MASTER SIANI ULPGC
Fundamentos matemáticos
Cadenas de Markov y simulación de variables aleatorias

Sergio Marrero Marrero
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

29/03/2016

Índice

1. Introducción

En esta memoria se desarrollan tres problemas de la parte de *‘ Cadenas de Markov y Simulación de Variables aleatorias’* de la asignatura *‘Fundamentos Matemáticos’*, impartida por el profesor Fernando Espiau Castellano, del primer cuatrimestre del máster universitario SIANI, durate el transcurso del año académico 2015/2016.

Para abordar la asignatura, aparte de las diapositivas, apuntes y notas tomadas en clases, se realizaron distintas consultas bibliográfica. Títulos como ‘*Cálculo de probabilidades 1, Autores: Ricardo Vélez Ibarrola, Víctor Hernández Morales’* y *‘Lecciones de cálculo de probabilidades, Autores:Vicente Quesada,Alfonso García’* sirvieron de gran apoyo para contextualizar la problemática que se iba a abordar y hacer una introducción con mayor profundidad y rigor matemático en los conceptos mas básicos de la asignatura, como los espacios probabilísticos, $\sigma-$álgebra, variables aleatorias, etc.

El estudio de las cadenas de Markov se llevó a cabo con la ayuda del libro *‘Cadenas Finitas de Markov y sus aplicaciones, Autores:P.Gordon’*. Aunque en mayor medida ayudó a comprender algunos aspectos de las cadenas e incluso a ampliar algunos conocimientos, en cierta medida retrasó el avance del trabajo, debido a que las definiciones y teoremas que en el se desarrollan no tenían una correspondencia directa, clara y precisa con aquellas que estudiamos en clase.

En general, se ha intentado responder a las preguntas con su debida argumentación teórica.Con esto se da paso a la resolución de los ejercicios propuestos.

2. Primer Problema

Suponga que toda la industria de refrescos produce dos colas: Coca-Lola y Pepsi- Loca. Cuando una persona ha comprado Coca-Lola hay una probabilidad del 90 % de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi-Loca, el 80 % de las veces repite en la próxima compra. Se pide:

2.1. Obtenga la matriz de transición

En primer lugar construimos la siguiente tabla, que expresa las probabilidades de estar en E_i y transitar a E_j en una transición. El estado de partida se coloca en la posición de las filas y el de llegada en las columnas. Esta forma de escribirse tiene sentido si se tiene en cuenta que habitualmente el índice de la fila se enuncia primero.

	C	P
C	0.9	0.1
P	0.2	0.8

Cuadro 1: Representación tabular de las probabilidades de transición

La matriz de transición es simplemente la representación matricial de la tabla que se acaba de presentar. Llamémosla P:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matriz de transición de una cadena de Markov es una matriz estocástica. Vamos a ver si se verifican las propiedades de matriz estocástica:

1. Sus términos son positivos o nulos.

$$p_{ij} \geq 0$$

2. La suma de los términos de cada fila vale 1.

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$$

Basta con mirar por encima la matriz P de nuestro problema, para observar que se verifica la propiedad uno. La segunda propiedad también se verifica, ya que sumando las componentes de sus filas da la unidad,tal y como se esperaba:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aunque no se demostrará, estas matrices también cumplen con esta propiedad

3. El producto de dos matrices estocásticas dan como resultado otra matriz estocástica. En particular las potencias de P son matrices estocásticas.

2.2. Construya el diagrama de estados.

Siendo los dos posibles estados: { comprar Cola, comprar Pepsi } = $\{E_1, E_2\}$ tenemos:(Figura 1)

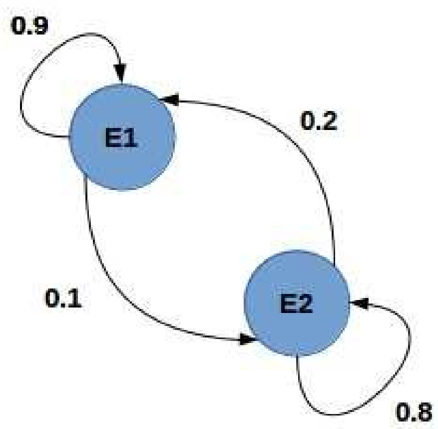


Figura 1: Grafo 1

2.3. Clasifique los estados del sistema (recurrencia, periodicidad, ergodicidad)justificando la respuesta.

Teniendo en cuenta que:

1. Una cadena de Markov es ergódica si y solo sí tiene distribución límites, es decir:

$$X \text{ es ergódica } \Leftrightarrow \exists \pi \text{ sobre } E / \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} \mu_0 P^n = \pi$$

2. El teorema de Perron-Frobenius afirma que una cadena de Markov es ergódica sí y solo sí la cadena tiene una única clase irreducible de estados recurrentes no nulos y aperiódicos(estados ergódicos).

Con lo cual, si verificamos lo primero, entonces bajo el teorema de Perron-Frobenius, los estados de esta cadena serán recurrentes no nulos y aperiódicos.

Para verificar lo primero hacemos lo siguiente.La matriz P^n la podremos descomponer en la siguiente multiplicación de matrices:

$$P^n = C \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} C^{-1}$$

donde C es la matriz compuesta por los autovectores de la matriz P, C^{-1} es su inversa y λ_i son los autovalores de la matriz P.

Calculamos los autovalores del sistema:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0{,}7$$

las matrices C y C^-1 son:

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}70711 & -0{,}44721 \\ 0{,}70711 & 0{,}89443 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}94281 & 0{,}47140 \\ -0{,}74536 & 0{,}74536 \end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$P^n = \begin{pmatrix} 0{,}70711 & -0{,}44721 \\ 0{,}70711 & 0{,}89443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}94281 & 0{,}47140 \\ -0{,}74536 & 0{,}74536 \end{pmatrix}$$

En el límite hacia el infinito se tendrá que:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0{,}70711 & -0{,}44721 \\ 0{,}70711 & 0{,}89443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}94281 & 0{,}47140 \\ -0{,}74536 & 0{,}74536 \end{pmatrix}$$

Resolviendo queda:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida tiene las filas iguales, con lo cual existe la distribución límite y la cadena ergódica. Se demuestra a continuación cómo una matriz estocástica con todas las filas iguales implica la existencia de dicha distribución límite: (de forma generalista):

$$\mu_n = \mu_0 P^n = (\mu_{01} \;\; \mu_{02}) \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = (a\mu_{01} + a\mu_{02} \;,\; b\mu_{01} + b\mu_{02})$$

Como $\mu_{01} + \mu_{02} = 1$ sacando factor común:

$$\mu_n = (a \;,\; b) = \pi$$

Demostrada la primera definición, del teorema de Perron-Frobenius se puede inferir con toda seguridad que los estados E_1, E_2 son ergódicos, es decir, recurrentes no nulos y aperiódicos.

2.4. Si una persona actualmente es compradora de Pepsi-Loca. ¿ Cual es la probabilidad de que compre Coca-Lola pasadas dos compras a partir de hoy?

Siendo μ_{m+n} la ley de probabilidad sobre el conjunto de estados E_i, esta dependerá del estado μ_m tal que así:

$$\mu_{m+n} = \mu_m P^n$$

Haciendo $m = 0$ se tendrá:

$$\mu_n = \mu_0 P^n$$

Es decir, el futuro de la cadena de Markov vendrá determinado por la matriz de transiciones y por la ley de probabilidades sobre E_i inicial.

Para resolver este problema simplemente se hará[1].:

$$\mu_2 = (0 \;\; 1)P^2 = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix} = (0{,}34 \;\; 0{,}66)$$

La probabilidad será de un 34 %

2.5. Si en la actualidad una persona es compradora de Coca-Lola. ¿Cual es la probabilidad de que compre Coca-Lola pasadas tres compras a partir de ahora?

