Segundo Proyecto, Programación Lineal

Sergio Arnaud 000159189
Saúl Alvarez 000158318

6 de mayo del 2018

1. Implementación

El proyecto está implementado en su totalidad en python 3.6, se utilizan los paquetes Numpy y Scipy y paquetes de librería estandar de python.

El proyecto consta de 3 scripts:

1. **simplex_functions.py**: Script en el cual se encuentran los métodos generales que realizan el algoritmo simplex y las funciones auxiliares para dichos métodos, contiene:
   - mSimplexDual(A,b,c)
   - mSimplexMax(A, b, c)
   - mSimplexMin(A,b,c)
   - get_gammas(N, r_N, H, m, n)
   - get_betas(x_B, A_B_inv, n, m)
   - simplex_step(A, b, c, B, N, len_b, len_c)
2. **actividad1.py**: Script que únicamente contiene al main, al ejecutarse muestra los resultados de la primer actividad.
3. **actividad3.py**: Éste script contiene únicamente contiene al main, al ejecutarse muestra los resultados de la tercer actividad.

2. Análisis de sensibilidad.

2.1. Actividad 1

2.1.1. ¿Cuál resultado ban no puede ocurrir y por qué?

Queremos Encontrar $\mathbf{x}$ tal que $c^T\mathbf{x}$ sea máximo sujeto a $A\mathbf{x} \leq b$, $x \geq 0$ y $b \geq 0$.

Para este tipo de problemas podemos considerar tres casos:

1. Existe al menos una solución; digamos x^*, tal que $Argmax\{c^T\mathbf{x}\} = x^*$
2. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{c^T x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ es decir, la cantidad a maximizar se pueda hacer arbitrariamente grande y por lo tanto decimos que el problema no está acotado.
3. O finalmente, puede suceder que no exista alguna $\mathbf{x}$ que cumpla las restricciones. En este caso, se dice que el problema no tiene solución factible.

Para este primer parte del proyecto sobre análisis de sensibilidad, se garantiza que $b \geq 0$, así que las restricciones se cumplen trivialmente con $\mathbf{x} = 0$ y por lo tanto, la tercer opción está descartada, es decir, el conjunto factible no puede ser vacío.

2.1.2. Calculo de los intervalos de las gamma:

Tras cambios en $\mathbf{c}$ de la forma $\mathbf{c}_{nuevo} = \mathbf{c} + \gamma_j \mathbf{e_j}$ vemos que si $\mathbf{x_{opt}} = (x_B^T, x_N^T)$ es la solución para el problema con $\mathbf{c}$, entonces la factibilidad de esa misma solución está garantizada para el problema con $\mathbf{c} + \gamma_j \mathbf{e_j}$ puesto que $\mathbf{b}$ no cambia.

De esta forma, buscaremos intervalos [a,b] tales que si $\gamma_j \in [a, b]$, entonces $\mathbf{c}_{nuevo} = \mathbf{c} + \gamma_j \mathbf{e_j}$ es óptimo.

Supongamos $j \in B$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_N^{nuevo} &= \left(\mathbf{c}_B + \gamma_j (\mathbf{e_j})_B\right)^T A_B^{-1} A_N - \mathbf{c}_N \\
&= \mathbf{r}_N + \gamma_j (\mathbf{e_j})_B^T A_B^{-1} A_N \\
&= \mathbf{r}_N + \gamma_j (\mathbf{e_j})_B^T H \\
&= \mathbf{r}_N + \gamma_j (H)_{j*}
\end{aligned}$$

Queremos $\mathbf{r}_N^{nuevo} \leq 0$ para poder garantizar la optimalidad de la nueva solución, entonces:

$$\begin{aligned}
& & \mathbf{r}_N^{nuevo} &\leq 0 & \\
&\iff & \mathbf{r}_N + \gamma_j (H)_{j*} &\leq 0 & \\
&\iff & \gamma_j (H)_{j*} &\leq -\mathbf{r}_N & \\
&\iff & \gamma_j (H)_{jk} &\leq -(\mathbf{r}_N)_k & \forall k \in \{1, ..., n\}
\end{aligned}$$

