Entregable-1.pdf

CoronelDR

Astrofísica

4º Grado en Física

Facultad de Física
Universidad de Sevilla

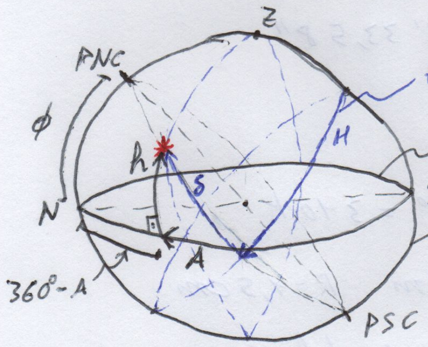
Darío Román Coronel

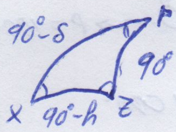
Astrofísica. Entregables I

1. $\left\{ \begin{array}{l} \delta = 42^\circ 21' N \\ H = 8^h 16^m 42^s \end{array} \right.$ | Ecuatorial horaria

$\phi = 60^\circ N$ ¿h, A? → Cambio de coordenadas a ~~acimutal~~ altacimutal

$$\left. \begin{array}{l} 42^s = 630'' = 10' 30'' \\ 16^m = 240' = 4^\circ \\ 8^h = 120^\circ \end{array} \right\} H = 124^\circ 10' 30''$$





$XZ = 90^\circ - h$ $\quad PZX = 360^\circ - A$

$PZ = 90^\circ - \phi$ $\quad ZPX = H$

$PX = 90^\circ - \delta$ $\quad PXZ = ?$ → no hace falta pero lo calculamos

① $\dfrac{\text{sen } PZX}{\text{sen } PX} = \dfrac{\text{sen } ZPX}{\text{sen } ZX}$; $\dfrac{\text{sen}(360^\circ - A)}{\text{sen}(90^\circ - \delta)} = \dfrac{\text{sen } H}{\text{sen}(90^\circ - h)} = \dfrac{\text{sen } H}{\cos h}$

② $\cos XZ = \cos PZ \cos PX + \text{sen } PZ \text{ sen } PX \cos ZPX$;

; $\text{sen } h \simeq 0{,}3758$; $h = \left\{ \begin{array}{l} 22^\circ\ 4'\ 33{,}58'' \\ \times \rightarrow h \in (-90^\circ, 90^\circ) \end{array} \right.$

① $\operatorname{sen} A = -0{,}6598$; $A = \begin{cases} 221^\circ\ 17'\ 5{,}28'' \\ 318^\circ\ 42'\ 54{,}72'' \to \text{este según el dibujo} \end{cases}$

③ $\cos PZ = \cos PX \cos ZX + \operatorname{sen} PX \operatorname{sen} ZX \cos PXZ$;

; $\cos PXZ = 0{,}8948$; $PXZ = \begin{cases} 26^\circ\ 30'\ 44{,}16'' \xrightarrow{④} \checkmark \\ 333^\circ\ 29'\ 15{,}84'' \end{cases}$

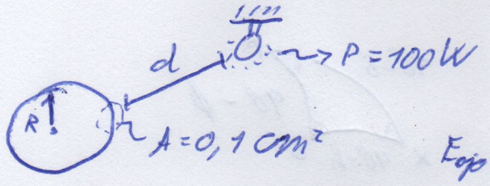
④ $\cos PZX = -\cos PXZ \cos ZPX + \operatorname{sen} PXZ \operatorname{sen} ZPX \cos PX$;

; $\cos A = \begin{cases} 0{,}2539 \ ; \ A = \begin{cases} 75^\circ\ 17'\ 37{,}62'' \\ 284^\circ\ 42'\ 22{,}38'' \end{cases} \\ 0{,}7514 \ ; \ A = \begin{cases} 41^\circ\ 17'\ 5{,}28'' \\ 318^\circ\ 42'\ 54{,}72'' \xrightarrow{①} \checkmark \end{cases} \end{cases}$

$A = 318^\circ\ 42'\ 54{,}72''$ $\qquad h = 22^\circ\ 4'\ 33{,}58''$

2. Ojos ≡ cuerpo negro ; $T = 37^\circ = 310\,K$

$d = 1\,m \qquad R = 1{,}5\,cm$



Energía del ojo:

$E_{ojo} = U_{int} = \frac{4\sigma_s}{c} V T^4 = 9{,}87 \cdot 10^{-11}\,J$

$V = \frac{4\pi}{3} R^3$ $\qquad$ Luminosidad $\to L = P$

Cuando miramos la bombilla:

$F = \frac{P}{4\pi d^2}$ $\qquad t = \frac{2R}{c}$ ≡ tiempo del fotón dentro del ojo

$E_B = F \cdot A \cdot t = \frac{P}{4\pi d^2} A \cdot \frac{2R}{c} = 7{,}96 \cdot 10^{-15}\,J$

$f = \frac{E_{ojo}}{E_B} = 1{,}24 \cdot 10^4$ $\qquad T = 310\,K \to \lambda_{max} = 9355\,nm$

Aunque la energía de los fotones que crea el ojo es mucho mayor que la de los fotones de la bombilla, como el espectro del ojo (cuerpo negro) está fuera del visible prácticamente, al cerrar los ojos no vemos nada.

3.

$$\left.\begin{matrix} m_U = 8{,}15 \\ m_B = 8{,}50 \end{matrix}\right] \; (m_U - m_B)_0 = -0{,}45$$

$$\left.\begin{matrix} m_B = 8{,}50 \\ m_V = 8{,}14 \end{matrix}\right] \; E(m_B - m_V) = \frac{72}{100} E(m_U - m_B)$$

$$R = 2{,}3\, R_\odot \qquad M_b = -0{,}25 \qquad CB = -0{,}15$$

$$R_V = \frac{A_V}{E(m_B - m_V)} = 3{,}2$$

$$E(m_1 - m_2) = (m_1 - m_2) - (m_1 - m_2)_0$$

a) $(m_B - m_V)_0 = (m_B - m_V) - \frac{72}{100} E(m_U - m_B) = 0{,}288$

$$(m_U - m_V)_0 = (m_U - m_B)_0 + (m_B - m_V)_0 = -0{,}162$$

$$E(m_B - m_V)_0 = 0{,}072 \rightarrow A_V = 0{,}230$$

$$\begin{cases} m_V - m_{V,0} = A_V \; ; \; m_{V,0} \simeq 7{,}910 \\ (m_B - m_V)_0 = 0{,}288 \; ; \; m_{B,0} \simeq 8{,}198 \\ (m_U - m_V)_0 = -0{,}162 \; ; \; m_{U,0} \simeq 7{,}748 \end{cases}$$

La magnitud de U baja más que la de V en ausencia de extinción, lo cual concuerda con que la extinción es mayor para longitudes de onda menores.

b) Tomando los datos $M_{b,\odot}$, $L_\odot$, $T_\odot$

$$M_b - M_{b,\odot} = -2{,}5 \lg_{10}\left(\frac{L}{L_\odot}\right) ; \; L = 99{,}08 L_\odot$$

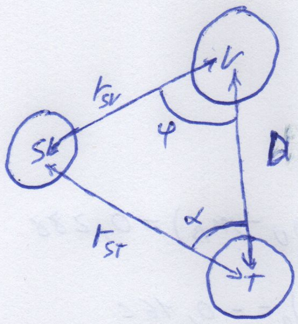
$$L = 4\pi R^2 \sigma_s T_{ef}^4 ; \; T_{ef}^4 = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma_s} \frac{99{,}08}{(2{,}3)^2} = 18{,}73 T_\odot^4 ;$$

$$; \; T_{ef} = 2{,}08 \, T_\odot \simeq 12018 \, K$$

c) $CB = m_b - m_{V,0}$; $m_b = 7{,}760$

$$m_b - M_b = 5 \lg_{10} d - 5 ; \; d = 399{,}94 \, pc$$

4.



$r_{SV} = 0{,}723$ AU

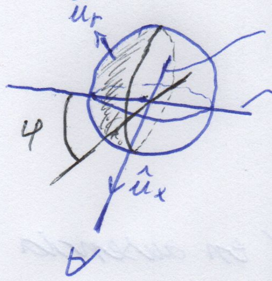
$r_{ST} = 1$ AU

$\widehat{STV} = \alpha$

$R_V \equiv$ radio de Venus

Órbitas circulares

La porción iluminada de Venus que se ve desde la Tierra:



eje que une los centros de Venus y la Tierra

eje que une los centros de Venus y el Sol

$\varphi \equiv$ ángulo del límite de la sombra con el eje x. Sin pérdida de generalidad $\varphi \in [0, \pi]$

