

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT30

INTRODUCCION A LA FISICA DE AGUJEROS NEGROS

A BREAK COURSE ON BLACK HOLE PHYSICS

Supervisor: DIEGO RUBIERA GARCIA

Sergio Moreno Colastra

Grado en Física

Curso académico 2020-2021

Convocatoria 1

SOMBRA, FOTOESFERA Y LENTES GRAVITACIONALES EN AGUJEROS NEGROS

Resumen:

Los agujeros negros son capaces de desviar fuertemente los rayos de luz que pasan cerca de ellos. Este fenómeno abre la posibilidad de su detección, pudiendo analizar uno de los objetos más apropiados para poner a prueba la Relatividad General en un régimen de campo fuerte. En dicho contexto este trabajo va a consistir en el estudio de los aspectos teóricos más importantes del comportamiento geodésico en torno a agujeros negros. Consideramos el caso de Schwarzschild para el cálculo de órbitas, donde la existencia de curvas críticas permite a los fotones llevar a cabo un número arbitrario de vueltas, lo que se traduce en la aparición de una sombra y una serie de anillos de luz. Se ilustra también los aspectos más generales de lentes gravitacionales, donde la formación de infinitas imágenes relativistas se examina a través de la relación entre la geometría del sistema y la posición de las imágenes en el cielo del observador que nos da la ecuación de lentes. Se exponen estos fenómenos para el caso de agujeros negros de Kerr, donde el efecto de arrastre debido al espín modifica tanto la sombra como las imágenes. Por último se analiza la imagen obtenida por el EHT así como la influencia de la emisión de los discos de acreción en la sombra y los anillos de luz, a la vez que se trata las perspectivas de observación y la información que se puede extraer de ellas.

Abstract:

Black holes are able to strongly deflect light rays that pass near them. This phenomenon opens the possibility of its detection, being able to analyze one of the most appropriate objects to test General Relativity in the strong field regime. In such a context, the aim of this work is to study the most important theoretical aspects of geodesic behavior around black holes. We consider the Schwarzschild case for the calculation of orbits, where the existence of critical curves allows photons to carry out an arbitrary number of orbits, which results in the appearance of a shadow and a series of light rings. The more general aspects of gravitational lenses are also illustrated, where the formation of infinite sequences of relativistic images is examined through the relationship between the geometry of the system and the position of the images in the sky of the observer, as given by the lens equation. These phenomena are presented in the case of Kerr's black holes, where the dragging effect due to spin modifies both the shadow and the images. Finally, the image obtained by the EHT is analyzed as well as the influence of the emission of the accretion disks in the shadow and the light rings, while the observational perspectives and the information that can be extracted from them are also discussed.

1. INTRODUCCIÓN

Los agujeros negros (BH) son una de las predicciones más sorprendentes de la Relatividad General (RG), apareciendo como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

las cuales muestran cómo las distribuciones de materia curvan el espacio-tiempo. Así, un cuerpo de masa M generará un cierto campo gravitatorio que vendrá descrito por una cierta métrica. Si esta masa es lo suficientemente elevada y está lo suficientemente concentrada generará una región donde ni la luz podrá escapar del pozo gravitatorio, dando lugar a un BH. Esto presenta un problema para su detección, pues al no emitir radiación electromagnética (sin tener en cuenta la radiación de Hawking) solo podemos localizarlos a través de los efectos que producen sobre el exterior. Estudiar el comportamiento de la luz alrededor de los agujeros negros es una herramienta muy útil si queremos inferir propiedades de ellos.

Los fotones siguen trayectorias geodésicas nulas de forma que si un fotón pasa cerca de un cuerpo masivo como un BH, va a sufrir desviaciones con respecto a su trayectoria original. Si la distancia mínima entre el fotón y el BH es mucho más grande que el radio de Schwarzschild, una aproximación de campo débil es suficiente para describir dicha desviación. No obstante, gracias a la existencia de objetos compactos como los BH, los fotones van a poder pasar lo bastante cerca de estos como para sufrir grandes desviaciones, pudiendo realizar incluso una o más vueltas antes de llegar al observador. Esto da lugar a la formación de imágenes relativistas de las cuales se pueden extraer propiedades de los BH (spin y masa) y poner a prueba la RG en un régimen de campo fuerte. Además, las propiedades de estas imágenes nos van a permitir testear posibles teorías alternativas de la gravedad. Las LMXB (*low-mass X-ray binary*, binarias de rayos X) que rodean a Sgr A* (se considera que es el agujero negro supermasivo del centro nuestra galaxia) pueden proporcionar una población ideal que dé lugar a imágenes relativistas cuando se mejore la resolución con interferometría de Rayos X [1].

La desviación geodésica también da lugar a la aparición de la fotosfera, última órbita inestable de los fotones alrededor de un objeto compacto, y la sombra, delimitada por la fotosfera. Estudiar estas zonas supone analizar una de las zonas más cercanas al horizonte de eventos desde la cual rescatar información vista por un observador asintótico, siendo vital para aprender sobre las propiedades de los BH. Gracias al progreso en métodos interferométricos, el EHT [2, 3, 4, 5, 6, 7] ha conseguido fotografiar por primera vez la sombra del objeto compacto del centro de la galaxia M87 con tamaños angulares similares a los que tendría un agujero negro supermasivo. Con este tipo de imágenes es posible no solo extraer propiedades de la propia sombra y ver si casan con las que tendría un BH, sino también comparar con la sombra que pudieran producir otros objetos compactos.

El objetivo de este trabajo es revisar los aspectos teóricos más importantes de este desvío gravitacional (*bending light*) generado por los BH. Para ello calcularemos las ecuaciones geodésicas, y veremos cómo los máximos del potencial efectivo determinan las trayectorias críticas, discutiendo las trayectorias para haces individuales de luz en el caso en el que se aproximen mucho a las críticas, apareciendo los conceptos de sombra y fotosfera. Con todo ello analizaremos cómo afecta el campo gravitatorio a las imágenes de un cielo de fondo y finalmente a un disco de acreción, relacionándolo con la imagen del EHT y concluyendo con aplicaciones y futuras observaciones.

2. MOVIMIENTO GEODÉSICO EN UN ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

Para poder entender el comportamiento de la luz y de objetos masivos alrededor de agujeros negros reales con rotación es necesario empezar por el caso más simple de agujero negro, el agujero negro de Schwarzschild. Se trata de una solución estática de vacío con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein, descrita por la métrica:

$$g = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Aquí $c = 1$ (igual que en (1)) pero G no se ha tomado igual a 1 por las comparaciones que se harán más adelante en el límite newtoniano, gracias a que es asintóticamente plana. Esta es una solución peculiar de las ecuaciones ya que gracias al teorema de Birkhoff podemos asegurar que el exterior de cualquier cuerpo con simetría esférica con una cierta masa viene descrito por esta métrica. La presencia del horizonte de eventos en $r = 2GM$ (cuando el coeficiente de la métrica $g^{rr} = 0$) se puede estudiar de varias formas: viendo cómo en la caída libre de un cuerpo hacia el BH el tiempo coordenado (el que mediría un observador asintótico) necesario para cruzar el horizonte es infinito, viendo cómo la energía de una señal lumínica emitida desde el horizonte hacia el exterior tiende a cero... Para este tipo de análisis, dado que se trata de una singularidad en las coordenadas no física (los escalares formados por combinaciones del Riemann no se anulan aquí, luego las fuerzas de marea no son infinitas) es recomendable pasar a coordenadas que faciliten la interpretación de la estructura causal como las coordenadas Eddington–Finkelstein o Kruskal–Szekeres (un análisis detallado de estos comportamientos vienen explicados en [8]). En cualquier caso se llega a una superficie de *redshift* infinito, donde una vez un cuerpo o señal luminosa cruza esta superficie es imposible escapar de ella, de ahí el nombre de agujero negro.

El hecho de que la luz quede atrapada en esta superficie supone que para observar directamente estos objetos precisamos de algo que emita luz y los ilumine. Necesitamos o bien observar imágenes relativistas de una fuente cuya luz haya sido desviada por el BH, o que haya objetos orbitando cerca de manera que, ya sea por el calentamiento o por su naturaleza, emitan luz. Estamos interesados por tanto en las trayectorias en torno a los BH. Veamos el comportamiento de las geodésicas en este espacio-tiempo.

Una curva geodésica $\gamma^\mu = x^\mu(\lambda)$ con vector tangente $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ y parámetro afín λ satisface:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (3)$$

donde λ en el caso de partículas masivas será el tiempo propio τ . La forma general de proceder sería calcular los símbolos de Christoffel, escribir las ecuaciones geodésicas e integrarlas (resolverlas), quedando completamente descritas las trayectorias en torno al BH. Sin embargo, para el caso de Schwarzschild vamos a usar otro enfoque más inteligente, que es, al igual que en Mecánica Clásica, explotar las simetrías de la métrica y reducir el número de grados de libertad del problema, simplificándolo. Para ello podemos usar el formalismo de primera y segunda especie del cual se deriva (3):

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad (4)$$

añadiendo la condición de capa de masas $u^2 = \dot{x}^2 = k$, con $k = 0$ si es de género luz y $k = -1$ si es de género tiempo (partículas masivas), sabiendo que el punto denota derivada con respecto al parámetro de la geodésica. Este formalismo lo podemos ver como un lagrangiano tal que aplicando variaciones, esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0 \quad (5)$$

me dé las ecuaciones de las geodésicas de (3). Así podemos encontrar cantidades conservadas fácilmente viendo si existen coordenadas cíclicas con (5). La métrica de Schwarzschild no depende ni de ϕ ni del tiempo, así que tendremos 2 cantidades conservadas asociadas a estas simetrías: $\frac{d(f(r)\frac{dt}{d\lambda})}{d\lambda} = 0$ y $\frac{d(r^2(\sin^2\theta)\frac{d\phi}{d\lambda})}{d\lambda} = 0$ con $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$. La primera cantidad conservada la podemos llamar *Energía por unidad de masa en reposo*, pues para $r \rightarrow \infty$ la expresión tiende a $\frac{dt}{d\lambda}$ y de relatividad espacial eso equivale a $\frac{E}{mc^2}$. La segunda cantidad conservada la llamaremos *Momento angular por unidad de masa en reposo*, por los mismo argumentos (haciendo además $c^2 \gg v^2$).

