



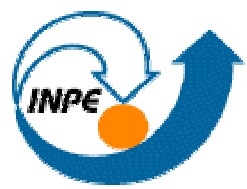
# CAP 254

*Otimização Combinatória*

Professor: Dr. L.A.N. Lorena

**Assunto: Metaheurísticas**

**Antonio Augusto Chaves**



# *Conteúdo*

**C01 – Simulated Annealing (20/11/07).**

**C02 – Busca Tabu (22/11/07).**

**C03 – Colônia de Formigas (27/11/07).**

**C04 - GRASP e VNS (29/11/07).**

**C05 – Metaheurísticas Híbridas – CS (04/12/07).**

**Material baseado nas notas de aula do Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza (UFOP)**

**<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/>**

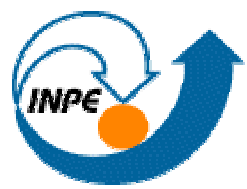
**e em material da Prof. Estéfane G. M. de Lacerda (UFRN)**

**[www.dca.ufrn.br/~estefane/metaheuristicas](http://www.dca.ufrn.br/~estefane/metaheuristicas)**



## *Colônia de Formigas (Ant Colony)*

---



# *O que é Otimização por Colônia de Formigas?*

- Colônia de formigas é uma metaheurística baseada em **população** e inspirada no comportamento **forrageiro** das formigas.

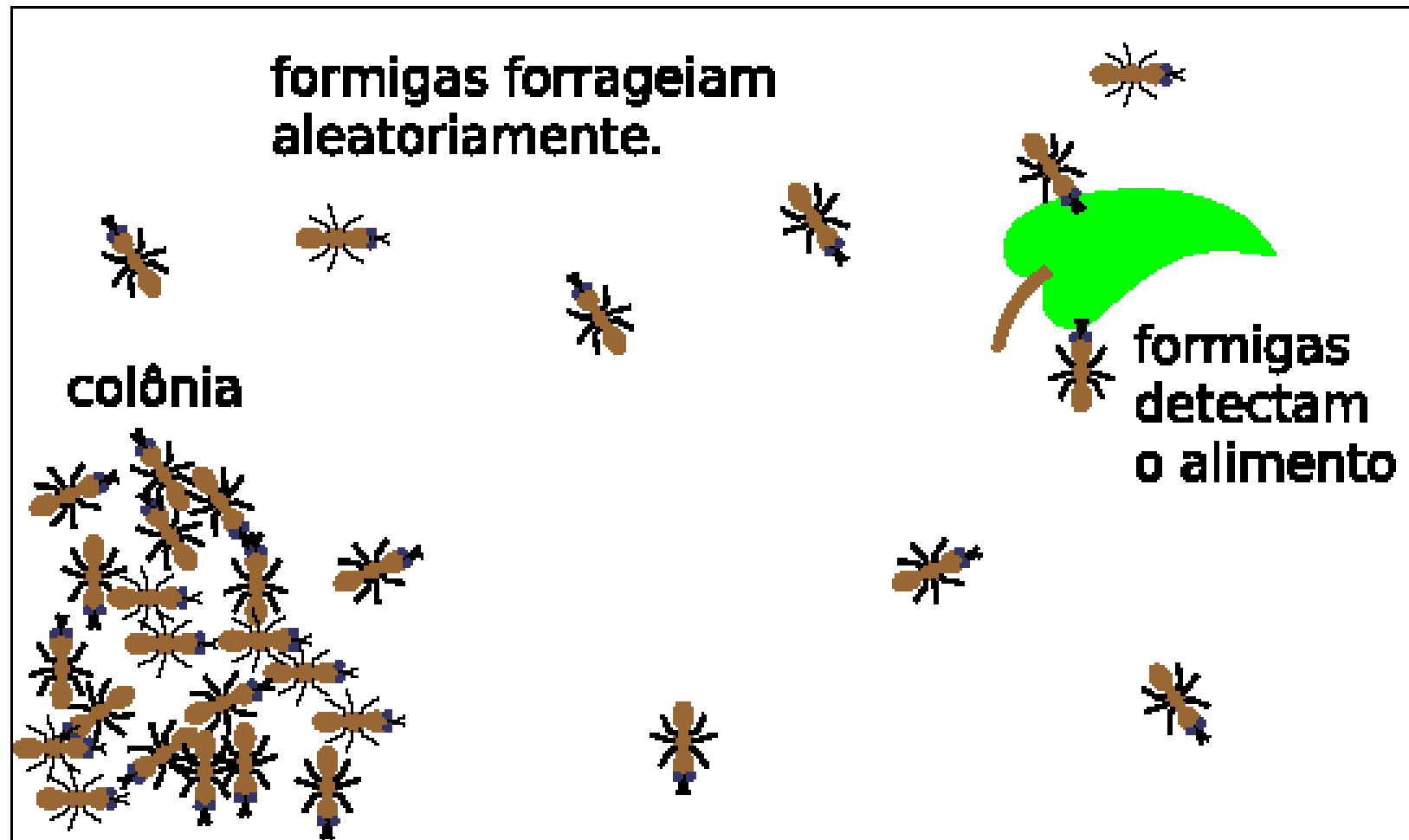




# *A Inspiração Biológica*

- Muitas espécies de formigas são quase **cegas**.
- A **comunicação** entre as formigas é realizada através de uma substância química denominada de **feromônio**.
- Em algumas espécies, o feromônio é usado para criar **caminhos** (trilhas de formigas).

