Simulación

Tipos de Dependencia
Cópulas

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Últimas dos semanas de clase diciembre de 2018

2.4 Dependencia

Introducción

- En sesiones anteriores hemos visto cómo generar muestras aleatorias de varias familias de distribuciones de probabilidad.
- Una característica de estas muestras es que son aleatorias, es decir, son independientes e idénticamente distribuidas.
- Sin embargo, en algunas aplicaciones la dependencia de las variables es importante y requiere ser modelada.
- La dependencia es un concepto mucho más complejo que la independencia y mucho más difícil de modelar adecuadamente.
- Posibles aplicaciones:
  - dos variables de pérdida en seguros
  - p rendimientos de activos en finanzas
  - velocidad máxima de viento en p localidades distintas
  - p respuestas ordinales en una prueba psicológica
  - conteo de tumores en clusters familiares
  - incumplimiento de créditos en un mismo sector.

Dependencia

- Imaginen que quieren generar un par de variables aleatorias X y Y, con distribución conjunta $F(X, Y)$ y con marginales F_X y F_Y. Además, quieren que tenga cierta estructura de dependencia. Esto da origen a algunas preguntas:
  - ¿La conjunta determina a las marginales de manera única? Sí
  - ¿Las marginales determinan a la conjunta de manera única? No
  - ¿Las marginales y correlación determinan de manera única a la conjunta? No en general, sólo en el caso de distribuciones normales o elípticas.
- Otra pregunta es: ¿Qué debemos entender por dependencia (estocástica)? La definición usual es en términos de la función de distribución conjunta, sus condicionales y sus marginales:

$$F(X, Y) = F(X|Y)F_Y(Y) = F(Y|X)F_X(X)$$

- Otra manera es pensar en la correlación. ¿Es la dependencia entre variables su correlación? No, la dependencia es un concepto mucho más complicado.

Dependencia: ejemplos

- Lanzamiento de un dado dos veces. X_1 es el resultado del primer lanzamiento y X_2 el del segundo lanzamiento. Los lanzamientos son independientes: el conocimiento de X_1 no da información sobre X_2:

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = F(x_1)F(x_2)$$

- Ahora supongan que Y_1 es el resultado menor de los dos lanzamientos, y Y_2 es el resultado mayor. En este caso, la información del primer lanzamiento afecta al segundo, por ejemplo si $Y_1 = 6$, necesariamente $Y_2 = 6$. Si $Y_1 = 5$, entonces $Y_2 = 5$ o 6 con probabilidades iguales a $1/2$. En este ejemplo, claramente las marginales no nos dan información sobre la conjunta. En el caso de que Y_1 es el mínimo y Y_2 es el máximo,

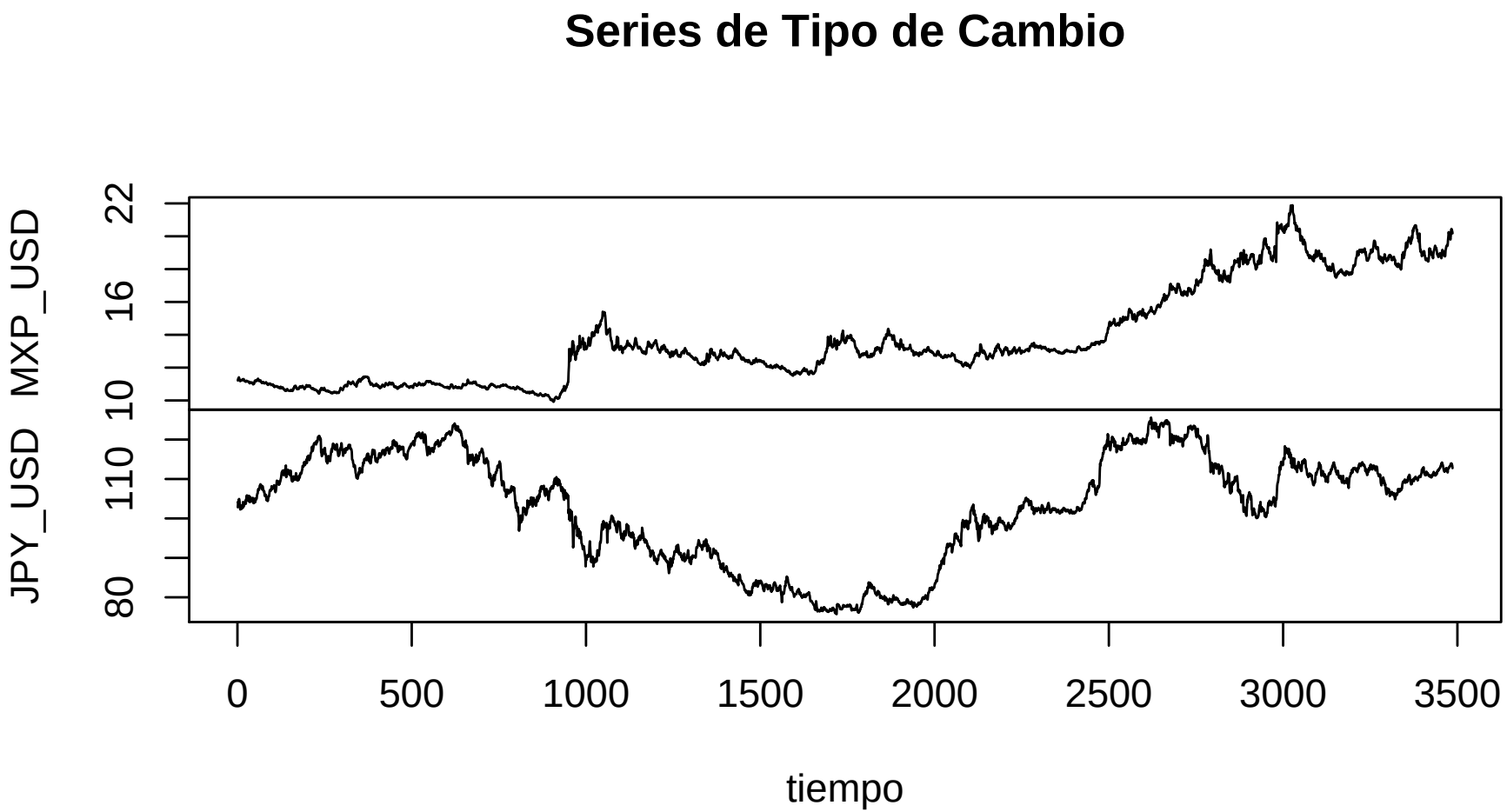
$$P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) = 2F(y_1)[F(y_2) - F(y_1)]$$

Dependencia: ejemplos I

1. Mercados Financieros
   - En los mercados financieros, la correlación se aplica para medir el riesgo de un portafolio de inversión.
   - Sin embargo, sólo es apropiada cuando dos rendimientos tienen una distribución conjunta elíptica. De otra forma, puede ser engañoso la medición de la dependencia real entre éstos.
   - En los modelos financieros clásicos, se asume que los rendimientos son iid normales multivariados, pero no se justifica empíricamente. Se puede alcanzar mayor exactitud permitiendo que las distribuciones marginales de los rendimientos sean no normales o incluso tendiendo diferentes distribuciones.
   - Por ejemplo, los rendimientos de un activo pueden ser t_k y los rendimientos de otro instrumento pueden ser $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Pero en este contexto la correlación como tal pierde sentido.
2. En seguros
   - En el contexto de pérdidas para compañías de seguros, es importante identificar cuando dos variables aleatorias tienden a toman valores extremos *de manera simultánea*.
3. En Riesgo de Crédito
   - La estimación de las probabilidades de incumplimiento de créditos tiene una alta dependencia entre sectores.

Ejemplo

```
suppressMessages(library(Quandl))
Quandl.api_key(tokenQuandl)
mxpusd <- Quandl("FED/RXI_N_B_MX", start_date = "2005-01-01")
jpyusd <- Quandl("FED/RXI_N_B_JA", start_date = "2005-01-01")
n <- length(mxpusd[,1])
plot.ts(cbind(MXP_USD = mxpusd[n:1,2], JPY_USD = jpyusd[n:1,2]),
                  main = "Series de Tipo de Cambio", xlab = "tiempo")
```

