PRÁCTICA 2 – EDO

1. Consejos para la implementación

- Vean los ejercicios incluidos en la teoría. Ahí dice qué argumentos debe aceptar una función implementando un método (por ejemplo el método Euler) y qué resultados debe regresar.
- En los códigos minimales (ver comunidad ITAM) se encuentran ejemplos de como pasar funciones como argumentos.
- Para verificar el orden p de un método, recuerden que p es aproximadamente la pendiente de la curva del error en una gráfica log-log. Motivado por esa relación, se define el *"experimental order of convergence" (eoc)* como el cociente

$$p \approx \operatorname{eoc}(h_1, E_2, h_2, E_2) := \frac{\log\left(E_{M,2}/E_{M,1}\right)}{\log\left(h_2/h_1\right)}\,,$$

  donde $E_{M,i}$ es el error asociado con paso h_i usando un método M para aproximar una solución de una EDO.

2. Reglas

Para cada problema hay que escribir y entregar un guión *(a MatLab script)* que reproduzca los resultados y cuya primera linea es:

```
clear all;   close all;   clc;
```

3. Problemas

3.1. Euler (3 puntos). Aplica el método de Euler (explícito) con paso $h = 0.1$ al PVI:

$$y' = 2(t+1)y\,, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

en el intervalo $[0, 1]$.

1. Lista los valores de la solución numérica w_i para $i = 0, 1, \ldots, 10$.
2. Dada la familia de soluciones

$$y(t) = y_0\, e^{t^2 - t_0^2 + 2(t - t_0)} \tag{2}$$

- encuentra el error global en $t = 1$ usando la solución exacta.
- calcula el máximo de los errores **locales**, *i.e.* $\max_i |e_i|$.
- dibuja una gráfica log-log del error **global** del método de Euler en $t = 1$ como función de $h = 0.1 \times 2^{-k}$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.
- produce una tabla con las columnas como abajo, que contiene en la fila k los valores asociados al paso $h_k := 0.1 \times 2^{-k}$ donde $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

k	paso	máximo de los errores **locales** del método de Euler	`eoc`
1	...		
⋮	...		

- Interpreta la gráfica y la tabla. ¿Cómo se relacionan los resultados con la teoría? Nota: Guarda la gráfica en un archivo con formato PDF (o EPS) de preferencia.

3.2. Trabajo *vs* precisión *vs* orden (2 puntos). Para este ejercicio usa el PVI (1) y su solución general exacta (2). El trabajo realizado por un método depende del número de intervalos y "estados" (evaluaciones de funciones).

- Aplica el método del Trapecio (explícito) con el paso $h_1 = 1/10$ y calcula el error global $E_{\text{Trapecio}}(h_1)$ en el punto $t = 1$.
- Después dobla el trabajo de las siguientes formas:
  1. usa el mismo método con el paso $h_2 = h_1/2$ y calcula $E_{\text{Trapecio}}(h_2)$,
  2. ahora usa el método Runge-Kutta 4 con el mismo paso h_1 y calcula $E_{\text{RK4}}(h_1)$.
- Rellena la tabla siguiente.

·	Trapecio(h_1)	Trapecio(h_2)	RK4(h_1)
Error (global en $t = 1$)	·	·	·
número de estados	·	·	·

¿Cuál es la forma más conveniente para reducir el error (en este caso) y porqué?

3.3. Punto medio (1 puntos). Aplica el método del Punto Medio con pasos $h = 1/10$ y $h = 1/100$ al PVI

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. La solución exacta es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t} \sin t \\ y_2(t) &= e^{-t} \cos t\,. \end{aligned}$$

1. Para ambos pasos ($h = 1/10$ y $h = 1/100$) encuentra los errores globales aproximando las componentes y_1 y y_2 en $t = 1$.
2. ¿Es consistente la reducción del error (al pasar de $h = 1/10$ a $h = 1/100$) con el orden del método del Punto Medio? Explica.

3.4. Ecuaciones *stiff*: explícito *vs* implícito (2 puntos). Considera el PVI

$$y' = 5y - 3y^2\,, \quad y(0) = \frac{1}{2}\,, \quad t \in [0, 20].$$

1. Aplica Euler *implícito* con paso constante $h = \frac{1}{2}$ al PVI.
   Lista el valor $y(20)$.
   ¿Hacia cuál de las soluciones de equilibrio converge la trayectoria?
2. Ahora aplica Euler *explícito* con pasos constantes $h \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.
   ¿Para que valores de h funciona bien el método de Euler explícito? (es decir, la trayectoria converge hacia la solución de equilibrio correcta). Usando la teoría explica porqué.
3. **(+1/2 punto extra)** Aplica el método RK2/3 adaptativo con tolerancia relativa $tol \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right\}$ y compara con los resultados anteriores. ¿Qué es mejor el método implícito o un método explícito adaptativo?
4. **(+1/2 punto extra)** Determina el paso máximo estable para el método RK2/3 adaptativo (sin extrapolación).

3.5. Verificar orden (1 punto). El objetivo de este ejercicio es comparar métodos y verificar su orden global. Usando una (y solo una) ecuación de su preferencia, verifiquen el orden y comparen los errores de los siguientes métodos:

- `Euler (explícito),`
- `Trapecio (explícito), Punto Medio (explícito)`
- `RK4`

Recomendamos que presenten sus resultados de este ejercicio (junto con su ecuación y la solución exacta) en forma (de preferencia) de una gráfica (log-log) o en forma de tablas. Viendo los resultados se debe poder comparar los errores y el orden de los métodos (usen los 3 valores de h dados por $1/50, 1/100, 1/200$).

3.6. Diferencias finitas (1 punto). Dado el BVP

$$\begin{aligned} y'' &= 10y'(1-y) \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 - \frac{\pi}{20} \end{aligned} \tag{3}$$

aproxima su solución con el método de diferencias finitas de orden 2. Usando la solución exacta, dada por

$$y(t) = 1 - \frac{\pi}{20} \tan\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

mide el error global (el máximo en los puntos de malla) para los 3 valores de $h \in \left\{\frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}\right\}$.

Recomendamos que presenten sus resultados de este ejercicio en forma de una tabla (similar a la del Ejercicio 3.1).