

# O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT E INVARIANTES DE DEHN

---

*X Bienal de Matemática*

---

SÉRGIO MACIEL

JUNHO DE 2022



# SUMÁRIO

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>1 Congruência por Tesoura e o Terceiro Problema de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1 Dissecções de Poliedros e Congruência por Tesoura . . . . .	1
1.2 Dissecções por planos . . . . .	2
<b>2 Invariantes de Dehn</b>	<b>5</b>
2.1 Invariantes de Dehn e Congruência por Tesoura . . . . .	5
2.2 Usando o Invariante de Dehn para Resolver o Terceiro Problema de Hilbert . . . . .	8
<b>3 Além do Terceiro Problema de Hilbert</b>	<b>11</b>
3.1 Generalizações do problema e relações com outras áreas da ma- temática . . . . .	11
<b>Apêndices</b>	
<b>A <math>\arccos(1/3)</math> não é múltiplo racional de <math>\pi</math></b>	<b>15</b>
<b>Referências</b>	<b>17</b>



# PREFÁCIO

Durante o *Congresso Internacional de Matemáticos* de 1900, em Paris, David Hilbert apresentou uma lista contendo 23 problemas que ele considerava as questões em aberto mais importantes para a matemática na época. Um dos poucos problemas da lista que hoje estão solucionados é o terceiro. *O Terceiro Problema de Hilbert*, que trata de algumas características de poliedros, pode ser enunciado da seguinte forma.

*Conjectura 0.1.* Dados quaisquer dois poliedros de mesmo volume, é sempre possível dividir o primeiro deles em poliedros menores e rearranjar os pedaços para formar o segundo poliedro?

A pergunta análoga para duas dimensões já tinha uma resposta conhecida. Sabia-se que dois polígonos têm a mesma área, é possível dividir um deles em polígonos menores e rearranjá-los para formar o outro polígono. Não apenas isso, mas o *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien* (como ficou conhecido o resultado) nos dá um algoritmo para fazê-lo. Com um resultado tão forte para duas dimensões, é natural que procuremos uma resposta para o caso tridimensional.

Em 1902, apenas dois anos depois que Hilbert apresenta sua lista de problemas, Max Dehn, seu antigo aluno, apresenta uma resposta para a pergunta levantada. Ele introduz uma maneira de associar certas quantidades aos poliedros. Em particular, cada poliedro está relacionado a um grupo abeliano, denominado o *Invariante de Dehn* desse poliedro. Definiremos o Invariante de Dehn de um poliedro no primeiro capítulo, junto com algumas outras definições que nos permitirão dar um tratamento um pouco mais rigoroso ao problema em questão.

No Segundo Capítulo, trataremos de mostrar que o Invariante de Dehn é

de fato um invariante, posto que essa quantidade coincide para dois poliedros que admitem a decomposição descrita pelo enunciado do Terceiro Problema de Hilbert. Ainda nesse capítulo, calcularemos o Invariante de Dehn de dois poliedros de mesmo volume e usaremos os resultados para obtermos uma resposta negativo ao Terceiro Problema de Hilbert.

Finalmente, no terceiro capítulo, exploraremos algumas generalizações do Terceiro Problema de Hilbert. Em especial, sua versão para o  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  e  $\mathbb{H}^n$ , oonde podemos encontrar algumas perguntas em aberto. Neste mesmo capítulo, destacaremos algumas relações surpreendentes entre a teoria desenvolvida para lidar com o Terceiro Problema de Hilbert Generalizado e outras áreas da matemática, em particular, Teorias de Homologia, Tesselações e K-Teoria.

BELÉM, JUNHO de 2022

Sérgio Henrique Maciel

---

# CONGRUÊNCIA POR TESOURA E O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

## 1.1. DISSECÇÕES DE POLIEDROS E CONGRUÊNCIA POR TESOURA

A pergunta levantada por Hilbert, na forma como enunciamos anteriormente, apesar de ser compreensível, deixa a desejar em precisão matemática. As noções de dividir um poliedro em poliedros menores e reorganizar esses pedaços necessitam de um tratamento um pouco mais rigoroso para que possamos trabalhar matematicamente com essas ideias. Perante essa necessidade, definiremos a seguir alguns conceitos que vão nos permitir enunciar novamente o Terceiro Problema de Hilbert, de forma muito mais precisa e já introduzindo termos que agilizarão o estudo do problema.

