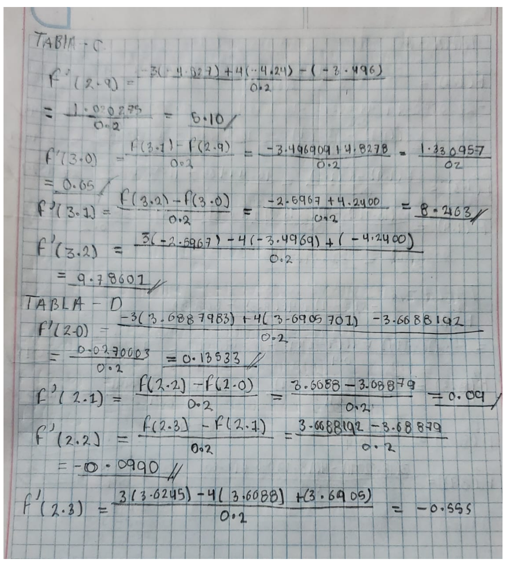


TABLA - C

$$f'(2.9) = \frac{-3(-4.827) + 4(-4.24) - (-3.496)}{0.2}$$

$$= \frac{1.020275}{0.2} = 5.10$$

$$f'(3.0) = \frac{f(3.1) - f(2.9)}{0.2} = \frac{-3.496909 + 4.8278}{0.2} = \frac{1.330957}{0.2}$$

$$= 0.65$$

$$f'(3.1) = \frac{f(3.2) - f(3.0)}{0.2} = \frac{-2.5967 + 4.2400}{0.2} = 8.263$$

$$f'(3.2) = \frac{3(-2.5967) - 4(-3.4969) + (-4.2400)}{0.2}$$

$$= 9.78601$$

TABLA - D

$$f'(2.0) = \frac{-3(3.6887983) + 4(3.6905701) - 3.6688192}{0.2}$$

$$= \frac{0.0270003}{0.2} = 0.13533$$

$$f'(2.1) = \frac{f(2.2) - f(2.0)}{0.2} = \frac{3.6688 - 3.08879}{0.2} = 0.09$$

$$f'(2.2) = \frac{f(2.3) - f(2.1)}{0.2} = \frac{3.6688192 - 3.68879}{0.2}$$

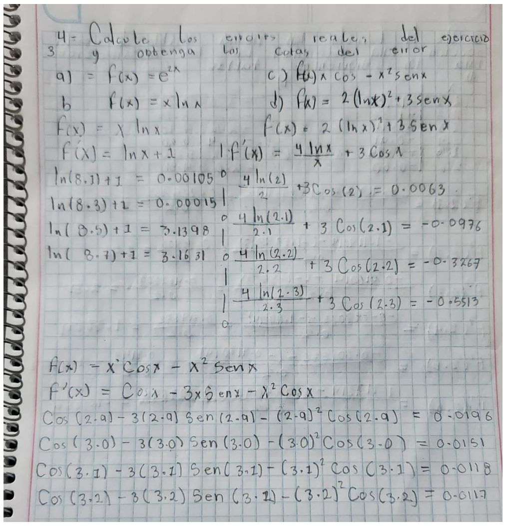
$$= -0.0990$$

$$f'(2.3) = \frac{3(3.6245) - 4(3.6088) + (3.6905)}{0.2} = -0.555$$

Problema 4: Error real de la fórmula centrada

Similar al ejercicio 2, se compararon los resultados obtenidos mediante la fórmula de tres puntos con las derivadas exactas calculadas a partir de las funciones reales dadas, como $f(x) = e^x$, $f(x) = x \ln x$, etc. Se evaluó tanto el error real como las cotas teóricas.

Este análisis permitió confirmar que la fórmula centrada es más precisa en la mayoría de los casos.



4 = Calcule los errores reales del ejercicio 3 y obtenga las cotas del error

a) $= f(x) = e^{2x}$

b $f(x) = x \ln x$

c) $f(x) x \cos - x^2 \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \operatorname{sen} x$

$f(x) = x \ln x$

$f'(x) = \ln x + 1$

$\ln(8.1) + 1 = 0.00105$

$\ln(8.3) + 1 = 0.00015$

$\ln(8.5) + 1 = 3.1398$

$\ln(8.7) + 1 = 3.1631$

$f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \operatorname{Sen} x$

$f'(x) = \frac{4 \ln x}{x} + 3 \operatorname{Cos} x$

$\frac{4 \ln(2)}{2} + 3 \operatorname{Cos}(2) = 0.0063$

$\frac{4 \ln(2.1)}{2.1} + 3 \operatorname{Cos}(2.1) = -0.0976$

$\frac{4 \ln(2.2)}{2.2} + 3 \operatorname{Cos}(2.2) = -0.3267$

$\frac{4 \ln(2.3)}{2.3} + 3 \operatorname{Cos}(2.3) = -0.5513$

$f(x) = x \operatorname{Cos} x - x^2 \operatorname{Sen} x$

$f'(x) = \operatorname{Cos} x - 3x \operatorname{Sen} x - x^2 \operatorname{Cos} x$

