Práctica 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias

Saúl Adrián Alvarez Tapia
Carlos Eduardo Gil Mezta
Jorge Antonio Rotter Vallejo
Sergio de Jesús Arnaud Gómez

Introducción

Los problemas de valor inicial (PVI) de la forma

$$\dot{y} = f(t,y) \quad y(t_0) = y_0$$

y problemas de valores en la frontera (PVF)

$$\dot{y} = f(t,y) \quad y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b$$

aparecen frecuentemente en aplicaciones. Sin embargo, no siempre es posible calcular la solución analítica, por lo que utilizar métodos numéricos que permitan aproximar la solución en cierto intervalo es deseable. En este trabajo exploraremos algunos de los más conocidos.

Ejercicios

1. Método de Euler

Aplicamos el método de Euler explícito con paso $h = 0.1$ al PVI

$$\dot{y} = 2(t+1)y, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

en el intervalo [0,1]. Observemos primero que el problema tiene solución exacta

$$y(t) = e^{t^2+2t} \tag{2}$$

Y que primeros diez pasos de la solución numérica son

$w_0 = 1.000000$	$w_4 = 2.287354$	$w_8 = 6.732329$
$w_1 = 1.200000$	$w_5 = 2.927813$	$w_9 = 9.155968$
$w_2 = 1.464000$	$w_6 = 3.806156$	$w_{10} = 12.635236$
$w_3 = 1.815360$	$w_7 = 5.024126$	

Por lo que el error global en $t = 1$ es $|y(20) - w_{20}| = |e^3 - 12.635236| = 7.45030106146$. Por otro lado, el máximo de los errores locales es 0.887953046931. Consideremos ahora $k \in \{0, 1, \cdots, 5\}$ y para cada k definamos $h_k = 0.1 \times 2^{-k}$. Utilizando estos cinco pasos distintos, calculamos el máximo error local del método de Euler y el orden de convergencia experimental (eoc por sus siglas en inglés). En la tabla podemos ver que cuando el paso se reduce a la

Tabla 1: Máximo error local variando k

k	h_k	error máximo	eoc
0	0.100000	0.5906583277433	0.7226540856
1	0.050000	0.2439174393180	0.8413914232
2	0.025000	0.0815839823228	0.9146020379
3	0.012500	0.0238877045753	0.9556017523
4	0.006250	0.0064856605817	0.9773510743
5	0.003125	0.0016912968397	———

mitad, el máximo error local decrece

2. Trabajo, precisión y orden

Consideremos otra vez el PVI (1), y su solución exacta, (2). En la tabla 2 comparamos el error del método del trapecio con dos pasos distintos y de Runge-Kutta 4 (RK4).

Tabla 2: Comparación de RK4 y trapecio

	Trapecio(h_1)	Trapecio(h_2)	RK4
Error global en $t = 1$	0.7792153733	0.2218238872	0.0042700959
Número de estados	20	40	40

En este caso, es más conveniente cambiar a un método de mayor orden que reducir el tamaño del paso. Tanto RK4 con paso h_1 como el método del trapecio con paso h_2 tienen cuarenta estados, pero el error con RK4 es significativamente menor. Esto se debe a que en el método del trapecio, el error global es $O(h^2)$, así que al dividir el paso entre 2, reducimos el error por un factor de 4. En cambio, al cambiar a RK4, el error es $O(h^4)$, así que manteniendo la misma h, reducimos el error global en un factor de (1/100)/(1/10000)=100K4 es significativamente menor.

3. Método del punto medio

Trabajaremos ahora en el intervalo [0,1] con el PVI

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que la solución exacta es

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

Usando el método del punto medio, con $h = \frac{1}{10}$ el error global en $t = 1$ es 0.00186603257443, mientras que con $h = \frac{1}{100}$ es $1.74722645566 \times 10^{-5}$. Este error es consistente con la teoría, pues por ser de orden dos, esperaríamos que al reducir el paso diez veces, el error se redujera cien (diez al cuadrado) veces; y dividiendo el primer error entre cien, obtenemos $1.86603257443 \times 10^{-5}$, muy cercano al experimental.