Siguiendo el mismo razonamiento anterior se tiene ahora que:

$$\mu_3 = (1 \;\; 0)P^3 = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}562 \end{pmatrix} = (0{,}781 \;\; 0{,}219)$$

La probabilidad será de un 78,1 %

[1] Cabe señalar que la distribución de probabilidad inicial dada indica la certeza de estar en un estado, en este caso de estar en E_2, con lo cual no sería necesario multiplicar por el vector μ_0, ya que la propia potencia $n - sima$ de la matriz contendrá la información de estar en un estado E_i y pasar a E_j en n transiciones. Sin embargo me parece apropiado multiplicarlo por μ_0 para seguir con la estructura explicada lineas arriba

2.6. Supongamos que el 60 % de toda la gente toma hoy Coca-Lola y el 40 % Pepsi-Loca. A tres compras a partir de ahora, ¿Que fracción de los compradores estará tomando Coca-Lola?

Siguiendo el mismo razonamiento anterior se tiene ahora que:

$$\mu_{3*} = (0{,}6 \;\; 0{,}4)P^3 = (0{,}6 \;\; 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}562 \end{pmatrix} = (0{,}6438 \;\; 0{,}3562)$$

La fracción será un 64.38 %

2.7. Determinar la ley invariante si la hubiere.

La ley invariante es aquella distribución de probabilidades que no se ve afectada al ser multiplicada por la derecha por la matriz P. Esto significa que la distribución de probabilidades no varía de una etapa a otra. Es decir, sea π una distribución de probabilidades sobre el conjunto de estados E, es una ley invariante para la matriz de transición P $\Leftrightarrow$ $\pi P = \pi$. Para calcular dicha distribución de probabilidades hacemos lo siguiente:

$$(\pi_1 \;\; \pi_2) = (\pi_1 \;\; \pi_2)P = (\pi_1 \;\; \pi_2)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (\pi_1 0{,}9 + \pi_2 0{,}2 \;,\; \pi_1 0{,}1 + \pi_2 0{,}8)$$

Es decir, se tiene que:

$$(\pi_1 \;\; \pi_2) = (\pi_1 0{,}9 + \pi_2 0{,}2 \;,\; \pi_1 0{,}1 + \pi_2 0{,}8)$$

o bien,

$$(0 \;\; 0) = (-\pi_1 0{,}1 + \pi_2 0{,}2 \;,\; \pi_1 0{,}1 - \pi_2 0{,}2)$$

Ordenando un poco:

$$0 = -\pi_1 0{,}1 + \pi_2 0{,}2$$
$$0 = +\pi_1 0{,}1 - \pi_2 0{,}2$$

Lo que resulta de aquí que $\pi_1 = 2\pi_2$. Para que π sea una distribución de probabilidad debe de cumplir que $\sum_{j=1}^{r} \pi_j = 1$, con lo cual se deduce que $\pi = (\frac{2}{3} \;\; \frac{1}{3})$.

En el apartado dos de este problema se demostró que la cadena es ergódica, es decir existe la distribución límite. El siguiente teorema nos permitirá identificar si esta distribución es única o no: *Si la cadena de Markov es Ergódica $\Rightarrow$ La distribución límite es Ley invariante para la matriz P. En tal caso la Ley invariante es única y la cadena de Markov estacionaria.*
Bajo la luz de este teorema podemos afirmar que esta distribución es única e idéntica a la distribución límite.

3. Segundo problema

Justifíquese la condición de cadena de Markov absorbente de aquella que tiene como matriz de probabilidades de transición.

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1. Mediante el grafo correspondiente, localícense los estados absorbentes de la cadena y clasifique los demás estados.

Una cadena de Markov se define como absorbente si:

1. al menos uno de sus estados es absorbente
2. los estados no absorbentes comunican con al menos uno absorbente

Observando el grafo es fácil ver como se verifican ambas, y por lo tanto queda justificado que la cadena sea absorbente. Un estado es absorbente si una vez se entra en él, ya no se vuelve a salir. Con lo cual, fuerza a todos los otros estados (que no sean absorbentes también) a ser transitorios, ya que a la larga, la probabilidad de acceder a ellos será nula. Se aprecia que en esta cadena los estados absorbentes son E_2, E_3 y transitorios son E_1, E_4, E_5