Una forma más general de obtener todas las simetrías es a través de los vectores de killing, que son vectores que generan un cambio de coordenadas que deja invariante la métrica $\delta g_{\mu\nu} = 0$ para $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$. Cada killing genera pues una isometría, de forma que si tenemos una coordenada cíclica tendremos un killing, y con cada killing tendremos una cantidad conservada a lo largo de una geodésica (se puede demostrar que $Q = g_{\mu\nu} \xi^\mu x^\nu = u^\alpha \xi_\alpha$ es una constante de movimiento, es decir, se conserva sobre la geodésica [9]).

Supongamos por tanto que tenemos un cuerpo orbitando un BH de Schwarzschild. Seguirá una trayectoria descrita por (3), a lo largo de la cual se conservarán las cantidades mencionadas. Además, como la métrica posee simetría esférica (tiene la métrica de la 2-esfera en los ángulos de $d\Omega^2$ así que es invariante al cambiar $\theta \rightarrow -\theta$ y $\phi \rightarrow -\phi$) va a existir un momento angular conservado de manera que la órbita siempre va a estar contenida en un plano. Esto se traduce en que no existe ningún torque que cambie la orientación del plano orbital, dicho con otras palabras, no existe un único ecuador para este objeto, teniendo la libertad por tanto de rotar nuestras coordenadas para poner cualquier órbita contenida en un plano (con θ constante) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ ¹.

Con todo esto ya podemos simplificar la ecuación geodésica²:

$$f(r) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = k \quad (6)$$

usando que $E = f \frac{dt}{d\lambda}$ y que $L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - V_{eff} \quad (7)$$

donde podemos considerar que $V_{eff} = f(r)(-k + \frac{L^2}{r^2})$ y tratar nuestro problema como el de una partícula clásica en un potencial 1-dimensional. Con esto ya se puede estudiar el movimiento tanto de cuerpos masivos como de la luz y contrastar con datos experimentales, no solo para un BH en primera aproximación sino para cualquier objeto con simetría esférica, es decir la mayoría de cuerpos celestes. Si quisiéramos ver la deflexión de la luz por ejemplo debida al Sol, o la precesión del perihelio de Mercurio sería conveniente pasar esta ecuación a la de Binet, usando la regla de la cadena para obtener $r(\phi)$, cambiando a $u = 1/r$ y luego derivando con respecto a ϕ otra vez, pues así es más sencillo comparar al tener estas expresiones en Mecánica Clásica [10, 11].

2.1. ÓRBITAS EN UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD. SOM-BRA Y FOTOESFERA

Queríamos ver cómo son las geodésicas cerca del agujero negro. Viendo el potencial efectivo de (7), aunque dependa del momento angular, podemos hacer un estudio cualitativo del comportamiento de la luz o de un cuerpo masivo.

¹En el caso de Kerr veremos que no es así, de manera que habrá que tratar el movimiento de θ por separado

²Verdaderamente se ha cogido la condición de capa de masas al presentar derivadas primeras, pero es equivalente a resolver la ecuación geodésica en términos de estas cantidades conservadas [12].

Para el caso de cuerpos masivos ($k=-1$), el potencial $V_{eff} = (1 - \frac{2GM}{r})(1 + \frac{L^2}{r^2}) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3}$ para radios grandes tiende asintóticamente a 1, y para $r \rightarrow 0$ tiende a $-\infty$. E^2 tiene las mismas dimensiones que V_{eff} y tiene que ser mayor que el potencial para que $\frac{dr}{d\tau}$ tenga sentido físico. En función de la energía del cuerpo, seguirá una cierta trayectoria u otra. Lo más importante sin embargo, es que hemos recuperado el potencial que aparece en las órbitas de Mecánica Clásica: el primer término es una constante, el segundo y tercer término representan el potencial gravitatorio newtoniano y el término centrífugo (salvo un factor 1/2 que siempre se puede absorber dividiendo la ecuación (7) por 1/2), y el último término es la contribución de RG, que como se espera contribuirá cada vez más para r pequeños.

Para ver si existen órbitas cerradas necesitamos saber si el potencial tiene máximos o mínimos, y en tal caso bajo qué condiciones aparecen. Para ello buscamos $\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0$, llegando a una condición para el momento angular:

$$L = \pm \sqrt{\frac{GM r}{1 - 3GM/r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{GM r} \quad (8)$$

Se muestra, aparte de que al tomar el límite para distancias radiales grandes se recupera el valor del momento angular de una órbita circular newtoniana, la existencia de máximos y/o mínimos sólo bajo ciertas condiciones que tiene que cumplir el momento angular. Esta condición en términos del radio se satisface si:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{6GM} \left[1 \pm \sqrt{1 + 12 \left(\frac{GM}{L} \right)^2 k} \right] \quad (9)$$

donde se ha hecho de forma general (para $k=0$ o $k=-1$). Vemos cómo existen estos máximos o mínimos solo si $1 \geq 12(GM/L)^2$, tal y como se muestra en las gráficas 1. Las dos gráficas superiores tratan el caso de partículas masivas. Vemos la clásica forma del potencial newtoniano (izquierda) donde para $L > 0$ podemos encontrar órbitas estables, mientras que para RG (derecha) solo a partir de ciertos valores (a partir de $L = \sqrt{12}GM$ en amarillo) aparecen mínimos de potencial (marcados con un punto).

Si se quiere estudiar órbitas circulares, como cumplen que $\frac{dr}{d\tau} = 0 \rightarrow E = \sqrt{V_{eff}}$, podemos con el valor de L calculado en (8), sacar su Energía:

$$E = \frac{1 - 2GM/r}{\sqrt{1 - 3GM/r}} \quad (10)$$

que expandiendo en $r \rightarrow \infty$ [8] llegamos $1 - \frac{GM}{2r}$ que es la energía cinética más potencial en órbitas circulares newtonianas. Vemos que en $r=3GM$ diverge (para el momento angular también), hecho que entenderemos más adelante.

Faltaría ver cuál de las soluciones de la ecuación (9) es la solución estable y cuál la inestable (acorde a lo visto en las gráficas 1). Para ello vemos $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} > 0$.

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} = \frac{6L^2(r - 4GM r^2)}{r^5} = \frac{2GM(r - 6GM)}{r^3(r - 3GM)} \quad (11)$$

Evaluando en los extremos del potencial vemos que la distancia radial r más pequeña (la que va con el signo positivo del discriminante en (9)) es la solución inestable y la más grande es la solución estable, es decir, el máximo del potencial estará siempre más cerca del centro del BH, tal y como se muestra en las gráficas 1. Para $L \rightarrow \infty$ se puede ver que el mínimo se va alejando del BH como $\frac{L^2}{GM}$, mientras que el máximo tiende a $3GM$ [13]. A medida que L disminuye, las dos soluciones (que podemos entender como órbitas circulares) se van acercando hasta coincidir en $L = \sqrt{12}(GM)^2$

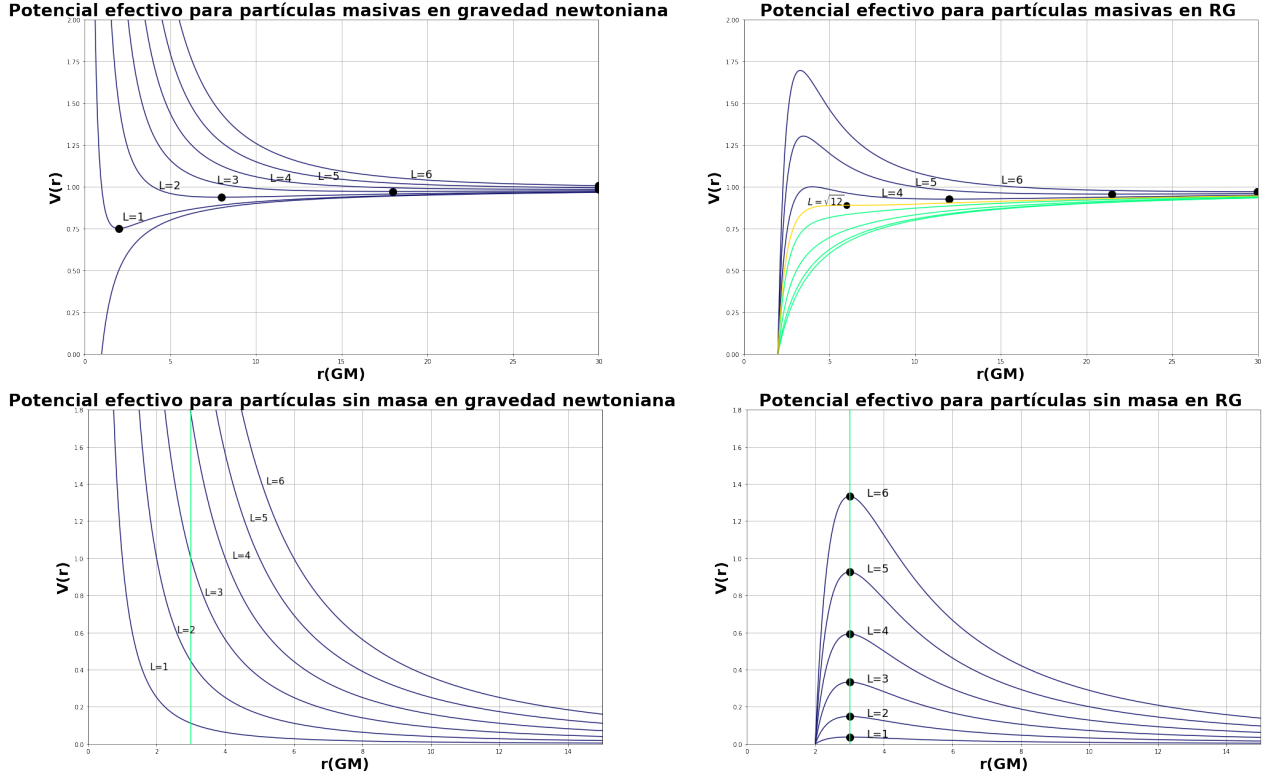


Figura 1: Potenciales efectivos de RG frente a los de gravedad newtoniana en función de la distancia, para distintos valores de L . Se ha tomado para partículas masivas como para fotones $G = M = 1$.

para $r = 6GM$. Para valores menores del momento angular desaparece tanto el máximo como el mínimo, de manera que podemos afirmar que *no van a existir órbitas estables más cerca que $r = 6GM$ en un BH de Schwarzschild* (esta distancia es por tanto la máxima a la que el material del disco de acreción puede orbitar antes de caer al BH.). De nuevo dicho comportamiento se percibe en 1, donde el mínimo más cercano al centro del BH ocurre para el caso $L = \sqrt{12}(GM)^2$, y partir de ahí los mínimos se van alejando a medida que aumenta L .

