

Simulación

3. Simulación de Procesos Estocásticos

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Semanas 5 y 6: 20 al 27 de septiembre 2018

Procesos estocásticos

- Un **proceso estocástico** es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo o en el espacio de un fenómeno aleatorio.
- En simulación es una herramienta fundamental para modelar diferentes tipos de aplicaciones:
 - Mercado:** comportamiento de precios de activos, tasas de interés, tipos de cambio, índices bursátiles, etc.
 - Series de tiempo:** precipitación mensual, niveles de contaminación atmosférica, estado de un proceso industrial, etc.
 - Sistemas dinámicos:** líneas de espera, Inventarios, comportamiento de poblaciones de animales, etc.
 - Fenómenos físicos:** emisión de partículas radioactivas, comportamiento de fluidos, etc.
- Las principales características de un proceso estocástico es la *dependencia* de las variables aleatorias que lo conforman, a diferencia del supuesto de una muestra aleatoria en estadística; así como de sus *comportamientos límite*.

- Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad donde Ω es el espacio muestral, \mathfrak{F} es una σ -álgebra sobre Ω y $P : \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Sea \mathfrak{T} un conjunto de índices (finito o infinito).

Def (Proceso Estocástico)

Un *proceso estocástico* es una función $X : \Omega \times \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{S}$ tal que $\forall t \in \mathfrak{T}$,

$$X_t : \omega \mapsto X(\omega, t) \equiv X_t : \Omega \rightarrow \mathfrak{S}$$

es una función \mathfrak{F} -medible (i.e. es una variable aleatoria).

El conjunto \mathfrak{S} se denomina *espacio de estados*.

- En la mayoría de las notaciones se obvia el uso del espacio muestral, y entonces se denota a la variable aleatoria simplemente como X_t .
- Para una ω dada,

$$t \mapsto X(\omega, t) : T \rightarrow \mathfrak{S}$$

es una *función muestral* o *realización* del proceso. Usualmente estas realizaciones son conocidas como *series de tiempo*. El índice t se interpreta como tiempo y se le llama X_t el estado del proceso al tiempo t .

- Si el conjunto de índices es un intervalo, se dice que el proceso es de *parámetro continuo*, mientras que si es un conjunto numerable, se dice que el proceso es de *parámetro discreto*.

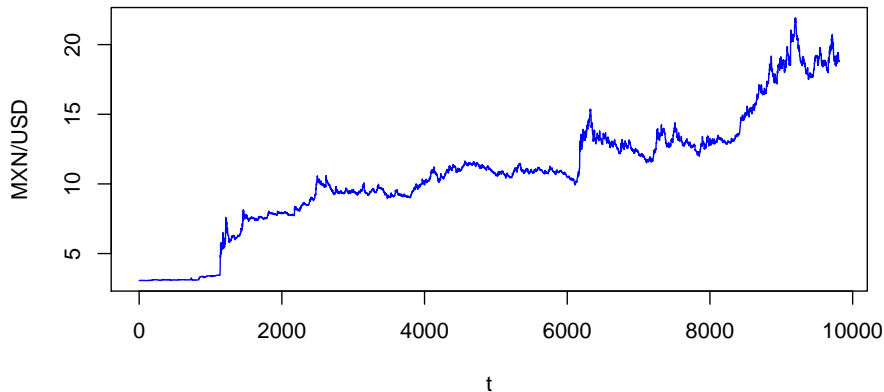
- Una *serie de tiempo* es una realización de un proceso estocástico donde el conjunto de índices $\mathcal{T} = T$ es un conjunto de valores reales positivos.
- La serie de tiempo que toma T valores se puede representar como la sucesión $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_T}$, o bien, como: $\{y_t\}_{t \in T}$.
- Usualmente, una serie de tiempo se visualiza mediante la gráfica $\{(t, y_t)\}$ y uniendo los puntos que son consecutivos en el tiempo (aunque en realidad esto es una simplificación que es muy burda en ocasiones).
- Una representación típica de las series de tiempo es a través de una función conocida más un componente estocástico:

$$X_t = f(t) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim F$$

- En algunos casos, la función f puede ser una *recursiva* y depende de un subconjunto de observaciones de periodos anteriores:

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}, \epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-l})$$

Tipo de cambio diario

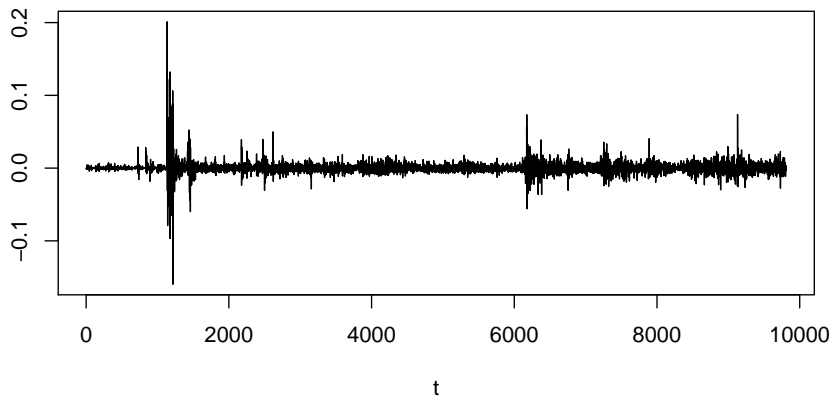


Ejemplos: cambios en tipos de cambio

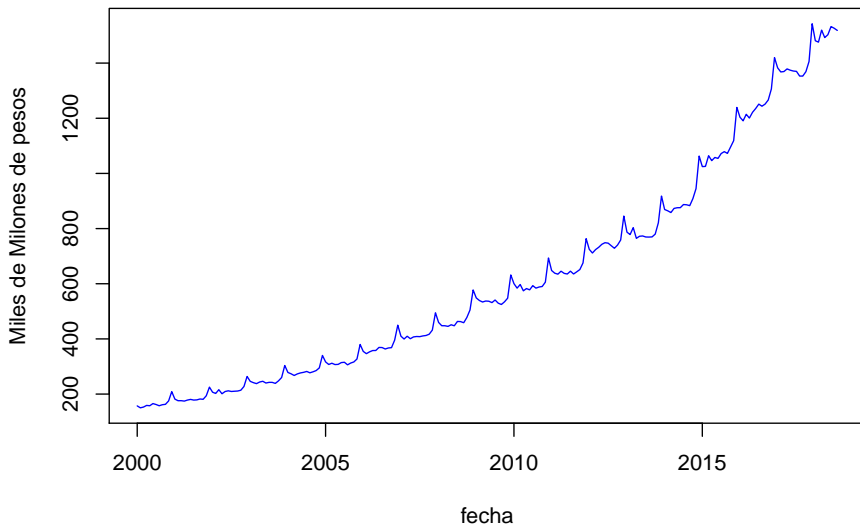
La siguiente serie corresponde a las diferencias de la serie anterior:

$$y_t = x_t - x_{t-1}$$

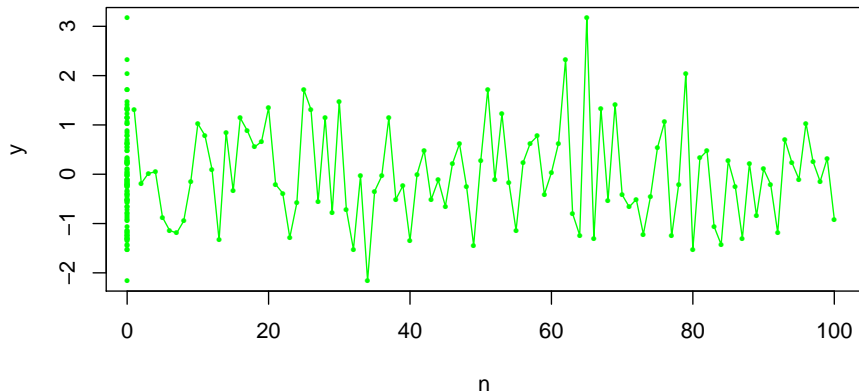
diferencias del logaritmo del tipo de cambio



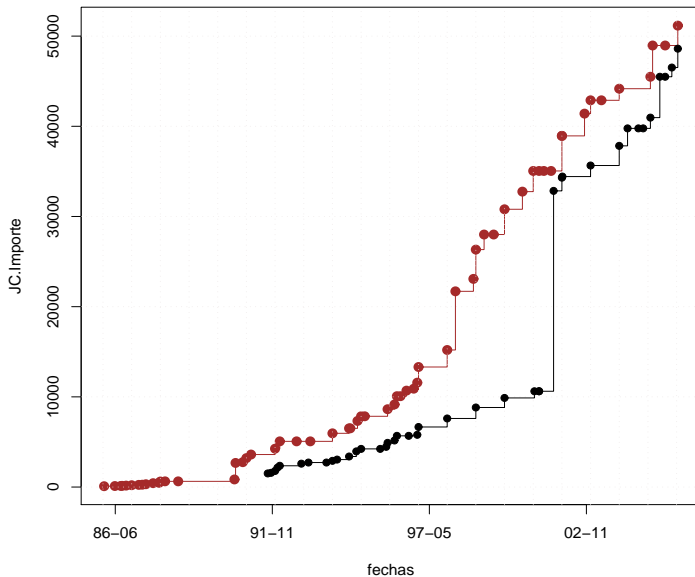
Billetes y monedas en circulación 2000–2016



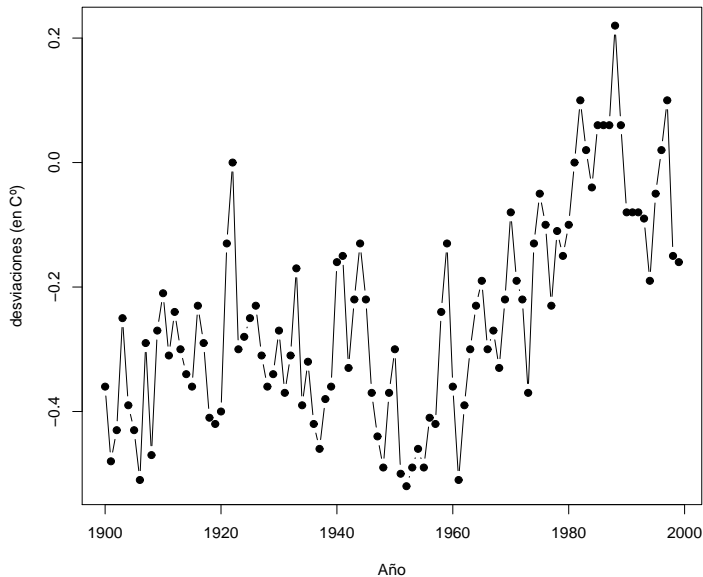
Ruido Blanco normal



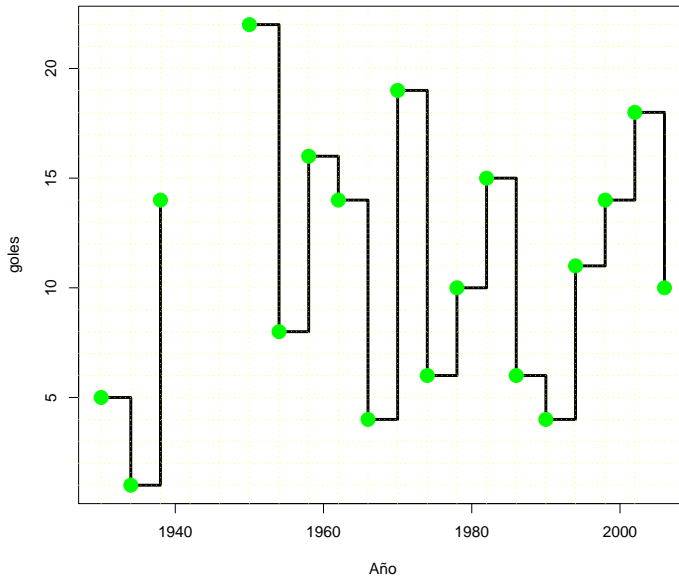
Carreras salariales



Desviaciones de la temperatura global promedio (1900–2000)



Goles de Brasil en mundiales (1930–2006)



- Otras situaciones prácticas que dan origen a las series de tiempo:
 - Ventas mensuales de vehículos de una agencia.
 - Número de desempleados en el tiempo (Índices de empleo).
 - Calidad de aire o agua.
 - Población de una ciudad o un país.
 - Proporción de células cancerígenas en un órgano cada semana.
 - Demanda mensual o trimestral de cualquier producto.
 - Índices de las diferentes bolsas de valores, o bien, los precios de productos financieros.
- Las fuentes de las series de tiempo pueden ser muy variadas, muchas son de origen industrial (en los procesos de producción), o bien, de naturaleza económica, física, biológica, médica, etc.