Donde tenemos 3 posibles casos, $(H)_{jk}$ puede ser cero, negativo o postivo, considerando estos casos obtenemos:

$$\begin{cases}
\gamma_j \leq \dfrac{-(\mathbf{r}_N)_k}{(H)_{jk}} & \text{si } (H)_{jk} > 0 \\
\gamma_j \geq \dfrac{-(\mathbf{r}_N)_k}{(H)_{jk}} & \text{si } (H)_{jk} < 0 \\
\gamma_j \in \mathbb{R} & \text{si } (H)_{jk} = 0
\end{cases} \qquad \forall k \in \{1, ..., m\}$$

Asi para cada $j \in \{1, ..., n\}$ consideremos:

$$A = \{k : (H)_{kj} < 0\}$$
$$B = \{k : (H)_{kj} > 0\}$$

Entonces, si tanto A como B son no vacíos, podemos definir:

$$a := \max_{k \in A} \frac{-(\mathbf{r}_N)_k}{(H)_{jk}}$$
$$b := \min_{k \in B} \frac{-(\mathbf{r}_N)_k}{(H)_{jk}}$$

Concluyendo para las $j \in B$ que el intervalo [a,b] es el intervalo deseado. En caso de que B sea vacío consideramos el intervalo $[a, \infty]$ y si A es vacío consideramos el intervalo $[-\infty, b]$

Ahora supongamos $j \in N$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_N^{nuevo} &= \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_N - (\mathbf{c}_N + \gamma_j (\mathbf{e_j})_N) \\
&= \mathbf{r}_N - \gamma_j (\mathbf{e_j})_N
\end{aligned}$$

Queremos $\mathbf{r}_N^{nuevo} \leq 0$ para poder garantizar la optimalidad de la nueva solución, entonces $\mathbf{r}_N \leq \gamma_j (\mathbf{e_j})_N$ es decir, $\gamma_j \geq (r_N)_j \ \forall j \in N$

Observación:

Para los problemas de maximización, los intervalos [a,b] devueltos por el método simplex para problemas de minimización se convierten en intervalos [-b,-a].

2.1.3. Calculo de los intervalos de las betas:

Queremos intervalos [a,b] tales que si $\beta_j \in [a,b]$, entonces $\mathbf{b}_{nuevo} = \mathbf{b} + \beta_j \mathbf{e_j}$ no cambie la base óptima producida por el algoritmo simplex con $\mathbf{b}$.

Sabemos que $\mathbf{h} = A_B^{-1}\mathbf{b}$ de forma que definiendo $\mathbf{b}_{nuevo} := \mathbf{b} + \beta_j \mathbf{e_j}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{nuevo} &= A_B^{-1}\mathbf{b}_{nuevo} \\
&= A_B^{-1}(\mathbf{b} + \beta_j \mathbf{e_j}) \\
&= A_B^{-1}\mathbf{b} + \beta_j A_B^{-1}\mathbf{e_j} \\
&= \mathbf{h} + \beta_j A_B^{-1}\mathbf{e_j}
\end{aligned}$$

Queremos $\mathbf{h}_{nuevo} \geq 0$ de forma que:

$$\begin{aligned}
& & \mathbf{h}_{nuevo} &\geq 0 & \\
&\iff & \mathbf{h} + \beta_j A_B^{-1}\mathbf{e_j} &\geq 0 & \\
&\iff & \beta_j A_B^{-1}\mathbf{e_j} &\geq -\mathbf{h} & \\
&\iff & \beta_j (A_B^{-1})_{*j} &\geq -\mathbf{h} & \\
&\iff & \beta_j (A_B^{-1})_{kj} &\geq -\mathbf{h}_k & \forall k \in \{1, ..., m\}
\end{aligned}$$

Donde tenemos 3 posibles casos, $(A_B^{-1})_{kj}$ puede ser cero, negativo o postivo, considerando estos casos obtenemos:

$$\begin{cases}
\beta_j \geq \dfrac{-\mathbf{h}_k}{(A_B^{-1})_{kj}} & \text{si } (A_B^{-1})_{kj} > 0 \\
\beta_j \leq \dfrac{-\mathbf{h}_k}{(A_B^{-1})_{kj}} & \text{si } (A_B^{-1})_{kj} < 0 \\
\beta_j \in \mathbb{R} & \text{si } (A_B^{-1})_{kj} = 0
\end{cases} \qquad \forall k \in \{1, ..., m\}$$