Se ha visto que gracias a los máximos y mínimos del potencial efectivo determinamos las trayectorias críticas. Sin embargo, solo hemos hecho el análisis de la variable radial, pero tenemos más grados de libertad. Si vemos la velocidad angular vista por un observador distante³:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{\frac{L}{r^2}}{\frac{E}{1-2GM/r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pm 1/r^2 \sqrt{GM} r = \pm \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (12)$$

observamos que es justamente lo que obtenemos con la tercera Ley de Kepler⁴. Con estas dos ecuaciones, (7) y (12), ya podemos estudiar todos los movimientos que se nos ocurran. Si $E^2 > 1$ pero menor que el máximo (siempre que se cumplan las condiciones sobre el momento angular) el cuerpo llevará a cabo lo que en gravedad newtoniana llamaríamos órbita hiperbólica. Si $E^2 < 1$ entonces llevará a cabo un movimiento oscilante entre un periastro y apoastro. Esto es una generalización del movimiento elíptico, pues a primer orden perturbativo se trata de una elipse

³Recordemos que en Schwarzschild para un observador estático infinitamente alejado su tiempo propio τ_∞ es proporcional al tiempo coordinado

⁴De nuevo en Kerr tendremos que la solución que da vueltas en sentido prógrado va a ser diferente de la retrógrada, debido al efecto de arrastre de los sistemas inerciales que causa el spin del agujero negro, el cual rompe la simetría.

cuyo eje mayor precesa lentamente, tal y como se ve en el test clásico de la precesión del perihelio de Mercurio o Venus (donde aparece a primer orden un término $e\phi \sin(\phi)$ no periódico que da lugar a un efecto acumulativo [10]). Si $E^2 > V_{max}$ inevitablemente será atrapado por el BH.

El procedimiento para el cálculo de trayectorias de haces individuales de luz es el mismo que antes usando que $k=0$. Sin embargo, cuando llegamos a $(\frac{dr}{d\lambda})^2 = E^2 - (1 - \frac{2GM}{r})(\frac{L^2}{r^2})$ vemos que el movimiento no debería depender de la E del haz, pues tanto la radiación infrarroja como los rayos X deberían seguir la misma trayectoria. Esto se soluciona redefiniendo λ por $L\lambda$ y usando el concepto de **parámetro de impacto** $u = \frac{L}{E}$, que nos da información sobre cuánto de desviado está el momento del cuerpo o haz con respecto a la dirección radial hacia el centro del objeto (es decir la distancia entre la dirección de la velocidad de la luz o partícula masiva y el centro del cuerpo). Llegamos así pues a :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{u^2} - V_{eff} \quad (13)$$

Ahora $V_{eff} = f(r) \left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{r^3}$ lo que se traduce en que solo va a existir un máximo de la función en $r = 3GM$ ($\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} = \frac{6L^2G}{r^4} \left(1 - \frac{4M}{r}\right)$ luego $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} < 0$ evaluado en $r = 3GM$ [8]) con $V_{eff} = \frac{1}{(3\sqrt{3}GM)^2}$. Si vemos la expresión (9), para tener $r = 3GM$ en el caso de partículas masivas necesitamos un momento angular infinito. Es decir, tenemos que la luz puede orbitar más cerca que las partículas masivas, de ahí que no nos preocupe la divergencia que teníamos en la energía y el momento angular de las órbitas circulares pues no existen para $r = 3GM$. Esa divergencia nos estaba dando una especie de pista sobre la existencia de una solución relacionada con la radiación.

Como solo hay un máximo, podemos concluir que: *no hay órbitas estables circulares para fotones en la métrica de Schwarzschild*, tal y como se ha representado en las gráficas inferiores de 1. La gráfica inferior izquierda muestra el caso newtoniano, donde solo tenemos el término centrífugo y por tanto no existen órbitas cerradas. En el caso de RG (abajo derecha), gracias al nuevo término sí aparecen máximos, de hecho siempre en $r = 3GM$ independientemente del valor del momento angular, tal y como se ha comprobado.

Sabiendo las trayectorias de los haces de luz, podemos mapear la sombra del agujero negro lanzando un gran número de haces de luz hacia él, cada uno con un cierto parámetro de impacto. Si $\frac{1}{u^2} = V_{fot.} \rightarrow u = 3\sqrt{3}GM$ los fotones llegan, alcanzan el máximo y se quedan orbitando allí, pero al ser órbitas inestables, una pequeña perturbación hará que acaben saliendo de dicha órbita. Así, si el fotón llega con un parámetro de impacto un poco más pequeño a dicho valor crítico, dará vueltas lentamente acercándose y cayendo al agujero negro. Si es un poco más grande, dará varias vueltas hasta acabar siendo despedido hacia infinito. Si cogemos estas trayectorias, y rotamos en torno al eje de simetría, obtendremos la conocida **fotoesfera** o esfera de fotones.

Hemos de notar que la fotoesfera es más grande que el horizonte de eventos, ya que este último se definía como la región donde la luz ni viajando de manera radial podría escapar y en nuestro planteamiento tenemos trayectorias generales. Otra cosa a resaltar es que el parámetro de impacto es mayor a la fotoesfera. Esto es así porque al enviar un haz de luz hacia el agujero negro, el haz se curva durante el viaje por la acción del campo gravitatorio, de manera que si $u = 3GM$ la luz acabaría dentro del BH. Así, al observar un agujero negro iluminado de esta manera, veremos una sombra con $r \simeq 5,2 r_{sch}$, conocida como la **sombra** del agujero negro (más detalles en [14]). Estos fenómenos se pueden observar en la figura 2.

Cuando un BH es por tanto iluminado por rayos de luz asintóticos, aparece esta estructura de sombra y fotoesfera. Si el BH fuese iluminado por material que emite radiación electromagnética durante su caída al BH, teniendo en cuenta estos efectos junto con la física de los discos de acreción, seguiríamos sin ver una sombra del tamaño del horizonte de eventos, sino una sombra con $r \simeq 2,59 r_{sch}$. Esto fue verdaderamente lo que midió el EHT en 2019 como veremos en la sección (4).

Los BH (se ha particularizado para el de Schwarzschild), y en general cualquier objeto muy

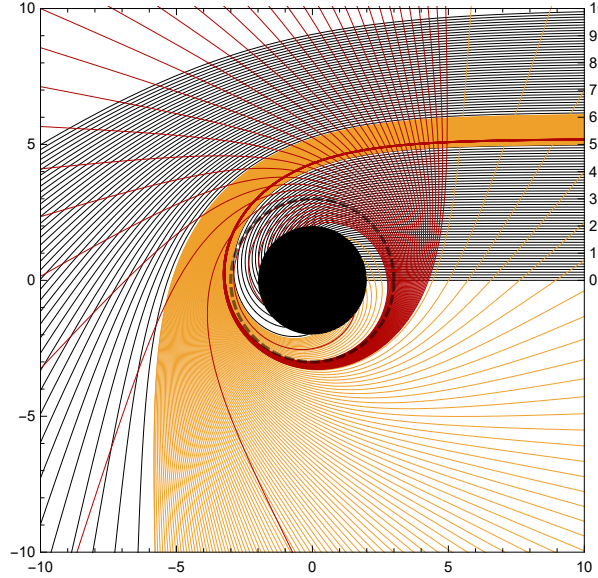


Figura 2: Extraída de [14]. Desviación de los fotones en función del parámetro de impacto u en un espacio-tiempo de Schwarzschild, usando r, ϕ como coordenadas polares euclídeas. El espaciado en u es $1/10$, $1/100$ y $1/1000$ para las bandas de los haces de luz directos (líneas negras), anillo de lente (amarillas) y de fotones (rojas). Estos términos hacen referencia al número de veces que los rayos de luz intersectan el plano ecuatorial, que en este caso está situado verticalmente. Así, se tratan de fotones que han cruzado el plano una vez, dos veces o 3 respectivamente. El BH es representado como un disco sólido y fotosfera como una línea discontinua.

compacto, por tanto, son capaces de curvar la luz enormemente debido a sus fuertes campos gravitatorios, en contraposición con los demás objetos astronómicos⁵. De forma que, tanto la luz que llega de todas las direcciones del Universo al BH (siempre que pase cerca del BH) como la emitida por la materia acretada se verá altamente desviada. Si observamos un agujero negro, ¿cómo deformará la imagen de fondo? ¿Cómo esperamos que sea una imagen que cuenta con la presencia de un BH?

3. LENTES GRAVITACIONALES

3.1. LENTES GRAVITACIONALES EN AGUJEROS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

Supongamos que tenemos un objeto que se encuentra infinitamente alejado de un agujero negro y emite luz. Esta luz llega al agujero negro y es desviada cuando la distancia mínima es mayor que la fotosfera: $r_m > r_{fotosfera}$, como ya hemos visto. El objetivo es ver cómo es esta deflexión, es decir, calcular el ángulo desviado. Para ello haremos uso de nuevo de las ecuaciones geodésicas. Primero se verá cómo salen las ecuaciones de forma intuitiva para el caso de Schwarzschild y después se generalizará para métricas estáticas con simetría esférica.