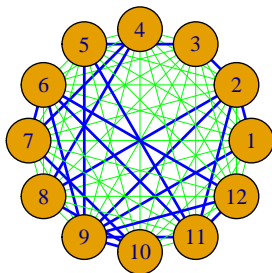
Ejemplo de proceso estocástico: PageRank

Se puede ver la navegación en páginas web como una *caminata aleatoria en una gráfica*

- Los nodos son las direcciones web, que representan los estados \mathcal{S} del proceso.
- Hay un arco dirigido de x a y si x tiene un hipervínculo a y .

Si Y_k es la posición del web surfer en el paso k , entonces podemos definir $p_x^k = P(Y_k = x)$. Podemos definir el rango de una página como la probabilidad de estar en la página x en el largo plazo:

$$PageRank(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_x^k$$



- Una forma de describir un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es especificar la distribución conjunta de n variables X_{t_1}, \dots, X_{t_n} para cualquier n y cualquier conjunto t_1, t_2, \dots, t_n :

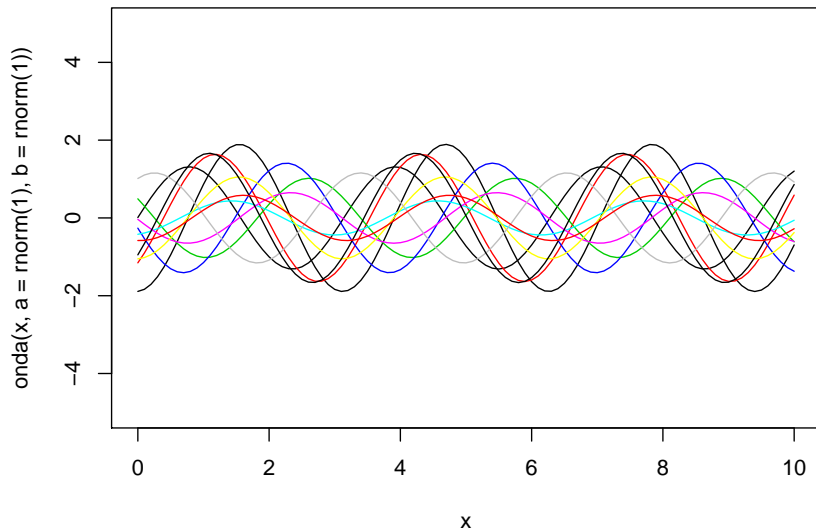
$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

Claramente esta manera de describir el proceso es muy compleja, pues requiere especificar una gran cantidad de funciones de distribución conjunta y de marginales.

- Otra forma de describir un proceso estocástico consiste en determinar una fórmula para el valor $X_t = X(t)$ del proceso en cada punto t en términos de una familia de variables cuyas distribución es conocida. Por ejemplo, considerar $X(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$, donde w es una constante y $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $A \perp\!\!\!\perp B$. Como hemos visto, estos procesos corresponden a *series de tiempo*.

Ejemplo $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $A \perp\!\!\!\perp B$

```
onda <- function(t,a,b,w=2){a*cos(w*t) + b*sin(w*t)}  
curve(onda(x, a = rnorm(1), b = rnorm(1)),from = 0, to = 10, ylim = c(-5,5))  
for(i in 1:10) curve(onda(x,a=rnorm(1),b=rnorm(1)),from=0, to=10,add=T,col=i)
```



Los procesos estocásticos que revisaremos desde el punto de vista de simulación y algunas aplicaciones, son los siguientes:

- Cadenas de Markov
- Procesos Poisson (homogéneos y no homogéneos)
- Procesos de Wiener y movimiento Browniano
- Modelos de series de tiempo

Procesos de Markov. Cadenas de Markov

Los *Procesos Markovianos* son los que cumplen la siguiente propiedad:

Propiedad Markoviana

la probabilidad de que un sistema físico esté en un estado determinado en el tiempo t puede deducirse del conocimiento en el tiempo s , para $s < t$ y no depende de la historia del sistema antes del tiempo s .

A continuación veremos la definición de un proceso markoviano.

Def (Procesos de Markov)

Un Proceso de Markov es un proceso $\{X_t \in \mathfrak{S}, t \in \mathfrak{T}\}$ que cumple con la propiedad de Markov:

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0}) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

Cuando la probabilidad anterior no depende de n , el proceso de Markov es *homogéneo*:

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) = P(X_{t_1} = j | X_{t_0} = i) = p_{ij}$$

- Dependiendo de la estructura del espacio de estados S y del espacio parametral T , se tienen diferentes tipos de procesos estocásticos:
 - \mathcal{S} discreto, \mathcal{T} discreto: Cadenas de Markov
 - \mathcal{S} discreto, \mathcal{T} continuo: Cadenas de Markov de parámetro continuo
 - \mathcal{S} continuo, \mathcal{T} discreto: Procesos de Markov de parámetro discreto
 - \mathcal{S} continuo, \mathcal{T} continuo: Procesos de Markov

- En el caso de las cadenas de Markov con un espacio de estados finito, $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, el proceso queda especificado por las probabilidades p_{ij} , que cumplen las siguientes propiedades:
 - ❶ $p_{ij} \geq 0$,
 - ❷ $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, para $1 \leq i \leq N$
- Las probabilidades de transición se pueden acomodar en una matriz de dimensión $n \times N$:

$$\mathbf{P} = (p_{ij})$$

- Si el espacio de estados es discreto pero no finito, entonces, la matriz de transiciones es una matriz infinita.

Ejemplo: Modelo simple de inventario

Cadenas de Markov

Consideren el inventario de un almacén de un sólo producto, y los siguientes supuestos:

- No hay demanda no satisfecha.
- X_n = número de artículos en stock al inicio del periodo n
- D_n = número de artículos demandados durante el periodo n . Supongamos $D_n \sim \text{Poisson}(k)$ donde $k < M$.
- El número de artículos en stock al final del periodo es $\max\{X_n - D_n, 0\}$.
- Como política de inventario, se reordena al final de cada periodo si $X_n - D_n \leq 1$ y en ese caso se reabastece para alcanzar tamaño M .
Entonces:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n & \text{si } X_n - D_n \geq 2 \\ M & \text{si } X_n - D_n \leq 1 \end{cases}$$

Se puede verificar entonces que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

Ejemplo de Cadena de Markov: Modelo simple de inventario

Con un nivel de reorden de $M = 5$, y con una demanda promedio de $k = 3$ items en el periodo, podemos ver que el espacio de estados es $S = \{2, 3, 4, 5\}$. Ahora, si $X_n - D_n \geq 2$,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_n - D_n = j | X_n = i) = P(D_n = i - j) > 0$$

si $i \geq j$.

Y para el otro caso, $X_n - D_n \leq 1$, entonces $X_{n+1} = 5$ y

$$P(X_{n+1} = 5 | X_n = i) = P(X_n - D_n \leq 1 | X_n = i) = P(D_n \geq i - 1)$$

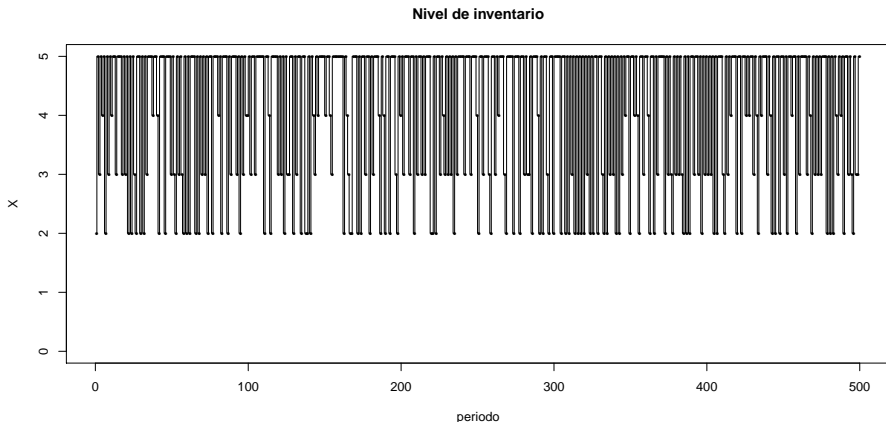
Considerando la distribución Poisson, podemos construir la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.5768 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{pmatrix}$$

Para $p_{5,5}$, noten que el inventario pasa de 5 a 5 si la demanda es 0 o al menos 4.

Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$

```
set.seed(100)
n <- 500 #numero de simulaciones del proceso
D <- rpois(n,3) #demandas
X <- NULL
X[1] <- sample(2:5,1) #nivel inicial del inventario
for(i in 2:n) X[i] <- ifelse(X[i-1]-D[i-1]>=2, (X[i-1]-D[i-1]), 5)
plot(1:n,X,type="S", main="Nivel de inventario", ylim=c(0,5),
     xlab="periodo")
points(1:n,X,pch=16,cex=0.5)
```



Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$

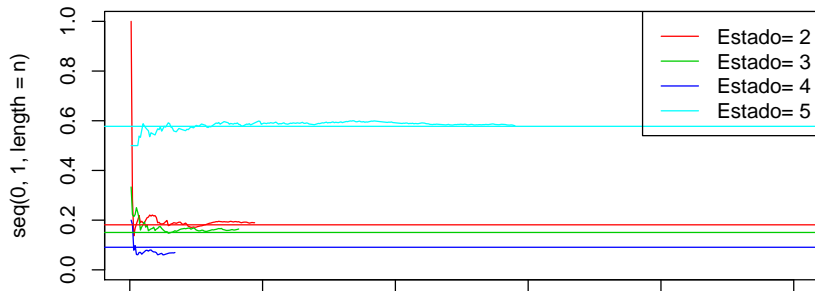
- ¿Qué proporción, en promedio, se está en cada estado?

```
table(X)/n

## X
##   2   3   4   5
## 0.188 0.164 0.068 0.580

Z <- list(NULL)
for(i in 2:5) Z[[i]] <- 1:length(X[X==i])/which(X==i)
plot(1:n, seq(0, 1, length=n), type="n", main="Proporción de permanencia en cada estado")
for(i in 2:5) lines(Z[[i]], col=i)
abline(h=c(0.181211, 0.1504296, 0.09080838, 0.577551), col=2:5)
#probabilidades de equilibrio
legend("topright", legend=paste("Estado=", 2:5), col=2:5, lty=rep(1, 4))
```

Proporción de permanencia en cada estado

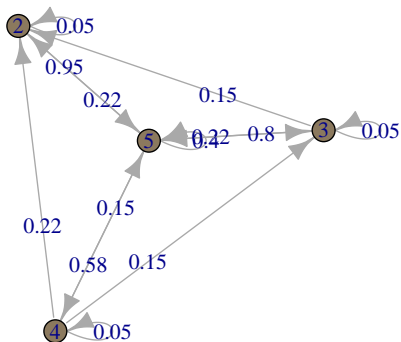


Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$

```
library(markovchain)
mcinventario <- new("markovchain", states=as.character(2:5), transitionMatrix =
matrix(data=c(0.0498, 0, 0, 0.9502,
0.1494, 0.0498, 0, 0.8008,
0.2240, 0.1494, 0.0498, 0.5768,
0.2240, 0.2240, 0.1494, 0.4026), byrow=T, nrow=4), name="Inventario")
steadyStates(mcinventario)
```

```
      2      3      4      5
[1,] 0.181211 0.1504296 0.09080838 0.577551
```

```
plot(mcinventario)
```



- En la práctica, surge la necesidad de simular cadenas de Markov porque las matrices de transición son muy grandes o los espacios de estado son enormes.
- En esos contextos, es más práctico generar realizaciones del proceso estocástico.