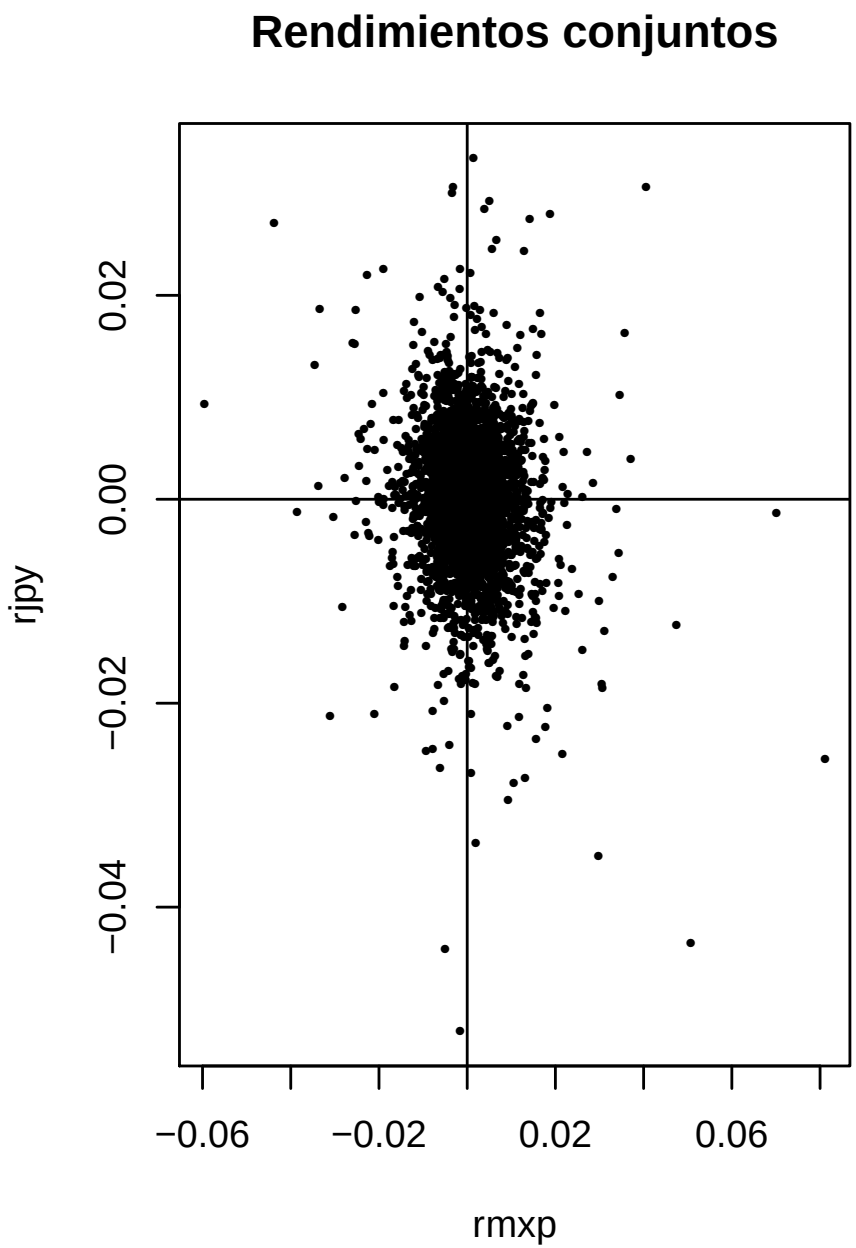


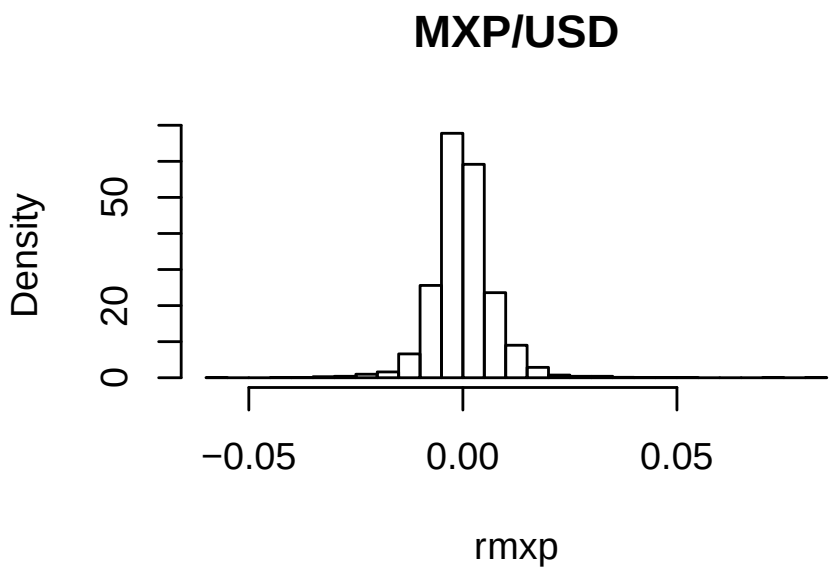
Ejemplo I

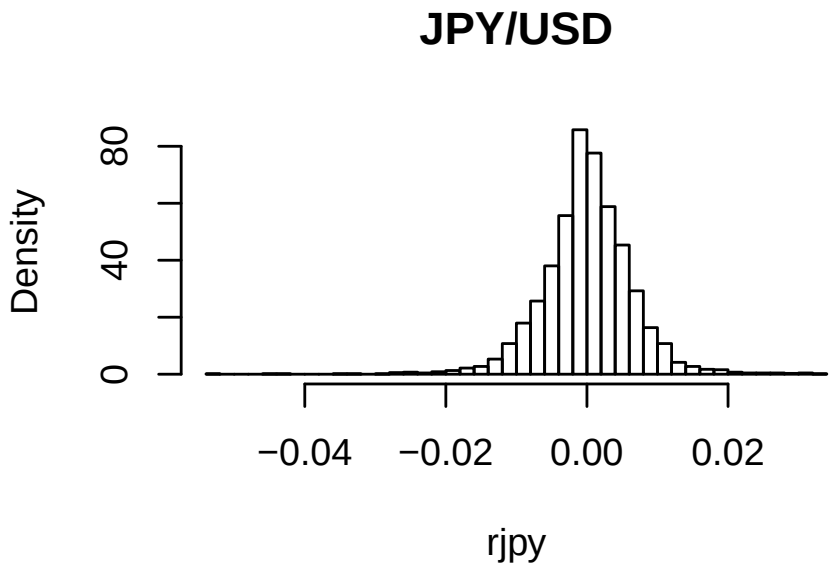
Supongamos que las variables aleatorias son los rendimientos del tipo de cambio en el periodo considerado.

```
rmxp <- diff(log(mxpusd[n:1,2])) #diferencia del log de los rendimientos
rjpy <- diff(log(jpyusd[n:1,2]))
layout(matrix(c(1,2,1,3), nrow = 2, byrow = T))
plot(rmxp, rjpy, pch = 16, cex = 0.5, main = 'Rendimientos conjuntos')
abline(h = 0)
abline(v = 0)
cor(rmxp,rjpy)

[1] -0.1179863

hist(rmxp, breaks = 50, main = "MXP/USD", prob = T)
hist(rjpy, breaks = 50, main = "JPY/USD", prob = T)
```

Ejemplo II


Rendimientos conjuntos
rjpy
rmxp
0.02
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
−0.02
0.02
0.06


MXP/USD
Density
rmxp
0
20
50
−0.05
0.00
0.05


JPY/USD
Density
rjpy
0
40
80
−0.04
−0.02
0.00
0.02

Dependencia

- La correlación es un concepto de **dependencia lineal** y por lo tanto no captura dependencias no lineales.
- Aplica naturalmente en distribuciones elípticas (multivariadas normal, t, doble exponencial, uniforme).
- Recordar que si $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies \rho(X_1, X_2) = 0$, pero la conversa no es cierta en general. Sólo es cierta en la distribución normal.
- Por otra parte si $\rho(X_1, X_2) = \pm 1 \implies X_2 = \alpha \pm \beta X_2$.
- Muy importante: **¡Correlación no es causalidad!**
- La correlación es una medida limitada de dependencia, y en finanzas su estimación falta de robustez y/o estabilidad en el tiempo.

Ejemplo 2 I

Obtener una muestra de un vector normal multivariado de orden 3:
$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz de covarianzas que induce una estructura de dependencia entre las variables componentes.

Solución.

Este problema se puede resolver estandarizando. Para estandarizar, necesitamos descomponer la matriz de covarianzas en su "raíz cuadrada": tenemos que encontrar $\mathbf{B} \ni \mathbf{B}\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma}$.
Entonces

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p) \implies \mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Por ejemplo, si $\boldsymbol{\mu} = (1, 2, 3)'$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.75 & 0.175 \\ 075 & 0.7 & 0.135 \\ 0.175 & 0.135 & 0.43 \end{pmatrix}$.
Entonces la estructura de dependencia en esta distribución está contenida en $\mathbf{B}$. A partir de normales independientes podemos encontrar las variables que nos interesan.
El siguiente script muestra como obtener $\mathbf{B}$ con diagonalización:

Ejemplo 2 II

```
Sigma <- matrix(c(2.5, 0.75, 0.175,
                  0.75, 0.7, 0.135,
                  0.175, 0.135, 0.43),byrow=T,nrow=3)
e <- eigen(Sigma)
v <- e$vectors
B <- v %*% diag(sqrt(e$values)) %*% t(v)
B
```

```
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 1.54657939 0.32165372 0.06805199
[2,] 0.32165372 0.76821450 0.07990852
[3,] 0.06805199 0.07990852 0.64728939
```

```
# Ahora generamos una muestra aleatoria de X:
Z <- matrix(rnorm(300),nrow=100,ncol=3,byrow=T)
X <- c(1,2,3) + Z %*% B
head(X,4)
```

```
           [,1]     [,2]      [,3]
[1,]  2.2470459 1.862355 2.3068583
[2,]  2.8737362 3.629209 0.6078182
[3,]  2.8837055 1.526865 3.1220571
[4,] -0.5104138 1.641071 3.1179312
```

□

Esta solución no es generalizable a otras distribuciones que no sean elípticas.

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables*. Por ejemplo:
$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$
- *Valores factibles para la correlación dependen de las distribuciones marginales*. Por ejemplo si X_1 y X_2 son lognormales, entonces ciertos valores de la correlación son imposibles. ($\log(X_1) \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\log(X_1) \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{2}\right)$ y $cor(\log(X_1, \log(X_2)) = 0.7$ no existe).
- *Una dependencia lineal perfecta no implica una correlación de 1*.
- En general, *Correlación 0 no implica independencia*.
- Entonces necesitamos otras formas de medir dependencia que tome en cuenta su estructura, y ésta se definirá a través de la función cópula.

Datasaurius I

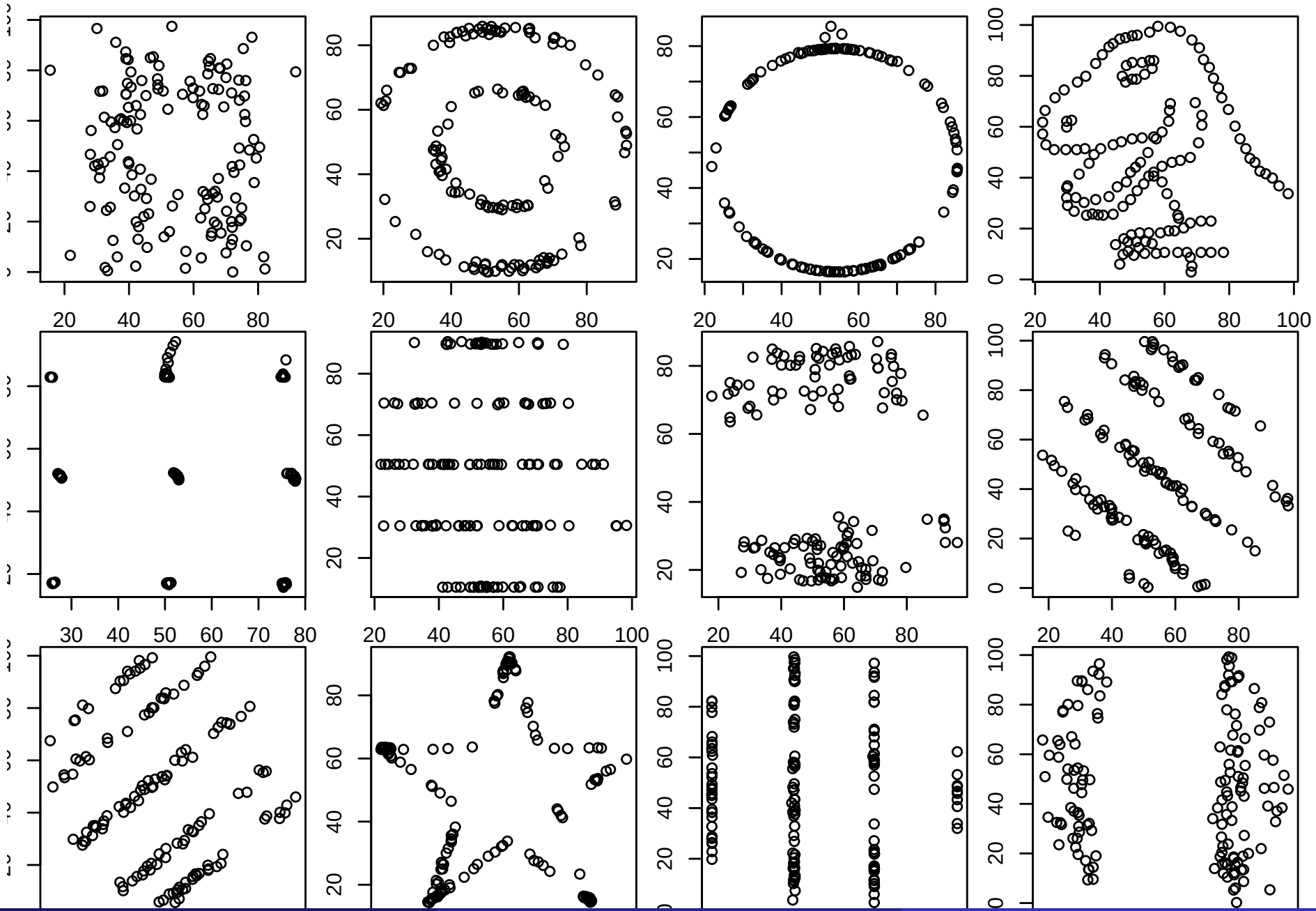
Ver: Same Stats, Different Graphs: Generating Datasets with Varied Appearance and Identical Statistics through Simulated Annealing
En este conjunto de datos todos los pares de puntos tienen la misma correlación (difieren a dos cifras decimales).
También las marginales son diferentes en cada caso

```
temp <- tempfile()
download.file("https://www.autodeskresearch.com/sites/default/files/The%20Datasaurus%20Dozen.zip",
temp)
datos <- read.csv(unz(temp, "The Datasaurus Dozen/DatasaurusDozen-wide.tsv"),
sep="\t",header=T,skip=1)
unlink(temp)
par(pty="s");par(mfrow=c(3,4));par(mar=c(1,1,1,1))
rho <- NULL
for(i in 0:11) rho[i+1] <- cor(datos[,2*i+1],datos[,2*(i+1)])
rho
```

```
 [1] -0.06412835 -0.06858639 -0.06834336 -0.06447185 -0.06034144
 [6] -0.06171484 -0.06850422 -0.06897974 -0.06860921 -0.06296110
[11] -0.06944557 -0.06657523
```

```
for(i in 0:11) plot(datos[,2*i+1],datos[,2*(i+1)],xlab="",ylab="")
```

Datasaurius II



2.5 Cópulas

Definición de cópula

Cópulas

Una cópula es una función de distribución conjunta $C[0,1]^n \to [0,1]$ cuyas distribuciones marginales son todas $\mathcal{U}(0,1)$.