Sabiendo que buscamos $\frac{d\phi}{dr}$, podemos utilizar la regla de la cadena: $\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{r^2}$ y usarla en (7). Usando además la definición de u llegamos a :

$$\frac{d\phi}{dr} = \left[\frac{r^4}{u^2} - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-1/2} \quad (14)$$

⁵Véase los $1,75'' \pm 0,02''$ producidos por el Sol, si bien la refracción de la corona puede afectar a las medidas [11].

cuya integración nos va a dar el ángulo desviado por el agujero negro α . Ya se ha tomado el *sistema de unidades geometrizadas* $G=1$ y $c=1$ que se usará de ahora en adelante.

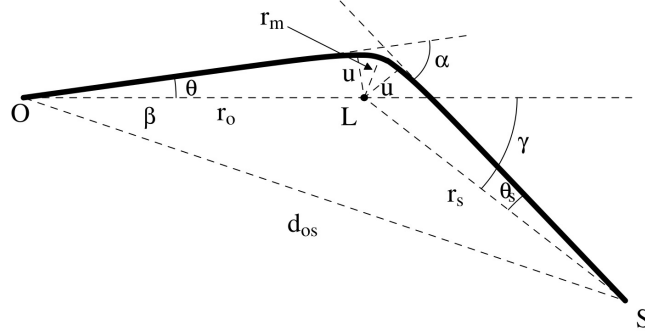


Figura 3: Extraída de [15]. Ejemplo ilustrativo de la geometría de la lente gravitacional producida por un cuerpo estático simétrico de masa M .

Vemos en la figura 3 una representación esquemática de lo que está sucediendo. Un rayo de luz sale desde la fuente (S), que llega a la lente (L), en este caso nuestro agujero negro, con un cierto parámetro de impacto (u) y es desviado un ángulo α , llegando por último al observador (O), que verá la posición aparente de la fuente con un ángulo θ respecto a L.

El ángulo ϕ sería el ángulo recorrido por la luz medido desde la lente, de una asíntota a otra. Si imaginamos un rayo de luz que apenas se desvía (trayectoria recta), el ángulo ϕ sería muy cercano a π . Este hecho, junto con la simetría del problema, donde el ángulo barrido desde la trayectoria asintótica de llegada (desde ∞) hasta r_m es el mismo que el ángulo desde r_m hasta la trayectoria asintótica de salida (hasta ∞), permiten definir α como:

$$\alpha = -\pi + 2 \int_{r_m}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{r^4}{u^2} - r^2 \left[1 - \frac{2M}{r}\right]}} dr \quad (15)$$

Veamos ahora el caso general para agujeros negros con simetría esférica.

3.2. LENTES GRAVITACIONALES EN AGUJEROS NEGROS CON SIMETRÍA ESFÉRICA

Para cualquier métrica estática con simetría esférica:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)d\Omega^2 \quad (16)$$

La ecuación (15) se puede extender llegando a :

$$\alpha = -\pi + 2 \int_{r_m}^{\infty} u \sqrt{\frac{B(r)}{C(r) [C(r)/A(r) - u^2]}} dr \quad (17)$$

donde el parámetro de impacto u , que era la distancia entre el agujero negro y cada una de las trayectorias asintóticas del fotón, queda definido como:

$$u^2 = \frac{C(r_m)}{A(r_m)}. \quad (18)$$

El primero en resolver esta ecuación particularizando para Schwarzschild fue Einstein asumiendo desviaciones pequeñas de los ángulos (equivalentemente que $r_s, r_m \gg 2M$ o $u \gg 2M$), el límite conocido como **weak deflection limit** WDL.

$$\alpha_{WDL} = 4M/u, \quad (19)$$

solución que se puede obtener con teoría de perturbaciones de la ecuación de Binet en RG, pudiendo calcular e.g. deflexiones debidas al Sol o Júpiter usando que $u \simeq r_m$ [11].

La solución exacta por otra parte fue encontrada por Darwin [16] en términos de integrales elípticas de primera especie :

$$\alpha = -\pi + 4\sqrt{r_m/s}F(\varphi, m), \quad (20)$$

$$\text{con } F(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} \text{ y}$$

$$s = \sqrt{(r_m - 2M)(r_m + 6M)} \quad m = (s - r_m + 6M)/2s \quad \varphi = \arcsin \sqrt{2s/(3r_m - 6M + s)}. \quad (21)$$

Esta expresión reescrita en términos del parámetro de impacto retoma la aproximación de Einstein para u grandes [15], tal y como muestra la gráfica 4. Además, presenta una divergencia en $r_m = 3M$ y, según (18), cuando $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$ (la divergencia también se aprecia en (15)). Esto representa el acercamiento máximo, de manera que los rayos de luz con parámetro de impacto cada vez más cercanos a \bar{u} experimentarán cada vez mayores desviaciones, llegando a poder efectuar un número arbitrario de vueltas ($\alpha = 2n\pi$). Hemos llegado al descubrimiento de la fotosfera igual que con (13), solo que ahora tenemos una ecuación en función de r_m para cada haz de luz. Podemos ya predecir que objetos compactos (con radios menores que \bar{r}), debido a la posibilidad de desviar la luz de manera arbitraria (divergencia en α), acabarán dando lugar a dos secuencias infinitas de imágenes a ambos lados de la lente (objeto compacto). Esto es así porque siempre podremos encontrar rayos de luz con un parámetro de impacto lo suficientemente cercano a \bar{u} provenientes de una fuente tal que experimenten n vueltas, dando lugar a los llamados *fantasmas* de Darwin, imágenes de orden superior que aparecen debido a las n vueltas. A mayor orden, más cerca aparecerán del objeto compacto pues es necesario que se acerquen más para dar más vueltas.

Esto no se puede predecir con WDL, pero sí con SDL, **strong deflection limit**, que es la otra aproximación para ángulos desviados cerca de la divergencia. Desarrollando la integral elíptica [15] para $r_m \simeq \bar{r}$ llegamos a:

$$\alpha_{SDL} = -\log(u/\bar{u} - 1) + \log[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi \quad (22)$$

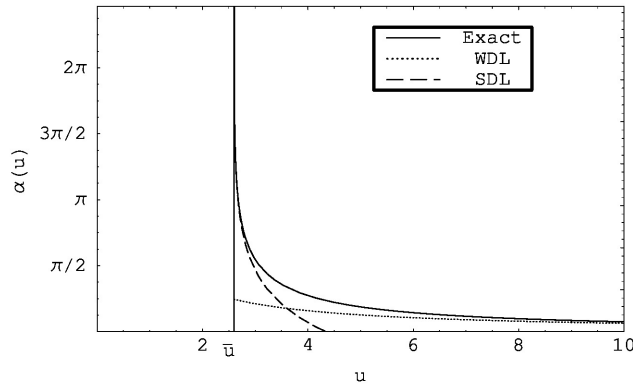


Figura 4: Extraída de [15]. Comparación entre el ángulo de deflexión exacto de los fotones en una métrica de Schwarzschild, SDL y WDL, con u en unidades de radios de Schwarzschild.

Vemos como la solución exacta coincide con SDL para u pequeños en la gráfica 4. Se quiere obtener la posición de las imágenes en función de los parámetros geométricos del sistema. Analicemos cómo vería un observador en su cielo la imagen de un objeto brillante cuya luz es desviada por el BH.

3.3. ECUACIÓN DE LENTES

Una ecuación de lentes es una relación entre la geometría (posiciones de fuente, observador y lente dentro de un sistema de coordenadas) y la posición de las imágenes en el cielo del observador. Es decir nos da la relación entre la posición de las imágenes relativistas que vamos a ver y la geometría del sistema. De esta forma al resolver la ecuación podremos obtener dichas posiciones como funciones de los parámetros geométricos del sistema, que es lo que buscamos.

Como se comentó en la sección (2), gracias a la simetría esférica el movimiento de desviación del fotón ocurre en un plano y sin pérdida de generalidad podemos escoger $\theta = \pi/2$ y trabajar solo con las coordenadas r y ϕ . Tenemos una fuente con coordenadas (r_S, ϕ_S) y un observador con coordenadas (r_O, ϕ_O) $r_O > r_S$. El caso general sería el comentado anteriormente en el que el fotón sale de la fuente al BH, es desviado y llega al observador, pudiendo dividir la trayectoria en: la aproximación, desde r_S a r_m $\dot{r} < 0$, siendo el punto la derivada con respecto al parámetro afín; y el escape, desde r_m a r_O con $\dot{r} > 0$ ⁶. Así, podemos integrar la ecuación geodésica primero desde la fuente hasta r_m y desde r_m hasta el observador, calculando de esta forma la variación del ángulo azimutal que experimenta el fotón:

$$\Phi(u, r_O, r_S) = \left[\int_{r_m}^{r_O} + \int_{r_S}^{r_m} \right] u \sqrt{\frac{B(r)}{C(r) [C(r)/A(r) - u^2]}} dr. \quad (23)$$

La ecuación de lentes por tanto la podemos expresar como:

$$\Phi(u, r_O, r_S) = \Delta\phi \equiv \phi_O - \phi_S + 2n\pi \quad (24)$$

la cual muestra la diferencia entre las coordenadas del ángulo azimutal para la fuente y observador, junto con el hecho de que la luz puede dar n vueltas. El ángulo θ al que el fotón será detectado por el observador es⁷:

$$\theta = \arcsin \left(u \sqrt{\frac{A(r_O)}{C(r_O)}} \right). \quad (25)$$

Todas estas variables aparecen también en la Figura 3. Esta forma de cálculo nos da una metodología sistemática para obtener la posición de las imágenes. Dadas las coordenadas radiales y azimutales de la fuente y el observador, buscamos un haz de luz que conecte estos dos puntos (se puede elegir el número de vueltas). A través de la ecuación (24) obtenemos lo que debe desviarse, de manera que resolviendo (23) podemos obtener el parámetro de impacto que debe tener el fotón para trazar el camino de unión entre los puntos (verdaderamente son condiciones de contorno a la ecuación geodésica que resolvemos). Sustituyendo u en (25) llegamos finalmente a la posición de la imagen en el cielo del observador. Al revés también es aplicable: observando la posición de una imagen, podemos saber la diferencia de ángulo entre fuente y observador (con módulo $2n\pi$).