Algoritmo para simular cadenas de Markov

Si α es la distribución inicial y \mathbf{P} es la matriz de transición, entonces para generar n transiciones X_0, X_1, \dots, X_n :

- 1 Genera X_0 de acuerdo a α
- 2 Para cada i , seleccionar $\mathbf{p} = \mathbf{P}[X_{i-1}, \cdot]$ y generar X_i de acuerdo a la distribución \mathbf{p} .

Ejemplo revisado de inventario

Con el algoritmo dado, la simulación realizada anteriormente queda así:

```
P <- matrix(c(0.0498, 0, 0, 0.9502, 0.1494, 0.0498, 0, 0.8008,
             0.2240, 0.1494, 0.0498, 0.5768, 0.2240, 0.2240, 0.1494, 0.4026),
           byrow=T, nrow=4)
n <- 500 #numero de simulaciones del proceso
X <- NULL
X[1] <- sample(2:5,1) #nivel inicial del inventario
for(i in 2:n) X[i] <- sample(2:5,1,prob=P[X[i-1]-1,])
X
```

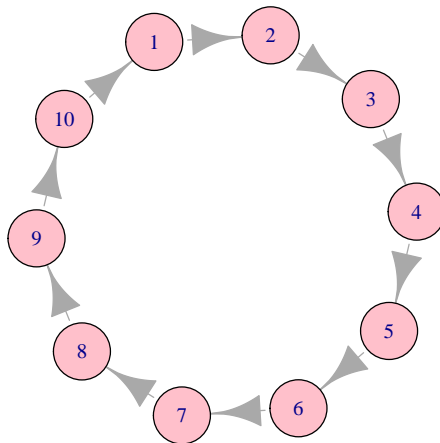
```
[1] 5 5 3 3 5 4 5 3 5 4 4 5 5 4 5 5 5 5 3 5 2 5 4 3 5 4 4 5 5 3 5 2 5 5 5
[36] 4 5 5 5 5 3 5 5 5 5 5 2 5 2 5 4 5 3 2 5 5 3 5 2 5 5 5 3 5 5 2 5 2 5 4 5
[71] 3 5 2 5 3 5 5 5 5 5 3 5 4 3 5 3 5 2 5 3 5 5 3 5 3 5 2 5 5 2 5 5 5 4 5 3
[106] 2 5 2 5 3 2 5 5 4 3 5 4 2 5 2 5 2 5 3 5 3 2 5 3 5 5 5 5 3 2 5 4 5 4 5
[141] 5 2 5 5 5 2 5 2 5 3 5 5 3 2 5 5 2 5 3 5 2 5 3 5 3 5 5 2 5 3 5 4 5
[176] 5 4 2 5 3 5 5 3 5 5 5 2 5 5 5 3 3 2 5 5 3 5 5 3 5 2 5 5 3 5 2 5 3 5
[211] 5 5 4 4 3 5 3 2 5 5 5 5 4 5 4 2 5 2 5 2 5 3 5 4 3 5 2 5 5 5 3 5 4 2 5
[246] 3 5 5 2 5 3 5 5 5 5 5 3 5 5 5 5 2 2 5 3 5 3 5 5 2 5 2 5 5 5 5 3 5 3
[281] 5 3 5 3 5 5 5 5 5 2 5 5 5 3 5 3 5 5 5 2 5 3 5 2 2 5 2 5 3 2 5 5 3 5 5
[316] 2 5 4 5 2 5 5 5 5 3 5 5 5 5 5 3 5 5 5 5 4 5 4 5 4 5 4 2 5 5 2 5 5 5 2
[351] 5 5 5 5 4 2 5 3 3 5 3 5 2 5 2 5 5 3 5 4 5 5 4 5 3 2 5 2 5 3 5 3 5 5 3
[386] 5 2 5 3 5 2 5 3 5 5 4 5 5 3 5 3 5 5 5 4 2 5 4 5 3 5 3 5 5 5 4 5 2
[421] 5 3 5 3 5 5 4 5 3 5 5 3 5 2 5 3 5 5 2 5 4 3 5 5 2 5 2 5 3 5 3 5 5 4 5
[456] 5 5 3 5 5 5 5 4 5 5 3 5 5 5 5 5 3 5 3 5 2 5 3 5 5 5 3 5 5 2 2 5 3 5 2
[491] 5 3 5 2 5 2 2 5 5 5
```

```
table(X)/n
```

```
X
 2      3      4      5
0.150 0.182 0.080 0.588
```

Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico I

- Supongamos un juego con tablero circular con celdas marcadas del 1 al 10.



- Comenzando con $X_0 = 1$, se lanza un dado y se avanza ese número de casillas.
- Sea X_n = número de la casilla en el n -ésimo movimiento

Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico II

En este problema, $\mathfrak{S} = \{1, \dots, 10\}$ y $\mathfrak{T} = \mathbb{Z}^+$

La matriz de probabilidades de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo a esta matriz se obtiene la siguiente realización con 200 observaciones de la cadena:

Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico III

```
P <- matrix(c(0,rep(c(rep(1/6,6),rep(0,5)),3),
               rep(c(rep(1/6,7),rep(0,4)),6)),nrow=10,byrow=T)
```

```
n <- 200
```

```
X <- 1 #posición inicial dada por el problema
```

```
for(i in 2:n)X[i] <- sample(1:10,1,prob = P[X[i-1],])
```

```
X
```

```
## [1] 1 3 4 7 1 6 2 6 1 3 4 7 9 5 6 2 6 8 2 8 1 7 2
## [24] 3 6 10 2 8 9 2 7 1 5 10 5 10 2 4 6 9 5 10 4 8 9 3
## [47] 6 9 2 3 7 2 4 10 5 9 3 9 5 8 3 6 7 10 6 1 2 7 3
## [70] 6 8 10 2 4 9 2 5 9 4 9 5 6 8 1 5 10 6 9 2 3 4 7
## [93] 2 6 2 5 1 5 1 2 3 5 9 5 7 2 7 1 3 9 5 6 2 8 4
## [116] 5 6 8 10 3 6 8 10 2 4 5 6 2 4 9 4 6 1 3 6 8 1 4
## [139] 8 9 4 10 1 4 9 4 8 4 9 2 8 10 1 4 9 4 9 5 6 10 6
## [162] 8 1 5 10 6 2 5 1 7 2 8 3 4 8 3 5 1 7 2 5 1 5 8
## [185] 3 7 1 2 5 9 3 8 10 6 8 9 10 3 4 10
```

```
table(X)/n #proporción de permanencia en cada estado
```

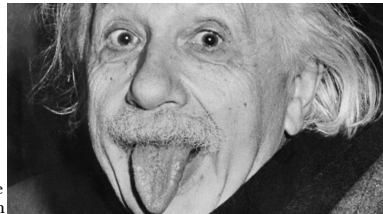
```
## X
##      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
## 0.095 0.125 0.090 0.105 0.115 0.115 0.065 0.100 0.105 0.085
```


Proceso de Wiener

- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.
- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo
- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.
- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.



- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.
- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo
- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.
- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.

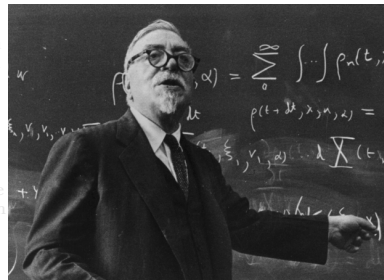


- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.
- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo
- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.
- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.



Antecedentes históricos

- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.
- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo
- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.
- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.



- Después de Einstein, Norbert Wiener fue uno de los primeros matemáticos en considerar el movimiento Browniano y lo estudió a fondo para formalizarlo. Entonces el movimiento Browniano o proceso de Wiener son en nuestro contexto, sinónimos.
- El proceso de Wiener es un ejemplo de un proceso markoviano de espacio y parámetro continuo.

Proceso de Wiener

Se dice que un proceso estocástico $\{Z_t, t \geq 0\}$ sigue un proceso de Wiener (o proceso Browniano) si

- 1 $Z_0 = 0$
- 2 $\forall t > 0, Z_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- 3 $\{Z_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes:
 - *incrementos estacionarios*: si $s, t > 0$, $Z_{t+s} - Z_s$ tiene la misma distribución que Z_t .
 - *incrementos independientes*: Si $0 \leq q < r \leq s < t$, entonces $Z_t - Z_s \perp\!\!\!\perp Z_r - Z_q$.
- 4 La función $t \mapsto Z_t$ es continua con probabilidad 1.

A partir de la normalidad del proceso, el comportamiento está completamente definido. Como resultado, se puede ver, por ejemplo, que

- $\text{Var}(Z_t - Z_s) = t - s$ cuando $t \geq s$, ya que $Z_t - Z_s = Z_{t-s} - Z_0 = Z_{t-s}$ por incrementos estacionarios.
- $\text{Cov}(Z_t, Z_s) = \min\{s, t\}$

Solución.

En general $\text{Cov}(Z_t, Z_s) = E(Z_t Z_s) - E(Z_t)E(Z_s) = E(Z_t Z_s)$.

Si $s < t$, podemos escribir en forma de incrementos $Z_t = (Z_t - Z_s) + Z_s$ para obtener:

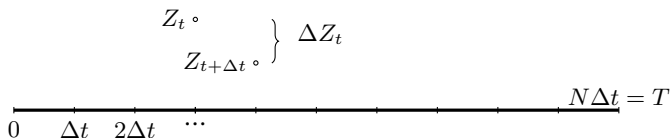
$$\begin{aligned} E(Z_t Z_s) &= E(Z_s(Z_t - Z_s + Z_s)) \\ &= E(Z_s(Z_t - Z_s)) + E(Z_s^2) \\ &= E(Z_s)E(Z_t - Z_s) + \text{Var}(Z_s) = s \end{aligned}$$

Y por simetría, si $t < s$, $E(Z_t Z_s) = t$. Así que $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = \min\{s, t\}$.



Simulación de un proceso Wiener I

- Para poder analizar cómo simular el proceso de Wiener, necesitamos considerar particiones del intervalo de tiempo $[0, T]$ considerando N puntos equidistantes de ese intervalo $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t = T\}$.



- La diferencia $\Delta Z = Z_{t+\Delta t} - Z_t$ durante un intervalo de tiempo $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Entonces se puede representar como:

$$\Delta Z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{donde} \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Las variables $\Delta_1 Z$ y $\Delta_2 Z$ para dos intervalos ajenos $\Delta_1 t$ y $\Delta_2 t$ son independientes. Si $\Delta t = T/N$, entonces el incremento total en $[0, T]$ es:

$$Z_T - Z_0 = \sum_i^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \sim \mathcal{N}(0, T),$$

- Recursivamente, podemos escribir:

$$Z_{t_i} = Z_{t_{i-1}} + \sqrt{\Delta t} \epsilon$$

- Conforme $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta Z \rightarrow dZ$. Podemos representar un proceso de Wiener en esta notación como $\{dZ\}$.

Usualmente en las aplicaciones el parámetro t se considera como el tiempo, y las unidades de tiempo se miden en años de 365 días.

- Supongamos un periodo de $T = 20$ años. Entonces
 - $\Delta t = 1$ es un año, si la unidad de tiempo base es el año,
 - $\Delta t = 0.5$ si la unidad base es un semestre,
 - $\Delta t = 1/12$ si la unidad base es mensual,
 - Para datos diarios, $\Delta t = 1/365 = 0.0027397$.

Considerando días, para el periodo dado se tiene una partición con $N = 20 * 365 = 7300$ puntos.

- Para estimar el cambio en la variable Z , es necesario simular una ϵ con distribución normal estándar y multiplicarla por $\sqrt{(1/365)} = 0.0523424$.
Por ejemplo:

Paso i	Z_{t+i}	ϵ_i	$\Delta Z = 0.052 * \epsilon$	$Z_t = Z_{t+i} + \Delta Z$
0	100	0.42606	0.022	100.022
1	100.022	1.47888	0.077	100.1
2	100.1	-1.29436	-0.068	100.032
3	100.032	0.38493	0.02	100.052
\vdots				
7300	92.47	1.153	0.06035	92.53

- La gráfica generada se muestra a continuación, considerando 10 trayectorias.