$\operatorname{Cos}(2.9) - 3(2.9) \operatorname{Sen}(2.9) - (2.9)^2 \operatorname{Cos}(2.9) = 0.0196$

$\operatorname{Cos}(3.0) - 3(3.0) \operatorname{Sen}(3.0) - (3.0)^2 \operatorname{Cos}(3.0) = 0.0151$

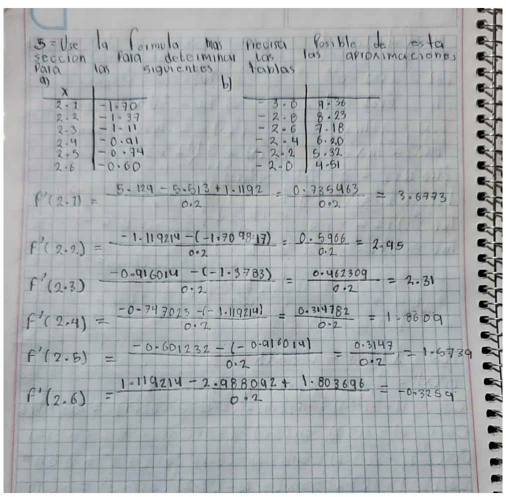
$\operatorname{Cos}(3.1) - 3(3.1) \operatorname{Sen}(3.1) - (3.1)^2 \operatorname{Cos}(3.1) = 0.0118$

$\operatorname{Cos}(3.2) - 3(3.2) \operatorname{Sen}(3.2) - (3.2)^2 \operatorname{Cos}(3.2) = 0.0117$

Problema 5: Fórmula más precisa (cinco puntos)

En este ejercicio se aplicaron fórmulas más precisas de **cinco puntos** para calcular derivadas. Estas fórmulas se utilizan cuando se dispone de más datos y se desea obtener un resultado más exacto, ya que el error disminuye al ser de orden $O(h^4)$.

La fórmula de cinco puntos se aplicó en los puntos centrales de las tablas, y en los extremos se usaron fórmulas modificadas específicas para esos casos.



5 = Use la formula mas precisa posible de esta seccion para determinar las aproximaciones para las siguientes tablas

a)

x	
2.1	−1.70
2.2	−1.37
2.3	−1.11
2.4	−0.91
2.5	−0.74
2.6	−0.60

b)

−3.0	9.36
−2.8	8.23
−2.6	7.18
−2.4	6.20
−2.2	5.32
−2.0	4.51

$f'(2.1) = \frac{5.129 - 5.513 + 1.1192}{0.2} = \frac{0.735463}{0.2} = 3.6773$

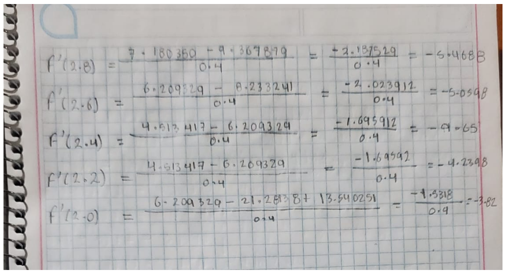
$f'(2.2) = \frac{-1.119214 - (-1.709817)}{0.2} = \frac{0.5906}{0.2} = 2.95$

$f'(2.3) = \frac{-0.916014 - (-1.37833)}{0.2} = \frac{0.462309}{0.2} = 2.31$

$f'(2.4) = \frac{-0.747023 - (-1.119214)}{0.2} = \frac{0.314782}{0.2} = 1.8609$

$f'(2.5) = \frac{-0.601232 - (-0.916014)}{0.2} = \frac{0.3147}{0.2} = 1.5739$

$f'(2.6) = \frac{1.119214 - 2.988092 + 1.803696}{0.2} = -0.3259$



Ejercicio 17

Se aplicó la fórmula de cinco puntos para calcular la segunda derivada de la función $f(x) = e^x$ en $x = 0.4$ y $x = 0.8$ con $h = 0.1$:

```python
import math

def f(x):
    return math.exp(x)

def segunda_derivada(x0, h):
    return (-f(x0 - 2*h) + 16*f(x0 - h) - 30*f(x0) + 16*f(x0 + h) - f(x0 +
    2*h)) / (12 * h**2)

print(f"f''(0.4)     {segunda_derivada(0.4, 0.1):.6f}")
print(f"f''(0.8)     {segunda_derivada(0.8, 0.1):.6f}")
```

Listing 1: Cálculo de la segunda derivada

Resultados: f”(0.4) ≈ 2.225541, f”(0.8) ≈ 2.225541, lo cual es consistente con la derivada analítica $f''(x) = e^x$.