Podemos tomar límites y ver el comportamiento de estas ecuaciones. Si observador y fuente están muy alejados, se puede desarrollar en términos de u/r_O y u/r_S [18], llegando a:

$$\alpha - \theta - \theta_S = -\gamma \equiv \Delta\phi - \pi, \quad (26)$$

⁶El caso donde el fotón solo se aleja, que ocurre cuando la fuente está entre la lente y el observador, se trata en [15], pero la expresión coincide cuando $r_S \rightarrow r_m$, osea cuando el fotón se emite en dirección tangencial $\dot{r} = 0$.

⁷Se puede ver en [17], donde juega con relaciones geométricas usando que b es constante y despejando θ .

lo que se conoce como *Ohanian lens equation* (las variables aparecen en la figura 3). Este límite trae consigo la ventaja de deshacernos de r_O y r_S . Que nosotros estemos lejos de la lente es una aproximación excelente pues la Tierra está muy lejos de cualquier agujero negro, sin embargo podemos jugar con la distancia de la fuente.

3.4. POSICIÓN DE IMÁGENES Y MAGNIFICACIÓN

Si ya sabemos con (24) ubicar imágenes dadas las coordenadas de la fuente y del observador, veamos el comportamiento cualitativo de las imágenes para una fuente arbitraria moviéndola desde $\Delta\phi = \pi$ hasta $\Delta\phi = 0$ (vistas por un observador lejano).

Llamamos *imágenes directas* a aquellas que obtenemos con (24) al asumir siempre un $\dot{\phi} > 0$, y por tanto ser las imágenes que se forman en el lado en el cual está la fuente. No obstante gracias de nuevo a la simetría esférica podemos calcular las imágenes *imágenes indirectas* cambiando $\Delta\phi \rightarrow 2\pi - \Delta\phi$ en (24). Debido al $2n\pi$ en (24), tendremos una imagen en cada intervalo $(n-1)\pi < \Phi < n\pi$, es decir que la imagen primaria tendrá $0 < \Phi < \pi$ (directa, impar), la secundaria $\pi < \Phi < 2\pi$ (indirecta, par) y así sucesivamente para las imágenes de mayor orden.

Analicemos primero el caso donde la fuente se encuentra muy alejada de la lente:

- Para $\Delta\phi = \pi$, cuando la fuente está detrás de la lente (vista desde el observador) y completamente alineada, se forman por la simetría del problema una imagen primaria y secundaria que dan lugar al famoso **anillo de Einstein**.
- A medida que se va moviendo la fuente ($\Delta\phi < \pi$), la imagen primaria se empieza a alejar del BH mientras que la imagen secundaria se acerca. Esto es fácil de entender, pues para la imagen secundaria el haz de luz tiene que curvarse más y por tanto necesitará pasar más cerca del BH para lograrlo. Así, en cuadratura ($\Delta\phi \simeq \pi/2$), la imagen primaria apenas se verá afectada por la lente y alcanzará un valor de θ máximo, mientras que la imagen secundaria alcanzará un valor mínimo, siempre *fuera de la sombra del BH*, que en términos de θ la podemos definir como $\bar{\theta} \equiv \bar{u}/r_O$. Es decir, como la sombra representa el interior de la zona delimitada por la curva crítica de los rayos de luz provenientes de la fuente, ninguna imagen de una fuente fuera de la fotosfera va a poder aparecer dentro de la sombra del BH. No obstante hay que recordar que se trata de fuentes asintóticas, de manera que una fuente cercana al BH no va a seguir este comportamiento, y para el estudio de discos de acreción conceptos como la sombra del BH van a dejar de ser útiles.
- Finalmente al irnos hacia $\Delta\phi = 0$ ocurre lo contrario, la imagen primaria se acerca y la secundaria se va alejando. Cuando la fuente está justo delante del agujero ($\Delta\phi = 0$) se vuelven a formar los anillos de Einstein, llegando a una degeneración conocida como *retro-lensing*, ya que la lente parece comportarse igual estando delante o detrás de la fuente.

Para las imágenes de orden superior, el análisis es el mismo: forman anillos de Einstein (por ejemplo el terciario irá con el cuaternario), las imágenes impares se alejan hasta la cuadratura y luego decrecen... salvo que ahora todas ellas aparecen exponencialmente más cerca de la sombra. Este fenómeno se debe a que las integrales radiales de (23) y (17) divergen logarítmicamente en el argumento de la raíz (hecho que se puede ver en SDL con (22)), luego si queremos alargar el camino tal que el fotón de una vuelta más, deberemos mirar exponencialmente más cerca.

Si acercamos la fuente a la lente, la posición de las imágenes variarán tal y como se muestra en las gráficas 5, hasta el punto de que si están dentro de la fotosfera, las imágenes se formarán *dentro* de la sombra y en orden invertido, con las imágenes de mayor orden cercanas al agujero negro y las de menor orden a la sombra.

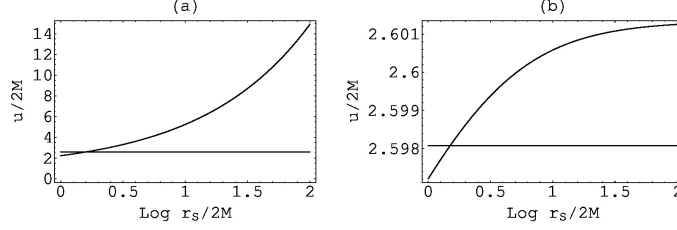


Figura 5: Extraída de [15]. Se muestra la posición de los anillos de Einstein (en $\Delta\phi = \pi$) en función de la distancia para (a) el anillo primario y (b) el secundario, con la línea horizontal representando el borde de la sombra del agujero negro. $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$.

Efectivamente en 5 vemos como las imágenes entran en la sombra para $r_S < 3M$. A grandes r_S el primario se puede ir alejando pero el secundario se mantiene cerca de la sombra, pues la luz necesita curvarse lo suficiente para verlo. Este estudio de las posiciones ha seguido el análisis más detallado que se lleva a cabo en [15].

Hasta ahora se ha analizado de forma cualitativa cómo las diferentes imágenes se comportan a medida que vamos moviendo la fuente con la distancia y con el ángulo azimutal. Además de los efectos de desvío gravitacional, los BH son capaces de cambiar la magnitud de la luz que se emitió, aumentando o disminuyéndola. Veamos así la magnificación, cuánto aumenta la magnitud de la fuente a nivel radial y a nivel angular. Se ha de tener cuidado a la hora definir magnitudes pues hay que discernir correctamente aquellas que verdaderamente son medidas físicas objetivas de entre aquellas que dependen de nuestro sistema de coordenadas. Como observamos lejos de la lente, la métrica es asintóticamente plana, es decir, es Minkowskiana y por tanto no tendremos problema en las definiciones [11]. El cálculo de cómo se ve modificada la magnitud si el observador se mueve tangencial o radialmente está hecho en [15] y [18] llegando, en caso de que $u \ll r_S$ y $\dot{r} < 0$ a:

$$\mu|_{r_S \rightarrow \infty} = \frac{d_{OS}^2}{r_S^2} \frac{\sin \theta}{\sin \Delta\phi} \frac{d\theta}{d\Delta\phi}. \quad (27)$$

con

$$d_{OS} = \sqrt{r_O^2 + r_S^2 - 2r_O r_S \cos \Delta\phi} \quad (28)$$

la distancia euclídea entre la fuente y el observador. Vemos que depende de la variación del ángulo azimutal, cuanto más recorra el fotón, menor se va a ver magnificada la imagen. Vemos además que diverge en los múltiplos de π lo cual era de esperar pues corresponde a los anillos de Einstein, donde fuentes puntuales dan lugar a grandes arcos que acaban formando anillos (que en caso de Schwarzschild, se tratan de cáusticas de sección cero). Esto abre la posibilidad por tanto de observar fuentes lejanas a través de la magnificación por lentes gravitacionales, no solo de BH sino de cúmulos de galaxias.

3.5. APROXIMACIONES ANALÍTICAS: WDL Y SDL

Aunque se haya presentado un tratamiento exacto de cómo se curva la luz con las integrales elípticas, verdaderamente no dan una visión sencilla y analítica de lo que ocurre en la ecuación de las lentes. El hecho de aplicar los límites anteriormente mencionados nos va a permitir comprender mejor lo que está sucediendo, adaptando a las necesidades físicas del problema nuestras ecuaciones.