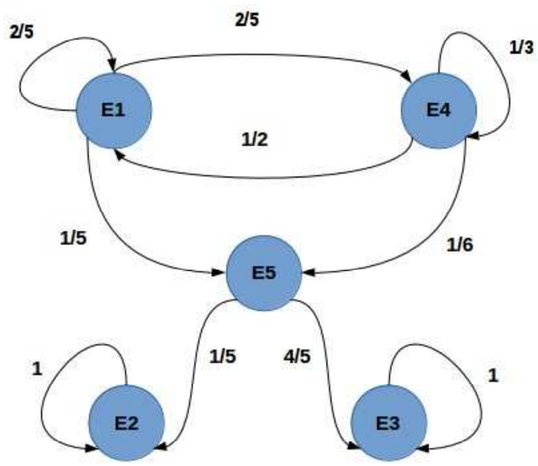


Figura 2: Grafo 2

3.2. Reordénense las filas y las columnas de la matriz P para un adecuado tratamiento de este tipo de cadenas de Markov

Al estar tratando con una cadena de Markov absorbente debemos reordenar la matriz de transiciones de tal forma que quede de la siguiente forma:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{ID}_k & \mathcal{O}_{k\times(m-k)} \\ \hline \mathcal{R}_{(m-k)\times k} & \mathcal{Q}_{m-k} \end{array}\right)$$

Donde m=5 son los estados de la CM y son k=2 estados absorbentes y:

- $\mathcal{ID}_k$ es la matriz identidad de probabilidades de transición de los absorbentes.

- $\mathcal{O}_{k\times(m-k)}$ es la matriz de ceros(De los absorbentes no se sale).

- $\mathcal{R}_{(m-k)\times k}$ son las probabilidades de transición entre transitorios.

- $\mathcal{Q}_{m-k}$ son las probabilidades de transitar a transitorios.

Aplicando esto a nuestra matriz obtendremos la siguiente reordenación de los estados: E_2, E_3, E_5, E_1, E_4. Y la matriz será tal que:

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3.3. Calcúlense la matriz fundamental asociada, e interprétense sus coeficientes.

Si P es la matriz de probabilidades de transición (ecuación de arriba) de una cadena de Markov absorbente, entonces su matriz fundamental F será:

$$F = (\mathcal{ID}_{m-k} - \mathcal{Q}_{m-k})^{-1}$$

De tal forma que el elemento ij de F es el número esperado de veces que se visita el estado j antes de una absorción, dado que se parte de i.

En nuestro problema tendremos que :

$$F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -1/6 & -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10/3 & 2 \\ 1 & 5/2 & 3 \end{pmatrix}$$

La característica principal de esta matriz es que sus elementos ij representan el número esperado de veces que se visita el estado j antes de una absorción, dado que se parte de i. Cabe recordar que la matriz fue reordenada, con lo cual los estados a los que hacemos referencia son E_5, E_1, E_4, de tal forma que se podrá leer en F lo siguiente: partiendo de estado E_5 se espera que pase una vez por si mismo, y ninguna vez por el E_1 y E_4. Partiendo del E_1 pasará una vez por el E_5, unas tres veces(10/3) por sí mismo, y dos veces por el E_4. Y finalmente, partiendo del E_4 pasará una vez por E_5, entre 2 y 3 veces (5/2) E_1 y tres veces por sí mismo.

Cabe resaltar que la columna y fila relacionada con el estado E_5 muestra cómo una vez se pasa por él se entra inevitablemente en uno de los estados absorbentes.

3.4. Calcúlense los vectores de probabilidades de transición a cada uno de los estados absorbentes de la cadena.

Multiplicando la matriz F y la submatriz R de P (hacer referencia a ecuación) se puede construir la siguiente matriz:

$$P_{abs} = \mathcal{F}_{m-k}\mathcal{R}_{(m-k)\times k} \tag{2}$$

de tal forma que las columnas de dicha matriz recogen las probabilidades de que desde cada estado transitorio se acabe en uno de los estados absorbentes. Se tiene pues que:

$$P_{abs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10/3 & 2 \\ 1 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Es decir, la probabilidad de acabar ($n \to \infty$) en el estado E_2 partiendo de $E_i : i = 5, 1, 4$ es ;

$$P_{(X_n=E_2)} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

y la probabilidad de acabar ($n \to \infty$) en el estado E_3 partiendo de E_i : $i = 5, 1, 4$ es ;

$$P_{(X_n=E_3)} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

4. Tercer Problema

Con el siguiente generador congruencial multiplicativo

$$Z_{n+1} = 7^5 Z_n (mod\, 2^{31} - 1)$$

realícense las siguientes actividades:

4.1. Genérense 200 números aleatorios uniformes e independientes en el intervalo [0.1] tomando como semilla Z_0=1635422

El algoritmo implementado para resolver dicho enunciado es:

```
%Definicion de parametros
semilla=1635422;m=2^31-1;a=7^5;b=0;lista=200;
%Inicio del bucle generador
zold=semilla;
i=0;
while i<lista
        i=i+1;
        z(i) = mod(a*zold+b,m);
        zold=z(i);
end
x=z./m-1;
```

La razón por la que se ha dividido entre $m - 1$ es porque este generador genera números aleatorios con periodo $m - 1$, siendo el número más grande que puede producir el $m - 1$ de esta forma se pueden producir los números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$.

La lista de números obtenida está en el archivo adjunto *'200numerosaleatorios.txt'* En la figura 3 podemos observar una representación de esta lista. En el eje ordenado está representada el valor asignado en el intervalo $[0, 1]$ y las abscisas representan a cada punto.

4.2. Testar la uniformidad de dicha lista de números aleatorios mediante lostest de Kolmogorov-Smirnov y de la Chi-Cuadrado.

La hipótesis de partida H_0 será que lista de números está uniformemente distribuida.

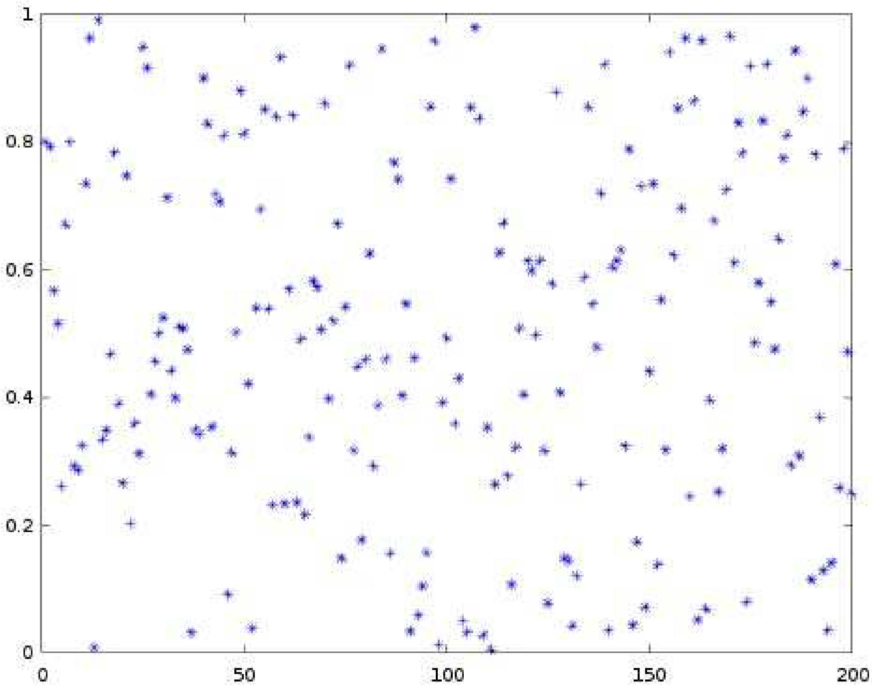


Figura 3: Doscientos números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$

4.2.1. Kolmogorov-Smirnov

Para pasar el test de Kolmogorov-Smirnov nos valdremos de la tabla de apoyo. En la tabla 2 observamos los datos que hemos tenido que calcular para poder llevar a cabo el test.