A primeira noção que trataremos será a de uma *dissecção de um poliedro*, que representará a ideia de dividir um poliedro em poliedros menores.

**Definição 1.1.** Uma *dissecção* de um poliedro  $P$  é uma coleção finita  $M_P = P_1, P_2, \dots, P_n$  de conjuntos satisfazendo

- $P_1, P_2, \dots, P_n$  são todos poliedros;
- $\cup_{i=1}^n P_i = P$ ;
- Os conjuntos de  $M_P$  têm interiores disjuntos dois à dois.

A primeira condição impõe que os conjuntos da dissecção sejam de fato poliedros, refletindo a ideia de dividir o poliedro  $P$  em subpoliedros. A segunda

propriedade nos diz que de fato esses subpoliedros  $P_1, P_2, \dots, P_n$  estão contidos em  $P$  e não poliedros quaisquer. Enquanto isso, o terceiro item nos diz que dois poliedros da dissecção não se intersectam a menos de vértices, arestas ou faces, não "entrando" um no outro. Isto é, os poliedros de  $M$  de fato dividem  $P$ , no sentido de que eles se encaixam de forma a cobrir todo o poliedro  $P$ , sem falta e sem excesso. Com esta definição em mãos, podemos dar um sentido mais preciso também à ideia de rearranjar os pedaços de um poliedro para formar um outro conjunto.

**Definição 1.2.** Sejam  $P$  e  $Q$  dois poliedros. Dizemos que  $P$  e  $Q$  são *congruentes por tesoura* se existem dissecções  $M_P$  e  $M_Q$  de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, tais que existe uma bijeção  $\rho : M_P \rightarrow M_Q$  de forma que para todo  $L \in M_P$ ,  $L$  é isométrico à  $\rho(L)$ .

Essencialmente, o que essa definição descreve é a existência de uma forma de dividirmos o poliedro  $P$  em poliedros menores (uma dissecção) e após aplicar uma isometria em cada poliedro, isto é, transladá-los e rotacioná-los, cada poliedro está agora na posição e orientação de algum poliedro da dissecção de  $Q$ . Isso descreve de forma precisa nossa intuição sobre o Terceiro Problema de Hilbert.

## 1.2. DISSECÇÕES POR PLANOS

Imediatamente, podemos perceber que existem diversas dissecções possíveis para um mesmo poliedro. Em busca de entender melhor como as dissecções se relacionam com propriedades básicas dos poliedros, voltamos nossa atenção para uma forma simples de criarmos dissecções de um poliedro. Procuraremos alguns padrões observáveis ao dividirmos um poliedro em dois através de um plano. Um plano que passa por um poliedro intersecta algumas das suas arestas, sendo que essa intersecção pode ocorrer de duas formas diferentes, isto é, com o plano e a aresta em duas posições relativas diferentes. Podemos ver as duas situações diferentes abaixo, na Figura 1.

À esquerda, podemos ver a primeira possibilidade, em que a aresta que chamaremos de  $A$  está contida no plano  $\pi$ . Neste caso, notamos que o poliedro