El **límite a bajas desviaciones, WDL** ocurriría para parámetros de impacto muy grandes $u \gg M$, lo que implica fuentes y observadores alejados. Esto supone que cuando $\Delta\phi$ está bastante alejado de π , la desviación de la imagen primaria será despreciable, mientras que la secundaria no

estará, al necesitar un parámetro de impacto suficientemente pequeño. Por tanto esta expresión solo es válida si $\Delta\phi \simeq \pi$, y es buena para la imagen primaria y secundaria. El cálculo detallado para Schwarzschild se encuentra en [19], basado en desarrollar el ángulo θ al que se vería la imagen en términos del ángulo de Einstein :

$$\theta_E = \sqrt{4Mr_S/(r_O d_{OS})}, \quad (29)$$

y una serie de potencias con el parámetro de expansión

$$\varepsilon = \theta_E d_{OS}/(4r_S). \quad (30)$$

quedando $\theta = \theta_E(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots)$. Por geometría (usando el teorema del seno mirando la figura 3) $d_{OS} \sin \beta = r_S \sin \Delta\phi$ y si $y \equiv \beta/\theta_E$, podemos desarrollar la ecuación (24). La ventaja de este método es que a primer orden $y \equiv \beta/\theta_E$, y si queremos acercar la fuente podemos ir corrigiendo las ecuaciones añadiendo más términos de la serie. Además, dado que la posición de las imágenes depende de los coeficientes de la métrica, podemos, viendo las métricas provenientes de diferentes teorías de la gravedad para BH, *descartar algunas de ellas directamente viendo las observaciones de las imágenes para este límite.*

El **límite a grandes desviaciones grandes, SDL** ocurría para $u \simeq \bar{u}$, o equivalentemente para fuentes u observadores cerca de la lente. Por tanto era necesario calcular el radio de la fotosfera, que se conseguía haciendo 0 el denominador de (23) o (17) (que significa que el fotón da infinitas vueltas antes de alcanzar al observador) o equivalentemente:

$$C'(\bar{r})/C(\bar{r}) = A'(\bar{r})/A(\bar{r}), \quad (31)$$

y con (18) se obtenía \bar{u} . Igual que en WDL expandimos el cambio del ángulo azimutal con un parámetro que sea pequeño en este límite, osea $\epsilon = (u/\bar{u} - 1)$, obteniendo la ecuación de lentes en SDL [15] (equivalente a (22)):

$$\Delta\phi + 2n\pi = -\bar{a} \log[\epsilon/(1 - \bar{r}/r_S)] + \bar{b}, \quad (32)$$

donde \bar{a} y \bar{b} dependen de la métrica escogida (de nuevo aparece una forma de discriminar teorías de la gravitación y tipos de BH). SDL complementa a WDL, pues describe todas las imágenes con $n \geq 1$, salvo las de segundo orden. Con esto se puede obtener [20]:

$$\theta_n = \bar{\theta} \left[1 + (1 - \bar{r}/r_S) e^{(\bar{b} - \Delta\phi - 2n\pi)/\bar{a}} \right]. \quad (33)$$

con $\bar{\theta} = \bar{u}/r_O$, obteniendo como siempre la indirectas cambiando $\Delta\phi$ por $2\pi - \Delta\phi$. Lo interesante de esta ecuación es que vemos que las imágenes están distribuidas espacialmente de forma exponencial, tal y como se había comentado. Así mismo la magnitud está exponencialmente suprimida también si sustituimos θ_n en (27), lo que significa que bajo una posible imagen de lente gravitacional, solo podremos ver con claridad los primeros órdenes. Esto se entiende de forma cualitativa pensando en el número de fotones de cada imagen. Si nos vamos a imágenes de orden mayor, estas deben de provenir de fotones con parámetros de impacto muy ajustados para dar el número exacto de vueltas. De ahí que solo unos pocos fotones del flujo total vayan a tener esos parámetros de impacto precisos, de forma que la magnitud se verá suprimida exponencialmente. Este hecho se puede apreciar en la figura 2, donde solo unos pocos llegan a dar simplemente una vuelta. Otra forma de verlo sería la que presenta [14] en términos de la anchura por cada giro, la cual decrece también exponencialmente.

Otra aplicación directa de esta aproximación, es el hecho de que, dado que cada anillo corresponde a un número de vueltas al agujero negro, existe un desfase entre las imágenes, de manera que

si la fuente es un objeto pulsante, como $\Delta T = 2\pi\bar{\theta}r_O$ es el desfase entre anillos, podemos obtener la masa y distancia al agujero negro.

Ya se ha cubierto todo lo referente a lentes gravitacionales para BH con simetría esférica, válidos para Schwarzschild. Pero estos no son los BH que uno puede observar. Recordando el **teorema de no pelo**, un BH quedaba totalmente definido por su carga, masa y momento angular. Si los agujeros negros del universo tuvieran carga eléctrica lo más probable es que atrajeran del medio que les rodea aquellas partículas con carga opuesta, descargándose (descartamos agujeros negros de Reissner-Nörsdtröm y de Kerr-Newmann). No obstante, la conservación del momento angular en la formación de estructuras, desde la formación de galaxias hasta la formación de estrellas, sugiere que los BH que existen en el Universo rotan. De hecho, la mayoría de los BH provienen del colapso de estrellas masivas, y como estas giran, al reducir enormemente su tamaño, el momento angular que acaban teniendo los remanentes (agujeros negros) debe ser muy grande (aunque al cabo de un tiempo efectos como la superirradiación acaban por frenar esta rotación, teniendo los BH finalmente una rotación pequeña). Incluso para los BH supermasivos en los centros de las galaxias es aplicable, pues necesitamos mucha materia en un región concentrada, de forma que es muy improbable que la materia al caer en esa región no acabe rotando. Así, necesitamos saber como deforman el espacio los agujeros negros con masa y momento angular, que están descritos por la métrica de Kerr.

3.6. AGUJERO NEGRO DE KERR COMOLENTE

Un agujero negro de Kerr describe agujeros negros en rotación con $r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ el horizonte de eventos. Se tiene que $a < M$ (con a parámetro de spin) pues sino tendríamos una singularidad desnuda y el principio de censura cósmica no lo permite.

Para el cálculo preciso de la ecuación de lentes en la métrica de Kerr es necesario hacer un tratamiento numérico. El primer paso para ello sería, dada la métrica (véase las coordenadas Boyer-Lindquist [21]) obtener las ecuaciones para las geodésicas de género luz. Se pueden escribir en términos de primeras integrales de movimiento gracias a las constantes de movimiento (J, Q) [21]:

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \pm \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}} \quad (34)$$

$$\phi_f - \phi_i = a \int \frac{r^2 + a^2 - aJ}{\Delta\sqrt{R}} dr - a \int \frac{dr}{\sqrt{R}} + J \int \frac{\csc^2 \vartheta}{\sqrt{\Theta}} d\vartheta, \quad (35)$$

donde

$$\Theta = Q + a^2 \cos^2 \vartheta - J^2 \cot^2 \vartheta; \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (36)$$

$$R = r^4 + (a^2 - J^2 - Q)r^2 + 2M(Q + (J - a)^2)r - a^2Q, \quad (37)$$

La J y Q por tanto nos permiten etiquetar las geodésicas nulas. J es la proyección del momento angular del fotón sobre el eje de rotación, y Q una combinación de los cuadrados de las otras componentes del momento angular del fotón con el momento angular del BH. La primera diferencia que vemos con el caso de Schwarzschild es que **se rompe la simetría esférica** (el spin introduce una dirección privilegiada), de manera que el movimiento de un fotón no tiene porqué estar confinado a un plano. Así, nuestro problema es completamente tridimensional (no podemos eliminar el ángulo polar ϑ).

Estas ecuaciones se pueden expresar en términos de integrales elípticas y resolverse numéricamente [22]. También se puede hacer aproximaciones para WDL [21]⁸ o para SDL [20], pero siguen dando expresiones complicadas así que se tratará el problema de manera cualitativa.

⁸La metodología es igual que la vista, donde la posición de las imágenes cerca de los puntos críticos se escribe como perturbación de los anillos de Einstein.

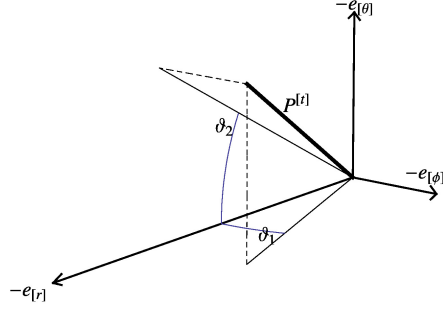


Figura 6: Tomada de [21]. Los ángulos θ_1 y θ_2 son las coordenadas angulares en el cielo del observador localmente plano.

Las ecuaciones (34) y (35) se pueden ver de nuevo como una ecuación de lentes, pues relaciona, para observadores en las regiones asintóticamente planas, las coordenadas de la fuente y el observador con las imágenes que aparecen en el cielo del observador. Por cada par de constantes de movimiento podemos etiquetar cada geodésica, luego la posición donde se detecta el fotón está completamente determinado por J y Q , de forma que:

$$\theta_1 = -J \left(r_O \sqrt{1 - \mu_O^2} \right)^{-1}, \quad (38)$$

$$\theta_2 = \pm r_O^{-1} \sqrt{Q + \mu_O^2 [a^2 - J^2 / (1 - \mu_O^2)]}, \quad (39)$$

con $\mu = \cos \vartheta$, θ_1 la distancia angular desde el centro del agujero negro proyectada ortogonalmente en la dirección del spin y θ_2 la misma distancia angular pero proyectada en la dirección del spin en el cielo, tal y como se muestra en la figura 6. Para la sombra del BH, $(\bar{\theta}_1(\bar{r}), \bar{\theta}_2(\bar{r}))$, buscamos cuando las integrales de (35) diverjan (se recuerda que correspondía a un fotón dando infinitas vueltas), de manera que las geodésicas que se van a acercar asintóticamente a una órbita con radio fijo \bar{r} estarán etiquetadas por unas ciertas constantes de movimiento $\bar{J}(\bar{r})$ y $\bar{Q}(\bar{r})$ [15]. Aunque sean órbitas con \bar{r} fijos, se ha de recordar que se ha roto la simetría esférica, de forma que en función de la inclinación (ϑ) de la geodésica tomada tendremos distintas \bar{r} . Restringiendo el espacio de parámetros de J y Q , restringimos \bar{r} . Para describir geodésicas que se vayan hacia el infinito se requiere $Q \geq 0$ (simplemente la raíz de (39) limita los valores), lo que da lugar a un intervalo finito $[\bar{r}_+, \bar{r}_-]$, donde \bar{r}_+ es el valor más pequeño y corresponde al fotón moviéndose en la misma dirección que el BH, **sentido prógrado**, y \bar{r}_- al contrario, el valor más grande y corresponde a un fotón moviéndose en **sentido retrógrado**. Valores entre estos serán órbitas de diferentes inclinaciones. No obstante, la raíz de \bar{r} , también depende de la posición del observador, de manera que si varía su posición, varían los posibles valores de Q y con ello los valores de \bar{r}_- y \bar{r}_+ . Se puede ver que el rango de $[\bar{r}_+, \bar{r}_-]$ es *máximo* para un observador situado en el ecuador, siendo más pequeño para cualquier otra latitud a través de la ecuación (39).

