MASTER SIANI ULPGC
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Sergio Marrero Marrero
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

11/03/2016

Tabla de materias

1 Introducción

En este documento hay cuatro problemas resueltos de cálculo matricial. Se han realizado con el objetivo de superar la parte de ‘Analisis Matricial’ impartida por el profesor Luis González de la asignatura ‘Fundamentos Matemáticos’ del primer cuatrimestre del máster universitario SIANI, durante el transcurso del año académico 2015/2016.

A lo largo de estos cuatro problemas se ha dado un ‘pequeño paseo’ por el álgebra lineal, rotando sobre el concepto de los espacios prehiltberianos y las operaciones que en él se pueden realizar, subrayando entre estas ‘la norma y el producto escalar en el sentido de Frobenius’.

Se ha intentado resolver cada problema abordando previamente el contenido conceptual del mismo. Por esta razon cada ejercicio viene acompañado de la teoría que me ha servido para darle solución.

Para abordar esta tarea me ha sido de gran ayuda los libros ‘Álgebra Lineal Aplicada’ de Ben Noble y James W. Daniel, ‘Álgebra Lineal y sus aplicaciones’ de Gilbert Strang y finalmente, los apuntes tomados durante las lecciones del profesor Luis González.Dichas lecciones y lecturas me ayudaron bastante a comprender conceptos del álgebra que no había conseguido comprender correctamente hasta ahora.

2 Especificaciones del trabajo.

Sea la matriz $A_{3\times3} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ y sea la matriz $B_{3\times3} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ ambas dependientes del parámetro $a\,(\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ siendo en este caso $a = 3$

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & a & 3 \\ a & 0 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = 3.$$

Se pide resolver las siguientes cuestiones.

1. Hallar la norma de Frobenius de A de tres formas diferentes

2. Comprobar que las matrices A y B son ortogonales. Comprobar además el teorema de Pitágoras

3. Hallar la matriz simétrica que más se aproxima a A (en el sentido de Frobenius)

4. Comprobar si A es diagonalizable, tanto en el sentido ordinario,ortogonalmente y unitariamente

3 Hallar la norma de Frobenius de A de tres formas diferentes

3.1 Breve introducción teórica

Sea espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ provisto de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces se tiene un espacio prehilbertiano o prehiltber. Este espacio es un tipo de espacio métrico, con la métrica inducida por la norma, que como veremos ahora puede definirse a partir de dicho producto escalar. Si el espacio prehiltberiano es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge, se dirá que es un espacio hiltberiano o Hiltber.
El producto escalar en el sentido de Frobenius, entre dos elementos cualquiera del espacio V viene a definirse de las tres formas siguientes.

$$\langle A, B \rangle_F = tr(A \cdot B^T) \tag{1}$$

$$\langle A, B \rangle_F = tr(A^T \cdot B) \tag{2}$$

$$\langle A, B \rangle_F = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \tag{3}$$

La primera y segunda expresión están estrechamente relacionadas, ya que

$$\langle A, B \rangle = tr(A \cdot B^T) = tr(B^T \cdot A) = tr((B^T \cdot A)^T) = tr(A^T \cdot B)$$

por otro lado, inducimos la norma de Frobenius a partir del producto escalar tal y como sigue:

$$\parallel A \parallel_F = +\sqrt{\langle A, A \rangle_F} \tag{4}$$

Combinando (4) con (1),(2) y (3), la norma de Frobenius de la matriz A vendrá definida como :

$$\| A \|_F = +\sqrt{tr(A \cdot A^T)}; \quad \| A \|_F = +\sqrt{tr(A^T \cdot A)}; \quad \| A \|_F = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \tag{5}$$

3.2 Resolución del problema

3.2.1 Norma de Frobenius usando la primera definición.

El producto $A \cdot A^T$:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\| A \|_F = +\sqrt{tr(A \cdot A^T)} = \sqrt{17 + 9 + 5} = \sqrt{31}$$