Dada la definición, podemos construir una cópula de la siguiente manera:

- Consideren dos variables aleatorias (X_1, X_2) con distribución conjunta F y marginales $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$.
- Definan

$$C(u,v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad \forall\, u,v \in [0,1]$$

Entonces C es una cópula:

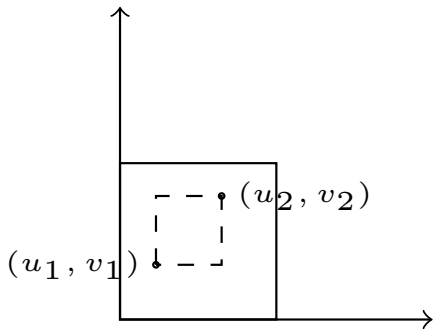
$$\begin{aligned} C(u,v) &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \\ &= P(X \leq F_1^{-1}(u), Y \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= P(F_1(X) \leq u, F_2(Y) \leq v) \\ &= P(U \leq u, V \leq v) \end{aligned}$$

Y claramente las marginales de $C(u,v)$ son uniformes.

Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v \ \forall u, v \in [0, 1]$.
  - $C(u, 0) = C(0, v) = 0 \ \forall u, v \in [0, 1]$.
  - El área (volumen si $n > 2$) de un cuadrado (cubo) en el cuadro unitario (hipercubo) es positiva: si $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$ y $u_2 \geq u_1$, $v_2 \geq v_1$ entonces

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$



  - Una cópula es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de las distribuciones marginales.
- Las propiedades anteriores caracterizan a las cópulas.

Cópulas

- Sabemos que $F(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$ para cualquier v.a. X. Entonces, por definición, la función $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ es una cópula.
- Noten que como C es una distribución y haciendo $u = F_1(x_1)$ y $v = F_2(x_2)$:

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(u,v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(F_1(X_1) \leq u, F_2(X_2) \leq v) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= F_X(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = F_X(x_1, x_2) \end{aligned}$$

  Esto es, $F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$. De este modo, F_X se "descompone" en dos partes: una cópula C que contiene información de las dependencias de $X = (X_1, X_2)$, y las marginales.
- Lo anterior se puede resumir en el teorema de Sklar (1959).

Teorema de Sklar (1959)

Teorema de Sklar

Sea F una función de distribución conjunta con marginales $F_1, \ldots, F_p$. Entonces $\exists$ una cópula $C : [0,1]^p \to [0,1] \ni \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$

$$F(x_1, \ldots, x_p) = C(F_1(x_1), \ldots, F_p(x_p))$$

Además, si las marginales son continuas, entonces C es única. Conversamente, si C es una cópula y $F_1, \ldots, F_p$ son funciones de distribución, entonces F como se definió arriba, es una distribución con marginales $F_1, \ldots, F_p$.

Abe Sklar

Uso de las cópulas

- En resumen, usamos las cópulas para especificar una distribución conjunta en un proceso de dos etapas:
  1. Especificamos el tipo de distribuciones marginales que se desea conjuntar
  2. Especificamos la distribución cópula.
- Como las cópulas sólo especifican la estructura de la dependencia, diferentes cópulas producen diferentes distribuciones conjuntas cuando se aplican a las mismas marginales.
- Es importante notar que para un par de marginales, se pueden usar infinitas cópulas para crear una distribución conjunta, así que es necesario 'ajustar' la que más se apegue al comportamiento de dependencia entre las variables.

En las secciones y ejemplos siguientes utilizaremos los siguientes paquetes de `R`: `copula` y `mvtnorm`.

Cópula de independencia. I

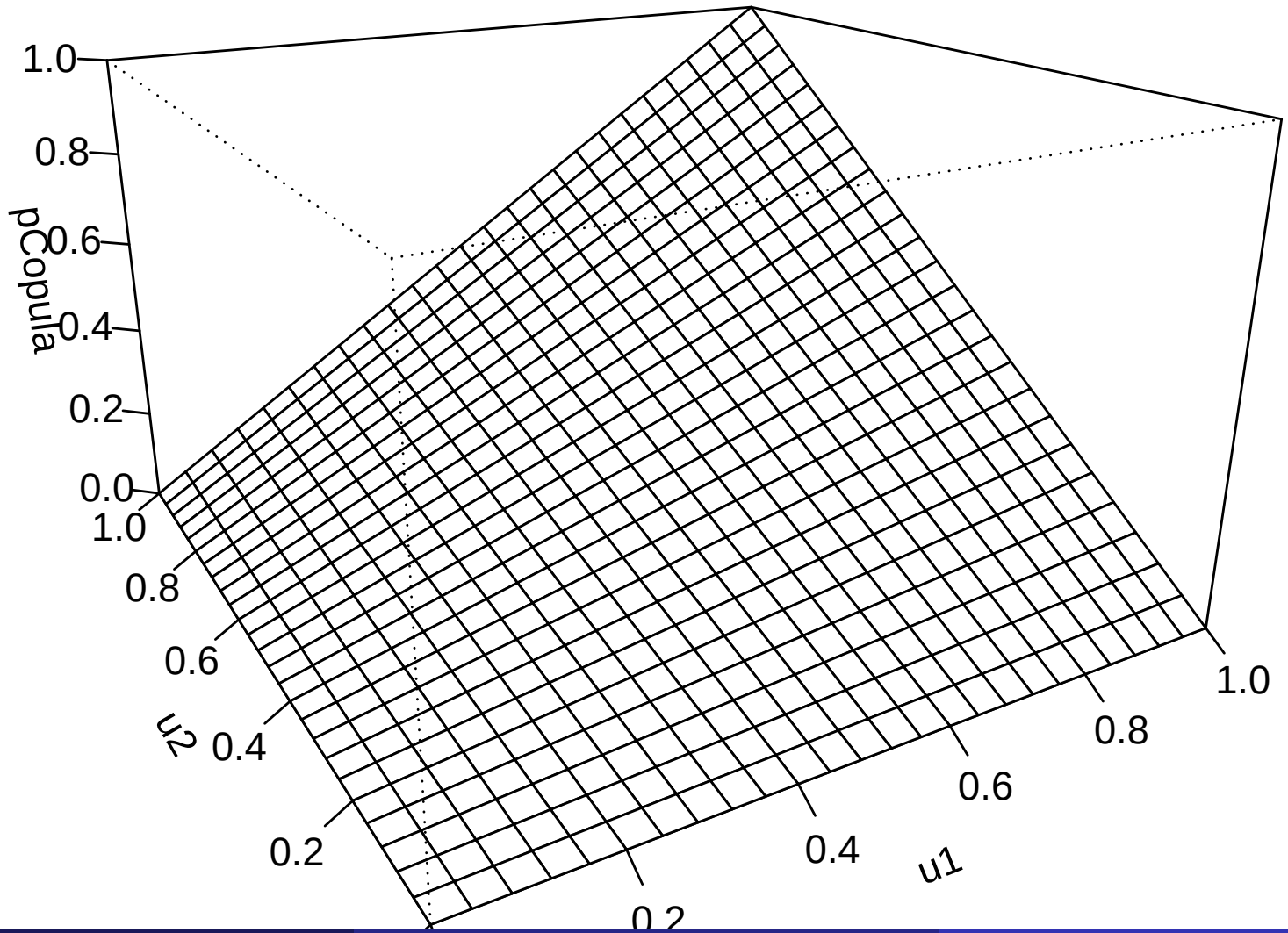
Definamos $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ como $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$. Entonces, Si F_1 y F_2 son distribuciones,

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2) = F(x_1, x_2)$$

Entonces $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

```
library(copula)
persp(indepCopula(), pCopula, theta = -30, phi = 20)
```

Cópula de independencia. II



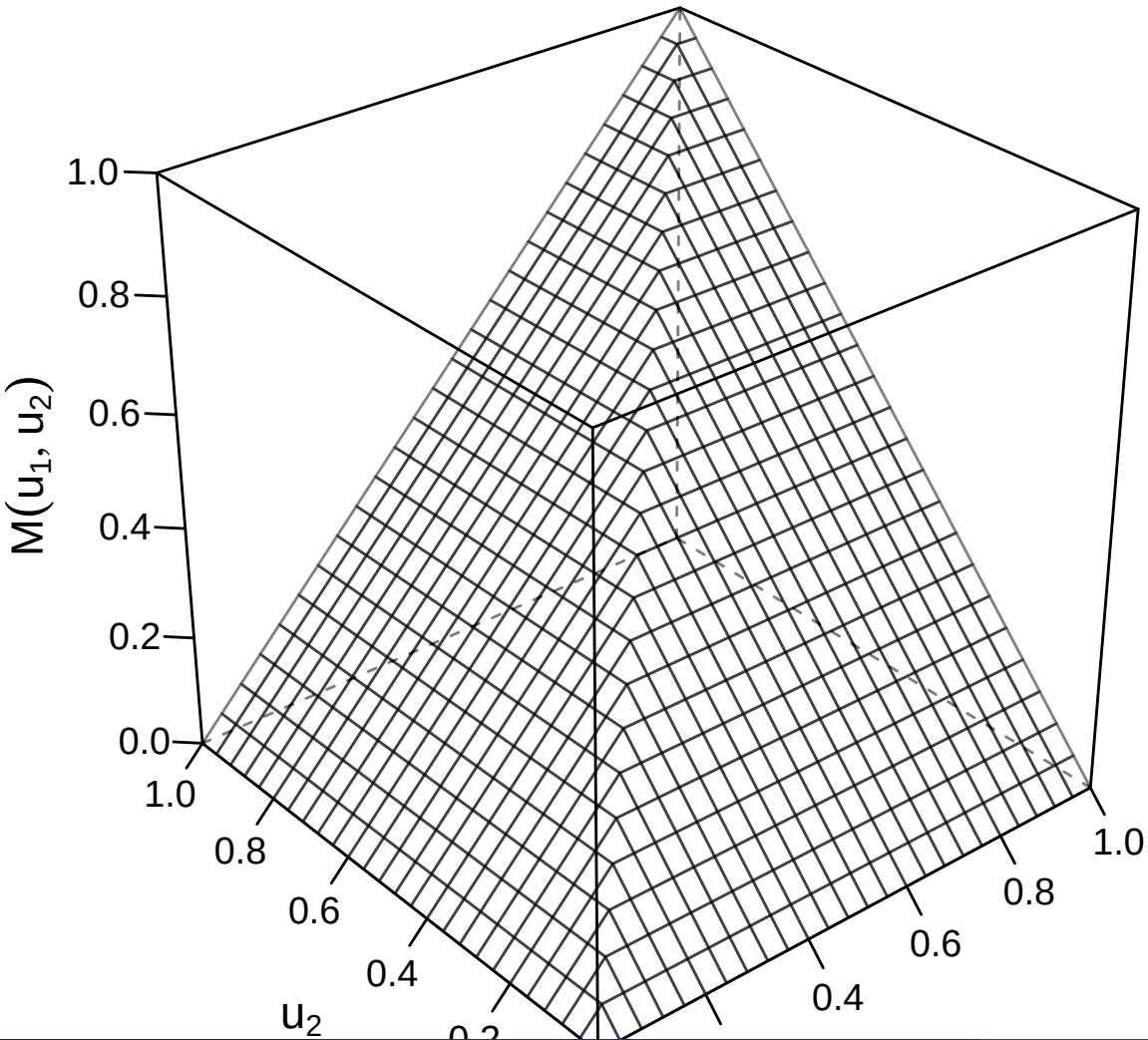
Cópula de co-monotonicidad I

Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $\mathbf{U} = (U, U)$ (dos copias de U, así que las variables son completamente dependientes)

$$C^M(u_1, u_2) = P(U \leq u_1, U \leq u_2) = P(U \leq \text{mín}\{u_1, u_2\}) = \text{mín}\{u_1, u_2\}$$

```
n.grid <- 26
u <- seq(0,1,length.out=n.grid)
grid <- expand.grid("u[1]"= u,"u[2]"= u)
M <- function(u) apply(u,1,min) #Cota superior M
x.M <- cbind(grid,"M(u[1],u[2])" = M(grid)) #Evalua M en el grid
wireframe2(x.M)
```