$x_{(i)}$	0,0047	0,0082	0,012	...	0,9652	0,9788	0,9901
i/N	0,005	0,01	0,015	...	0,99	0,995	1
$(i/N) - x_{(i)}$	$2{,}243e^{-4}$	$1{,}73e^{-3}$	$2.e^{-4}$	...	$2{,}47e^{-2}$	$1{,}61e^{-2}$	$9{,}85e^{-3}$
$x_{(i)} - (i-1)/N$	$4{,}77e^{-3}$	$3{,}26e^{-3}$	$2{,}9e^{-4}$	...	$1{,}977e^{-2}$	$1{,}11e^{-2}$	$-4{,}85e^{-3}$

Cuadro 2: Cálculos necesarios

Calculamos ahora los siguientes indicadores:

$$D^{+} = \max_{1<i<N}(\frac{i}{N} - x_{(i)}) \quad D^{-} = \max_{1<i<N}(x_{(i)} - \frac{i-1}{N})$$

de tal forma que:

$$D^* = \max_{1<i<N} (D^+, D^-)$$

Para nuestro problema se tiene que:

$$D^+ = 0{,}039708 \quad D^- = 0{,}051561 \implies D^* = 0{,}051561$$

Para este test fijado $\alpha = 0{,}05$ obtenemos: Por ser el tamaño de la lista superior a 50, calculamos la D_α como sigue:

$$D_\alpha = \frac{1{,}36}{\sqrt{(n)}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{(200)}} = 0{,}095459$$

Si $D^* \leq D_\alpha$ no habría evidencia estadística para rechazar la hipótesis de partida H_0 (la lista de valores sigue una muestra de valores uniformemente distribuida). Como hemos visto tenemos que $0{,}051561 < 0{,}095459$ entonces la lista pasa el test.

4.2.2. Chi-Cuadrado

Para pasar este test se procederá como se explica:

1. Dividiremos el intervalo [0,1] en k clases de igual longitud y calcularemos con que frecuencia caen los calores de la lista en el intervalo j

2. Calcularemos el valor χ^2 correspondiente con la siguiente expresión.

$$\chi^2 = \frac{k}{N} \sum_{j=1}^{k} \left(f_j - \frac{N}{k} \right)^2$$

3. Fijada α se determinará el valor tabulado para la $\chi^2_{k-1,1-\alpha}$

4. Se toma una decisión de tal forma que si:

$$\begin{array}{lll} \chi^2 > \chi^2_{k-1,1-\alpha} & \implies & \text{Rechazo } H_0 \text{ al nivel } \alpha \\ \chi^2 \leq \chi^2_{k-1,1-\alpha} & \implies & \text{No hay evidencia estadística para rechazar } H_0 \end{array}$$

Así procederemos. Con lo cual:

1. División del intervalo [0,1] en k=10 intervalos y cálculo de la frecuencia de la lista en cada division.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	11	26	20	28	20	17	20	21	7

2. Calcularemos el valor χ^2 para $N = 200, k = 10$

$$\chi^2 = \frac{10}{200} \sum_{j=1}^{k} \left(f_j - \frac{200}{10} \right)^2 = 18{,}2$$

3. Fijada $\alpha = 0{,}05$ se determinará el valor tabulado para la $\chi^2_{9,0,95}$

$$\chi^2_{9,0,95} = 16{,}92$$

4. Se toma una decisión. Como $\chi^2 \leq \chi^2_{k-1,1-\alpha}(18{,}2 < 16{,}92)$ entonces no hay evidencia estadística para rechazar H_0. Se acepta pues que la lista contiene valores uniformementes distribuidos.

4.3. Testar la independencia de dicha lista de números aleatorios mediantes los test de las Carreras Crecientes y Decrecientes y el test de las Carreras por Encima de la Media y por Debajo de la Media

4.3.1. Test de las carrera Crecientes y Decrecientes

Para evaluar este test se procederá como sigue a continuación:

1. Calculamos el número de carreras crecientes y decrecientes Y que hay en nuestra lista.

2. Calculamos el estadístico D^* como sigue:

$$D^* = \frac{Y - \frac{2N-1}{3}}{\sqrt{\frac{16N-29}{90}}}$$

3. Para α fijado extraemos el valor $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$

4. Se toma una decisión de tal forma que si:

$$-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq D^* \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}; \implies \begin{array}{l}\text{No hay evidencia estadística para recahazar} H_0. \\ \text{La serie pasa el test}\end{array}$$

de lo contrario no lo pasará.