3.2.2 Norma de Frobenius usando la segunda definición.

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\| A \|_F = +\sqrt{tr(A \cdot A^T)} = \sqrt{20 + 9 + 2} = \sqrt{31}$$

3.2.3 Norma de Frobenius usando la tercera definición.

$$\| A \|_F = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 3^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{31}$$

---

4 Comprobar que las matrices A y B son ortogonales. Comprobar además el teorema de Pitágoras

4.1 Comprobacion de la ortogonalidad entre A y B

Dos elementos cualesquiera de V serán ortogonales entre sí, si se cumple lo siguiente:

$$A \perp B \Leftrightarrow \langle A, B \rangle_F = 0 \qquad \forall\, A, B \in V \tag{6}$$

Aplicando esta definición, se procede a comprobar que la matriz A y la matriz B son ortogonales:

$$A \perp B \Leftrightarrow \langle A, B \rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = (4 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

Se comprueba que A y B estas matrices son ortogonales.

4.2 Comprobacion del Teorema de Pitágoras

Se desea demostrar que:

$$A \perp B \rightarrow \ \parallel A + B \parallel^2 = \parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2 \tag{8}$$

Para demostrarlo desarrollamos los términos en su definición de productos escalares:

$$\parallel A+B \parallel^2 = \langle A+B, A+B\rangle = \langle A,A\rangle + 2\langle A,B\rangle + \langle B,B\rangle$$

la hipótesis es que A y B son ortogonales, por esta razón el término $2\langle A,B\rangle = 0$ y por ende:

$$\parallel A+B \parallel^2 = \parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2$$

Aplicando ahora este concepto a nuestras matrices A y B se tendrá que:

$$\parallel A+B \parallel_F^2 = \parallel A \parallel_F^2 + \parallel B \parallel_F^2$$

Utilizando la norma de A, calculada en el primer ejercicio se tendrá:

$$\parallel A \parallel_F^2 = (\sqrt{31})^2 = 31$$

Calculando ahora la norma de B se tendrá:

$$\parallel B \parallel_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2} = \sqrt{(-1)^2+3^2+3^2+3^2+0^2+3^2+1^2+3^2+3^2} = \sqrt{56}$$

$$\parallel B \parallel_F^2 = (\sqrt{56})^2 = 56$$

Con lo cual, se tendrá que:

$$\parallel A+B \parallel_F^2 = 31+56 = 87$$

Haciendo ahora:

$$\| A + B \|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})^2$$

$$= (4 + (-1)^2) + (0 - 3)^2 + (1 + 3)^2 + (0 - 3)^2 +$$

$$(3 - 0)^2 + (0 - 3)^2 + (-2 + 1)^2 + (0 + 3)^2 + (1 + 3)^2 = 87$$

Con lo que se comprueba para las matrices A y B el teorema de Pitágoras.

5 Hallar la matriz simétrica que más se aproxima a A (en el sentido de Frobenius)

5.1 Series de Fourier

5.1.1 Breve introducción teórica

Sea el espacio prehiltberiano formado por el espacio vectorial V de dimension m y su producto escalar. Sea S el subespacio de V de dimension n generado por un conjunto de vectores V_0 (todos ellos diferentes del vector cero)

$$V_0 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} ..., \mathbf{v_q}\} \tag{9}$$

Para cualquier $\mathbf{x}$ en V se define la proyección ortogonal $\mathbf{P}_0$ sobre S como sigue:

$$\mathbf{P_0 x} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} ... + \alpha_q \mathbf{v_q} \qquad \textit{donde} \;\; \alpha_i = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \tag{10}$$

El teorema de la mejor aproximacion demuestra que para $\forall \mathbf{x} \in V$ sucederá que $\exists_1 \mathbf{s} \in S$ tal que $\mathbf{min} \parallel \mathbf{x} - \mathbf{s} \parallel = \parallel \mathbf{x} - \mathbf{u} \parallel$, siendo $\mathbf{u}$ el elemento de S que mas se aproxima a $\mathbf{x}$. Aunque ya se ha dicho, cabe recalcar que $\mathbf{u}$ es único. Siendo esto así, entonces se cumple que $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ es ortogonal a todo elemento $\mathbf{s}$ de S. Esto significa que $\langle \mathbf{x} - \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle = 0$.