Cópula de co-monotonicidad II



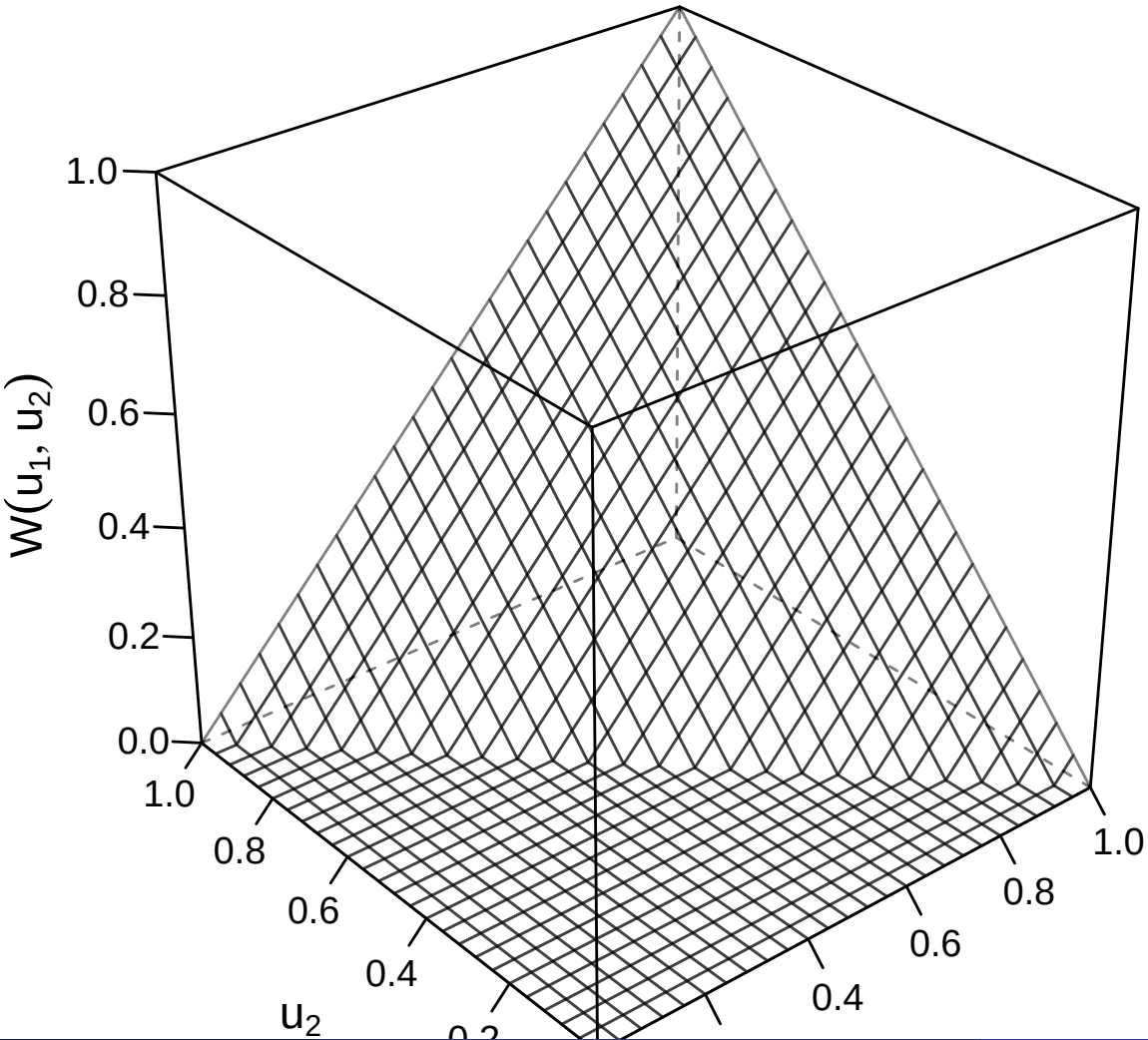
Cópula de contra-monotonicidad I

Si $\mathbf{U} = (U, 1-U)$

$$\begin{aligned} C^{CM}(u_1, u_2) &= P(U \leq u_1, 1-U \leq u_2) \\ &= P(1-u_2 \leq U \leq u_1) \\ &= \text{máx}\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \end{aligned}$$

```
n.grid <- 26
u <- seq(0,1,length.out=n.grid)
grid <- expand.grid("u[1]"= u,"u[2]"= u)
W <- function(u) pmax(0,rowSums(u)-1) #cota inferior W
x.W <- cbind(grid,"W(u[1],u[2])" = W(grid)) #Evalua W en el grid
wireframe2(x.W)
```

Cópula de contra-monotonicidad II



Cotas para cópulas

Un resultado importante es que las cópulas de co- y contra-monotonicidad son los extremos que cualquier cópula puede tomar (es decir, son cotas mínima y máxima):

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffing

Dada una cópula C, $\forall u_1, \ldots, u_n \in [0,1]$:

$$max\{u_1 + \cdots + u_n - n + 1, 0\} \leq C(u_1, \ldots, u_n) \leq min\{u_1, \ldots, u_n\}$$

Cópula Gaussiana

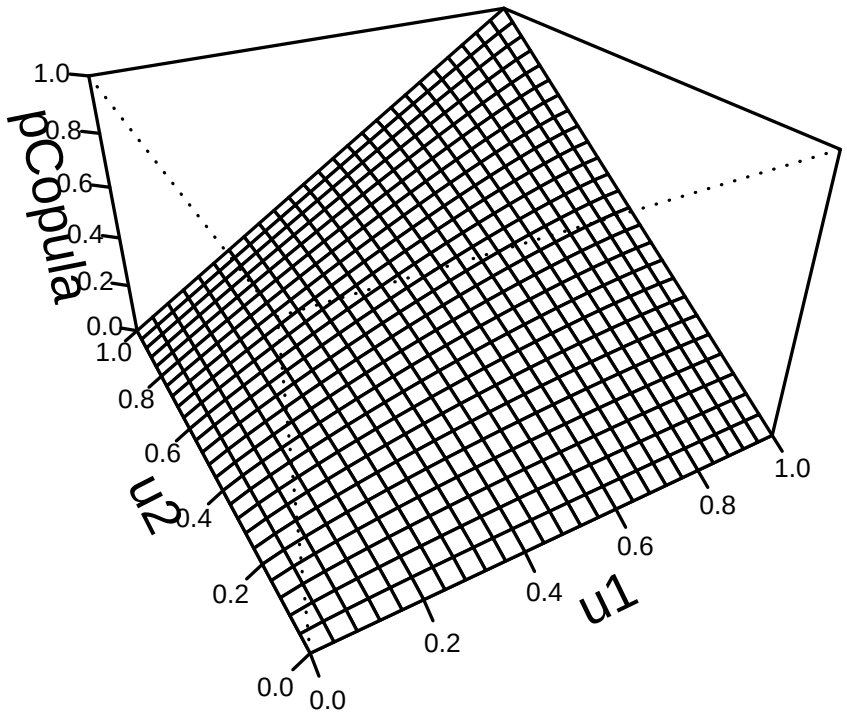
Si $Z \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ con marginales $Z_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ y $Z_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ y $\rho(Z_1, Z_2) = \rho$, entonces

$$C(u_1, u_2) = \Phi_{\mathbf{\Sigma}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$$

es una cópula.
La fórmula explícita de la cópula es:

$$C_\rho(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{\frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{2(1-\rho^2)}\right\} ds\, dt$$

con $x_i = \phi^{-1}(u_i)$.



Método para construir variables dependientes (simulación)

Se puede dar un método general para construir variables dependientes con distribuciones generales: $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$, utilizando una cópula dada. Por ejemplo, para el caso de la cópula gaussiana:

1. Generar $(Z_1, Z_2) = \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}(\rho))$. Entonces Z_1 y Z_2 están relacionadas, $cor(Z_1, Z_2) = \rho$.
2. Obtener $(u_1, u_2) = \mathbf{u} \sim (\Phi(Z_1), \Phi(Z_2))$.[1]
3. Obtener $(X_1, X_2) = \mathbf{X} \sim (F^{-1}(u_1), G^{-1}(u_2))$

X_1 y X_2 son dependientes. Sin embargo, $cor(X_1, X_2) \neq \rho$, ya que se aplicaron transformaciones no lineales. Entonces, es necesario introducir nuevas medidas de dependencia sean invariantes ante transformaciones no lineales que veremos más adelante.

[1] Notar que la cópula normal se usa en este punto, ya que $C(u_1, u_2) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(Z_1)), \Phi^{-1}(\Phi(Z_2)) = \Phi(Z_1, Z_2) = \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}(\rho))$.

Ejemplo práctico

- Queremos estudiar el comportamiento conjunto de los precios de dos instrumentos en el mercado financiero. Cada precio puede tener su propio comportamiento, originado por las diferentes fuentes de variación.
- Por ejemplo, si ambos instrumentos son derivados sobre el mismo subyacente, puede ser que su comportamiento se deba las mismas fuerzas del mercado. Sin embargo, si los subyacentes son de diferentes mercados (hipotecario y de tasas de interés) entonces pueden responder a diferentes fuentes de variación. Supongamos:
  - Los precios se comportan como dos lognormales de manera independiente.
  - Se desea simular el comportamiento que han tenido en los pasados 1,000 días.
  - Para generar lognormales, generamos 1,000 pares de variables normales independientes, y las exponenciamos.
  - Asumimos una variabilidad de los precios conocida de $\sigma = 0.5$.