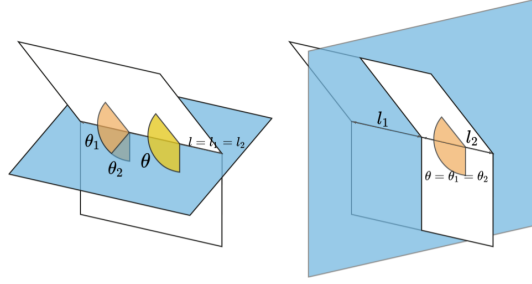


Figura 1.1: Possíveis posições de planos e arestas

pelo qual o plano passa, que denotaremos por  $P$ , é dividido em dois poliedros  $P_1, P_2$ , de forma que cada um compartilha de uma cópia da aresta  $A$ . Em especial, se  $A$  tem comprimento  $l$ , tanto  $P_1$  quanto  $P_2$  terão uma aresta de comprimento  $l$ . Enquanto isso, há um contraste com o que acontece com o ângulo diedral de  $A$ . Vamos utilizar  $\theta$  para representar o ângulo diedral de  $A$ , isto é, o ângulo que fazem entre si as faces que definem  $A$ . Ao contrário do comprimento de  $A$  que, em certo sentido, é preservado durante a divisão,  $\theta$  é separado em dois fatores  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , cada um sendo ângulo diedral de diferentes cópias de  $A$  que pertencem à  $P_1$  e  $P_2$ .

Note que o plano  $\pi$  passa a ser face de  $P_1$  e de  $P_2$ , e o ângulo diedral de  $A$  em  $P_1$  é simplesmente o ângulo que  $\pi$  faz com a face pertencente à  $P_1$  que definia  $A$  em  $P$ , ou seja,  $\theta_1$ . Temos o ângulo análogo  $\theta_2$  de  $P_2$ . Uma observação importante é a de que apesar de que nesse caso os ângulos não serem herdados por  $P_1$  e  $P_2$  é fato que  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , então de certa forma até mesmo informação sobre os ângulos diedrais são transmitidas nesse forma de divisão analisada.

Por outro lado, no segundo caso, em que o plano  $\pi$  atravessa a aresta  $A$  de forma transversal, temos a aresta sendo dividida em dois segmentos  $A_1$  e  $A_2$ , arestas de  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. De fato, contrário ao caso anterior, o ângulo diedral dessa vez é conservado e repassado para  $A_1$  e  $A_2$ , isto é,  $A_1$  e  $A_2$ , arestas em  $P_1$  e  $P_2$  têm ângulos diedrais iguais e coincidentes com  $\theta$ . Analogamente à situação anteriormente analisada, os comprimentos de  $A_1$  e  $A_2$ , denotados por  $l_1$  e  $l_2$ , são tais que  $l = l_1 + l_2$ .

Podemos notar certo padrão nas informações sobre comprimentos e ângulos

no poliedro antes e após a divisão por esse método utilizando um plano. De fato, escrevemos sugestivamente os comprimentos das arestas  $A, A_1$  e  $A_2$  e seus ângulos diedrais em pares de forma a evidenciar uma estrutura algébrica que sugere fortemente uma bilinearidade. No primeiro caso, temos  $(l, \theta) = (l, \theta_1 + \theta + 2) = (l, \theta_1) + (l, \theta_2) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$ , enquanto no segundo caso, ficamos com  $(l, \theta) = (l_1 + l_2, \theta) = (l_1, \theta) + (l_2, \theta) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$ . É com base nessa análise de um caso mais simples que encontraremos a motivação para definir o Invariante de Dehn como um produto tensorial entre módulos sobre  $\mathbb{Z}$ , de modo a manter uma bilinearidade natural.

---

# INVARIANTES DE DEHN

## 2.1. INVARIANTES DE DEHN E CONGRUÊNCIA POR TE-SOURA

Como já comentado anteriormente, a estrutura de bilinearidade parece estar presente de alguma forma na preservação, sob dissecções, dos comprimentos de arestas e ângulos diedrais de um poliedro. É devido a essa observação que traremos a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Seja  $P$  um poliedro de arestas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , em que comprimento de  $A_i$  é  $L_i$  e seu ângulo diedral é  $\theta_i$ . Então definimos o *Invariante de Dehn* de  $P$  como um elemento  $D(P)$  do grupo abeliano  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  dado pelo somatório