Se procede entonces como se ha explicado:

1. Calculamos Y para la lista.

   El codigo implementado para calcular las carreras de la lista ha sido el siguiente:

```
% Test de independencia
% 1) Test de las carreras Crecientes y Decrecientes
% 1.1 Calculo de numero de carreras Y
i=1;
while i<lista
i=i+1;
signos(i-1)=sign(x(i)-x(i-1));
end

i=1;
carrera=1;
while i<length(signos)
        i=i+1;
        if signos(i)~=signos(i-1)
        carrera=carrera+1;
        end
end
```

   El resultado es $Y = 122$.

2. Calculamos el estadístico D^* como sigue:

$$D^* = \frac{Y - \frac{2N-1}{3}}{\sqrt{\frac{16N-29}{90}}} = \frac{122 - \frac{2\times 200-1}{3}}{\sqrt{\frac{16\times 200-29}{90}}} = -1{,}8532$$

3. Para $\alpha = 0{,}05$ extraemos el valor $z_{0{,}975}$. Este valor es $z_{0{,}975} = 1{,}96$

4. Toma de decisión. Como esta afirmación $-1{,}96 \leq -1{,}85 \leq 1{,}96$ es cierta, se puede entonces decir que no hay evidencia estadística para rechazar H_0. La serie pasa el test.

4.3.2. Test de las carrera por Encima y por Debajo de la Media

Para evaluar este test se procederá como sigue a continuación:

1. Calculamos el valor medio de la lista de números pseudoaleatorios.

2. Calculamos el número de carreras respecto de la media Y. Calculamos el número de observaciones por encima de la media a_1 y el número de observaciones por debajo a_2.

3. Calculamos el estadístico D^* como sigue:

$$D^* = \frac{Y - \left(\frac{2a_1a_2}{N} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2a_1a_2(2a_1a_2-N)}{N^2(N-1)}}}$$

4. Para α fijado extraemos el valor $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$

5. Se toma una decisión de tal forma que si:

$-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq D^* \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}; \implies$ No hay evidencia estadística para recahazarH_0.
La serie pasa el test

de lo contrario no lo pasará.

Se procede como se ha explicado:

1. Calculamos la media, las carreras respecto de la media y los valores por encima y por debajo de esta:

   El código implementado para calcular este apartado ha sido:

```
% 1) Test de las carreras respecto de la media
% 1.1 Calculo de numero de carreras Y
% 1.1 Calculo de numero de carreras Y respecto de la media
xmedio=mean(x);
i=0;
a1=0;a2=0;
while i<lista
i=i+1;
signosm(i)=sign(x(i)-xmedio);
        if signosm(i)>0
        a1=a1+1;
        else
```

```
        a2=a2+1;
        end
end

i=1;
carreram=1;
while i<lista
        i=i+1;
        if signosm(i)~=signosm(i-1)
        carreram=carreram+1;
        end
end
```

Obteniendo los siguientes valores:

$$\overline{x} = 0{,}50128 \quad a_1 = 99 \quad a_2 = 101 \quad Y = 99$$

2. Calculamos el estadístico D^* como sigue:

$$D^* = \frac{99 - \left(\frac{2\times 99\times 101}{200} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2\times 99\times 101(2\times 99\times 101-200)}{200^2(200-1)}}} = -0{,}21127$$

3. Para $\alpha = 0{,}05$ extraemos el valor $z_{0{,}975}$. Este valor es $z_{0{,}975} = 1{,}96$

4. Toma de decisión. Como esta proposición $-1{,}96 \leq -0{,}21127 \leq 1{,}96$ es cierta, se puede entonces decir que no hay evidencia estadística para rechazar H_0. La serie pasa el test.

4.4. Mediante el método de generación de variables aleatorias de la Transformada Inversa, simúlese con la anterior lista de números aleatorios una trayectoria de la cadena de Markov con espacio de estados $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ y matriz de probabilidades de transición P suponiéndose que la cadena parte del estado 3.

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

El grafo asociado a esta cadena de Markov se muestra en la imagen 4.