Ejemplo: Primer caso: independencia

La siguiente gráfica muestra el comportamiento conjunto de estas dos variables independientes.

```r
set.seed(1)
n <- 1000
sigma <- 0.5 # asumida
#Matriz de covarianzas
Sigma <- sigma^2 * diag(2)
Sigma
```

```
     [,1] [,2]
[1,] 0.25 0.00
[2,] 0.00 0.25
```

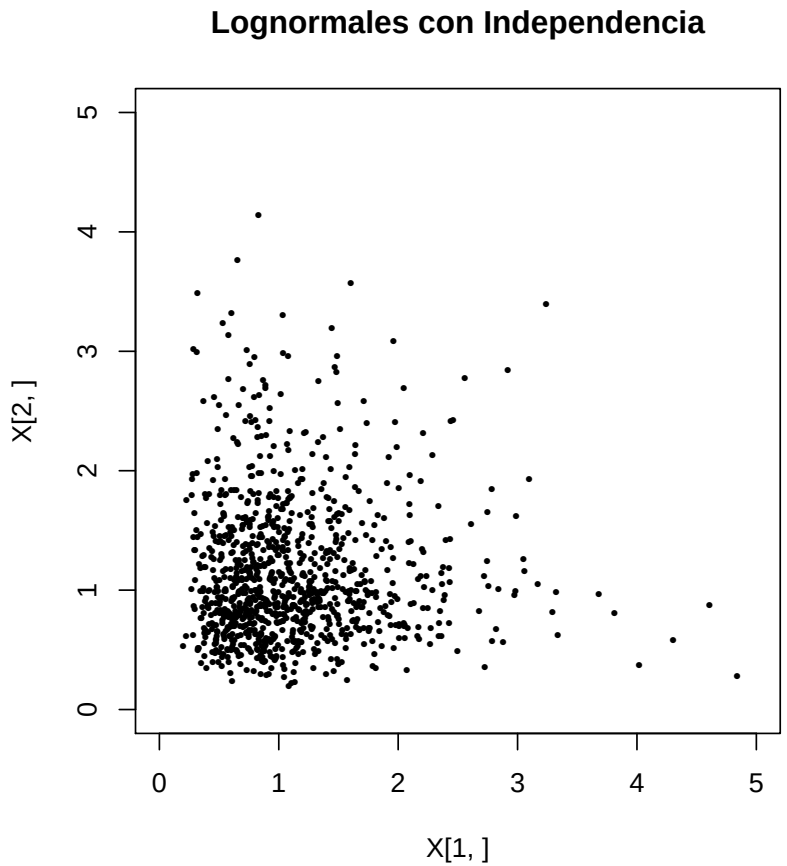
```r
#Genera las muestras de dos normales
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
#Transforma para escalar las variables
Y <- sigma*diag(2) %*% z
X <- exp(Y) #X tiene distribución lognormal
dim(X)
```

```
[1]    2 1000
```

```r
X[1:2,1:3]
```

```
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.731084 0.6584845 1.1791029
[2,] 1.096169 2.2202957 0.6634948
```

```r
par(pty="s") #gráfico cuadrado
plot(X[1,], X[2,], xlim=c(0,5), ylim=c(0,5), pch=16,
cex=0.5, main="Lognormales con Independencia")
```



Segundo caso: Introducción de dependencia lineal.

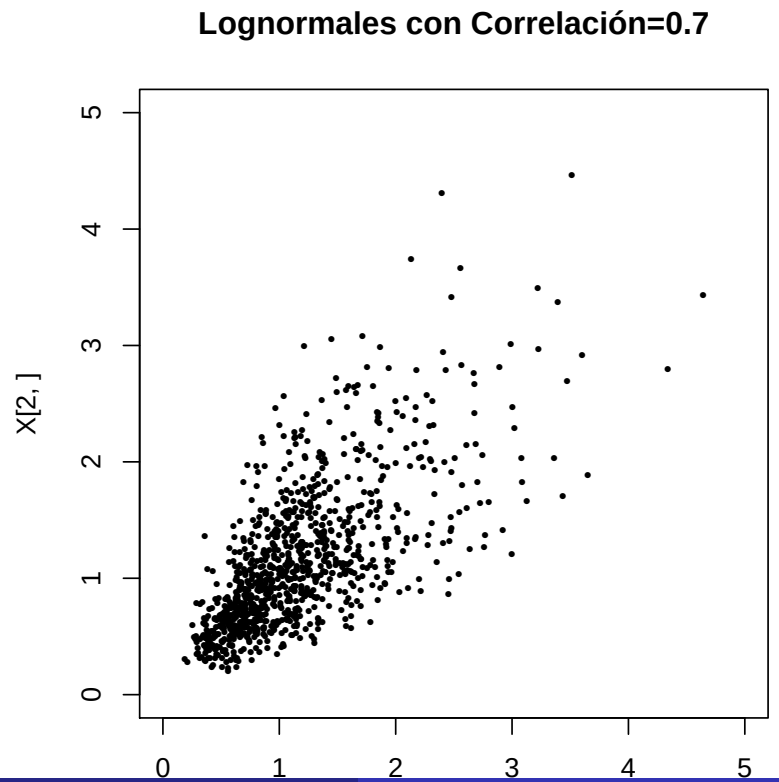
Podemos introducir dependencia entre las variables a través de un coeficiente de correlación en las normales bivariadas. En este caso se puede observar que valores mayores o menores de las dos variables tienden a estar más asociados que en el caso anterior.

```
rho = 0.7 #correlación
Sigma <- sigma^2*matrix(c(1,rho,rho,1),nrow=2)
Sigma
```

```
      [,1]  [,2]
[1,] 0.250 0.175
[2,] 0.175 0.250
```

```
# Obten la matriz raíz cuadrada B de la matriz

# definida positiva Sigma
e <- eigen(Sigma)
v <- e$vectors
B <- v %*% diag(sqrt(e$values)) %*% t(v)
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
Y <-  B %*% z #Transforma para escalar las variables
X <- exp(Y)
```

```
par(pty="s") #haz el gráfico cuadrado
plot(X[1,], X[2,], xlim=c(0,5), ylim=c(0,5), pch=16, cex=0.5,
main="Lognormales con Correlación=0.7")
```

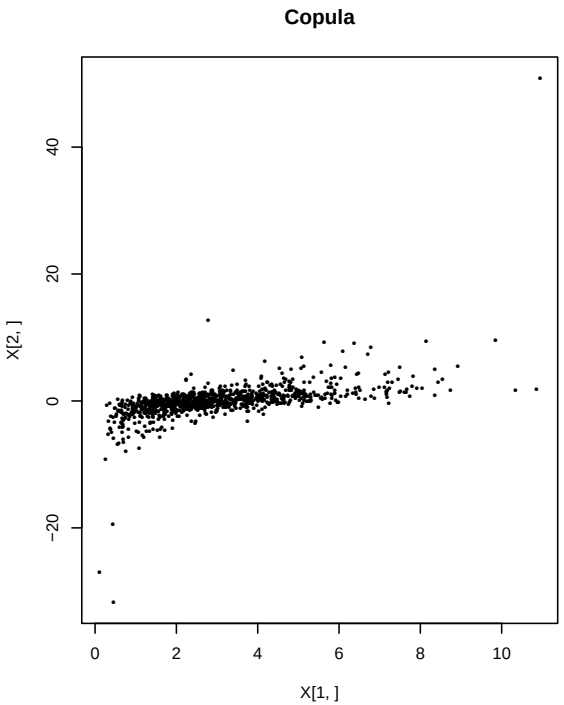


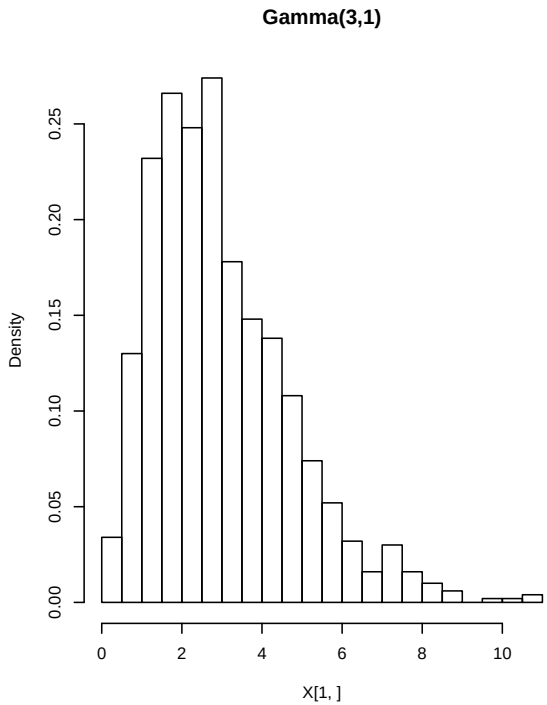
Caso más general: diferentes familias de distribuciones

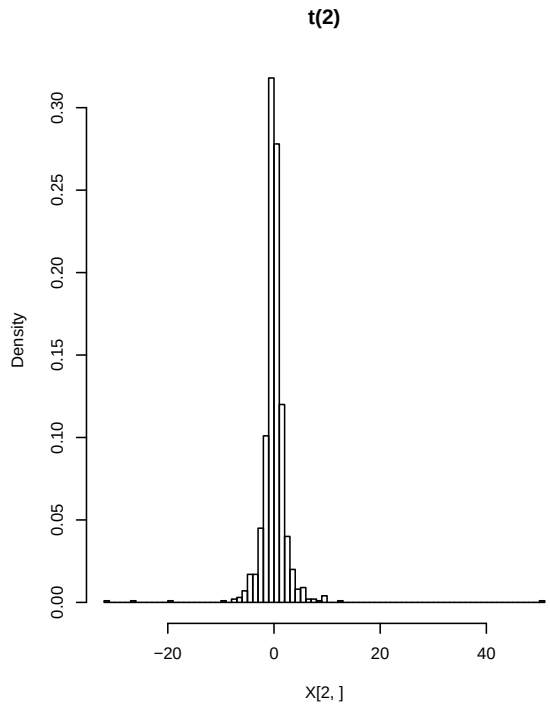
- En el ejemplo anterior se puede incluir diferentes lognormales, haciendo la transformación de y a X de la manera apropiada.
- Pero ¿si las distribuciones de los precios de los activos no es la misma? Por ejemplo, uno de los activos puede provenir del mercado cambiario, presentado mayor volatilidad y con colas pesadas en sus variaciones. En este caso, más que la distribución lognormal, podría ser más importante una distribución de colas pesadas, como la distribución t.
- Una siguiente extensión es aplicar la cópula gaussiana. Partimos de los mismos supuestos de correlación, pero ahora supondremos que un precio es $\mathcal{G}(3,1)$ y el otro es $t_{(2)}$. Ahora tenemos que obtener uniformes a partir de Z y luego tomar las inversas de las distribuciones marginales.

Generación de variables aleatorias usando cópula gaussiana

```
set.seed(3)
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
Y <-  B %*% z #Transforma para escalar las variables
U <- pnorm(Y,sd=0.5)
X <- rbind(qgamma(U[1,],3,1),qt(U[2,],2))
par(mfcol=c(1,3))
plot(X[1,],X[2,],pch=16,cex=0.5,main="Copula")
hist(X[1,],main="Gamma(3,1)",breaks=30,prob=T)
hist(X[2,],main="t(2)",breaks=100,prob=T)
```





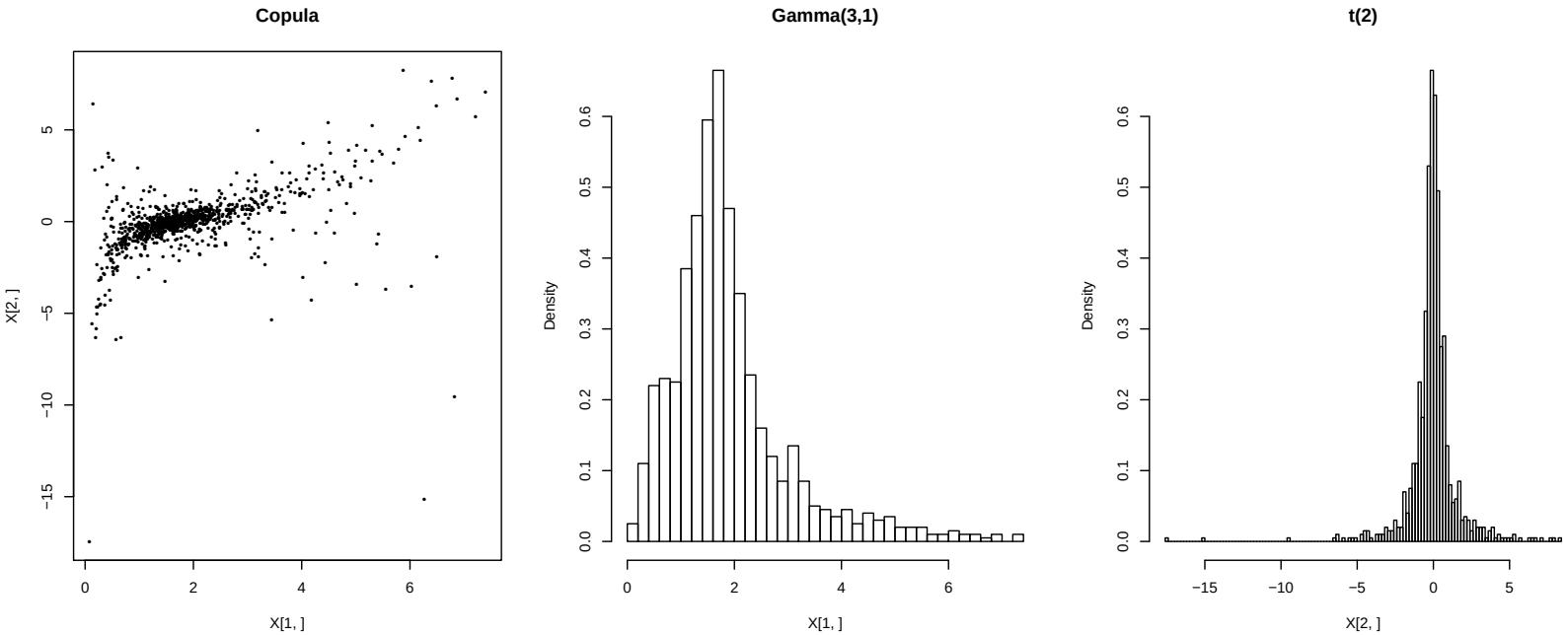



```
cor(X[1,],X[2,])

[1] 0.5327403
```