$$D(P) = \sum_{i=1}^n l_i \otimes \theta_i$$

Dessa forma, a bilinearidade observada anteriormente aparece de forma natural. Note que cada elemento do somatório que define  $D(P)$  é um tensor em  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ , o que se reforça no momento em que passamos a encarar  $\mathbb{R}$  (visto como um  $\mathbb{Z}$ -módulo) no produto tensorial como um representante dos comprimentos de arestas possíveis de poliedros, enquanto  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  (também como  $\mathbb{Z}$ -módulo) está relacionado aos ângulos diedrais possíveis, identificando ângulos que diferem por meia volta. Essa identificação é arbitrária e poderíamos escolher o módulo  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ou mesmo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Nossa escolha atual se justifica por

simplicações em algumas contas na seção seguinte. Definido o Invariante de Dehn, resta mostrar que ele merece esse nome, que de fato ele é um invariante à algo. Especificamente, vamos mostrar que se dois poliedros são congruentes por tesoura, então eles possuem o mesmo invariante.

**Lema 2.2.** *Seja  $P$  um poliedro e  $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  uma dissecção de  $P$ . Então vale  $D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$ .*

Começamos por notar que as arestas de poliedros de  $M_P$  podem ser classificadas em três tipo levando em conta suas posições em  $P$ .

- I Arestas contidas em arestas de  $P$ ;
- II Arestas contidas em uma face de  $P$ ;
- III Arestas contidas, a menos de possivelmente suas extremidades, no interior de  $P$

Como cada aresta de qualquer poliedro de  $M_P$  se encaixa em exatamente uma das classificações acima, podemos reorganizar a soma  $D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$  como uma soma de três termos  $S_1 + S_2 + S_3$ , em que  $S_1$  corresponde à soma dos tensores das arestas do Tipo I, isto é, se  $A_1, A_2, \dots, A_q$  são todas as arestas do Tipo I, com seus respectivos ângulos diedrais  $\theta_1, \dots, \theta_q$  e comprimentos  $l_1, \dots, l_q$ , então  $S_1 = \sum_{i=1}^q l_i \otimes \theta_i$ . Analogamente,  $S_2$  e  $S_3$  são as somas dos tensores associados a arestas do Tipo 2 e Tipo 3, respectivamente.

Podemos calcular cada soma individualmente. Considere uma aresta  $A$  do Tipo III de algum poliedro de  $M_P$ . Tome o conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  de arestas de poliedros de  $M_P$  que sejam colineares à  $A$  e denote por  $p_1, p_2, \dots, p_m$  os pontos que são extremidades de alguma aresta  $A_i$ . Note que esses pontos determinam uma partição de  $\cup_{i=1}^k A_i$ . Em particular, existe um subconjunto de  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  que determina uma partição de  $A_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Suponha que  $p_1, p_2, \dots, p_m$  estejam ordenados pela sua distância à uma das extremidades de  $\cup_{i=1}^k A_i$  (se não estiver, sempre é possível renomeá-los de forma que estejam), então, chamando de  $s_j$  o segmento cujas extremidades são  $p_j$  e  $p_{j+1}$  (e com abuso de notação,  $s_j$  também representará o comprimento

de  $s_j$ ), se  $s_j \subset \cup_{i=1}^k A_i$ , então  $s_j$  está contido em pelo menos um  $A_i$  e temos um tensor  $l_j \otimes \theta_i$  associado à  $s_j$ , em que  $\theta_i$  é o ângulo diedral de  $A_i$ , como aresta de algum poliedro de  $M_P$ . Mas como  $M_P$  é uma dissecção de  $P$ , todo ponto de  $P$  está contido em algum poliedro da dissecção. Assim, cada  $s_j$  está contido em mais de um poliedro de  $M_P$ . Mais detalhadamente, como cada vizinhança suficientemente pequena de  $s_j$  está contida em  $P$ , existem tantos poliedros de  $M_P$  com arestas contendo  $s_j$  quanto necessários para que hajam ângulos diedrais  $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_t}$  somando  $2\pi$ . Desta forma, temos a soma  $s_j \otimes \theta_{i_1} + s_j \otimes \theta_{i_2} + \dots + s_j \otimes \theta_{i_t} = s_j \otimes (\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_t}) = s_j \otimes 2\pi = 0$ .