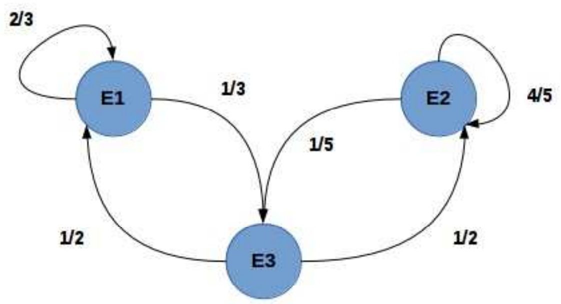


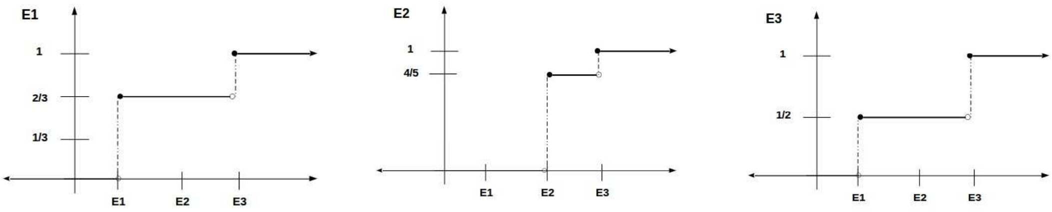
Figura 4: Grafo 3

La función de distribución de probabilidad asociada a cada estado se muestra en la imagen 6

El siguiente algoritmo fue el que se implementó para generar dicha trayectoria.Los datos de la trayectoria están en el archivo ‘estadostrayectoria.txt’.

```
%% Generar trayectoria de una cadena de Markov

P= [2/3 0 1/3;0 4/5 1/5; 1/2 1/2 0];
estado=zeros(1,200);
estado(1)=3;
j=1;
for i=2:200
```



(a) E1 (b) E2 (c) E3

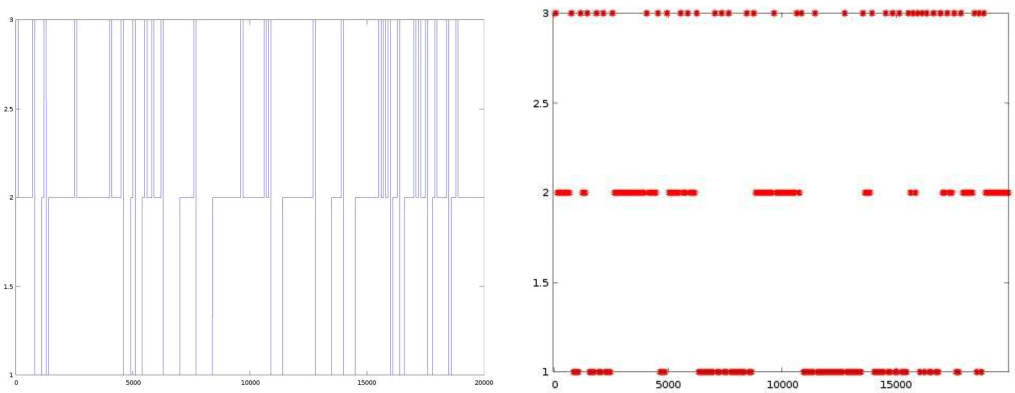
Figura 5: Función de distribución de probabilidad de transición de los distintos estados

```
        switch estado(i-1)
        %Estado1
            case 1
                if x(i-1) <= 2/3
                    estado(i)= 1;
                else
                    estado(i)=3;
                end
        %Estado2
            case 2
                if x(i-1) <= 4/5
                    estado(i)= 2;
                else
                    estado(i)=3;
                end
        %estado3
            case 3
                if x(i-1) <= 1/2
                    estado(i)= 1;
                else
                    estado(i)=2;
                end

        end


end
```

A continuación se muestra la trayectoria del fenómeno. En la imagen 6b se puede observar la trayectoria. Se ha impuesto que en cada estado se permanezca 10 unidades en la abscisa, y esa es la razón por la cual el dominio de las abscisas es $[1, 2000]$. Por otro lado, la imagen 6b muestra solo los puntos relevantes del sistema, es decir, los estados que se visitan.



(a) Gráfica 1 (b) Gráfica 2

Figura 6: Trayectoria de la cadena de Markov