Generación de variables aleatorias usando cópula t

¿Qué pasa si hacemos el mismo ejercicio pero con una cópula diferente? Consideremos ahora la cópula t que también se puede parametrizar con la correlación y con los grados de libertad.

```
library(mvtnorm) #para generar t multivariada
set.seed(3)
TT <- t(rmvt(n=1000,sigma=Sigma,df=1)) #genera una dist. t(1)
U  <- pt(TT, df = 1) #distribución t(1) para uniformes
X <- rbind(qgamma(U[1,],2,1), qt(U[2,],2))
par(mfcol=c(1,3))
plot(X[1,], X[2,], pch=16, cex=0.5, main="Copula")
hist(X[1,], main="Gamma(3,1)",breaks=30,prob=T)
hist(X[2,], main="t(2)",breaks=100,prob=T)
```




```
cor(X[1,],X[2,])

[1] 0.4727318
```

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\mathbf{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual:
  - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y
  - se requiere poder estimar una cópula específica a las estructuras de dependencia, y por eso tiene sentido considerar *familias de cópulas* para diferentes estructuras de dependencia:
    - Cópulas elípticas: Gaussianas, Student.
    - Cópulas Arquimedianas: Frank, Clayton, Gumbel
    - Cópulas de valores extremos.

Cópulas Arquimedianas

Una cópula Arquimediana con generador ϕ tiene la forma:

$$C(u_1, \ldots, u_p) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_1))$$

donde ϕ satisface:

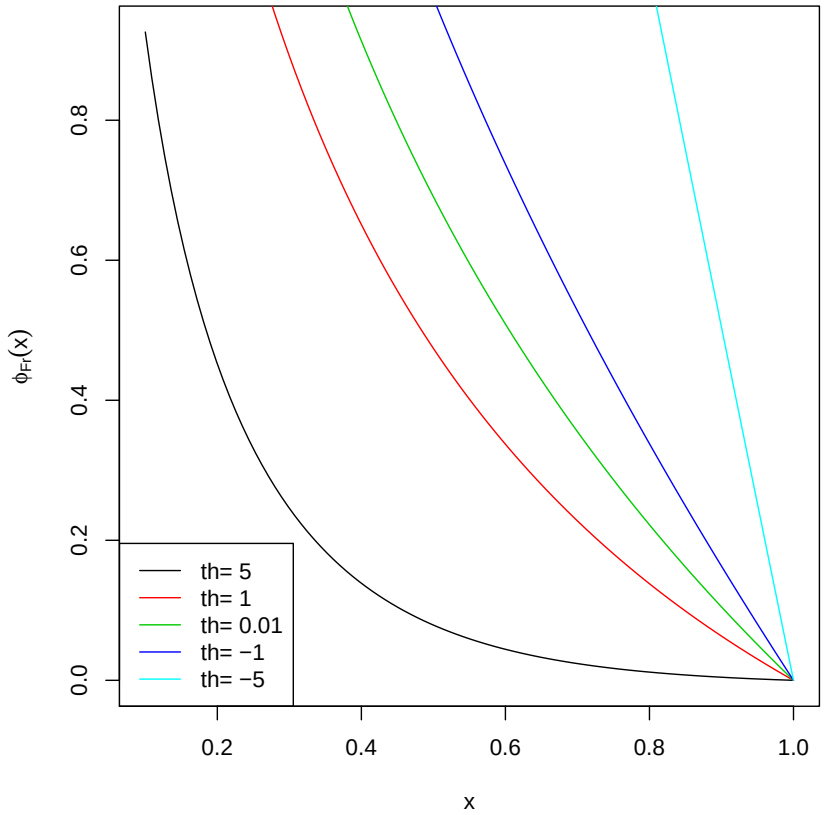
1. $\phi : [0, 1] \to [0, \infty]$ es continua y estrictamente decreciente.
2. $\phi(0) = \infty$
3. $\phi(1) = 0$

Diferentes generadores generan diferentes cópulas. Algunas de las más comunes son las que siguen a continuación.

Cópula de Frank I

La cópula de Frank tiene función generadora:

$$\phi^{Fr}(u) = -\log\{\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\}, \theta \in \mathbb{R}$$



Cópula de Frank I

Verificando las propiedades de cópula arquimediana:

- $\phi^{Fr}(0) = -\log\{\frac{1-1}{e^{-\theta}-1}\} = -log(0) = \infty$
- $\phi^{Fr}(1) = -\log\{\frac{e^{-\theta}-1}{e^{-\theta}-1}\} = -\log(1) = 0$
- Si $y = -log\{\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{-y} &= \frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1} \\ (e^{-\theta}-1)e^{-y}+1 &= e^{-\theta u} \\ u &= -\frac{1}{\theta}\log\left\{(e^{-\theta}-1)e^{-y}+1\right\} \end{aligned}$$

- Por lo tanto: $\phi Fr^{-1}(y) = -\frac{1}{\theta}\log\left\{(e^{-\theta}-1)e^{-y}+1\right\}$

Con ambas funciones $\phi^{Fr^{-1}}$ y ϕ^{Fr}, hay que resolver la ecuación:

$$\phi^{Fr^{-1}}[\phi^{Fr}(u_1)+\phi^{Fr}(u_2)]$$

La cópula que se obtiene (en el caso bidimensional) es la siguiente:

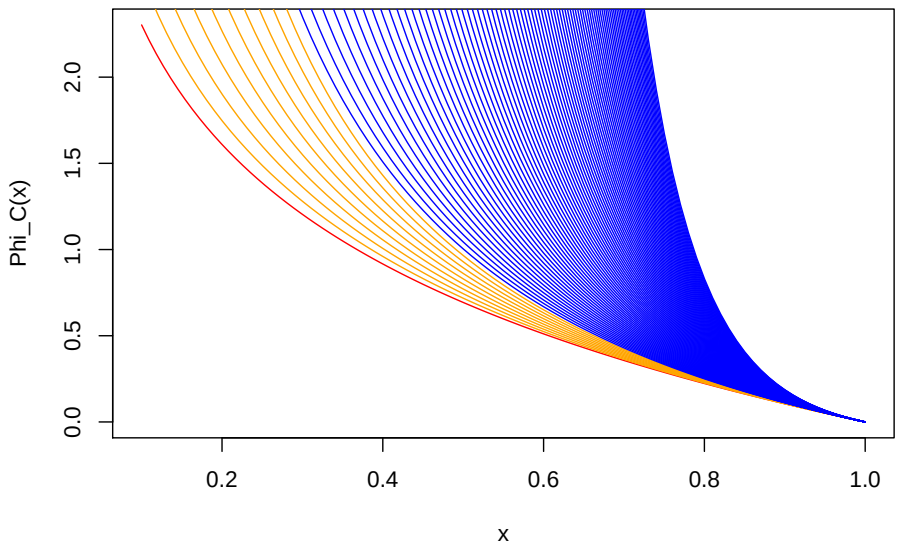
$$C^{Fr}(u_1,u_2) = -\frac{1}{\theta}\log\left(1+\frac{(e^{-\theta u_1}-1)(e^{-\theta u_2}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

Cópula de Clayton

La cópula de Clayton tiene función generadora: $\phi^C(u) = \frac{u^{-\theta}-1}{\theta}, \theta > 0$ y de aquí se obtiene la ecuación de la cópula:

$$C^C(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

```
Phi_C <- function(u,theta=0.0001)(u^(-theta)-1)/theta
unitario <- seq(0,1,by=0.1)

curve(Phi_C,from=0.1,to=1,col="red")
for(theta in seq(0,10,length=100)){
curve(Phi_C(x,theta=theta),from=0.001,to=1,add=T,
                col = ifelse(theta > 1,"blue","orange"),
                ylab=expression(Phi[C](x)))
}
```

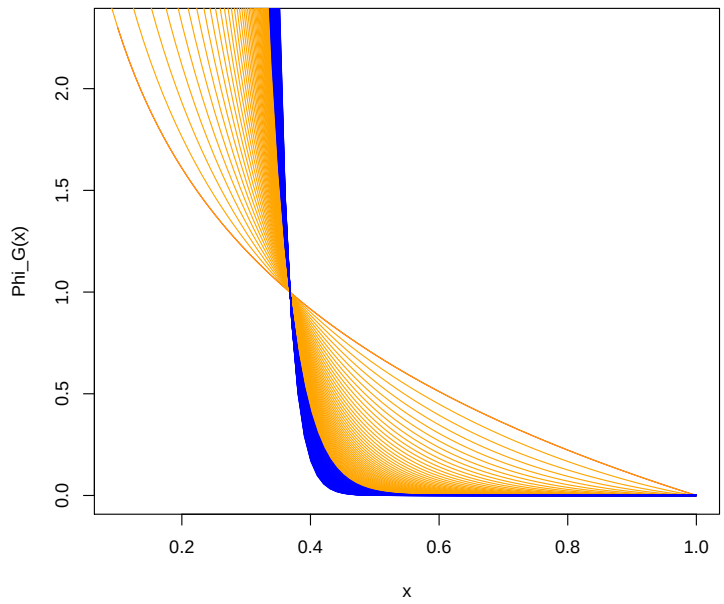


Cópula de Gumbel

```r
Phi_G <- function(u,theta=1)(-log(u))^theta

curve(Phi_G,from=0.1,to=1,col="red")
for(theta in seq(1,20,length=100)){
        curve(Phi_G(x,theta=theta),from=0.001,to
        col = ifelse(theta > 10,"blue","orange")
}
```

La función generadora de la cópula de Gumbel tiene la forma: $\phi^G(u) = (-\log u)^\theta, \theta \geq 1$ y la ecuación de la cópula queda de la siguiente manera:

$$C^G(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta]\}$$



2.6 Medidas de dependencia

Rango de una variable aleatoria

- Se mencionó que la correlación de Pearson

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

  es una medida de dependencia limitada, ya que depende tanto de la distribución conjunta como de las marginales.
- La *correlación basada en rangos* son medidas escalares que dependen sólo de la cópula de la distribución bivariada y no de las marginales.

Rango

El rango de una variable es la posición de sus valores ordenados de menor a mayor:

$$\text{rango}(x) = \sum_{j=1}^{n} I(X_j \leq X_i)$$

- Los rangos no cambian por transformaciones estrictamente monótonas.
- Hay dos principales variedades de correlación basada en rangos: τ de Kendall y ρ_S de Spearman.