Esse argumento mostra que para cada aresta  $A$  do Tipo III, a soma dos tensores associados às arestas de poliedros de  $M_P$  que são colineares com  $A$  (que também são do Tipo III) será nula. Consequentemente,  $S_3$ , a soma associada a arestas do Tipo III será 0. Perceba também que só usamos o fato de que as arestas consideradas eram do Tipo III no fim da argumentação, para concluir que a soma dos ângulos é  $2\pi$ . Pragmaticamente, replicamos o argumento com arestas do Tipo II e teremos  $s_j \otimes \theta_{i_1} + s_j \otimes \theta_{i_2} + \dots + s_j \otimes \theta_{i_t} = s_j \otimes (\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_t}) = s_j \otimes \pi = 0$ . Neste caso o ângulo soma  $\pi$ , e não  $2\pi$ , mas  $\pi$  também é identificado com 0 em  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ . Isso significa que  $S_2 = 0$ .

O mesmo argumento se aplica para arestas do Tipo I, com a diferença que a soma não necessariamente será múltipla inteira de  $\pi$ , mas sim o próprio ângulo diedral da aresta de  $P$  que contém  $s_j$ . Dado que  $A_P = \cup_{i=1}^k A_i$  é aresta de  $P$ ,  $\theta$  é o ângulo diedral de  $A_P$  e  $l$  seu comprimento, então  $s_j \otimes \theta_{i_1} + s_j \otimes \theta_{i_2} + \dots + s_j \otimes \theta_{i_t} = s_j \otimes \theta$ . Ao somar ao longo de  $j$ , como  $\cup_{j=1}^{m-1} s_j = A_P$ , teremos  $\sum_{j=1}^{m-1} s_j \otimes \theta = l \otimes \theta$ , que é o tensor associado à uma aresta de  $P$ .

Ao considerar essa mesma construção para todas as arestas do Tipo I, teremos a soma de todos os tensores associados a arestas de  $P$ , o que é o próprio Invariante de Dehn de  $P$ . Ou seja,  $S_1 = D(P)$  e temos  $D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n) = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 = D(P)$ , como queríamos mostrar.

**Teorema 2.3.** *Se  $P$  e  $Q$  são Congruentes por Tesoura, então  $D(P) = D(Q)$ .*

Sejam  $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  e  $M_Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  dissecções de  $P$  e  $Q$  que admitem uma bijeção  $\rho : M_P \rightarrow M_Q$  com a propriedade de que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\rho(P_i)$  é isométrico à  $P_i$ . Como isometrias preservam

ângulos e comprimentos,  $D(P_i) = D(\rho(P_i))$ , uma vez que o Invariante de Dehn é definido apenas em termos de distâncias e ângulos. Mas como  $\rho$  é bijeção, cada poliedro em  $M_Q$  é imagem de um único poliedro em  $M_P$  e temos  $D(Q) = D(P_1) + \dots + D(P_n) = D(\rho(P_1)) + \dots + D(\rho(P_n)) = D(Q_1) + \dots + D(Q_n) = D(Q)$ , pelo lema anterior.

## 2.2. USANDO O INVARIANTE DE DEHN PARA RESOLVER O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

Se tomarmos a contrapositiva do Teorema 2.3, então sabemos que se existirem dois poliedros de mesmo volume com Invariantes de Dehn distintos, então eles não são congruentes por tesoura, o que nos daria uma resposta negativa ao terceiro problema de Hilbert. O que faremos agora será calcular o Invariante de Dehn de dois poliedros de volume unitário, a saber, o cubo e o tetraedro regular. Veremos que eles apresentam invariantes de Dehn diferentes e logo não são congruentes por tesoura.

O Invariante de Dehn do Cubo Unitário é simples de ser calculado. O cubo de volume 1 possui 12 arestas, cada uma de comprimento unitário e ângulo diedral  $\pi/2$ . Então  $D(\text{Cubo}) = 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 1 \otimes \frac{12\pi}{2} = 1 \otimes 6\pi = 0$ . Já o Invariante de Dehn do tetraedro regular de volume unitário será um pouco mais trabalhoso.