4. Ecuaciones *stiff*

Consideremos el PVI

$$\dot{y} = 5y - 3y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 20]$$

Observemos primero que las soluciones de equilibro de la ecuación son $y \equiv 0$ y $y \equiv \frac{5}{3}$. Aplicando Euler implícito con paso constante $h = \frac{1}{2}$, obtenemos que $y(20) \approx w_{20} = 1.\bar{6} = 5/3$, la solución de equilibrio hacia la cual converge. Aplicando Euler explícito con distintos pasos ($h \in \{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ obtenemos convergencia a la misma solución en todas excepto $h = \frac{1}{2}$, que aproxima $w_{20} = 2.04166028173897$.

Esto se debe a que la ecuación es *stiff*, y para que la función de iteración dada por el método de Euler explícito converja al punto fijo $w^* = \frac{5}{3}$, se requiere $|F'(\frac{5}{3})| = |1 + 5h - 6h\frac{5}{3}| < 1$. Y esto se da si y sólo si $0 < h < \frac{2}{5}$. Por eso no funcionó cuando h era 0.4.

Si ahora aplicamos el método de Bogacki–Shampine [Sa12] con tolerancia $tol = \frac{1}{10}$ obtenemos $w_{20} = 1.6684838860728615$; y si bajamos la tolerancia hasta $\frac{1}{100}$, aproximamos $w_{20} = 1.6622585157962926$.

5. Verificar orden

Para comparar los métodos, usaremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\dot{y}(t) = y^2 - 4, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 2]$$

Sea $f(t, y) = y^2 - 4$. Dado que $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ existen y son continuas, f es de clase C^1 y, así, f es Lipschitz en la variable y en $[0, 2] \times (-\infty, \infty)$. Por el teorema de existencia y unicidad, se garantiza que la solución del problema de valor inicial es única en el intervalo $[0, 2]$. De hecho, por medio de separación de variables, obtenemos que la solución es:

$$y(t) = \frac{2 - 2e^{4t}}{e^{4t} + 1}$$

A continuación se muestran los errores globales y los órdenes de convergencia experimental obtenidos con los métodos Euler explícito, Trapecio explícito, punto medio explícito y Runge-Kutta-4 con los pasos $h \in \{0.02, 0.01, 0.005\}$.

Tabla 3: Euler explícito

h	error global	eoc
0.02	0.000326129190757	0.938507629735
0.01	0.000170165190836	0.969815078371
0.005	$8.68814971831 \times 10^{-5}$	————

Tabla 4: Trapecio explícito

h	error global	eoc
0.02	$9.87464998814 \times 10^{-6}$	2.04469956316
0.01	$2.3933477753 \times 10^{-6}$	2.02132686209
0.005	$5.89556991004 \times 10^{-7}$	————

Tabla 5: Punto medio explícito

h	error global	eoc
0.02	8.72843297439 $\times 10^{-6}$	2.043896697077
0.01	2.11671344053 $\times 10^{-6}$	2.02104780509
0.005	5.21514100793 $\times 10^{-7}$	————

Tabla 6: Runge-Kutta-4

h	error global	eoc
0.02	2.88204349275 $\times 10^{-9}$	4.04473089128
0.01	1.74628533856 $\times 10^{-10}$	4.02234855171
0.005	1.07465147892 $\times 10^{-11}$	————

De las tablas anteriores podemos ver cómo el error global se reduce aproximadamente a la mitad cuando el paso h se reduce a la mitad y podemos verificar, por medio del orden experimental de convergencia, que se cumple que el método de Euler es de orden 1, que el método del trapecio y el del punto medio son de orden 2 y que el método Runge-Kutta-4 es de orden 4.