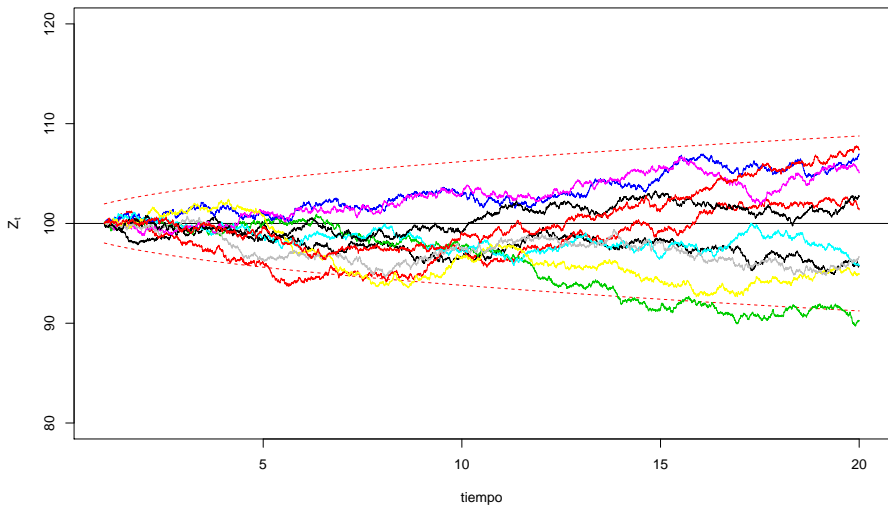
Ejemplo I

```
#Muestra de una trayectoria en un periodo de T=20 años
#para un año Dt=1, seis meses Dt=0.5, un trimestre Dt=0.25, un mes Dt=1/12 etc.
z0 <- 100
TT <- 20 #periodos a simular
Dt <- 1/(365) #partición diaria.
N <- TT/Dt
x <- seq(1,TT,length=N)
plot(x,rnorm(N), ylim=c(80,120),type="n", main="Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener",
xlab = "tiempo", ylab = expression(Z[t]))
abline(h = 100)

#límites de confianza la 95%
lines(x, 100 + 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")
lines(x, 100 - 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")

for(i in 1:10){
  eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
  dz <- eps*sqrt(Dt)
  z <- z0 + cumsum(dz)
  lines(x,z,type="l",col=i)
}
```

Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener



- En la gráfica se muestran intervalos de 95 % de confianza para el proceso Z_t .
- En la práctica, una debilidad del proceso de Wiener es que se comporta como una caminata aleatoria alrededor del valor inicial Z_0 : $S_0 \pm 1.96\sqrt{t}$.
- Para resolver este problema, se generaliza el proceso de Wiener a un proceso con una tendencia o *deriva* (drift), es decir, una tendencia a alejarse del valor central, así como una varianza dada.
- Al incorporar la tendencia en el proceso como función del tiempo, se obtiene una *ecuación diferencial estocástica* (SDE) que son el objeto de estudio del *cálculo estocástico*.

- Un **proceso generalizado de Wiener** para una variable x_t se define en términos de dZ como la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx = a dt + b dZ$$

con a, b constantes.

- El término $a dt$ implica que x tiene deriva esperada de a por unidad de tiempo. Sin el término $b dZ$, la ecuación es fácil de responder:

$$dx = a dt \Rightarrow x = x_0 + at$$

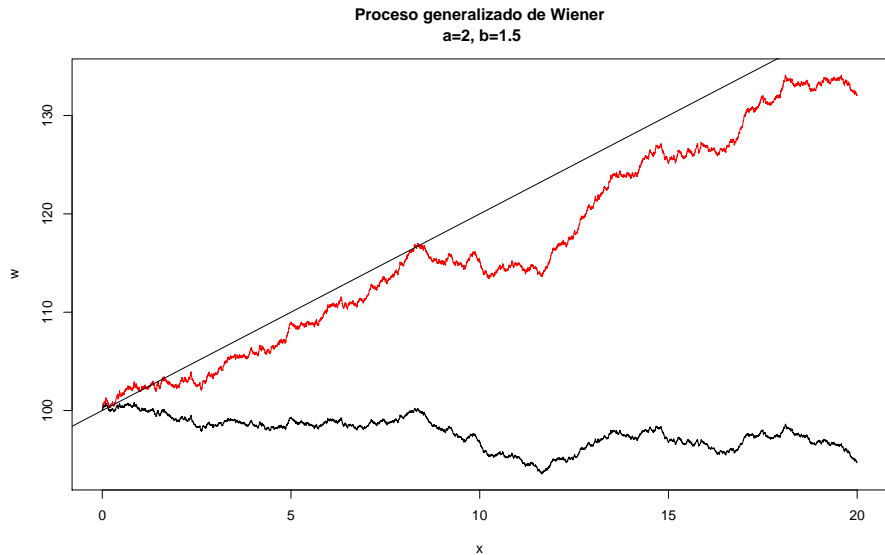
- El término $b dZ$ agrega "ruido blanco" o volatilidad estocástica a la trayectoria de x . En términos de pequeños cambios (versión discreta):

$$\begin{aligned}\Delta x &= a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \\ \therefore \Delta x &\sim \mathcal{N}(a\Delta t, b^2\Delta t)\end{aligned}$$

Simulación de un proceso generalizado de Wiener I

```
#Proceso generalizado de Wiener: modifica el anterior
a <- 2
b <- 1.5
z0 <- 100 #valor inicial
TT <- 20 #periodos a simular
Dt <- 1/(365) #partición diaria.
N <- TT/Dt #número de periodos a simular en el horizonte de TT años
x <- seq(0,TT,length=N+1)
eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
dz <- eps*sqrt(Dt)
w <- c(z0,z0 + cumsum(a*Dt + b*dz))
z <- c(z0,z0 + cumsum(dz))
#gráfica
plot(x, w, type="l", col="red",main="Proceso generalizado de Wiener\n a=2, b=1.5",
ylim=c(min(z),max(w)),xlim=c(0,20))
lines(x, z, type="l") #última trayectoria simulada del proceso anterior
abline(coef = c(z0,a))
abline(h=0)
```

Simulación de un proceso generalizado de Wiener II



En un deporte entre dos equipos, se puede cuantificar la ventaja del equipo local calculando la probabilidad de que éste equipo gane dado que lidera el partido por k puntos dado que ha transcurrido un porcentaje t del juego ($0 \leq t \leq 1$).

- Para $0 \leq t \leq 1$ Sea X_t = Diferencia en tantos entre el equipo local y el visitante después de que t porcentaje del juego ha transcurrido.
- Se supone que $dX = \mu dt + \sigma dz$, donde μ representa la ventaja del equipo local por unidad de tiempo y σ^2 es la varianza por unidad de tiempo
- Con datos observados en 493 juegos de la NBA en 1992, se estimó $\hat{\mu} = 4.87$ y $\hat{\sigma} = 15.82$.

- Si $p(k, t)$ es la probabilidad de que el equipo local gane el juego, dado que se tienen k puntos de ventaja en $t < 1$, se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
 p(k, t) &= P(X_1 > 0 | X_t = k) = P(X_1 - X_t > -k) \\
 &= P(X_{1-t} > -k) = P(\mu(1-t) + \sigma Z_{1-t} > -k) \\
 &= P\left(Z_{1-t} < \frac{k + \mu(1-t)}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(Z_t < \frac{\sqrt{t}(k + \mu(1-t))}{\sigma\sqrt{1-t}}\right)
 \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple porque $Z_t \sim \sqrt{\frac{t}{1-t}} Z_{1-t}$ (¿porqué?).

- Se puede construir una tabla para los valores $p(k, t)$ con la siguiente estructura (se dan algunos valores, el resto es tarea):

t	$k = -5$	$k = -2$	$k = 0$	$k = 2$	$k = 5$
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.25		0.5240448			
0.5			0.5611632		
0.99	9.2258394×10^{-4}				0.9992517

Puente Browniano

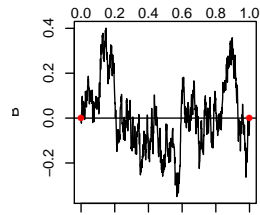
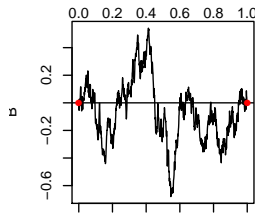
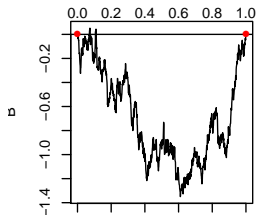
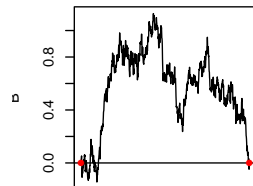
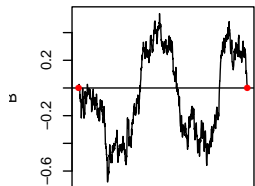
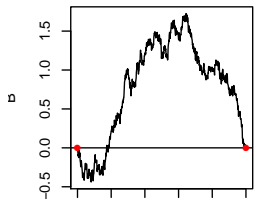
Si dZ es un proceso de Wiener, el proceso condicional $\{B_t\}_{t \in [0,1]} | B_1 = 0$ es un *puente Browniano*. El puente Browniano tiene valor 0 en los puntos extremos del intervalo $[0, 1]$.

- Es fácil probar que para un puente Browniano $E(B_t) = 0$ para $t \in [0, 1]$ y $\text{Cov}(B_t, B_s) = \min\{s, t\} - st$.
- Por otra parte, se puede probar que $B_t = Z_t - tZ_1$ para $t \in [0, 1]$ es un puente Browniano si $\{Z_t\}$ es un proceso de Wiener. Con este resultado, se obtiene un método para simular un puente Browniano a partir de un proceso de Wiener.

Puente Browniano

Para simular un puente Browniano:

```
par(pty="s"); par(mfrow=c(2,3));par(mar=c(1,3,1,3))
n <- 1000 #número de puntos en partición
t <- seq(0,1,length=n) #partición del [0,1]
for(i in 1:6){
  Z <- c(0,cumsum(rnorm(n-1)))/sqrt(n)
  B <- Z-t*Z[n]
  plot(t,B,type="l")
  abline(h=0);points(c(0,1),c(0,0),col="red",pch=16) }
```



Para modelar fenómenos más complejos, como en el contexto financiero, se requieren modelos un poco más elaborados o complejos.

- Supongamos que S_t representa el precio de un instrumento financiero en el tiempo t .
- Sabemos que el cambio porcentual en el precio es el rendimiento del instrumento, así que debería cumplirse que, cuando no hay volatilidad, se cumple la siguiente ecuación, bajo un escenario de tasas constantes:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt \implies S_t = S_0 e^{\mu t}$$

con S_0 una constante que representa el precio del activo en el tiempo inicial.

- Introduciendo volatilidad, el precio de un instrumento financiero se puede ver como la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz \text{ o } dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz$$

donde μ es el rendimiento en la unidad de tiempo considerada y σ es la volatilidad en esa unidad de tiempo. Esta ecuación se conoce como **proceso de Wiener geométrico**.

- La solución a esta ecuación se obtiene a través del cálculo estocástico, como veremos más adelante.

Supongamos que una acción que no paga dividendos tiene un rendimiento anual de 15 % y una volatilidad anual de 30 %, con precio al tiempo $t = 0$ de $S_0 = 100$. Entonces su ecuación se puede expresar como:

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

En versión discreta,

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Para una semana, $\Delta t = 7/365 = 0.0192$. Entonces

$$\Delta S = 100(0.15(0.0192) + 0.30\sqrt{0.0192}\epsilon) = 0.288 + 4.155\epsilon$$

Entonces, el incremento del precio en una semana es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0.288, 4.155^2)$

Proceso de Wiener geométrico

Sea $\{Z_t|t \geq 0\}$ un proceso generalizado de Wiener con tendencia μ y volatilidad σ^2 . El proceso $\{S_t|t \geq 0\}$ definido como solución a la ecuación:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

es un **proceso de Wiener geométrico**.

El **proceso de Itô** extiende el proceso generalizado de Wiener:

$$dS = a dt + b dz$$

permitiendo que las constantes a y b sean funciones tanto del tiempo como del propio proceso S :

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) dz$$

El lema de Itô establece que si G es una función de S y t , entonces G sigue un proceso de Itô dado por la expresión:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} b dz$$

El lema de Itô es útil para encontrar procesos de funciones del proceso subyacente de interés.