Asi para cada $j \in \{1, ..., n\}$ consideremos:

$$A = \{k : \left(A_B^{-1}\right)_{kj} > 0\}$$

$$B = \{k : \left(A_B^{-1}\right)_{kj} < 0\}$$

Entonces, si tanto A como B son no vacíos, podemos definir:

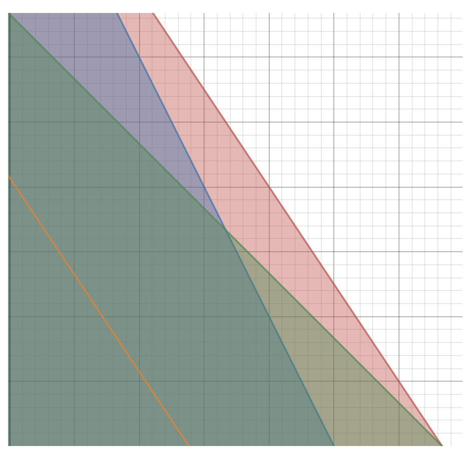
$$a := \max_{k \in A} \frac{-\mathbf{h}_k}{(A_B^{-1})_{kj}}$$
$$b := \min_{k \in B} \frac{-\mathbf{h}_k}{(A_B^{-1})_{kj}}$$

Concluyendo que el intervalo [a,b] es el intervalo deseado. En caso de que B sea vacío consideramos el intervalo $[a, \infty]$ y si A es vacío consideramos el intervalo $[-\infty, b]$

2.1.4. Problema de los relojes

Apartado 1: Formule un modelo de programación lineal para resolver el problema de los relojes:

$$\begin{cases} \max \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \right\} & c = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} \\ s.a.\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, x \geq 0 & A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} \end{cases}$$



La imagen mostrada representa las restricciones y el color verde el conjunto factible de el problema de maximización.

Observación:

El valor donde se alcanza el valor óptimo a el problema de optimización es $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 3.333 & 3.333 \end{pmatrix}^T$ y el valor óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = 1666{,}666$.

Asimismo:

$$\beta\text{'s} = \begin{pmatrix} \text{-6.666} & \infty \\ \text{-13.333} & 13.333 \\ \text{-5} & 10 \end{pmatrix}, \ \gamma' s = \begin{pmatrix} \text{-100} & 100 \\ \text{-50} & 100 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 33.333 \end{pmatrix}$$

Apartado 3: Cambios en la función objetivo

El valor en el cual la función se maximiza no cambia puesto que ambos cambios pertenecen a los intervalos gamma, el primero es de $75 \in [-100, 100]$ y el segundo es de -25 $\in [-50, 100]$. En el script se realiza el método simplex con los nuevos valores para verificar dichas afirmaciones.

$\mathbf{c}_{nueva}$	Valor donde se alzanza el máximo	Valor máximo
$\begin{pmatrix} 375 & 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.333 & 3.333 \end{pmatrix}$	1916.666
$\begin{pmatrix} 300 & 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.333 & 3.333 \end{pmatrix}$	1583.333

Apartado 4: Utilizando la información sobre los ahorros relativos, ¿Cuánto puede variar la ganancia de los relojes de pedestal antes de que cambie la solución óptima? ¿Cuánto puede variar la ganancia de los relojes de pared antes de que cambie la solución óptima?

- La ganancia por los relojes de pedestal puede tener un cambio en el intervalo: [-100. 100.]
- La ganancia por los relojes de pared puede tener un cambio en el intervalo: [-50. 100.]

Apartado 5 Determine el efecto sobre la solución óptima y la ganancia total si cada uno de los tres socios, de manera independiente, aumenta en 5 el número máximo de horas disponibles por semana para trabajar.