6. Diferencias finitas

Consideremos el problema de valores en la frontera:

$$\ddot{y} = 10\ \dot{y}(1-y), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 - \frac{\pi}{20}$$

que tiene como solución exacta

$$y(t) = 1 - \frac{\pi}{20} \tan\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

Usando el método de diferencias finitas de orden dos, dado que

$$\dot{y} = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$\ddot{y} = \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Podemos escribir la discretización del problema como

$$\frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} = \frac{10(y(t+h) - y(t-h)) \cdot (1-y)}{2h}$$

Sustituyendo $w_{n-1} = y(t-h)$, $w_n = y(t)$ y $w_{n+1} = y(t+h)$ y reorganizando la ecuación anterior, obtenemos:

$$w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1} - 5h \cdot (w_{n+1} - w_{n-1}) \cdot (1 - w_n) = 0$$

Definimos

$$F(w) = \begin{pmatrix} w_2 - 2w_1 + w_0 - 5h \cdot (w_2 - w_0) \cdot (1 - w_1) \\ w_3 - 2w_2 + w_1 - 5h \cdot (w_3 - w_1) \cdot (1 - w_2) \\ \vdots \\ w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} - 5h \cdot (w_{i+1} - w_{i-1}) \cdot (1 - w_i) \\ \vdots \\ w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1} - 5h \cdot (w_{n+1} - w_{n-1}) \cdot (1 - w_n) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $w_0 = y(0) = 1$ y $w_{n+1} = y(1) = 1 - \frac{\pi}{20}$

$$F(w) = \begin{pmatrix} w_2 - 2w_1 + 1 - 5h \cdot (w_2 - 1) \cdot (1 - w_1) \\ w_3 - 2w_2 + w_1 - 5h \cdot (w_3 - w_1) \cdot (1 - w_2) \\ \vdots \\ w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} - 5h \cdot (w_{i+1} - w_{i-1}) \cdot (1 - w_i) \\ \vdots \\ 1 - \frac{\pi}{20} - 2w_n + w_{n-1} - 5h \cdot (1 - \frac{\pi}{20} - w_{n-1}) \cdot (1 - w_n) \end{pmatrix}$$

Para resolver $F(w) = 0$, usamos la versión matricial del método de Newton-Raphson, dada por:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) \cdot DF(x_n)^{-1}$$

con $DF(x_n)$ el jacobiano de F.

Por eficiencia, resolvemos la siguiente ecuación de la forma $Ax = b$:

$$DF(x_n) \cdot x = F(x_n)$$

usando el método "solve"de Python, donde $DF(w)$ está dado por la siguiente matriz tridiagonal

$$DF(w) = \begin{pmatrix} -2 + 5h \cdot (w_2 - 1) & 1 - 5h \cdot (1 - w_1) & 0 & \dots 0 \\ 1 + 5h \cdot (1 - w_2) & -2 + 5h \cdot (w_3 - w_1) & 1 - 5h \cdot (1 - w_2) & \dots 0 \\ 0 \quad \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 + 5h \cdot (1 - w_{n-1}) & -2 + 5h \cdot (w_n - w_{n-2}) & 1 - 5h \cdot (1 - w_{n-1}) \\ 0 \quad \dots & 0 & 1 + 5h \cdot (1 - w_n) & -2 + 5h \cdot (1 - \frac{\pi}{20} - w_{n-1}) \end{pmatrix}$$

En la siguiente tabla se muestran los errores globales y los órdenes de convergencia experimentales del método de diferencias finitas de orden 2 para los pasos $h \in \{0.05, 0.025, 0.0125\}$

Tabla 7: Diferencias finitas con distintos pasos

h	error global	eoc
0.05	0.0135543347628	1.06968698976
0.025	0.00645758806692	1.033465018674
0.0125	0.0031547603046	———

En la tabla anterior puede verificarse cómo reducir el paso h a la mitad ocasiona que el error se reduzca aproximadamente la mitad y cómo este es un método de orden 1.