Ejemplo: Aplicaciones a rendimientos I

- En el caso de rendimientos, un modelo más adecuado que el proceso de Wiener geométrico es de la forma $G = \log(S)$ donde S es un proceso geométrico: $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. En este caso,

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Por el lema de Itô aplicado a $dS = \mu S dt + \sigma S dz$,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

Por lo tanto:

$$d \log S = (\mu - \sigma^2/2) dt + \sigma dz$$

que es un proceso de Wiener generalizado.

- Noten entonces que S , el proceso de Wiener geométrico es lognormal, por lo tanto, se puede escribir como:

$$S_t = S_0 e^{Z_t}$$

donde Z_t es un proceso generalizado de Wiener con deriva μ y varianza σ^2 .

- Para simular, usamos la versión discreta:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp[(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}], \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Código para simular un proceso lognormal o proceso de Wiener geométrico

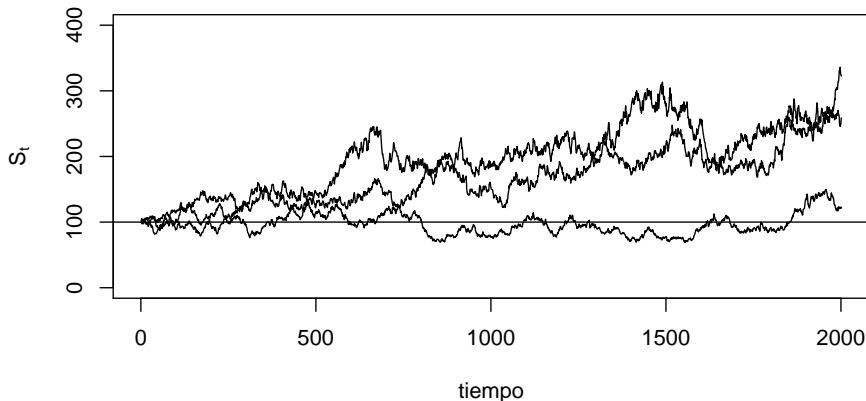
```
BGeo <- function(n,TT,a,b,S0=100){  
  #Función para generar un proceso Browniano Geométrico  
  #n es el número de puntos de partición del intervalo [0,TT]  
  #a es el drift y b la volatilidad  
  dt <- TT/n #incremento de los intervalos para cubrir [0,TT]  
  S <- S0 #valor inicial  
  for(i in 2:(n+1)){  
    S <- append(S, S[i-1]*exp((a-b^2/2)*dt + b*sqrt(dt)*rnorm(1)))  
  }  
  return(S)  
}  
#Por ejemplo:  
BGeo(100,1,0.1,0.3,100)
```

```
##      [1] 100.00000 101.91547 100.87060 102.89422  97.17256 100.66779 101.80424  
##      [8] 99.35161 101.17979  96.28910 103.30962 104.30698 106.23453 104.59149  
##     [15] 105.85276 110.97504 112.91277 115.12150 115.18128 111.07801 108.29110  
##     [22] 107.42973 108.82176 113.79021 113.34845 114.21574 112.27595 113.15410  
##     [29] 110.51591 109.44003 103.85653 107.18252 105.35074 107.61400 107.71785  
##     [36] 109.47313 113.23475 112.63223 115.02654 112.42061 106.61116 108.30124  
##     [43] 109.92655 111.32797 106.80665 111.46180 108.43658 106.21828 105.39838  
##     [50] 102.59894  97.81624  96.50362  95.71901  89.96430  86.68902  83.27951  
##     [57]  85.27247  82.21389  78.70587  82.33066  80.33384  83.92289  79.76273  
##     [64]  82.85033  85.05058  80.33856  84.42843  84.48230  84.61927  78.76665  
##     [71]  80.28260  79.69144  75.22934  79.92456  85.61548  83.14949  82.59380  
##     [78]  83.40749  76.89221  77.85367  78.05578  80.82035  80.56195  85.60781  
##     [85]  87.90817  87.54233  89.47827  84.95687  84.73067  89.25807  92.96139  
##     [92]  97.14165  99.53478  99.67767 102.75893 104.64882 109.98771 113.22928  
##     [99] 112.70396 108.59488 109.62982
```

Ejemplo

Consideremos tres realizaciones independientes del precio de un instrumento con valor inicial $S_0 = 100$, rendimiento 0.1 y volatilidad de 0.3: Considerando la función `BGeo` de la lámina anterior:

```
plot(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100), type = "l", ylim = c(0,400),  
xlab = "tiempo", ylab = expression(S[t])); abline(h = 100)  
lines(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100))  
lines(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100))
```



Derivados

Productos derivados

Un **derivado** es un contrato sobre características de un activo financiero, que se denomina *activo subyacente*

Los activos subyacentes pueden ser otros activos financieros o bienes como el oro, o productos como el petróleo, o bien, precios de otros instrumentos.

Ejemplos de derivados incluyen las opciones, los swaps, los futuros o forwards, y los warrants.

Opciones

Las opciones son instrumentos financieros que le dan al poseedor o comprador (posición larga) el derecho, mas no la obligación, de comprar, vender, recibir, entregar, activar o desactivar otros activos (instrumentos, derivados, efectivo, etc.), a cambio de pagar una prima al vendedor (posición corta).

Para poder valorar y delimitar los beneficios de la opción, se necesita definir cada uno de los siguientes conceptos, entre otros:

- subyacente
- precio de ejercicio (strike)
- barreras (absorbentes, reflejantes)
- tipo de ejercicio (americana, europea, asiatica, bermuda)
- tiempo a vencimiento
- tiempo a liquidación
- Mercado donde se intercambia (Chicago, local, Bloomberg, Reuters)
- Tipos de garantías (para el vendedor)

- Las opciones son los instrumentos que dan a su tenedor el derecho para comprar o vender un activo en un precio específico hasta una fecha de vencimiento indicada. El precio específico de la entrega se conoce como el *precio de ejercicio* y es denotado por K .
- Las opciones para comprar son *opciones call*, las opciones para vender son las *opciones put*. Las opciones solamente son ejercidas si generan beneficios.
- Los *forwards* por el contrario, implican la obligación de comprar o vender y pueden generar beneficios o pérdidas.

Call Europeo

Una opción Call con un precio de ejercicio X y fecha terminal T le da al tenedor el derecho de *comprar* el subyacente a un precio X en el tiempo T .

- ❶ En la fecha T , el call puede estar ‘dentro el dinero’: Si el precio del subyacente $S_T > X$
 - Compra el subyacente a X y véndelo al precio del mercado S_T
 - Obtienes una ganancia de $S_T - X > 0$
 - ¡Ejerce la opción para obtener una ganancia!
- ❷ En la fecha T , el call puede estar ‘fuera del dinero’: el precio del subyacente $S_T < X$.
 - Puedes comprar el subyacente en X y revenderlo por S_T
 - Obtienes una ganancia de $S_T - X < 0$
 - ¡Si se ejerce la opción se puede llegar a una pérdida!
 - Es mejor no ejercer la opción, se tiene una ganancia de 0.

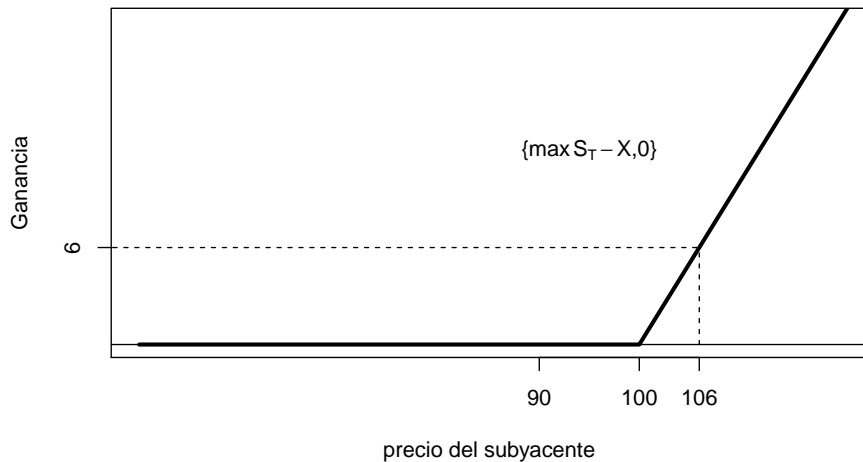
Ejemplo de opciones Call

Una opción call con precio de ejercicio \$100 y fecha terminal Junio 30, 2017 le da el derecho al tenedor de comprar el subyacente a un precio de \$100 en Junio 30, 2017.

- 1 Si el precio del subyacente $S_T > 100$, ejerce la opción y obtiene un pago de $S_T - 100 > 0$
- 2 Si el precio del subyacente $S_T \leq 100$, es mejor no ejercer la opción y obtener ganancia de 0.

Precio del subyacente	80	90	100	110	120
Ganancia de la opción $\max(S_T - 100, 0)$	0	0	0	10	20

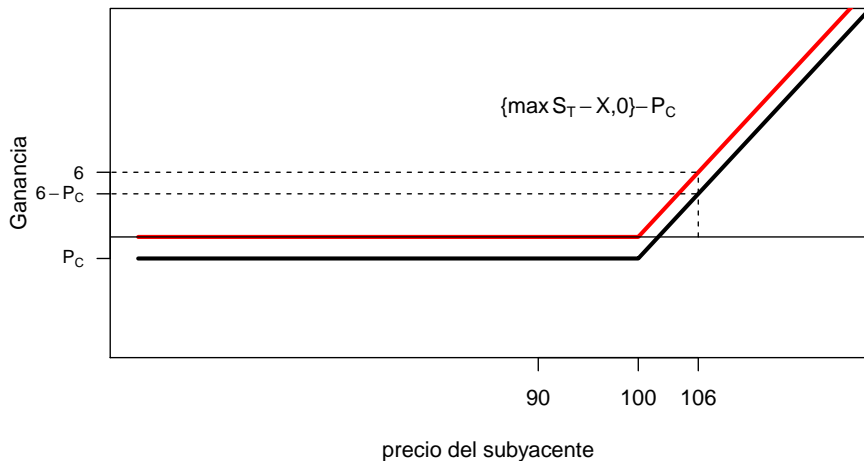
Patrón de pagos de un Call Europeo



Gráfica de un Call

En realidad, recuerden que necesitan comprar el call a algún precio P_C

Patrón de pagos de un Call Europeo



- El comprador de una opción Call *espera* tener ganancias, en la fecha de expiración:

$$e^{-r_f T} \mathbf{E} [\text{máx}\{S_T - X, 0\}] - P_C \geq 0$$

- El vendedor de la opción Call tiene ganancias esperadas:

$$P_C - e^{-r_f T} \mathbf{E} [\text{máx}\{S_T - X, 0\}] \geq 0$$

- Tanto el comprador como el vendedor están de acuerdo en hacer su transacción si ambos tienen ganancias esperadas de cero:

$$P_C = e^{-r_f T} \mathbf{E} [\text{máx}\{S_T - X, 0\}]$$

Con esta condición, ya es posible estimar a través de MonteCarlo, el valor esperado de la opción.