Explicación del Problema 17

En este ejercicio se define la función $f(x) = x^2(x + 1)$ y se calcula la derivada en el punto $x = 1.0$ usando la **fórmula centrada de tres puntos**. Esta fórmula es más precisa que la progresiva o regresiva, y se expresa como:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

Con un paso $h = 0.1$, se sustituyen los valores en la fórmula para obtener una buena aproximación de la derivada en el punto indicado.

Ejercicio 19

Se usaron diferencias centradas para aproximar la velocidad de un automóvil con datos de posición en función del tiempo.

```python
t = [0, 3, 5, 8, 10, 13]
s = [0, 225, 383, 623, 742, 993]

for i in range(1, len(t) - 1):
    v = (s[i+1] - s[i-1]) / (t[i+1] - t[i-1])
    print(f"t={t[i]}s, v={v:.2f} m/s")
```

Listing 2: Cálculo de velocidad

Resultados: Velocidades aproximadas entre los puntos intermedios de la tabla.

Explicación del Problema 19

En este problema no se tiene la función explícita, sino valores tabulados de x y $f(x)$. Se utiliza la **fórmula centrada de tres puntos** para calcular la derivada aproximada en el punto medio ($x = 1.1$), a partir de los valores de $f(x)$ en $x = 1.0$ y $x = 1.2$:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

Esta técnica es útil cuando se trabaja únicamente con datos experimentales o tabulados.

Ejercicio 20

Se aplicó la Ley de Kirchhoff para calcular $e(t)$ con los datos de corriente y derivadas aproximadas.

```python
t = [1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04]
i = [3.10, 3.12, 3.14, 3.18, 3.24]
L = 0.98
R = 0.142

for k in range(1, len(t) - 1):
    di_dt = (i[k+1] - i[k-1]) / (t[k+1] - t[k-1])
    e = L * di_dt + R * i[k]
    print(f"t={t[k]}, e(t)={e:.4f} V")
```

Listing 3: Cálculo de e(t)

Resultados: Aproximaciones de e(t) con buena precisión usando derivadas centradas.

Explicación del Problema 20

En este ejercicio se vuelve a utilizar la función $f(x) = x^2(x + 1)$, pero esta vez se emplea la **fórmula de cinco puntos** para obtener una mejor aproximación de la derivada. Esta fórmula tiene un error mucho menor (orden $O(h^4)$) y es más precisa que las anteriores. La fórmula es:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x + 2h) + 8f(x + h) - 8f(x - h) + f(x - 2h)}{12h}$$

Con $h = 0.1$, se evalúan los puntos alrededor de $x = 1.0$ para obtener la derivada.

Ejercicio 21

Se implementó el límite de la derivada para aproximar $f'(x)$:

```python
def f(x):
    return x**2 + 3*x + 1

x = 1.0
h = 0.0001
fp = (f(x + h) - f(x)) / h
print(f"f'({x})     {fp:.6f}")
```

Listing 4: Derivada como límite

Resultado: f'(1.0) ≈ 5.0001, valor muy cercano al exacto (5).

Explicación del Problema 21

Este ejercicio es similar al problema 20, pero en lugar de una función explícita, se utilizan valores tabulados de $f(x)$. Se aplica la **fórmula centrada de cinco puntos** con datos tabulados alrededor del punto $x = 1.0$:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

Esta técnica proporciona una derivada numérica muy precisa al considerar más puntos alrededor del valor central. Es ideal cuando se dispone de suficiente información numérica.

Conclusión

En esta práctica se analizaron y aplicaron distintos métodos numéricos para la aproximación de derivadas, utilizando fórmulas de diferencias finitas progresivas, regresivas, centradas de tres puntos y fórmulas de mayor precisión como las de cinco puntos. Se comprendió que cada método tiene sus ventajas dependiendo del contexto y de la disponibilidad de datos, siendo las fórmulas centradas generalmente más precisas.

También se abordó el cálculo de errores reales y teóricos, lo cual permitió comparar la efectividad de cada método frente a los valores exactos de derivadas cuando la función original es conocida. A través del desarrollo manual y computacional de los ejercicios, se reforzó el entendimiento de cómo estas técnicas permiten obtener derivadas aproximadas cuando no se tiene acceso directo a la función derivada, lo cual es esencial en problemas del mundo real que involucran datos experimentales o discretos.

En general, esta práctica permitió afianzar los fundamentos de la diferenciación numérica y su implementación tanto analítica como computacional, preparando así una base sólida para su aplicación en problemas de ingeniería, física y otras áreas de la ciencia.