Cuando b = $\begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}$ el valor máximo se alzanza cuando $x^* = \begin{pmatrix} 2.916 \\ 5.416 \end{pmatrix}$ es de 1958.333 y presenta una ganancia de 291.666

Apartado 6 Un socio puede trabajar menos sin afectar a la solución óptima ni la ganancia óptima. ¿Quién es? y ¿Cuál es el rango permisible para el máximo número de sus horas disponibles, que conserve la solución optima?

El socio que puede trabajar menos sin afectar a la solución optima ni la ganancia es David puesto que $Ax^* = \begin{pmatrix}33.333 & 40 & 20\end{pmatrix}^T$ y debe tener disponibles al menos 33.333 horas para que se conserve la solución óptima.

Como una verificación empírica de esto, en la implementación se muestra que de trabajar 33.333 horas x^* sigue siendo óptima pero si tiene disponibles 33.30 horas ya no lo es.

<u>Apartado 7</u> Genere de forma sistemática la solución óptima y la ganancia total cuando el único cambio es que el número máximo de oras disponibles por semana para trabajar de David cambia a cada uno de los siguientes valores: 35, 37, 39, 41, 43, 45. Después haga lo mismo cuando el único cambio es que los números de Diana cambian de la misma forma. Por último, repita el ejercicio cuando el único cambio es que el número máximo de horas disponibles por semana para trabajar de Lidia cambia a cada uno de los siguientes valores: 15, 17, 19, 21, 23, 25.

Los nuevos valores donde se optimiza la función, los valores máximos y la ganancia (o pérdida) en que se incurrió se presentan en la siguiente tabla, la obtención de dichos valores se realizó usando el hecho de que la base óptima no cambia y $x^*_{nuevo} = x^* + A_B^{-1}\beta$ donde β es el vector que contiene los cambios sobre la b. De la misma manera, el valor óptimo está dado por $c^T x^*_{nuevo}$ y la ganancia por $c^T A_B^{-1}\beta$.

$\mathbf{b}^T_{nueva}$	Argumento máximo	Valor máximo	Ganancia/Pérdida
$\begin{pmatrix}35 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}37 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}39 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}41 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}43 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}45 & 40 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.333 & 3.333\end{pmatrix}$	1666.666	0
$\begin{pmatrix}40 & 35 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.0833 & 4.5833\end{pmatrix}$	1541.666	-125.0
$\begin{pmatrix}40 & 37 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.5833 & 4.0833\end{pmatrix}$	1591.66	-75.0
$\begin{pmatrix}40 & 39 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.0833 & 3.5833\end{pmatrix}$	1641.666	-25.0
$\begin{pmatrix}40 & 41 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.5833 & 3.0833\end{pmatrix}$	1691.666	25.0
$\begin{pmatrix}40 & 43 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.0833 & 2.5833\end{pmatrix}$	1741.666	75.0
$\begin{pmatrix}40 & 45 & 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.5833 & 2.0833\end{pmatrix}$	1791.666	125.
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 0\end{pmatrix}$	1499.99	-166.666
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 17\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.333 & 1.333\end{pmatrix}$	1566.666	-100.0
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 19\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.666 & 2.666\end{pmatrix}$	1633.333	-33.333
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 21\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$	1699.999	33.333
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 23\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.333 & 5.333\end{pmatrix}$	1766.66	100.0
$\begin{pmatrix}40 & 40 & 25\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.666 & 6.666\end{pmatrix}$	1833.333	166.666

Apartado 10 ¿Es válido usar los precios sombra que se proporcionaron en el informe de sensibilidad (ver apartado 5) para determinar el efecto si Lidia cambiara su máximo de horas semanales de 20 a 25? Si es asó, ¿cuál sería el incremento de la ganancia total? ¿Y si adicionalmente David reduce su máximo de horas semanales de 40 a 35?

El primer caso presenta un incremento de la ganancia en 166.666 y el segundo en 83.3333.