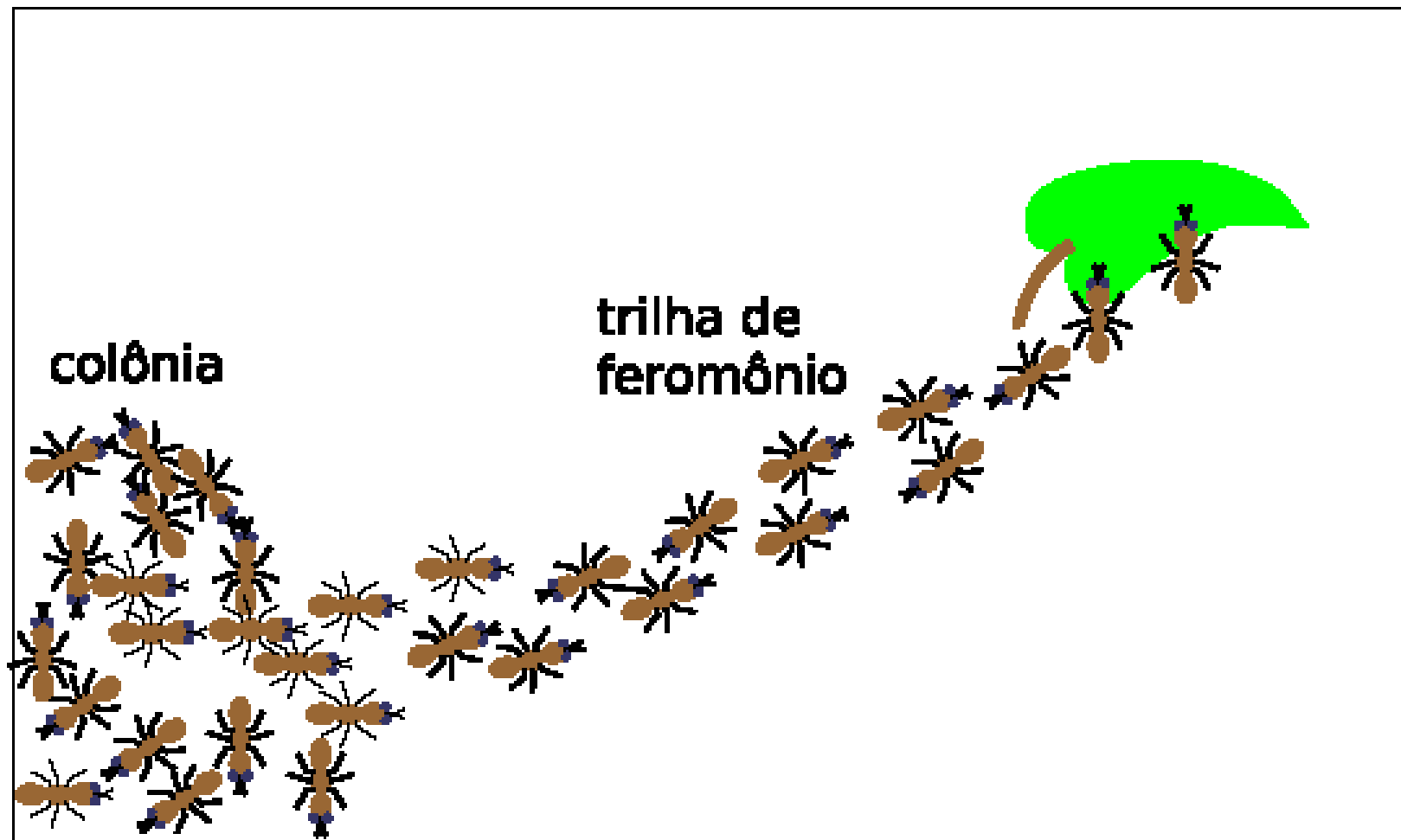
# *A Inspiração Biológica*



# *A Inspiração Biológica*



# *A Inspiração Biológica*





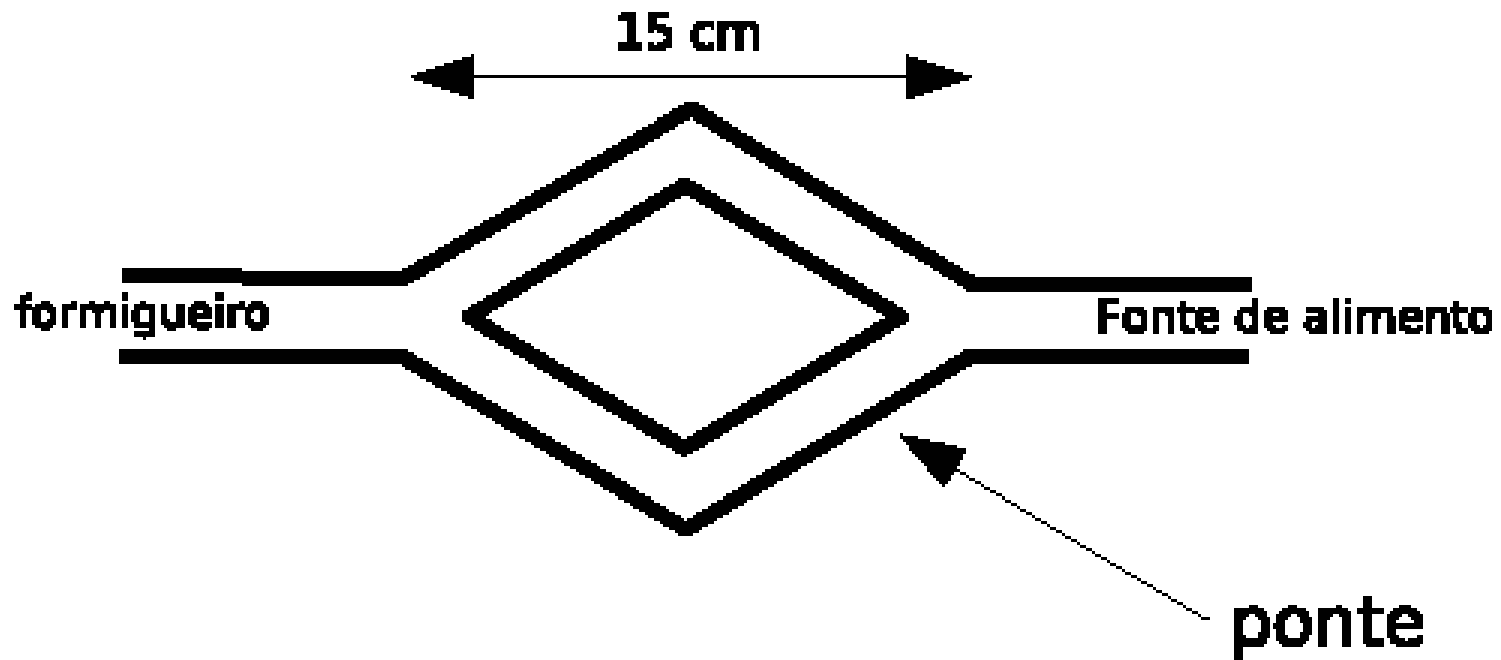


# *A Inspiração Biológica*

- Ao **caminhar**, as formigas depositam no chão o **feromônio**, formando, deste modo, uma **trilha** de feromônios.
- As formigas sentem o **cheiro** do feromônio, e quando elas têm que **escolher** um caminho, escolhem, com **maior