Propiedades deseables de las medidas de dependencia

Sea $\delta(\cdot,\cdot)$ una medida de dependencia que asigna un número real a cualquier par de variables aleatorias reales X y Y. Idealmente, se desean las siguientes propiedades:

P1. $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$ (simetría)

P2. $-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$ (normalización)

P3. $\delta(X,Y) = 1 \iff X, Y$ comonótonas, $\delta(X,Y) = -1 \iff X, Y$ contramonótonas

P4. Para $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona en el rango de X:

$$\delta(T(X),Y) = \begin{cases} \delta(X,Y) & T \text{ creciente} \\ -\delta(X,Y) & T \text{ decreciente} \end{cases}$$

P5. $\delta(X,Y) = 0 \iff X \perp\!\!\!\perp Y$

La correlación lineal cumple sólo P1 y P2. La correlación de rangos cumple P3 y P4 si X y Y son continuas.
No hay medida de dependencia que cumpla sistemáticamente P4 y P5 simultáneamente (tarea)

τ de Kendall

Sea (X, Y) un vector aleatorio y (X^*, Y^*) una vector con la misma distribución e independiente de (X, Y) (es una copia de (X, Y)). Entonces (X, Y) y (X^*, Y^*) son pares *concordantes* (*discordantes*) si $(X - X^*)(Y - Y^*) > 0$ ($(X - X^*)(Y - Y^*) < 0$).
La τ de Kendall es la diferencia de probabilidades de par concordante y de par discordante:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X, Y) &= P((X - X^*)(Y - Y^*) > 0) - P((X - X^*)(Y - Y^*) < 0) \\ &= E(sgn\{(X - X^*)(Y - Y^*)\}) \end{aligned}$$

La τ de Kendall muestral está dada por:

$$\hat{\rho}_\tau = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} sgn\{(X_i - X_j^*)(Y_i - Y_j^*)\} = \frac{C - D}{C + D} = \frac{C - D}{\binom{n}{2}}$$

donde C son los pares concordantes y D son los pares discordantes.

Ejemplo

1. Para la muestra de parejas $(2,3),(3,4),(1,5),(5,2),(4,8),(9,6),(6,8),(4,3),(2,1),(10,10)$ calcular la τ de Kendall.

```
muestra <- cbind(c(2,3,1,5,4,9,6,4,2,10),c(3,4,5,2,8,6,8,3,1,10))
cor(muestra,method="kendall")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.3953488
[2,] 0.3953488 1.0000000

# La correlación de Pearson usual
cor(muestra)

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.6440133
[2,] 0.6440133 1.0000000
```

2. Consideren X =rango de calificación del examen 1 y Y =rango de calificación del examen 2. Calcular la τ de Kendall de manera manual.

```
X <- c(1,2,3,4,5,6,7)
Y <- c(1,3,6,2,7,4,5)
```

Correlación de Spearman

La correlación de Spearman es la correlación de Pearson sobre los valores evaluados en los rangos inducidos por las distribuciones marginales de los datos:

$$\rho_S(X,Y) = cor(F_1(X), F_2(Y))$$

- Podemos ver que la correlación de Spearman es la correlación de la cópula de (X,Y).
- La ρ_S muestral está dada por:

$$\hat{\rho}_S(X,Y) = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{rango}(X_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(\text{rango}(Y_i) - \frac{n+1}{2} \right)$$

Ejemplo

1. Para la muestra de parejas $(2,3),(3,4),(1,5),(5,2),(4,8),(9,6),(6,8),(4,3),(2,1),(10,10)$ calcular la ρ_S de Spearman

```
muestra <- cbind(c(2,3,1,5,4,9,6,4,2,10),c(3,4,5,2,8,6,8,3,1,10))
cor(muestra,method="spearman")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.5613497
[2,] 0.5613497 1.0000000

#Para efectos comparativos
cor(muestra,method="kendall")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.3953488
[2,] 0.3953488 1.0000000

# La correlación de Pearson usual
cor(muestra)

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.6440133
[2,] 0.6440133 1.0000000
```

Medidas de dependencia en términos de cópulas

- Las medidas de correlación aún toman valores entre -1 y 1.
- $\rho_\tau = \rho_S = 0$ para variables independientes (la conversa no se cumple)
- $\rho_\tau = \rho_S = 1$ cuando X y Y son comonótonas.
- $\rho_\tau = \rho_S = -1$ cuando X y Y son contramonótonas.
- En términos de cópulas, se puede ver que:

$$\rho_\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v) dC(u,v) - 1$$

y

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u,v) - uv) du dv$$

- Aunque en la práctica estas fórmulas no son muy útiles, salvo en el caso normal.

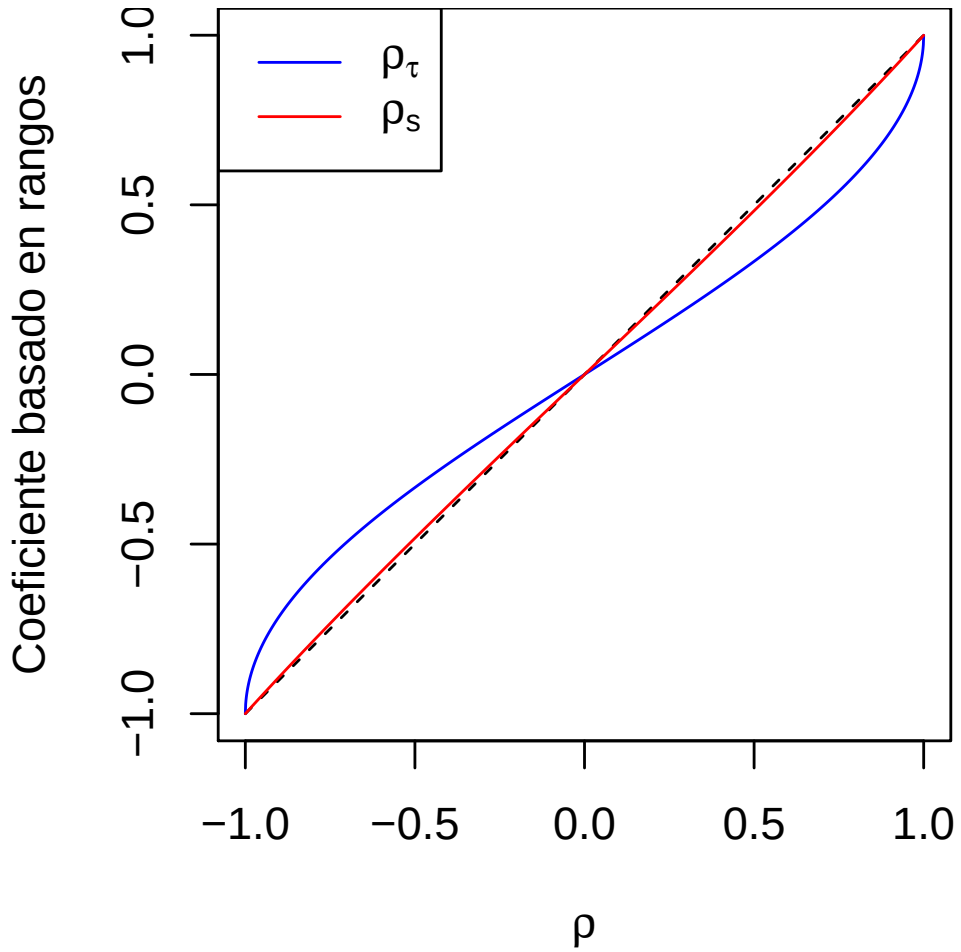
Relación de medidas de dependencia en el caso normal

En el caso de la normal bivariada, hay una relación biyectiva entre las medidas no paramétricas y el coeficiente de correlación:

$$\rho_\tau = \frac{2}{\pi} arcsin(\rho)$$

y

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} arcsin(\rho/2)$$



Aplicaciones

Ejemplo I

1. Generar 1,000 observaciones de un vector aleatorio $W = (X, Y, Z)$ donde $X \sim N(4, 25)$, $Y \sim t_4$ y $Z \sim Binom(25, 0.4)$, considerando las siguientes restricciones: $\tau(X, Y) = 0.7$, $\tau(X, Z) = 0.3$ y $\tau(Y, Z) = 0.4$.

Solución.

La primera alternativa es usar una cópula Gaussiana para construir nuestra muestra, incorporando la restricción de la dependencia. El procedimiento que se utilizará es el siguiente:

1. Transformar las τ de Kendall a la correlación para construir la matriz de correlaciones necesaria Σ. Para transformar los valores usamos la fórmula conocida para la distribución normal: $\rho = sin(\frac{\pi * \tau}{2})$. Entonces la matriz Σ tiene la forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.8910065 & 0.4539905 \\ 0.8910065 & 1 & 0.5877853 \\ 0.4539905 & 0.5877853 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Obtener un vector $Z \sim N(0, \Sigma)$
3. Obtener un vector $U \sim (\Phi(Z_1), \Phi(Z_2), \Phi(Z_3))$, donde $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar
4. Obtener un vector $W \sim (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2), F_3^{-1}(U_3))$, donde las F_i son las distribuciones deseadas. Entonces W tiene la composición deseada.

Ejemplo II

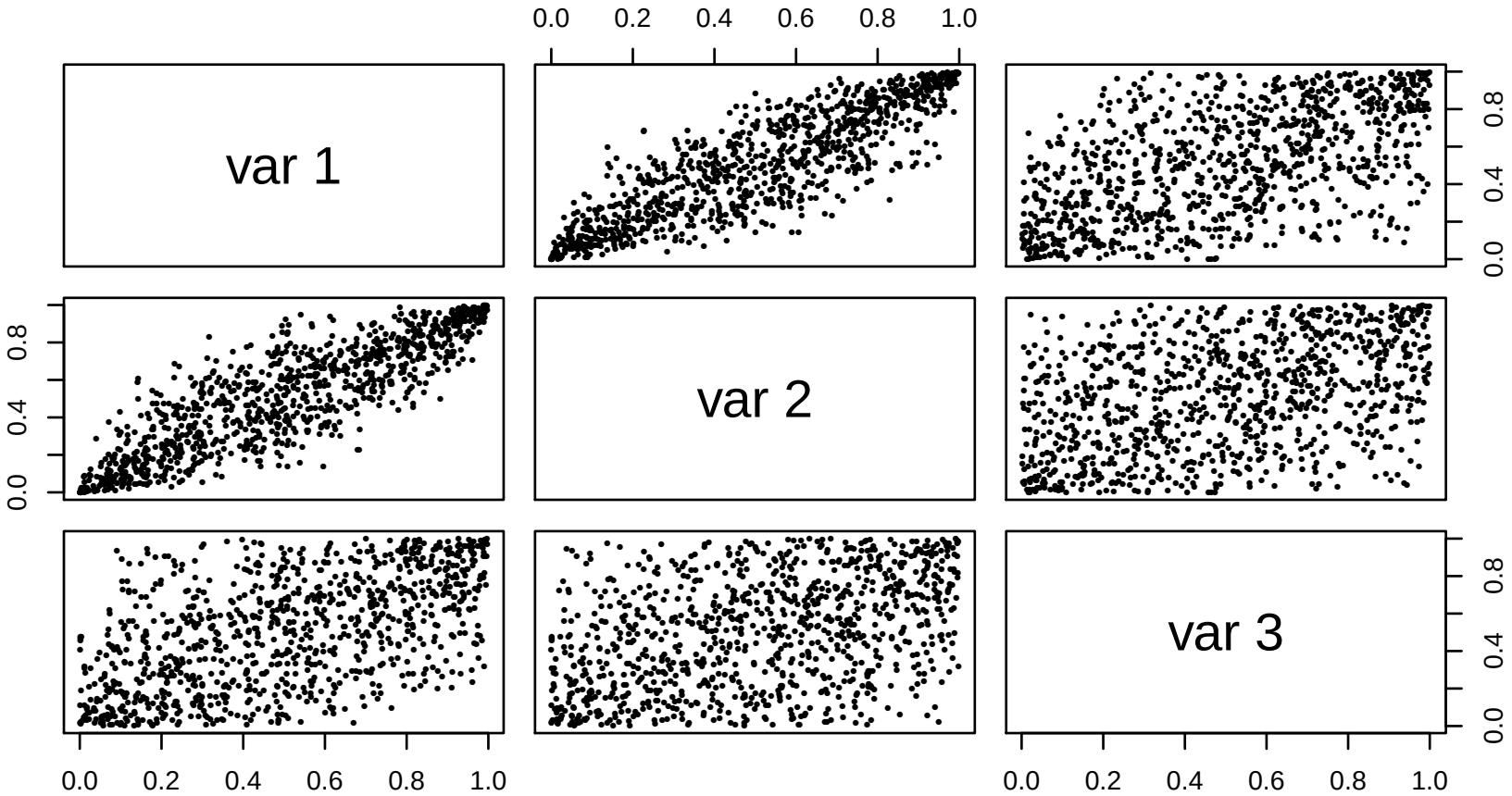
Justo los pasos 2 y 3 son los que corresponden a obtener una muestra aleatoria de una cópula, en este caso una cópula gaussiana. Entonces podemos escribir un código ligeramente más sencillo:

```
library(copula)
# Define el objeto cópula a generar, en este caso es una normal con correlaciones
# dadas
# El argumento dispstr se refiere a la estructura a la matriz de covarianza que caracteriza a
# la cópula. "un" es para indicar que no tiene estructura.
# ver detalle en https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v021i04/v21i04.pdf

copula_normal_3 <- normalCopula(c(sin(0.7*pi/2), sin(0.4*pi/2), sin(0.3*pi/2)),
                                dim = 3, dispstr = "un")
set.seed(100) #fija una semilla
U <- rCopula(1000,copula_normal_3) #Genera la muestra aleatoria
```