3. Método Simplex dual.

3.1. Actividad 2

3.1.1. Justificación

Considérense los problemas de programación lineal:

$$P : \begin{cases} \text{mín } \; c^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a } A\mathbf{x} \geq b, \mathbf{x} \geq 0, c \geq 0 \end{cases}$$

y

$$P_h : \begin{cases} \text{mín } \; c^T\mathbf{x} + 0^T y \\ \text{sujeto a } A\mathbf{x} - \mathbf{y} = b, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0, c \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a demostrar que $\mathbf{x} \in C_F(P)$ si y sólo si existe $\mathbf{y}$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_F(P_h)$. En efecto, para mostrar la suficiencia, considérese $\mathbf{y} = A\mathbf{x} - b \geq 0$ por ser $A\mathbf{x} \geq b$ por hipótesis. Para la necesidad, nótese que si $A\mathbf{x} - \mathbf{y} = b$, como $\mathbf{y} \geq 0$, se tiene que $A\mathbf{x} \geq b$.

Ahora, vamos a demostrar que $\lambda \in C_F(D)$ si y sólo si $\lambda \in C_F(D_h)$. Para esto, reexpresemos P_h como:

$$\begin{cases} \text{mín } \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a } \begin{pmatrix} A & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq b, \mathbf{x}, \mathbf{y}, c \geq 0 \end{cases}$$

Una vez dado esto, tenemos que los duales de P y P_h son:

$$D : \begin{cases} \text{máx } \; b^T\lambda \\ \text{sujeto a } A^T\lambda \leq c, \lambda \geq 0, c \geq 0 \end{cases}$$

y

$$D_h : \begin{cases} \text{máx } \; b^T\lambda \\ \text{sujeto a } \begin{pmatrix} A^T \\ -I \end{pmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, c \geq 0 \end{cases}$$

Ahora, si $\lambda \in C_F(D)$, se tiene que $A^T\lambda \leq c$, y como $\lambda \geq 0$, $-I\lambda = -\lambda \leq 0$. Entonces, $\lambda \in C_F(D_h)$. De igual manera, si $\lambda \in C_F(D_h)$, por la segunda parte de la desigualdad en D_h, se tiene que $-\lambda \leq 0 \to \lambda \geq 0$. Además, por la primera parte de la misma desigualdad, $A^T\lambda \leq c$. Combinando ambas situaciones, $\lambda \in C_F(D)$.

3.2. Actividad 3

3.2.1. Suponiendo que los argumentos satisfacen las restricciones, ¿Cuál el resultado ban no puede ocurrir, por qué?

El ban 1 (problema no acotado) es el caso que no puede ocurrir puesto que $\mathbf{x} = 0$ es una solución dual factible y como el conjunto factible del dual es no vacío, tenemos por el teorema de dualidad que el problema primal es vacío o acotado

3.2.2. Problema de los relojes

El problema de los relojes nos pide resolver un problema del tipo:

$$\begin{cases} \text{máx } 300x_1 + 200x_2 \\ \text{sujeto a } \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} h_{David} \\ h_{Diana} \\ h_{Lidia} \end{pmatrix} = h \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Donde las hs son las horas que puede trabajar cada persona. Nótese que el algoritmo pedido no puede solucionar este problema, ya que no es del tipo solicitado. Sin embargo, el dual del problema sí lo es. En efecto, el dual de este problema es:

$$\begin{cases} \text{mín } h^T\lambda \\ \text{sujeto a } \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \lambda \geq \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución al dual de este problema es la respuesta que buscamos.

Presentamos la tabla con distintos valores de h.

h_{David}	h_{Diana}	h_{Lidia}	z_0
40	40	20	1666.66
35	40	20	1666.66
37	40	20	1666.66
39	40	20	1666.66
41	40	20	1666.66
43	40	20	1666.66
45	40	20	1666.66
40	35	20	1541.66
40	37	20	1591.66
40	39	20	1641.66
40	41	20	1691.66
40	43	20	1741.66
40	45	20	1791.66
40	40	15	1500
40	40	17	1566.66
40	40	19	1633.33
40	40	21	1700
40	40	23	1766.66
40	40	25	1833.33

Para verificar que nuestras respuestas fueran correctas, usamos el teorema de dualidad fuerte y comparamos $h^T\lambda$ con $c^T\mathbf{x}$. La igualdad es una condición necesaria y suficiente para optimalidad.