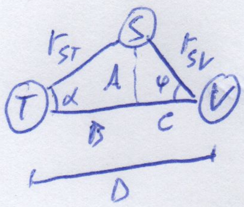
Gráficamente tenemos que la superficie que se ve iluminada es:

$$S_V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2-\varphi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \; \hat{u}_r \, \hat{u}_x \, \text{sen}\,\theta \, R_V^2 =$$

$$= R_V^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2-\varphi} d\phi \cos\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, \text{sen}^2\theta = R_V^2 \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \right) = \frac{\pi}{2} R_V^2 \left(\cos\varphi + 1 \right)$$

Debemos escribir $\cos\varphi$ en término de los datos



$$\left.\begin{array}{l} A = r_{SV} \, \text{sen}\,\varphi \\ C = r_{SV} \cos\varphi \\ B = D - C \end{array}\right] \rightarrow r_{ST}^2 = A^2 + B^2 = r_{SV}^2 + D^2 - 2 D r_{SV} \cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{r_{SV}^2 - r_{ST}^2 + D^2}{2 D r_{SV}} \\ F_V = \dfrac{L_V(D)}{4\pi D^2}, \; L_V(D) \propto S_V \end{array}\right] \rightarrow F_V \propto \frac{R_V^2}{8} \cdot \frac{2 D r_{SV} + r_{SV}^2 - r_{ST}^2 + D^2}{2 D^3 r_{SV}}$$

Buscamos el máximo:

$$\frac{dF_V}{dD} = 0; \quad \frac{(2 r_{SV} + 2D)\, 2 D^{3} r_{SV} - (2 D r_{SV} + r_{SV}^2 - r_{ST}^2 + D^2)\, 3 \cdot 2 D^2 r_{SV}}{D^6} = 0;$$

$$; \; 2(r_{SV} + D) D - 3(2 D r_{SV} + r_{SV}^2 - r_{ST}^2 + D^2) = 0 \; ;$$

$$; \; -D^2 - 4 r_{SV} D - 3(r_{SV}^2 - r_{ST}^2) = 0 \; ; \; D^2 + 4 r_{SV} D + 3(r_{SV}^2 - r_{ST}^2) = 0;$$

$$; \; D = \frac{-4 r_{SV} \pm \sqrt{16 r_{SV}^2 + 4(r_{ST}^2 - r_{SV}^2)}}{2} \xrightarrow{D > 0} (+)$$

LANCÔME

IDÔLE

POWER

SER TÚ MISMA ES TU PODER

DESCÚBRELO

$$D = -2r_{SV} + \sqrt{4r_{SV}^2 + 3(r_{ST}^2 - r_{SV}^2)} \simeq 4{,}31 \cdot 10^{-1}\ AU$$

$$\cos\varphi \simeq -0{,}468\ ;\ \varphi \simeq 117{,}90^\circ$$

$$\frac{r_{SV}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r_{ST}}{\operatorname{sen}\varphi}\ ;\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{r_{SV}}{r_{ST}}\operatorname{sen}\varphi\ ;\ \alpha \simeq 39{,}71^\circ$$

Porcentaje iluminado de la superficie:

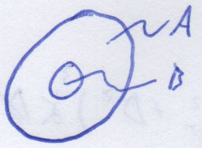
$$f = \frac{S_V}{\pi R_V^2} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) = 26{,}6\ \%$$

5. $\begin{cases} A \to T_A = 9200\,K\ ,\ R_A = 4{,}13\,R_\odot \\ B \to T_B = 4500\,K,\ R_B = 3\,R_\odot\ ,\ P = 2{,}87 \text{ días} \end{cases}$

Tiempo eclipse principal $\to t_e = 10h$

a) $L_T = L_A + L_B = 4\pi\sigma\,(R_A^2 T_A^4 + R_B^2 T_B^4) = 4{,}34 \cdot 10^{28}\ W$

- Eclipse principal (B tapa A)



Se deja de ver la luminosidad de A en una superficie como la de B

$$L^{(P)} = 4\pi\sigma\, R_B^2 T_A^4 = 2{,}23 \cdot 10^{28}\ W$$

$$\text{Disminución} \to f = \frac{L^{(P)}}{L_T} = \frac{R_B^2 T_A^4}{R_B^2 T_B^4 + R_A^2 T_A^4} = 51{,}38\ \%$$