Si partimos de la premisa de que el conjunto de vectores ortogonales que engendra el espacio S además de ser ortogonales entre sí, son normales, podemos rescribir la ecuacion (10) como sigue:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e_i} \tag{11}$$

Siendo entonces $E = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_i}, ..., \mathbf{e_n})$ una base ortonormal que genera el subespacio vectorial S.

5.1.2 Resolucion del problema

Sea la matriz $A_{3\times3} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ se desea encontrar la mejor aproximación U de A en el subespacio $S_{3\times3} \subset M_{3\times3}$ de las matrices simétricas.

Aplicando series de Fourier (ecuación 11) podemos resolver este problema. Para llevar a cabo esto necesitamos conocer una base ortonormal que forme el subespacio S de las matrices simétricas. Buscamos una base ortogonal que engendre el subespacio S_{3x3}. La matriz $A_s \in S$ representa perfectamente a cualquier matriz de dicho espacio:

$$A_s = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

Obsevándola con atención se puede ver que sólamente depende de 6 parámetros. Por esta razón, el subespacio de las matrices simétricas tendrá dimensión 6 y por ello, una base de este espacio estará formada por 6 elementos.Cabe resaltar aquí que una base generadora de un espacio vectorial, está compuesta por tantos elementos como dimensión tiene dicho espacio, o visto de una forma bastante más intuitiva, la dimensión de un espacio vectorial es idéntica al número de parámetros libres necesarios para definir un elemento de dicho espacio. Cualquier elemento A_s del espacio de las matrices simétricas se podrá expresar como el resultado de una combinación lineal de dicha base, tal y como se ve a continuación:

$$\mathbf{A_s} = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2} + c\mathbf{e_3} + d\mathbf{e_4} + e\mathbf{e_5} + f\mathbf{e_6} \tag{12}$$

Los elementos $\mathbf{e_i}$ de la base son:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para poder aplicar la ecuacion (11) la base debe de ser ortogonal y estar normalizada, es decir, ortonormal.

Para comprobar que la base es ortogonal se deberá verificar para todos los pares de la base que $\langle \mathbf{e_i}, \mathbf{e_j} \rangle_F = 0 \quad \forall i \neq j$. Se omite la demostración, pero se verifica para todo elemento dos a dos de la base.

Los tres primeros elementos de la base están normalizados, pues su norma es la unidad. Se comprueba como sigue:

$$\| \mathbf{e_1} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(1^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0)} = 1;$$

$$\| \mathbf{e_2} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(0 + 0 + 0 + 0 + 1^2 + 0 + 0 + 0 + 0)} = 1;$$

$$\| \mathbf{e_3} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1^2)} = 1;$$

Sin embargo, los tres últimos elementos no están normalizados:

$$\| \mathbf{e_4} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(0+1^2+0+1^2+0+0+0+0+0)} = \sqrt{2};$$

$$\| \mathbf{e_5} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(0+0+1^2+0+0+0+1^2+0+0)} = \sqrt{2};$$

$$\| \mathbf{e_6} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{(0+0+0+0+0+1^2+0+1^2+0)} = \sqrt{2};$$

Con lo cual, estos elementos tendrán que estar divididos por su propia norma para que se pueda hablar de una base ortonormal.

$$\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la ecuacion (11) calculamos la mejor aproximación en el espacio S de la matriz A, tal y como se explica a continuación.

$$\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{m}\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_i\rangle\mathbf{e_i}=\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e_1}+\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_2\rangle+\mathbf{e_2}\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_3\rangle+\mathbf{e_3}\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_4\rangle+\mathbf{e_4}\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_5\rangle+\mathbf{e_5}+\langle\mathbf{A},\mathbf{e}_6\rangle\mathbf{e_6}$$