Algoritmo de valuación para opciones call europeas

- ❶ Para $j = 1, \dots, N$
 - ❶ Simula el precio del subyacente $S_{t,j}$ de $t = 0$ a $t = T$ para cada j , y obtener la ganancia de la opción en T : $C_{T,j} = \max\{S_{T,j} - K, 0\}$.
 - ❷ Descuenta el valor de la ganancia usando la tasa que corresponda para descontar a valor presente: ya sea variable:

$$C_{0,j} = \exp\left\{-\int_0^T r_u du\right\} C_{T,j}$$

o fija:

$$C_{0,j} = \exp(-rT) C_{T,j}$$

- ❷ Obtener el precio descontado promedio

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{0,j}$$

$$\text{con error estándar } se(\hat{C}_0) = \frac{\sigma \hat{C}_{0,j}}{\sqrt{N}} \text{ y } \hat{\sigma}_{C_0} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (C_{0,j} - \hat{C}_0)^2}$$

En el caso de una opción europea en particular

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT) \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \max\{S_{T,j} - K, 0\} = \exp(-rT) \hat{E}(\max\{S_T - K, 0\})$$

Ejemplo de valuación I

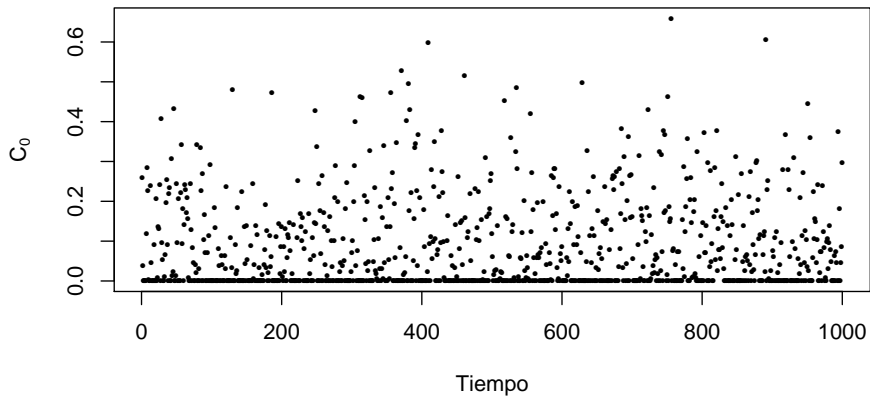
Consideremos una opción sobre una acción cuyo valor actual es $S_0 = \$1.00$. La opción expira en T días y el precio strike es K . Consideramos una tasa de interés constante r anual y el precio se comporta como hemos visto, con un movimiento Browniano geométrico con volatilidad anual σ . La siguiente función calcula el precio del Call Europeo.

```
pcalleur <- function(S0,TT,K,mu,sigma){  
  #calcula el valor de un call europeo con los parámetros dados.  
  p <- BGeo(n=TT,TT=250,a=mu/250,b=sigma/sqrt(250),S0=S0) #considerando 250 días hábiles en un año  
  return(exp(-TT/250)*max(p[TT]-K,0))  
}
```

Ahora podemos simular varias corridas para determinar el valor de la opción: si $r = 0.005$, $T = 63$, $\sigma = 0.30$, $K = 1$, $S_0 = 1$:

```
z <- z1 <- NULL  
for (i in 1:1000){ z<- append(z,pcalleur(S0=1,TT=63,K=1,mu=0.05,sigma=0.2)) }  
PC <- mean(z); c(PC,PC + c(-1,1)*sd(z))  
  
## [1] 0.08316827 -0.03124515 0.19758169  
  
for (i in 1:10000){ z1<- append(z1,pcalleur(S0=1,TT=63,K=1,mu=0.05,sigma=0.2)) }  
PC1 <- mean(z1); c(PC1,PC1 + c(-1,1)*sd(z1))  
  
## [1] 0.08663014 -0.03419167 0.20745195  
  
plot(z,pch=16,cex=0.5,main="Simulaciones del precio de un call europeo",  
ylab=expression(C[0]), xlab="Tiempo")
```

Simulaciones del precio de un call europeo



Valor en Riesgo

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la **pérdida máxima** que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida por J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.
- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó *RiskMetrics*, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.
- Con el tiempo, en todos los mercados financieros se ha adoptado el VaR como la medida de riesgo más utilizada.

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la **pérdida máxima** que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida por J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.
- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó RiskMetrics, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.
- Virtualmente, en todas las instituciones financieras se ha adoptado el VaR como la medición de riesgo fundamental diaria.

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la **pérdida máxima** que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida por J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.
- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó *RiskMetrics*, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.
- Virtualmente, en todas las instituciones financieras se ha adoptado el VaR como la medición de riesgo fundamental diaria.

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la **pérdida máxima** que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida por J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.
- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó *RiskMetrics*, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.
- Virtualmente, en todas las instituciones financieras se ha adoptado el VaR como la medición de riesgo fundamental diaria.

Ejemplo: Calculo del Var

El Valor en Riesgo corresponde al cuantil de nivel α de la distribución de pérdidas y ganancias

- Consideremos los datos:

```
precios <- read.csv("../data/datosVaR.csv", sep=" ", header=T)
head(precios)

##      fecha  sp500 ftse100 nikkei225  cac40 dax100 usd.bp usd.yen usd.eur
## 1 01-Ene-97 740.74 4118.5  19361.35 2315.73 422.62 1.7125 0.0086 1.3002
## 2 02-Ene-97 737.01 4057.4  19361.35 2256.97 417.76 1.6943 0.0087 1.2969
## 3 03-Ene-97 748.03 4089.5  19361.35 2282.76 419.28 1.6865 0.0086 1.2772
## 4 06-Ene-97 747.65 4106.5  19446.00 2306.67 422.32 1.6930 0.0086 1.2794
## 5 07-Ene-97 753.23 4078.8  18896.19 2301.69 422.64 1.6946 0.0087 1.2794
## 6 08-Ene-97 748.41 4087.5  18680.38 2331.62 424.86 1.6880 0.0086 1.2714
```

- Ahora consideremos sus rendimientos ($r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$):

```
n <- dim(precios)[1]
rendimientos <- (precios[2:n, -1] - precios[1:(n-1), -1]) / precios[1:(n-1), -1]
rendimientos <- cbind(fecha=precios[-1, 1], rendimientos)
head(rendimientos)

##      fecha      sp500      ftse100      nikkei225      cac40
## 2 02-Ene-97 -0.005035505 -0.0148354984 0.0000000000 -0.025374288
## 3 03-Ene-97 0.014952307 0.0079114704 0.0000000000 0.011426824
## 4 06-Ene-97 -0.000508001 0.0041569874 0.004372112 0.010474163
## 5 07-Ene-97 0.007463385 -0.0067454036 -0.028273681 -0.002158956
## 6 08-Ene-97 -0.006399108 0.0021329803 -0.011420821 0.013003489
## 7 09-Ene-97 0.008604909 -0.0001223242 -0.032467755 0.007488356
##      dax100      usd.bp      usd.yen      usd.eur
## 2 -0.0114996924 -0.0106277372 0.01162791 -0.0025380711
## 3 0.0036384527 -0.0046036711 -0.01149425 -0.0151900686
## 4 0.0072505247 0.0038541358 0.0000000000 0.0017225180
## 5 0.0007577193 0.0009450679 0.01162791 0.0000000000
## 6 0.0052526973 -0.0038947244 -0.01149425 -0.0062529311
## 7 -0.0044955986 0.0047985782 0.0000000000 0.0003146138
```

Ejemplo: Calculo del Var (cont.)

- Si suponemos que nuestro portafolio de inversión tiene la siguiente composición (en USD):

sp500	ftse100	nikkei225	cac40	dax100	usd.bp	usd.yen	usd.eur
3000	1000	100000	3000	1500	2000	11000	9000

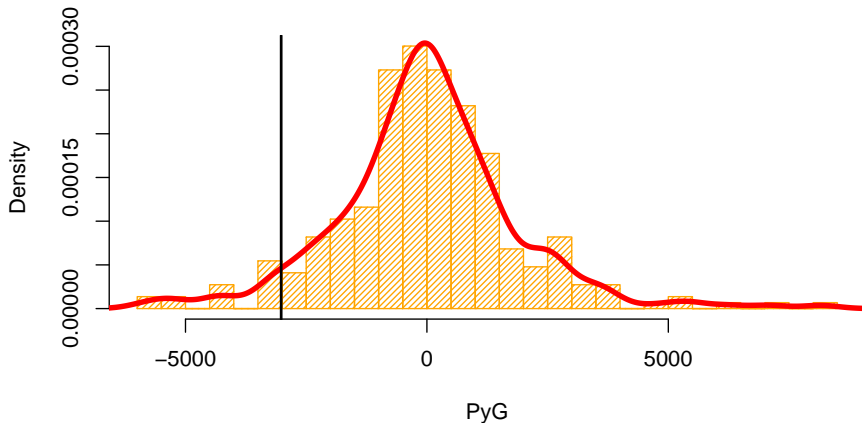
- La posición de pérdidas y ganancias (en USD) estará dada por el producto del vector de posiciones por los rendimientos de cada día:

```
w0 <- c(3000,1000,100000,3000,1500,2000,11000,9000)
pyg <- as.data.frame(as.matrix(rendimientos[,-1]) %*% w0)
pyg <- cbind(fecha=rendimientos[,1],PyG=pyg)
head(pyg)

##      fecha      V1
## 2 02-Ene-97 -39.50555
## 3 03-Ene-97 -179.84820
## 4 06-Ene-97  505.35344
## 5 07-Ene-97 -2687.26652
## 6 08-Ene-97 -1302.75952
## 7 09-Ene-97 -3192.93274
```

```
hist(pyg[,2],breaks=40,density=30,col="orange",main="distribución de las pérdidas y ganancias",xlab="PyG",prob=T)
lines(density(pyg[,2],na.rm=T),col="red",lwd=4)
var05 <- quantile(pyg[,2],.05,na.rm=T)
abline(v=var05,lwd=2)
```

distribución de las pérdidas y ganancias



- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de \$250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado ($1/20=5\%$), la pérdida esperada puede ser mayor a \$250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.
- RiskMetrics recomienda 95 % de confianza en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos.

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de \$250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado ($1/20=5\%$), la pérdida esperada puede ser mayor a \$250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.
- RiskMetrics recomienda 95 % de confianza en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos.

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de \$250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado ($1/20=5\%$), la pérdida esperada puede ser mayor a \$250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.
- RiskMetrics recomienda 95 % de confianza en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos.

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de \$250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado ($1/20=5\%$), la pérdida esperada puede ser mayor a \$250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.
- RiskMetrics recomienda 95 % de confianza en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos.

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos *supuestos* de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.
- Para calcular el VaR se requiere la distribución de los rendimientos del portafolio o activo. Surge un problema de estimación.
- En términos estadísticos, el VaR es un *cuantil* de la distribución de las pérdidas y ganancias de un portafolio o activo.

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos *supuestos* de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.
- Para calcular el VaR se requiere la distribución de los rendimientos del portafolio o activo. Surge un problema de estimación.
- En términos estadísticos, el VaR es un *cuantil* de la distribución de las pérdidas y ganancias de un portafolio o activo.

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos *supuestos* de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.
- Para calcular el VaR se requiere la distribución de los rendimientos del portafolio o activo. Surge un problema de estimación.
- En términos estadísticos, el VaR es un *cuantíl* de la distribución de las pérdidas y ganancias de un portafolio o activo.

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:
 1. **Métodos paramétricos**. Se supone que los rendimientos del portafolio se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, que típicamente es normal, pero puede incluir otras distribuciones como la t o lognormal.
 2. **Métodos no paramétricos**. Consiste en usar una serie histórica de precios del portafolio, para construir una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados o hipotéticos. Se requiere hacer supuestos sobre el proceso generador de los precios.

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:
 1. **Métodos paramétricos**. Se supone que los rendimientos del portafolio se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, que típicamente es normal, pero puede incluir otras distribuciones como la t o lognormal.
 2. **Métodos no paramétricos**. Consiste en usar una serie histórica de precios del portafolio, para construir una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados o hipotéticos. Se requiere hacer supuestos sobre el proceso generador de los precios.

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:
 1. **Métodos paramétricos**. Se supone que los rendimientos del portafolio se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, que típicamente es normal, pero puede incluir otras distribuciones como la t o lognormal.
 2. **Métodos no paramétricos**. Consiste en usar una serie histórica de precios del portafolio, para construir una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados o hipotéticos. Se requiere hacer supuestos sobre el proceso generador de los precios.

Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,236.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,234.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 252 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,236.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,234.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,236.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

Ejemplo: portafolio de dos instrumentos

- Sea $P = (w_1, w_2)$ un portafolio con 2 instrumentos.
- El VaR del portafolio se define como

$$VaR_p = z_{1-\alpha/2} \times \sigma_p \times S \times \sqrt{t}$$

- En términos de cada instrumento,

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho VaR_1 VaR_2}$$

- Al VaR del portafolio se le conoce como *VaR diversificado* porque toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos de los instrumentos del portafolio.
- Para un portafolio con k instrumentos, se tiene que:

$$VaR_p = \sqrt{\mathbf{v}'\Sigma\mathbf{v}}$$

donde \mathbf{v} es el vector con los VaR individuales de cada instrumento, y Σ es la matriz de correlaciones de los rendimientos.