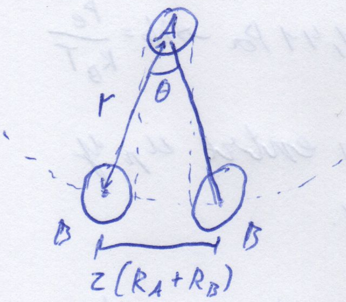
- Eclipse secundario (A tapa B)

Se deja de ver la luminosidad de B

$$L^{(P)} = 4\pi\sigma\, R_B^2 T_B^4 = 1{,}27 \cdot 10^{27}\ W$$

$$\text{Disminución} \to f = \frac{L^{(P)}}{L_T} = \frac{R_B^2 T_B^4}{R_B^2 T_B^4 + R_A^2 T_A^4} = 2{,}93\ \%$$

b) A está en el centro de masas ($M_A >> M_B$)



$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2,53\cdot10^{-5}$ rad/s

Ángulo que ocupa el eclipse:

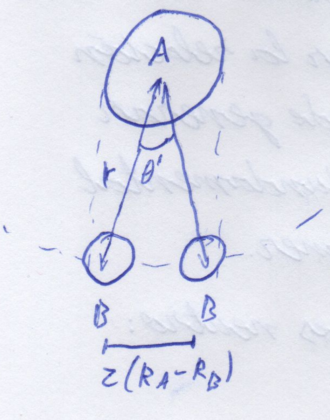
$\theta = \omega t_e = 0,91$ rad

Distancia entre los centros:

$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{R_A+R_B}{r}$; $r = 1,05\cdot 10^{10}$ m

Velocidad → $v = \omega\cdot r = 2,66\cdot10^{5}$ m/s

Para calcular el tiempo en el que la luminosidad es mínima calculamos el ángulo en el que B está ocultado por A.



$\text{sen}\frac{\theta'}{2} = \frac{R_A-R_B}{r}$; $\theta' = 0,1499$ rad

$t = \frac{\theta'}{\omega} = 5926,7$ s $= 1$h 38min $46,7$ s

6. $\frac{X_{Ca}}{X_H} = 2,2 \cdot 10^{-6}$ $T_{\odot} = 5780\,K$

$\lg_{10} P_e = 1,5\ dyn/cm^2 = 0,15\ Pa \longrightarrow P_e = 1,41\ Pa \longrightarrow N_e = \frac{P_e}{k_B T}$

$\left.\begin{array}{l} u_p(Ca\,I) = 1,32 \\ u_p(Ca\,II) = 2,30 \end{array}\right]$ suponemos relación entre u_p y la degeneración g.

$E_I^{Ca} = 6,11\,eV = E_i(Ca\,I)$ $E_{II}^{Ca} = E_i(Ca\,II) = 11,87\,eV$

La línea K se forma al pasar del estado básico de Ca II ($g_1^{Ca} = 2$) a un estado excitado a 3,15 eV ($g_2^{Ca} = 4$)

$H \left\{ \begin{array}{l} E_n^H = \frac{-13,6}{n^2}\,eV \\ g_n^H = 2n^2 \end{array} \right. \Bigg| \begin{array}{ll} E_1^H = -13,6\,eV & g_1^H = 2 \\ E_2^H = -3,4\,eV & g_2^H = 8 \end{array}$

Para ver la relación entre la intensidad de la línea K y las de Bálmer debemos calcular la relación entre el número de átomos que puede generar cada una de ellas; Ca I en estado fundamental para el K, y H en $n=2$ para Bálmer.

Empezamos con el H que suponemos neutro:

$$\left.\frac{N_2}{N_1}\right|_H = \frac{g_2^H}{g_1^H} e^{-\frac{(E_2^H - E_1^H)}{k_B T}} = 5,10 \cdot 10^{-9} \sim \text{muy pocos en } n=2$$

La proporción de Ca ionizado será:

$$\left.\frac{N_{II}}{N_I}\right|_{Ca} = \frac{2}{N_e}\,\frac{u_1(CaII)}{u_1(CaI)}\cdot\frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3}\,e^{-E_I^{Ca}/k_BT} = 991,24$$

Y la cantidad de Ca que también está excitado:

$$\left.\frac{N_{II}^{exc}}{N_{II}}\right|_{Ca} = \frac{g_2^{Ca}}{g_1^{Ca}}\,e^{-\frac{3,15\,eV}{k_BT}} = 3,58\cdot 10^{-3}$$

La mayor parte del Ca está ionizado, pero muy pocos están excitados → habrá menos incluso 2 veces ionizado (lo despreciamos).