Primeiro, o volume do tetraedro regular pode ser calculado, em termos do comprimento de suas arestas, por  $V = \frac{l^3}{6\sqrt{2}}$ . Assim, para que  $V = 1$ , é necessário que o lado do tetraedro tenha comprimento  $l = 6^{1/3}2^{1/6}$ . Agora, precisamos do ângulo diedral de cada aresta, que também pode ser calculado com um pouco de geometria e obtem-se  $\theta = \arccos(1/3)$ . Como o tetraedro regular tem 6 arestas, concluímos que  $D(\text{Tetraedro}) = 6 \cdot (6^{1/3}2^{1/6}) \otimes \arccos(1/3) = 6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3)$ . O grande problema é que não é óbvio se esse tensor é nulo ou não.

Veja que podemos fatorar tensores em  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  por racionais, isto é,  $a \otimes b = (\frac{p}{q}) \cdot a \otimes (b\frac{q}{p}) = \frac{ap}{q} \otimes \frac{bq}{p}$ . Isso acontece pois o  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  são tratados como  $\mathbb{Z}$ -*mdulos* ao fazer o produto tensorial. Logo,  $6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3) = 0$

é equivalente a dizer que  $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$ , para algum par de inteiros  $p, q$ . Basta, então, descobrirmos se  $\arccos(1/3)$  é múltiplo racional de  $\pi$ .

Acontece que não,  $\arccos(1/3)$  não é múltiplo racional de  $\pi$ . Não demonstraremos isso no momento, em vez disso, a prova se encontra no apêndice, uma vez que verificar este fato não é nosso foco atual, mas sim usá-lo para obtermos conclusões. Finalmente, isso mostra que  $D(\text{Tetraedro})$  não é nulo, então o tetraedro regular de volume 1 e o cubo unitário não são congruentes por tesoura. Ou seja, encontramos dois exemplos que mostram que o Terceiro Problema de Hilbert tem resposta negativa.





---

# ALÉM DO TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

## 3.1. GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA E RELAÇÕES COM OUTRAS ÁREAS DA MATEMÁTICA

O Teorema 2.3 nos diz que o Invariante de Dehn age como um indicador necessário para que dois poliedros sejam congruentes por tesoura. Mais além, em 1966, SYDLER mostra que o Invariante de Dehn e o Volume de um poliedro formam um conjunto completo de Invariantes para a congruência por tesoura, isto é, vale o seguinte teorema.

**Teorema 3.1** (Sydler-Dehn). *Sejam  $P$  e  $Q$  dois poliedros. Então  $P$  e  $Q$  são congruentes por tesoura se, e somente se,  $D(P) = D(Q)$  e  $Vol(P) = Vol(Q)$ .*

Através dos Invariantes de Dehn, podemos resolver o Terceiro Problema de Hilbert em sua forma clássica, mas podemos fazer a pergunta análoga para casos com mais dimensões, assim como o próprio terceiro problema de Hilbert é o análogo do caso bidimensional, em que lidamos com polígonos. Assim, questionamos quais são as condições necessárias para que dois  $n$ -polítopos de mesmo  $n$ -volume sejam congruentes por tesoura (adaptando as definições de dissecção e congruência por tesoura).

DUPONT e SAH consideram o grupo livre gerado por polítopos isométricos e mostram que existem sequências exatas de morfismos entre certas homologias de subgrupos do grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^n$ , grupos de polítopos e o produto tensorial onde mora o Invariante de Dehn. A grande novidade vem quando eles

provam que a trivialidade de um dos grupos da sequência implica no teorema generalizado de Dehn-Sydler, isto é, que o morfismo  $D : P(\mathbb{R}^n)/\mathcal{L}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  que associa cada classe de poliedros gerados por prismas seu Invariante de Dehn é um monomorfismo.