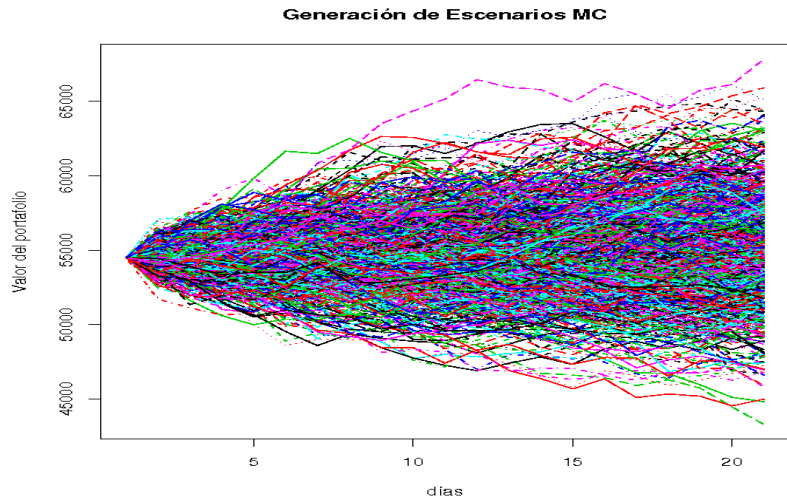
- El método de Monte Carlo se aplica a casos en que se quiere calcular el VaR de productos derivados, como futuros, opciones y swaps. En derivados muy complejos, es el método más eficaz para medir el riesgo.
- En este modelo, generamos precios de acuerdo al modelo de Proceso de Wiener geométrico que hemos visto antes para calcular los precios futuros de los instrumentos en el portafolio y se usan para calcular las pérdidas y ganancias.
- Uno de sus inconvenientes es que requiere el uso intensivo de la computadora, y puede llegar a ser un problema serio en portafolios que son muy grandes.

- La ecuación del modelo para el rendimiento del portafolio es recursiva. Para crear escenarios sobre las pérdidas y ganancias de valor del portafolio, se generan números aleatorios normales y se calcula la fórmula del valor del portafolio para cada día que se está simulando.
- Con los datos obtenidos se puede construir una tabla como la siguiente:

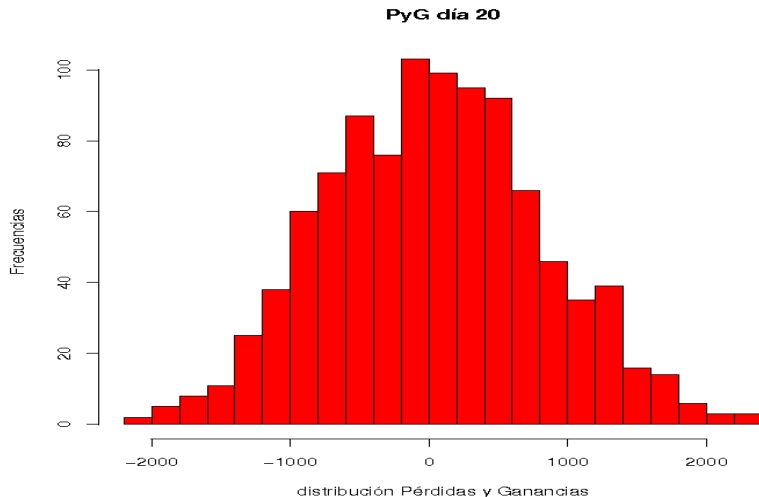
día	Valor del Portafolio	€	PyG
0	54,498.00		
1	54,209.00	-0.40663	-289.00
2	54,070.23	-0.21405	-138.77
3	53,384.53	-0.92730	-685.69
...
19	55,186.28	-1.08720	-836.79
20	54,252.31	-1.22843	-933.97

- La tabla anterior muestra los resultados para *un solo* escenario. Cada trayectoria que se genera es llamada escenario en la administración de riesgos.
- Para calcular el VaR, se requiere generar un gran número de *escenarios*. En la práctica es usual simular $B = 1,000$ o más.
- Las trayectorias de valores del portafolio se muestran en la siguiente página. Con estos escenarios, se grafica un histograma de las pérdidas y ganancias estimadas para el portafolio el día 20. Este histograma corresponde a una estimación de la distribución real de las pérdidas y ganancias que se pueden esperar.

Escenarios de valores del portafolio.



Histograma de Pérdidas y Ganancias.



- El valor en Riesgo es simplemente el cuantil que se requiera de la distribución de las pérdidas y ganancias estimadas.
- En nuestro ejemplo, podemos calcular varios cuantiles para comparar:

```
> quantile(PyG[20, ], c(0.01, 0.02, 0.05, 0.10))
1%          2%          5%          10%
-1639.583 -1483.272 -1204.660  -947.672
```

- Entonces, bajo condiciones normales del mercado, la pérdida que no será excedida en 99 % de los casos es \$1,639. En este sentido es la máxima pérdida esperada (en 99 % de los casos).
- Para calcular el VaR, podemos usar los precios y calcular las pérdidas y ganancias, o también es posible que usemos la distribución de los rendimientos esperados del portafolio.

- La idea es muy directa: usamos datos reales históricos de cada instrumento en un portafolio para construir una distribución de pérdidas y ganancias empírica para el portafolio.
- En este caso, no se supone ningún modelo teórico o analítico para el proceso que genera los precios o rendimientos como en el caso anterior.
- Es importante en la práctica, que se disponga de datos históricos diarios, para varios años. Por lo menos, el BIS recomienda que se utilice al menos un año, pero se debería tener información de 3 a 5 años por lo menos.
- Con estos datos, se calcula el valor del portafolio para cada día, *suponiendo que se mantienen constantes los pesos del portafolio* durante todo el tiempo.
- Este método es muy utilizado porque no requiere de muchos conocimientos técnicos, pero tiene sus deficiencias.

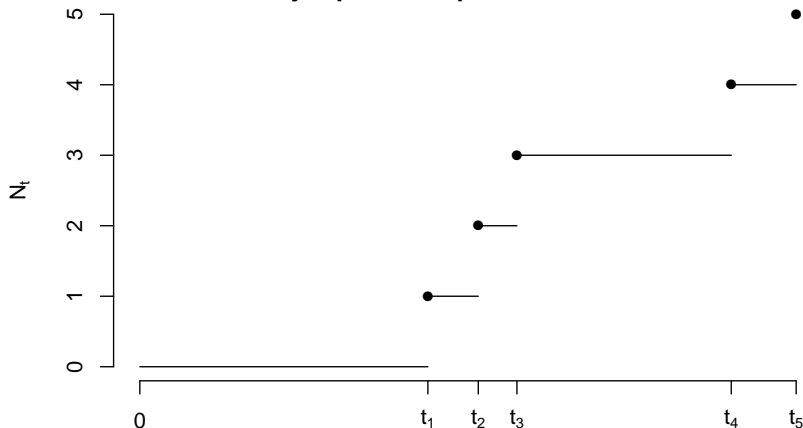
Procesos de Poisson

Def (Procesos de conteo)

Un *Proceso de conteo* es un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ tal que si $0 \leq s \leq t$, entonces $N_s \leq N_t$. Aquí $\mathfrak{T} = \mathbb{R}^+$ y $\mathfrak{S} = \mathbb{Z}^+$.

El *proceso Poisson* es un caso particular de un proceso de conteo, que cuenta el número de eventos que ocurren en el intervalo $(0, t]$ o en un espacio determinado.

Ejemplo de un proceso Poisson



Algunos ejemplos prácticos son los siguientes:

- Llegada de clientes a una estación de servicio, donde el servicio puede estar dado por personas o por máquinas.

- La ocurrencia de accidentes, errores, fallas de sistema y eventos similares asociados con riesgos.
- La llegada de un electrón al ánodo, emitido desde un cátodo de un tubo de vacío.
- Llegadas de correo electrónico o tweets en una jornada de trabajo.
- Número de conejos que hay en una región determinada de un bosque.

Para entender bien el proceso Poisson y simularlo, se requiere conocer la relación entre las distribuciones exponencial y Poisson.

Proceso Poisson

Un proceso de conteo $\{N_t | t \geq 0\}$ es un proceso Poisson on media (o intensidad) λ si se cumplen los siguientes supuestos:

- 1 $N_0 = 0$
- 2 $\{N_t | t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes
- 3 $\forall s < t$ el conteo $N_t - N_s$ en el intervalo (s, t) sigue una distribución Poisson con media $\lambda(t - s)$,

$$P(N_t - N_s = k) = \exp^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

y

$$E(N_t - N_s) = \lambda(t - s), \quad \text{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t - s)$$

Se usa la notación $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para decir que $\{N_t | t \geq 0\}$ sigue un proceso Poisson con intensidad λ .

- Hay otras formas de deducir el proceso Poisson, considerando la Ley de los eventos raros y suponiendo un conjunto de axiomas, o bien considerando la distribución de los tiempos de interarribo.

- En un proceso Poisson $\{N_t | t \geq 0\}$, los puntos en donde ocurren los eventos usualmente son aleatorios y se representan por los tiempos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.
- Las variables $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, \dots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ son conocidos como *tiempos de interarribo*.
- Usualmente se supone que los tiempos de interarribo T_i son variables aleatorias con distribución exponencial.

Proceso Poisson a partir de tiempos de interarribo

Sean T_1, T_2, \dots, T_n va iid $\sim \exp(\lambda)$ tiempos de interarribo y $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$ es el instante en el que ocurre el n -ésimo evento. El proceso Poisson de intensidad λ se puede definir como

$$N_t = \max\{n | \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Es importante notar que en esta definición,

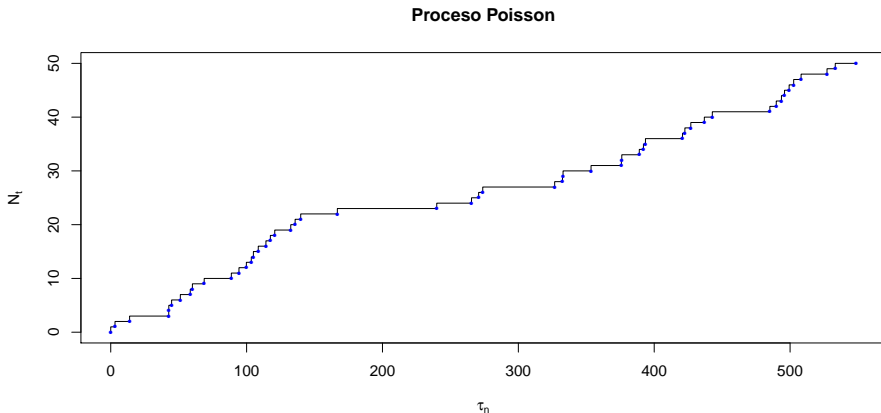
$$N(t) = n \iff \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$$

Con la definición anterior, se obtiene un método para simular un proceso Poisson, ya sea a partir de uniformes o exponenciales:

- 1 Definir $\tau_0 = 0$.
- 2 Genera $u_1, u_2, \dots, u_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ independientes, para calcular exponenciales $T_i = -\frac{1}{\lambda} \log u_i$
- 3 Define $\tau_n = \sum_{k=1}^n T_k$ para $n = 1, 2, \dots$
- 4 Para cada $k = 0, 1, \dots$, sea $N_t = k$ para $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$.

Ejemplo de Simulación de Proceso Poisson

```
n <- 50
lambda = 10
TA <- rexp(n,rate=1/lambda)
tau <- cumsum(TA) #tiempos en donde ocurren los eventos
Nt <- 1:length(tau) # proceso de conteo
plot(c(0,tau), c(0,Nt), type="S",main="Proceso Poisson",
     xlab=expression(tau[n]), ylab=expression(N[t]))
points(c(0,tau), c(0,Nt), pch=16, cex=0.5, col="blue")
```



- Existe una fuerte conexión entre el proceso Poisson y la distribución uniforme que se puede explotar para simulación.
- Si un proceso Poisson genera n eventos en $[0, t]$, entonces los tiempos de esos eventos se distribuyen uniformemente en $[0, t]$.
- Por ejemplo, para $N_t = 1$, si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}P(\tau_1 \leq s | N_t = 1) &= \frac{P(\tau_1 \leq s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} = \frac{P(N_s = 1, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_t - N_s = 0, N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_t - N_s = 0)P(N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_{t-s} = 0)P(N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{e^{-\lambda(t-s)} \lambda s e^{-\lambda s}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_1 \sim \mathcal{U}(0, t)$.