Ahora debemos relacionar las cantidades con el total de cada elemento (suponemos que no hay en niveles superiores):

$$\left.\frac{N_{II}}{N_T}\right|_{Ca} = \frac{N_I}{N_I+N_{II}+N_{II}^{exc}}\cdot\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{1}{1+\left.\frac{N_{II}}{N_I}\right|_{Ca}\left(1+\frac{N_{II}^{exc}}{N_{II}}\right)}\left.\frac{N_{II}}{N_I}\right|_{Ca} \simeq 0,995$$

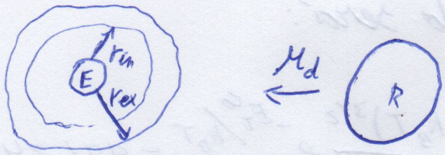
$$\left.\frac{N_2}{N_1}\right|_H = \frac{1}{1+\left.\frac{N_2}{N_1}\right|_H}\left.\frac{N_2}{N_1}\right|_H \simeq 5,1\cdot 10^{-9}$$

$$\left.\begin{aligned} N_T|_H &= \frac{N_2|_H}{5,1\cdot 10^{-9}} \\ N_T|_{Ca} &= \frac{N_{II}|_{Ca}}{0,995} \end{aligned}\right] \; N_T|_{Ca} = \frac{X_{Ca}}{X_H}\,N_T|_H \;;\; \frac{N_{II}|_{Ca}}{N_2|_H} =$$

$$= 2,2\cdot 10^{-6}\cdot\frac{0,995}{5,1\cdot 10^{-9}} \simeq 429,4$$

La línea K es 429 veces más intensa.

7.



Disco $\rightarrow L_d = 1{,}16\, L_\odot$

$2E_c = -E_p$

$M_E = 1{,}2\, M_\odot \qquad r_{in} = 0{,}14\, R_\odot \qquad r_{ex} = 1\, R_\odot$

a) Consideramos un disco plano y de masa uniforme (de lo contrario L_d no sería constante).

$$\Delta E_p = -G M_E M_d \left(\frac{1}{r_{ex}} - \frac{1}{r_{in}}\right) = -2\Delta E_c$$

$$\Delta E_T = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{1}{2} G M_E M_d \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{ex}}\right)$$

$$L_d = \frac{\Delta E_T}{t} = \frac{1}{2} G \frac{M_E M_d}{t} \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{ex}}\right) ;$$

$$; \frac{M_d}{t} = \frac{2 L_d}{G M_E \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{ex}}\right)} = 6{,}32 \cdot 10^{14}\ kg/s$$

$$\frac{M_d}{1\ \text{año}} = 6{,}32 \cdot 10^{14}\ \frac{kg}{s} \cdot \frac{\pi \cdot 10^7\ s}{1\ \text{año}} = 1{,}99 \cdot 10^{22}\ kg/\text{año}$$

b) Luminosidad = Superficie × Flujo , $F = \sigma_s T_{ef}^4$

$$L = \underbrace{2}_{\text{las dos caras del disco}} \pi (r_{ext}^2 - r_{in}^2)\, \sigma_s T_{ef}^4 \ ; \ T_{ef} = 7157{,}5\ K$$

8. $m_v = 0{,}71$ $M_v = 0{,}14$ $g = 700\ cm/s^2 = 7\ m/s^2$

$F_{bol} = 1{,}5 \cdot 10^{-12}\ J/cm^2 s = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\ J/m^2 s$ ~ desde la Tierra

$T_{ef} = 5300\ K$

a) $m_v - M_v = 5 \lg_{10} d - 5$; $d = 13\ pc$

$L_{bol}(d) = 4\pi d^2 F_{bol}(d) = 3{,}03 \cdot 10^{28}\ W = 79{,}25\ L_\odot$

b) Ley de Wien:

$\lambda_{máx} \cdot T_{ef} = (0{,}29\ cm)K$; $\lambda_{máx} = 547{,}2\ nm \in$ visible

c) $L_{bol} = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$; $R^2 = \frac{L_{bol}}{4\pi\sigma T_{ef}^4}$; $R = 7{,}34 \cdot 10^9\ m$;

; $R = 10{,}55\ R_\odot$

$g = G\frac{M}{R^2}$; $M = \frac{gR^2}{G} = 5{,}65 \cdot 10^{30}\ kg = 2{,}84\ M_\odot$

Viendo el diagrama HR, para nuestra T, L y R, la estrella pertenece a las gigantes amarillas.