Para la sombra esperamos recuperar la solución de Schwarzschild (vista con radio $3\sqrt{3}M/r_O$) si $a \rightarrow 0$, de manera que a mayor parámetro de spin, más deformada estará la imagen. El efecto del spin se puede ver en la gráfica 7. El momento angular apunta hacia arriba, y vemos que el efecto que tiene es mover la sombra hacia la derecha, y achatarla por el lado en el que los fotones se mueven con el BH (fotones detectados en la zona izquierda). Los fotones que se mueven junto con el BH pueden acercarse más al BH gracias al **efecto de arrastre** (*frame dragging*), en el que el BH deforma el espacio-tiempo arrastrándolo con su propia rotación. De esta manera son ayudados y se pueden acercar más, viendo ese lado con menor separación angular. En el límite $a \rightarrow M$ (caso extremal) tendríamos que el lado de los fotones prógrados se hubiera aplanado hasta

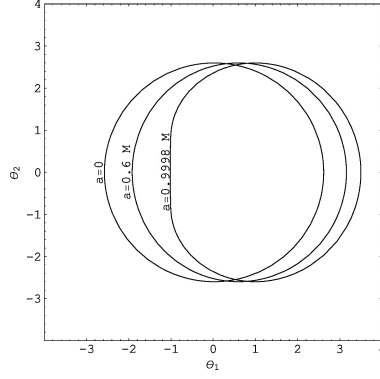


Figura 7: Extraída de [15]. Sombra de un BH vista por un observador asintótico en el plano ecuatorial para distintos valores del spin. θ_1 y θ_2 son las coordenadas angulares en el cielo del observador en unidades de $2M/r_O$. El BH está en el origen y el eje de giro apunta hacia arriba (sentido positivo de θ_2). Apreciamos como la silueta del BH se va deformando a medida que aumentamos el spin. La parte redondeada de la silueta está delineada por fotones que tenían una órbita retrógrada cerca del BH, mientras que la parte recta está delineada por fotones con una órbita prógrada. Se observa a parte de la asimetría el desplazamiento a la derecha según aumenta el spin.

que \bar{r}_+ fuese el horizonte de eventos r_H (ahora se entiende cómo si se sigue aumentando a , se tendría una singularidad desnuda). Gracias a esta desviación, podríamos medir el spin a través de la forma de la sombra de los BH (aunque los discos de acreción pueden perjudicar estas medidas como se comentará en la sección (4)). El observador se encuentra situado en el plano ecuatorial, perpendicular al spin, de manera que si empezásemos a subir hacia el eje de giro veríamos como la sombra se iría desplazando a la izquierda y recuperando la forma circular pues la proyección del spin iría disminuyendo. Si el eje de giro estuviese en nuestra línea de visión, veríamos un círculo perfecto, pero el efecto de arrastre seguiría estando, de manera que la distorsión en las imágenes no sería la de Schwarzschild.

Para el análisis de las imágenes se introduce el concepto de cáustica. Una *cáustica* es la **envolvente** de una familia de rayos luminosos, esto es, aquella curva tangente a cada miembro de la familia de curvas que forman los rayos luminosos. Este concepto es útil pues permite entender de forma sencilla el modelo de lentes. Los anillos de Einstein que se veían en Schwarzschild de hecho son generados como cáusticas de los rayos luminosos. Estudiando las cáusticas podemos ver dónde aparecen y la forma de las nuevas imágenes. De forma matemática, serán las curvas críticas, y por tanto, como tenemos una conexión o cambio de coordenadas entre las coordenadas de la fuente (ϑ_S, ϕ_S) y las de la imagen (θ_1, θ_2), buscaremos que el jacobiano se anule.

En Kerr, las cáusticas como tubos sin grosor (los anillos de Einstein) van a dar lugar a tubos de grosor finito, más concretamente con forma de astroides (un tipo particular de hipocicloide), debido a la pérdida de la simetría esférica (fotones con diferente inclinación con respecto al plano ecuatorial van a evolucionar distinto). El cálculo completo está hecho en [23], donde se acaba viendo que el jacobiano se anula solo una vez en cada vuelta del ángulo polar ϑ , y debido a la dependencia entre dicho ángulo y la distancia a la sombra ϵ (un fotón débilmente desviado sería $\epsilon \gg 1$ y uno muy cercano a la sombra sería $\epsilon \rightarrow 0$), se pueden sacar las posiciones. Visto desde el ecuador, las imágenes adquieren forma de astroide, la cual se hace más acentuada y desplazada a la derecha a órdenes mayores (pasa más cerca del agujero negro y por tanto el efecto del spin se hace cada vez más notorio). De esta manera viendo las imágenes a órdenes mayores, podemos calcular el spin (ya que en las primeras cáusticas las correcciones por el spin son pequeñas), con la desventaja de que son más débiles. De hecho el comportamiento exponencial tanto de la magnificación como

de la posición con respecto a la sombra permanecen, pues las integrales de las geodésicas siguen divergiendo logarítmicamente como en el caso de simetría esférica. A medida que nos vamos alejando del plano ecuatorial, se va reduciendo el desplazamiento así como el grosor y forma de los astroides, recuperando el caso de Schwarzschild. Para curvas cerca de las críticas uno puede desarrollar la lente de Kerr como si fuera una lente circular perturbada por un potencial dipolar y cuadrupolar. Para romper la degeneración entre el spin del BH y su inclinación con respecto al observador es necesario ir más allá del orden lineal en la expansión [23].

4. OBSERVACIONES Y APLICACIONES

Los BH son muy interesantes al ser de los pocos objetos que nos permiten ir más allá del WDL, siendo por tanto una forma de poner a prueba directamente la RG en regímenes donde el campo gravitatorio es muy intenso. Con el análisis llevado a cabo del comportamiento geodésico en torno a los BH, aparecen dos fenómenos que pueden llegar a observarse: lentes gravitacionales con la aparición de imágenes relativistas o el tema de sombras.

El fenómeno de *gravitational lensing* ya sabemos que da lugar a una secuencia infinita de imágenes, las cuales pueden contribuir al flujo percibido por el observador de manera apreciable. La detección de estas imágenes daría información muy valiosa tanto de la física de los BH como de la radiación de fondo. Por desgracia hasta la fecha no se ha detectado este fenómeno para BH. Estrellas cercanas orbitando el BH central supermasivo de M31, así como las propias estrellas de Sgr A*, donde gracias al trabajo como el de Genzel et.al. [24] tenemos una información muy detallada, son unos posibles candidatos. Los más prometedores son las fuentes compactas de rayos X que orbitan Sgr A*, pues a diferencia de las demás estrellas estas poseen un brillo superficial en rayos X incluso superior al de Sgr A*, de manera que solo es cuestión de tiempo que con interferometría de rayos X se logren ver imágenes de este tipo [25]. Así, la medición del tamaño y luminosidad de las imágenes junto con otro tipo de observaciones como movimientos propios de las fuentes o espectroscopía podrían complementarse y obtener mayor información tanto de los BH como del ambiente en torno a estos.

Por otra parte si queremos ser capaces de observar de manera directa la sombra de un BH (se recuerda que no es el horizonte de eventos si no el resultado de iluminar al BH de forma uniforme desde todas las direcciones, incluida la de detrás del observador), deberemos ser capaces de resolver distancias con tamaños angulares $\bar{\theta} = 3\sqrt{3}M/r_O$. En este caso sí que tenemos observaciones, pues el EHT (*The Event Horizon Telescope*) el 10 de abril de 2019 presentó la primera imagen de una observación directa a 1.3mm del núcleo de M87. Toda la información está detallada en 6 papers [2, 3, 4, 5, 6, 7], desde la sombra del BH, hasta los métodos de reconstrucción de la imagen. Para entender la imagen, nos falta tener en cuenta a todo el análisis hecho, los discos de acreción.

En la naturaleza, se espera que los BH existan con **discos de acreción**, formados por el gas y polvo en caída libre del propio material del medio interestelar o incluso de estrellas destruidas en eventos de disrupción de marea. Las turbulencias dentro son tan fuertes que gran parte del gas se carga eléctricamente en plasmas generando campos magnéticos, ayudando a parte del plasma a escapar en los llamados *jets* (gracias a ellos se sabía la existencia del BH en M87). Estas nubes de gas y polvo se arremolinan al entrar, donde debido a la fricción se acaban calentando y emitiendo radiación. La luz que emite el disco orbitando es luz visible y UV en las zonas interiores del disco, la cual podrá caer o escapar dando la estructura de sombra y anillo de luz, aunque no sea exactamente lo que calculamos en (2.1). De hecho las sombras calculadas anteriormente no van a sernos útiles, pues ahora lo que ilumina el BH no son fuentes lejanas de forma uniforme sino este disco.