Con el código previo, se realizan los primeros tres pasos de la simulación. Antes de continuar, podemos ver cómo se ven las muestras generadas por pares, y podemos ver si tenemos la condición establecida como restricción sobre las covarianzas. La matriz de tau de Kendall está dada por:

```
pairs(U, pch=16, cex=0.5)
```

Ejemplo III



Ejemplo IV

```
round(cor(U, method = "kendall"), 2)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,] 1.00 0.69 0.39
[2,] 0.69 1.00 0.28
[3,] 0.39 0.28 1.00
```

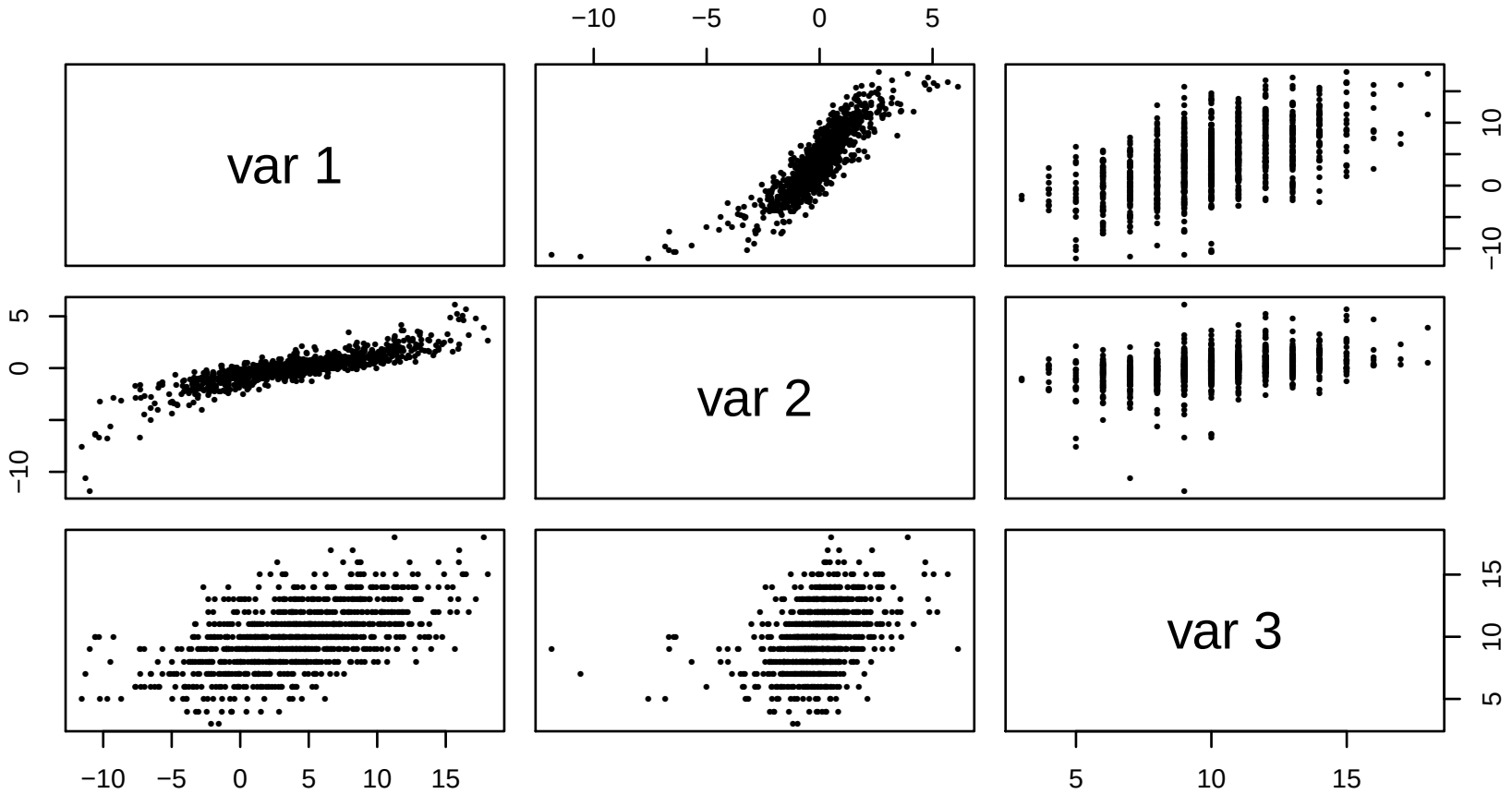
Ahora procedemos al paso 4, para generar nuestro vector y hacemos los histogramas para ver si tienen el comportamiento deseado, y se muestra un ejemplo de los valores generados:

```
W <- cbind(qnorm(U[,1], mean = 4, sd = 5),
           qt(U[,2], 4),
           qbinom(p = U[,3], size = 25, prob = 0.4))
head(W)
```

```
         [,1]        [,2] [,3]
[1,] 2.180664 -0.16821757    9
[2,] 8.355016  0.65959400   11
[3,] 2.275934  0.17518414    8
[4,] 2.902724 -0.09615615   10
[5,] 5.235607  0.58978484   10
[6,] 3.620093 -0.27198890   11
```

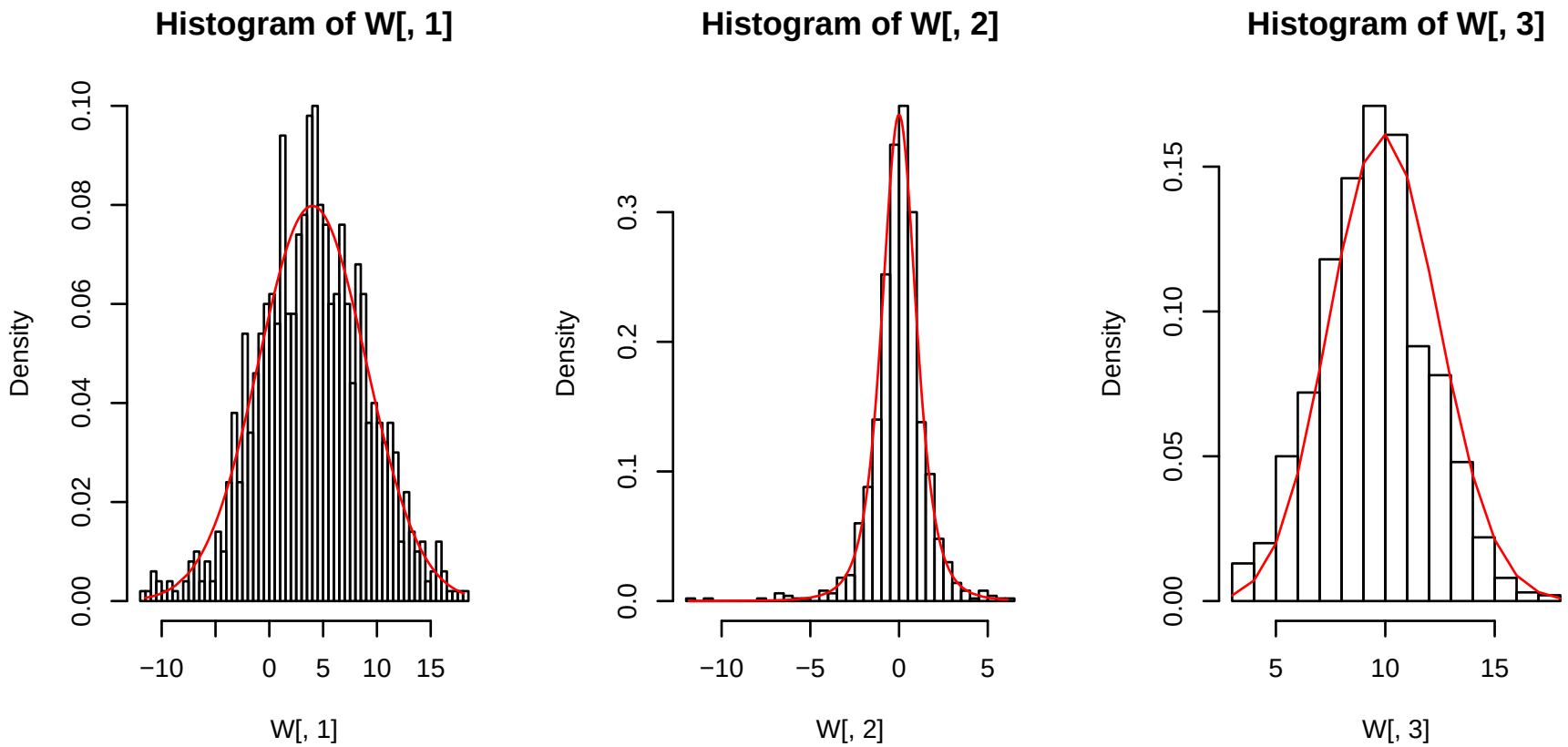
```
pairs(W, pch = 16, cex = 0.5)
```

Ejemplo V



Ejemplo VI

```r
#Grafica los histogramas y agrega densidades con las distribuciones deseadas para ver
#la aproximación
par(mfrow = c(1,3))
hist(W[,1], prob = T,breaks=50); points(sort(W[,1]),dnorm(sort(W[,1]),4,5),type="l",col="red")
hist(W[,2], prob = T,breaks=50); points(sort(W[,2]),dt(sort(W[,2]),4),type="l",col="red")
hist(W[,3], prob = T);
points(sort(W[,3]),dbinom(sort(W[,3]),size=25,prob=0.4),type="l",col="red")
```



Ejemplo VII

Podemos corroborar que alcanzamos la medida de dependencia requerida

```
cor(W, method = "kendall")
```

```
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.6884324 0.4120571
[2,] 0.6884324 1.0000000 0.3006960
[3,] 0.4120571 0.3006960 1.0000000
```

□