Teorema

Sean τ_1, τ_2, \dots los tiempos de arribo de un proceso $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces la distribución conjunta de (τ_1, \dots, τ_n) Condicional a $N_t = n$ es la distribución de las estadísticas de orden de n variables iid $\mathcal{U}(0, t)$.

Demostración.

La función de densidad de (τ_1, \dots, τ_n) se puede escribir como

$$f(s_1, \dots, s_n) = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \cdots \lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \frac{P(A)}{\epsilon_1 \cdots \epsilon_n}$$

donde $A = \{s_1 \leq \tau_1 \leq s_1 + \epsilon_1, \dots, s_n \leq \tau_n \leq s_n + \epsilon_n\}$, suponiendo que $0 \leq s_1 < \dots < s_n < t$ y considerar el evento A dado que $N_t = n$.

Para $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ suficientemente pequeñas, A equivale al evento de que el intervalo $(s_i, s_i + \epsilon_i]$ contiene exactamente un arribo y no ocurren otros arribos en $[0, t]$. Por tener incrementos estacionarios e independientes,

$$\begin{aligned} P(A|N_t = n) &= \frac{P(N_{s_1+\epsilon_1} - N_{s_1} = 1, \dots, N_{s_n+\epsilon_n} - N_{s_n} = 1, N_t = n)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{\lambda \epsilon_1 e^{-\lambda \epsilon_1} \cdots \lambda \epsilon_n e^{-\lambda \epsilon_n}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} = \frac{n! \epsilon_1 \cdots \epsilon_n}{t^n} \end{aligned}$$

Dividiendo por el producto de las ϵ 's y haciendo que cada $\epsilon_i \rightarrow 0$, se obtiene el resultado. □

Segundo algoritmo para Procesos Poisson

Basados en la relación entre la uniforme y el proceso Poisson, podemos generar un nuevo método:

Algoritmo 2 para simular procesos Poisson

- 1 Simular el número de arribos N en $[0, t]$ como $N \sim \mathcal{P}(\lambda t)$
- 2 Generar u_1, \dots, u_N iid $\mathcal{U}(0, t)$
- 3 Definir $\tau_i = u_{(i)}$ para $i = 1, \dots, N$.

Ejemplo: simular un proceso Poisson con $\lambda = 1/2$ en $[0, 40]$:

```
t <- 40
lambda <- 0.5
N <- rpois(1, lambda*t)
u <- runif(N, 0, t)
taus <- sort(u)
taus

[1] 1.663591 1.732043 2.484606 3.847483 4.991022 6.106019 6.797431
[8] 8.919826 9.230252 10.412345 12.206085 13.609413 14.611336 15.306741
[15] 20.972651 25.283462 29.125873 31.823799 35.758797 35.989145

length(taus)

[1] 20
```

Superposición y adelgazamiento (thinning) de procesos Poisson

I

- Una propiedad interesante de los procesos Poisson es que se pueden descomponer (o agregar) según los tipos de eventos que ocurren en el tiempo.
- Por ejemplo, el número de nacimientos N_t en un intervalo $(0, t]$ se puede separar en el número de nacimientos de varones $N_t^{(v)}$ y el número de nacimientos de mujeres $N_t^{(m)}$. El proceso ‘suma’ $N_t = N_t^{(v)} + N_t^{(m)}$ es un proceso *superpuesto*, y cada proceso componente es un proceso *adelgazado*.
- En el ejemplo, los nacimientos de niños y niñas son independientes. Entonces

$$\begin{aligned}P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v) &= P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v, N_t = m + v) \\&= P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v | N_t = m + v) P(N_t = m + v) \\&= P(N_t^{(m)} = m | N_t = m + v) P(N_t = m + v)\end{aligned}$$

y sustituyendo las probabilidades y reagrupando se puede ver que las probabilidades son independientes y Poisson:

$$P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v) = P(N_t^{(m)} = m) P(N_t^{(v)} = v)$$

Adelgazamiento y Superposición

- Si los arribos son independientes y se pueden identificar de tipos k con probabilidad p_k para $k \in \{1, \dots, m\}$, $\sum_{k=1}^m p_k = 1$ y sea $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$ el proceso que cuenta los arribos. Si $N_t^{(k)}$ es el número de eventos de tipo k en $(0, t)$, entonces $N_t^{(k)} \sim \mathcal{P}(\lambda p_k)$ y los procesos

$$N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(m)} \text{ son independientes.}$$

Decimos que cada proceso $N_t^{(k)}$ es un *proceso Poisson adelgazado*.

- Si $N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(m)}$ son m procesos Poisson independientes con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ respectivamente, entonces el proceso

$$N_t = N_t^{(1)} + \dots + N_t^{(m)} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$$

Decimos que el proceso N_t es un *proceso Poisson superpuesto*.

- En una región de Safari, avisamientos de leones, tigres y jirafas ocurren con distribución Poisson con parámetros λ_l , λ_t y λ_j con unidad de tiempo hora. Los avisamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de no ver ningún animal en 24 horas? Si se vieron tres animales en un día, ¿cuál es la probabilidad de que cada especie haya sido vista?

- En una región de Safari, avisamientos de leones, tigres y jirafas ocurren con distribución Poisson con parámetros λ_l , λ_t y λ_j con unidad de tiempo hora. Los avisamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de no ver ningún animal en 24 horas? Si se vieron tres animales en un día, ¿cuál es la probabilidad de que cada especie haya sido vista?
- Para la primera pregunta: $P(N_{24} = 0) = e^{-24(\lambda_l + \lambda_t + \lambda_j)}$

- En una región de Safari, avisamientos de leones, tigres y jirafas ocurren con distribución Poisson con parámetros λ_l , λ_t y λ_j con unidad de tiempo hora. Los avisamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de no ver ningún animal en 24 horas? Si se vieron tres animales en un día, ¿cuál es la probabilidad de que cada especie haya sido vista?
- Para la segunda pregunta:

$$P(L_{24} = 1, T_{24} = 1, J_{24} = 1) = \frac{P(L_{24} = 1)P(T_{24} = 1)P(J_{24} = 1)}{P(N_{24} = 3)}$$

- Los procesos adelgazados serán de particular utilidad para simular procesos Poisson no homogéneos.

- En una región de Safari, avisamientos de leones, tigres y jirafas ocurren con distribución Poisson con parámetros λ_l , λ_t y λ_j con unidad de tiempo hora. Los avisamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de no ver ningún animal en 24 horas? Si se vieron tres animales en un día, ¿cuál es la probabilidad de que cada especie haya sido vista?
- Para la primera pregunta: $P(N_{24} = 0) = e^{-24(\lambda_l + \lambda_t + \lambda_j)}$
- Para la segunda pregunta:

$$P(L_{24} = 1, T_{24} = 1, J_{24} = 1) = \frac{P(L_{24} = 1)P(T_{24} = 1)P(J_{24} = 1)}{P(N_{24} = 3)}$$

- Los procesos adelgazados serán de particular utilidad para simular procesos Poisson no homogéneos.

Proceso de Poisson no homogéneos

En situaciones realistas los eventos no ocurren de manera homogénea en el tiempo. Por ejemplo, en un restaurante, la llegada de clientes varía conforme son los tiempos de los alimentos. En estos casos es mejor considerar un proceso en donde la tasa de arribo varíe con el tiempo.

Proceso Poisson no homogéneo (PPNH)

$\{N_t | t \geq 0\}$ es un *proceso Poisson no homogéneo* con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$ si

- $N_0 = 0$
- $\forall t > 0, N_t \sim \mathcal{P}\left(\int_0^t \lambda(s) ds\right)$
- $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots < t_m$, los incrementos $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ son independientes.
- Aunque los incrementos son independientes, no son necesariamente estacionarios.
- Un proceso de Poisson no homogéneo es un proceso de Markov
- Si $0 \leq s < t$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P}\left(\int_s^t \lambda(u) du\right)$

Hay varias formas de generar un PPNH (ver por ejemplo: Radhakrishna). Consideraremos el método de *adelgazamiento*:

- La idea básica es ‘envolver’ un proceso Poisson no homogéneo con uno que sí sea homogéneo en un intervalo de tiempo.
- Método equivalente a aceptación y rechazo.

Supongan que queremos simular las primeras T unidades de tiempo de un proceso N_t^* .

- 1 Encuentra λ tal que $\lambda(t) \leq \lambda \forall t \leq T$
- 2 Asigna $n \leftarrow 0$; $n^* \leftarrow 0$; $\tau \leftarrow 0$; $\tau^* \leftarrow 0$
- 3 Genera $w \sim \exp(\lambda)$ y asigna $\tau \leftarrow \tau + w$; $n \leftarrow n + 1$
- 4 Genera $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si $u \leq \frac{\lambda(\tau)}{\lambda}$, actualiza $n^* \leftarrow n^* + 1$ y $\tau^* \leftarrow \tau$.
- 5 regresa al paso 2.

Ejemplo. Simulación de un PPNH

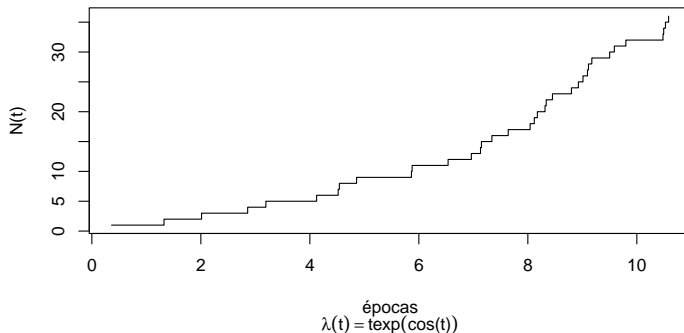
Consideren simular un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) = te^{\cos(t)}$.

```
lambdat <- function(t){t*exp(cos(t))}

poisson.nohomogeneo <- function(lambdat,n){
  lambda <- 5 #mayoriza la función lambdat
  TT <- rexp(n,lambda) #genera variables exponenciales para los tiempos.
  s <- cumsum(TT) #acumula los tiempos en el vector s
  u <- runif(n) #obten n uniformes
  ss <- s[u <= lambdat(s)/lambda] #obten los tiempos que cumplen la condición de aceptación
  Ns <- 1:length(ss) # Conteo
  plot(ss, Ns, type = "s", xlab = "épocas", ylab = "N(t)",
       main = "Simulación de un proceso Poisson no homogéneo",
       sub = expression(lambda(t) == t*exp(paste("cos", "(t)"))))
  return(list(epocas = ss, cuenta= Ns))
}

x <- poisson.nohomogeneo(lambdat,50)
```

Simulación de un proceso Poisson no homogéneo



¿Porqué *thinning* funciona para PPNH?

La prueba de que *thinning* funciona se basa en el siguiente resultado que establece las características para dos procesos Poisson no homogéneos que se construyen con la misma condición del algoritmo dado.

Teorema (Lewis & Shedler, 1979)

- Considerar un PPNH con función de intensidad $\lambda_u(t)$, $t \geq 0$. Suponer que $T_1^*, \dots, T_n^* \in (0, t_0]$ son eventos de tiempo para ese PPNH.
- Sea $\lambda(t)$ una función de intensidad tal que $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_u(t) \quad \forall t \in [0, t_0]$.
- Si el i -ésimo evento de tiempo T_i^* es borrado independiente de los otros eventos de tiempo con probabilidad $1 - \lambda(t)/\lambda_u(t)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces los eventos restantes de tiempo forman un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$ en $(0, t_0]$.

La aplicación para nuestro caso supone que el proceso que cubre al PPNH tiene $\lambda_u(t) = \lambda$ es constante, y por lo tanto es un proceso Poisson homogéneo. Es otro caso de A-R.