Con lo cual, calculando cada uno de estos por separado tenemos las siguientes operaciones:

$$\langle A,\mathbf{e}_1\rangle_F\mathbf{e_1}=\langle\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\langle A,\mathbf{e}_2\rangle_F\mathbf{e_2}=\langle\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\langle A,\mathbf{e}_3\rangle_F\mathbf{e_3}=\langle\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\langle A,\mathbf{e}_4\rangle_F\mathbf{e_4}=\langle\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\langle A,\mathbf{e}_5\rangle_F\mathbf{e_5}=\langle\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\langle A, \mathbf{e}_6 \rangle_F \mathbf{e_6} = \langle \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora sumandolas todas, obtenemos nuestra mejor aproximacion U:

$$U = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e_i} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El problema ya ha sido resuelto, pues el objetivo es calcular U. Vamos a suponer que también se requiere saber cuanto distan ambas matrices. La distancia entre ambas matrices será también la mínima distancia que habrá entre el subespacio S y la matriz A.

$$\begin{aligned} d(A,S) &= d(A, P_S A) = d(A,U) = \|A-U\|_F \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_F = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

con lo que

$$d(A,S) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Otra forma de resolver este problema se explica a continuación.

5.2 Teorema de la descomposición ortogonal

5.2.1 Breve introducción teórica

Sea S un subespacio de V, entonces todo vector de V puede escribirse de manera única como suma de dos vectores. Uno de estos vectores se encuentra en el subespacio S y el otro en el subespacio H, que es ortogonal a S.

$$x = s \oplus s^{\perp} \qquad s \in S, s^{\perp} \in H \;\; / \;\; S^{\perp} = H \tag{13}$$

La dimension del espacio V será :

$$dim(V) = dim(S) + dim(H) \tag{14}$$

Este teorema nos permite descomponer la matriz A en suma directa de dos matrices que son ortogonales entre sí. Debido a que esta suma es única, estas dos matrices deben de coincidir con la proyección ortogonal y con su complemento ortogonal. Es decir, rescribimos la ecuacion (13) como sigue:

$$A = U \oplus (X - U) \tag{15}$$

Siendo A la matriz de nuestro problema que pertecene a M_{3x3}, siendo $U \in S$ la mejor aproximación de U en el subespacio de las matrices simétricas y siendo $A - U \in H$ la matriz ortogonal a $U \in S$ que como se demostrará a continuación, coincide con la mejor aproximación al subespacio de las matrices antisimétricas, siendo este subespacio el complemento ortogonal del subespacio de las matrices simétricas $S^{\perp} = H$.

Se demuestra a continuación que el complemento ortogonal de las matrices simétricas son las antisimétricas:

$$A_s \in S, A_{ant} \in H \Rightarrow \langle A_s, A_{ant} \rangle = 0$$
$$tr(AB^T) = -tr(AB) = -tr(A^T B) = -tr(AB^T) = \langle A, B \rangle$$

y por lo tanto

$$2\langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle A, B \rangle = 0$$

Lo que demuestra que un espacio es el complemento ortogonal del otro. Por otro lado, nos valemos de la siguiente relación algebráica que permite descomponer una matriz cuadrada cualquiera en la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$A = A_{sim} + A_{ant}$$

en donde

$$A_{sim} = \frac{1}{2}[A + A^T] \text{ y } A_{ant} = \frac{1}{2}[A - A^T]$$

Debibo al teorema de la descomposición ortogonal, esta construcción debe de ser única, la matriz simétrica resultante es por tanto U y la matriz antisimétrica resultante es $A - U$.

$$A_{sim} = U \qquad A_{ant} = A - U$$

5.2.2 Resolucion del problema

Operando se tiene:

$$U = \frac{1}{2}[A + A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - U = \frac{1}{2}[A + A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que las matrices son idénticas a las obtenidas en el apartado anterior. De la misma forma, la distancia mínima a la que se encuentran será a través de la norma $\| A - U \|$, realizada en el apartado anterior.