Por tanto, necesitamos hacer un análisis de lentes gravitacionales para un disco en rotación cercano al BH, donde la emisión de esta materia va a tener un efecto muy importante tanto en

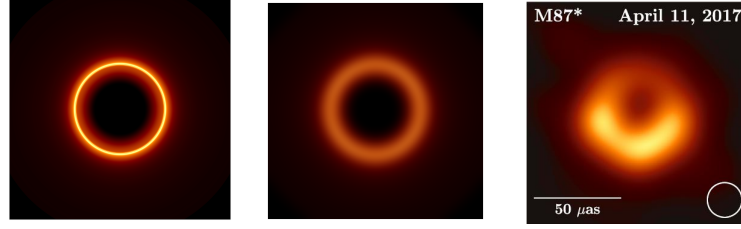


Figura 8: Extraídas de [14] y [2]. A la izquierda: Aspecto que tendría un BH de Schwarzschild iluminado por un disco de emisión delgado y ópticamente delgado que llega hasta el horizonte de eventos, visto frontalmente. Se puede ver el anillo de lente (mínimo 2 vueltas) a unos $5,5M$ mientras que el anillo de fotones a unos $5,2M$ es despreciable (si se hace zoom se llega a apreciar). En el centro: misma imagen que la izquierda tras aplicar un filtro gaussiano simulando la resolución del EHT. El tamaño de este anillo borroso así como el de la sombra dependen fuertemente del perfil de emisión del disco de acreción. La curva crítica $u = 5,2M$ (anteriormente llamada la sombra) no juega ningún papel en la determinación del tamaño de la sombra principal. El tamaño de la sombra es $r \simeq 3M$. A la derecha: Imagen del EHT de la galaxia M87 obtenida como la media de 3 métodos de imagen diferentes después de convolucionar cada uno con un núcleo gaussiano circular para dar la resolución correcta. Vemos como el plasma alrededor del BH lo ilumina a través de la radiación emitida. Se aprecia un lado más brillante debido al efecto combinado del efecto Doppler relativista, movimiento propio de la fuente e inclinación.

los perfiles de emisión que medimos, como en las sombras que veamos. Esto está lejos del objetivo de este trabajo, pero si podemos mencionar los aspectos generales. Si suponemos la emisión de un disco ópticamente fino que llega hasta el horizonte de eventos, la fotosfera va a seguir situada en $3\sqrt{3}M$, pues como vimos en la sección (2.1), esta distancia depende únicamente de la geometría del sistema, de los efectos gravitacionales. No obstante la física de los discos de acreción va a jugar un papel importante en la luminosidad de la imagen. Los rayos de luz que componen el anillo de fotones (término usado para referirse a aquellos fotones que dan mínimo 3 vueltas) pueden orbitar muchas veces a través de la región de emisión y, por lo tanto, van a captar un brillo adicional. Aunque cada vuelta la luminosidad decrece exponencialmente, esta suma puede acabar dando en algunos casos contribuciones no despreciables. Si tenemos en cuenta que el disco de acreción se puede modelar con magnetohidrodinámica relativista (GRMHD), la inclinación de la fuente, el movimiento de esta, la colimación relativista por la rotación del disco y la propia rotación del BH, se puede obtener un modelo lo suficientemente preciso para comparar y extraer información de la imagen del EHT. La foto del EHT, así como un modelo simple de BH con disco de acreción se muestran en 8. Como el BH de M87 posee un disco de acreción que se extiende hasta el horizonte de eventos, se ha cogido el modelo en el cual la emisión del disco llega hasta el horizonte. No obstante no todos los BH van a tener el mismo disco de acreción, de forma que en función de su perfil de emisión escogeremos un modelo u otro. Ejemplos de diferentes modelos se pueden consultar en [14].

El análisis de este tipo de imágenes permite mejorar la comprensión de la física del disco y estimar una masa del objeto compacto. Además, se recuerda que la existencia de un potencial efectivo que actuaba de “acumulador” permitía que a través de las curvas críticas se generase una sombra y una emisión de luz en forma de anillos. Es por ello que otro tipo de objetos compactos poseen también este tipo de estructura, así que podemos usar este tipo de imágenes para ver posibles desviaciones de la sombra con respecto a la que tendrían otros objetos compactos.

5. CONCLUSIONES

Se han analizado los principales comportamientos de las trayectorias lumínicas en torno a los agujeros negros. Para ello se ha comenzado con el planteamiento de las ecuaciones geodésicas para un BH de Schwarzschild, donde gracias a las simetrías del problema se ha conseguido reducirlo a un problema de una dimensión. Para partículas masivas existían órbitas estables si $1 \geq 12(GM/L)^2$, pues el potencial efectivo poseía un mínimo, no siendo nunca inferior a $r = 6GM$. Para fotones en cambio no existían órbitas estables, solo inestables para $r = 3GM$. En caso de trayectorias para haces individuales de luz que se aproximasen mucho a las críticas, los fotones podían llevar a cabo un número arbitrario de vueltas, apareciendo los conceptos de sombra y fotoesfera.

Con todo el formalismo planteado tratábamos el tema de lentes gravitacionales observando el comportamiento de la variable angular, llegando a la ecuación de lentes, que nos relacionaba la geometría del sistema con la posición de las imágenes en el cielo del observador. Debido a la posibilidad de desviar de manera indefinida la luz, los BH eran capaces de generar dos conjuntos de imágenes infinitas, cada una correspondiente a un número de vueltas. Estas se iban acercando o alejando de la sombra en función de la posición relativa de la fuente con respecto al observador. A mayor orden, la magnitud de las imágenes decrecía exponencialmente y se encontraba exponencialmente más cerca de la sombra del BH. Veíamos diversas aproximaciones para entender de forma sencilla estos comportamientos, apareciendo el WDL y el SDL. Cada uno permitía descartar diversas teorías de la gravedad a través de la posición de las imágenes que dependían de los coeficientes de la métrica.

Tratábamos de forma cualitativa el caso de los BH en rotación, que deberían representar a los BH existentes en el Universo. Los principales resultados fueron el aplanamiento de la sombra del BH debido al efecto de arrastre que permitía a los fotones que se movían en sentido prógrado acercarse más al BH. En función de las cáusticas uno podía intuir la forma de las imágenes.

Por último se veían posibles observaciones de estos fenómenos y qué información se podría extraer de ellos. Para el caso de lentes gravitacionales se esperaba que gracias a las LMXB de Sgr A* se detecten las primeras imágenes relativistas. Para el caso de las sombras se analizaba la foto obtenida por el EHT y se mencionaba el efecto de los discos de acreción.

Estamos viviendo el inicio de una era donde gracias al desarrollo tecnológico que va desde potentes simulaciones numéricas hasta la mejora en la resolución de las observaciones a través de colaboraciones internacionales que permiten técnicas de VLBI, se está consiguiendo testear la RG en régimen de campo fuerte. Los BH son unos candidatos excelentes para comprobar las predicciones de la RG en este régimen así como lugares naturales donde buscar discrepancias entre estas predicciones y las de otras teorías modificadas de la gravedad.

La observación de sombras y anillos de luz va a ser una de las temáticas protagonista en los próximos años, siendo una herramienta ideal para verificar la solución de Kerr como una representación fiel de la naturaleza de los BH. La existencia de una sombra y una emisión de luz en forma de anillos no se limita a los BH, de manera que el análisis de estas estructuras brinda la oportunidad de verificar la existencia en la naturaleza de objetos ultra compactos diferentes de los BH, que van desde singulares desnudas en espacio-tiempos de Kerr deformados [26], hasta agujeros negros de gusano [27]. Así mismo, los anillos y sombras van a ayudar también en la comprensión de la física de los discos acreción, así como en la física de horizontes.

La mejora en observaciones de alta resolución va a permitir también observar el fenómeno de lentes gravitacionales para BH. La medición y caracterización de las imágenes relativistas de fuentes cuya luz ha sido desviada por los BH nos dará información muy valiosa sobre estos campos gravitacionales intensos, abriendo una puerta para contrastar resultados teóricos con observaciones. Las LMXB de Sgr A* son fuentes prometedoras para detectar este fenómeno. Estas y más observaciones como patrones de ondas gravitacionales de BH [28] están permitiendo mejorar la forma en la que entendemos la física de la interacción gravitatoria.

Referencias

- [1] V. Bozza, F. De Luca, G. Scarpetta, M. Sereno (2018), [arXiv:gr-qc/0604093v2]
- [2] Event Horizon Telescope Collaboration, K. Akiyama et. al., First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole L1 (2019), [arXiv:1906.11238v1].
- [3] First M87 EHT Results. II. Array and Instrumentation,L2.
- [4] First M87 EHT Results. III. Data Processing and Calibration,L3.
- [5] First M87 EHT Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole, L4.
- [6] First M87 EHT Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring,L5.
- [7] First M87 EHT Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole, L6.
- [8] Scott Hughes. 8.962 General Relativity. Spring 2020. MIT OpenCourseWare
- [9] Gravitation and Cosmology by Steven Weinberg 13.1
- [10] Gravitation and Cosmology by Steven Weinberg 8.6 page 197
- [11] Gravitation and Cosmology by Steven Weinberg 8.5 page 194
- [12] Gravitation and Cosmology by Steven Weinberg 5.53
- [13] Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity by Sean M. Carroll 5.7
- [14] Samuel E. Gralla, Daniel E. Holz y Robert M. Wald (2019), [arXiv:1906.00873v2]
- [15] Valerio Bozza (2010), [arXiv:0911.2187v2]
- [16] C. Darwin, Proc. of the Royal Soc. of London A, 249, 180 (1959).
- [17] R. Nemiroff, Am. Jour. Phys., 61, 619 (1993).
- [18] H.C. Ohanian, Am. J. Phys., 55, 428 (1987).
- [19] J. Ebina, T. Osuga, H.Asada y M. Kasai et.al. Prog.of.Th.Phys. 104, 1317(2000).
- [20] V. Bozza y G. Scarpetta, Phys. Rev. D, 76, 083008 (2007), [arXiv:0705.0246v2] .
- [21] M. Sereno y F. De Luca, Phys. Rev. D, 78, 023008 (2008), [arXiv:0710.5923v2]
- [22] K.P. Rauch y R.D. Blandford, ApJ, 421,46 (1994).
- [23] V. Bozza (2008), [arXiv:0806.4102v2]
- [24] Eisenhauer, Genzel et.al. (2005), [arXiv:astro-ph/0502129v1]
- [25] V. Bozzaa, De Luca, G. Scarpettab y M. Sereno (2005), [arXiv:gr-qc/0507137v2]
- [26] Kanwar Preet Kaur, Pankaj S. Joshi (2021), [arXiv:2106.13175v1]
- [27] Guerrero, Merce and Olmo, Gonzalo J. y Rubiera-Garcia, Diego (2021),[arXiv:2102.00840v1]
- [28] Abbott et.al. (2016), [arXiv:1602.03838v1]