Com essa reinterpretação do Invariante de Dehn e o auxílio de ferramentas homológicas, DUPONT e SAH ainda conseguem generalizar o Teorema de Dehn-Sydler para  $\mathbb{H}^2$  e  $S^2$ , os espaços hiperbólicos e esféricos, respectivamente. Eles ainda conseguem demonstrar o Teorema 2.3 para  $\mathbb{H}^3$  e  $S^3$ , mas note que o que foi provado para esses espaços foi que se dois poliedros são congruentes por tesoura, então seus Invariantes de Dehn (ou sua coleção de Invariantes de Dehn generalizados, algumas vezes chamados na literatura de *Invariantes de Hadwiger*) coincidem.

Ainda é um problema em aberto se a recíproca vale, isto é, se dois poliedros em  $\mathbb{H}^3$  e  $S^3$  que têm o mesmo Invariante de Dehn necessariamente são congruentes por tesoura. Esse problema é de notável interesse pois nos permite concluir se o Invariante de Dehn caracteriza cada classe de equivalência na congruência por tesoura, ou seja, se ele é uma ferramenta de classificação dessas classes.

Podemos notar também a relação da teoria desenvolvida sobre o Terceiro Problema de Hilbert com a K-Teoria. Em particular, existem sequências exatas curtas relacionando certas K-Teorias com poliedros em  $\mathbb{H}^3$ . Além disso, cada classe de poliedros isométricos (tanto em  $\mathbb{R}^n$  quanto em  $S^n$  ou  $\mathbb{H}^n$ ) pode ser visto como uma K-Teoria de uma certa categoria.

Uma última aparição dos Invariantes de Dehn que merece ser citada é através de um teorema mostrado por DEBRUNNER em 1980 de que qualquer poliedro que tessela o espaço periodicamente (em uma tesselação que só contém ele mesmo), necessariamente tem Invariante de Dehn nulo. Mais tarde, em 95, LAGARIAS e MOEWS estendem o resultado para  $\mathbb{R}^n$ . Note que essencialmente, o que o teorema diz é que se todo poliedro que tessela  $\mathbb{R}^n$  é congruente por tesoura a um  $n$ -cubo.

# APÊNDICES



---

# arccos(1/3) NÃO É MULTÍPLO RACIONAL DE $\pi$

Seja  $x = \arccos(1/3)$ , então  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Suponha que  $x = \frac{p}{q}\pi$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$ , então  $\cos(qx) = \cos(p\pi) = \pm 1$ . Podemos usar os *Polinômios de Chebyshev* para obtermos expressões gerais de  $\cos(nx)$ . Especificamente,  $\pm 1 = \cos(qx) = T_q(\cos x)$ .

Agora utilizamos o fato de que o coeficiente do termo de maior grau de  $T_q$  é  $2^{q-1}$ . Então  $\pm 1 = T_q(\cos x) = 2^{q-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q + P\left(\frac{1}{3}\right)$ , em que  $P$  é algum polinômio de grau menor que  $q-1$ . Ao multiplicarmos ambos os lados por  $3^q$ , temos  $\pm 3 = 2^{q-1} + 3 \cdot P(1/3)$ . Reduzindo essa igualdade mod 3, teremos  $0 = 2^{q-1} \pmod{3}$ , um absurdo. Logo, não existem inteiros  $p, q$  tais que  $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$ .



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DUPONT, J. L. (1982). *Algebra of Polytopes and Homology of Flag Complexes* Osaka Journal of Math.
- [2] DUPONT, J. L. e SAH, C. H. (1990). *Homology of Euclidean groups of motion made discrete and Euclidean scissors congruence* Acta Math.
- [3] SAH, C. H. (1979). *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence* Pitman Advanced Publishing Program
- [4] LAGARIAS, J. C., MOEWSS, D. (1995). *Polytopes that Fill  $\mathbb{R}^n$  and Scissors Congruence*. Discrete Computational Geometry.
- [5] SYDLER, J. P. (1965). *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*. Commentarii Mathematici Helvetici.
- [6] ZAKHAREVICH, I. (2012). *Scissors Congruence as K-Theory*. Homology, Homotopy and Applications.