Se puede comprobar que la $dim(M_{3x3}(\mathbb{K})) = dim(S_{3x3}) + dim(H_{3x3})$. En este caso, V tiene dimension 9, las matrices simétricas tienen dimension 6 y por ende, las matrices antisimétricas deben tener dimensión 3. Examinemos su veracidad.

Una matriz antisimétrica es aquella que cumple que $Q = -Q^T$. Su representante será A_{ant} que parametrizada tiene la siguiente forma:

$$A_{ant} = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Como se dijo mas atrás, la dimensión de un espacio vectorial coincidía con el número de parámetros libres necesarios para formar un elemento. Observando A_{ant} la inferencia es inmediata, su dimensión es 3, tal y como habíamos previsto.

---

6 Comprobar si A es diagonalizable, tanto en el sentido ordinario,ortogonalmente y unitariamente.

6.1 Diagonalizable en el sentido ordinario

Veamos si A es diagonalizable (en sentido ordinario). La matriz característica de A es:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

La ecuación característica de A es:

$$p(\lambda) = (a-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$$

Las raíces características o autovalores (eigenvalues) de A son:

$$(a-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0 \rightarrow \lambda_1 = a, \lambda_1 = 2, \lambda_1 = 3$$

El espectro (conjunto de autovalores) de A es:

$$\sigma(A) = \{a, 2, 3\}.$$

El Teorema de caracterización de las matrices diagonalizables afirma que A es diagonalizable en $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ si y sólo si $\sigma(A) \subset K$ y para cada autovalor, su multiplicidad geométrica coincide con (o alcanza a) su multiplicidad algebraica. Basta comprobarlo para los autovalores múltiples.

Los valores problemáticos del espectros son cuando $a = \lambda_i$ $(i = 2, 3)$. Para cualquier otro valor se puede comprobar que A es diagonalizable. Comprobemoslos para estos valores problematicos. La multiplicidad algebraica de λ_i $(i = 2, 3)$ es $\alpha = 2$. La multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda_i (i = 2, 3)$ es:

$$m.g. (\lambda_i \ (i = 2, 3)) = \dim (S_\lambda) = n - r (A - \lambda I)$$

$$= 3 - r (A - I) = 3 - r \begin{pmatrix} 4 - \lambda_i & 0 & 1 \\ 4 & \lambda_i - \lambda_i & 0 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Se comprueba aqui que la multiplicidad geométrica alcanza a la algebráica, $m.g. (\lambda_i) = m.a. (\lambda_i) = 2$, con lo cual, la matriz A es diagonalizable para cualquiera de los dos valores problemáticos de a.

6.2 Diagonalizable ortogonalmente y unitariamente

Ahora debemos comprobar si A es diagonalizable ortogonalmente y unitariamente. Para esto nos valdremos de lo siguiente:

1) El teorema espectral en $\mathbb{R}$ afirma que A es diagonalizable ortogonalmente sí y solo sí A es simétrica.

2) El teorema espectral en $\mathbb{C}$ afirma que A es diagonalizable unitariamente sí y solo sí A es normal.

Por esta razón se deduce de ejercicios anteriores que A no es diagonalizable ortogonalmente, ya que no es simetrica. $(A \neq A^T)$

Para comprobar si A es diagonalizable unitariamente debemos comprobar si A es normal. Una matriz es normal si cumple que $AA^* = A^*A$. La matriz

A^* es la matriz transpuesta conjugada,tambien conocida como la matriz adjunta de A.Esta matriz se obtiene mediante la transpuesta de A y después su conjugada compleja. La matriz conjugada se obtiene sustituyendo los elementos de la matriz por sus conjugados. Debido a que nuestra matriz A está definida en $\mathbb{R}$, la matriz transpuesta conjugada coincide con la transpuesta $A^* = A^T$. Comprobamos pues si es normal:

$$AA^* = A^*A$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & -7 \\ 0 & a^2 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo cual es falso, es decir $AA^* \neq A^*A$ por tanto la matriz A no es normal y por alusión al teorema espectral en el dominio complejo, no es diagonalizable unitariamente.