probabilidade**, o caminho com **maior quantidade** de feromônio (cheiro mais forte).
- A trilha ajuda a formiga a **achar o caminho de volta** e as outras formigas a **encontrar a fonte de alimentos**.

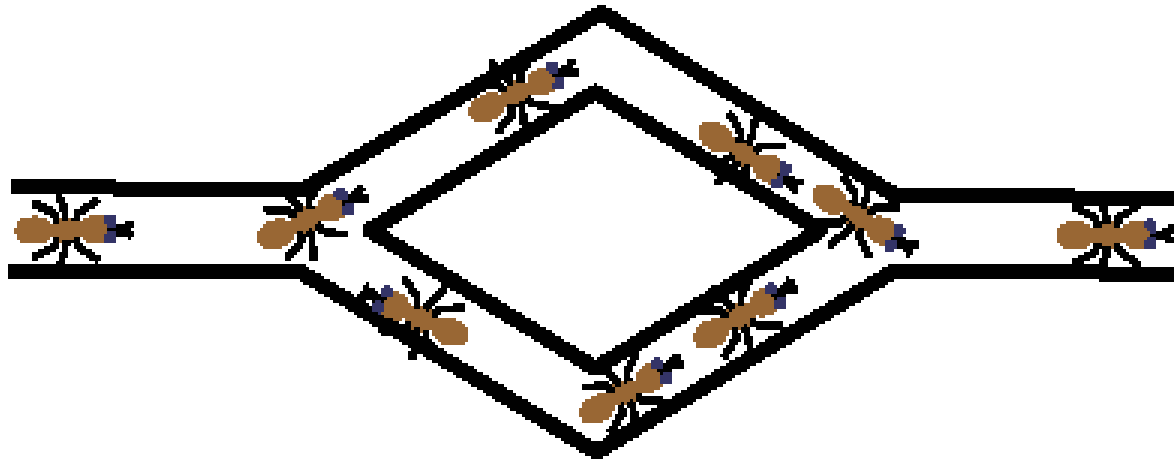
# *O Experimento da Ponte Binária*

- Experimento realizado por Deneubourg et al., 1990, para estudar o comportamento forrageiro das formigas.



# *O Experimento da Ponte Binária*

- No Início:

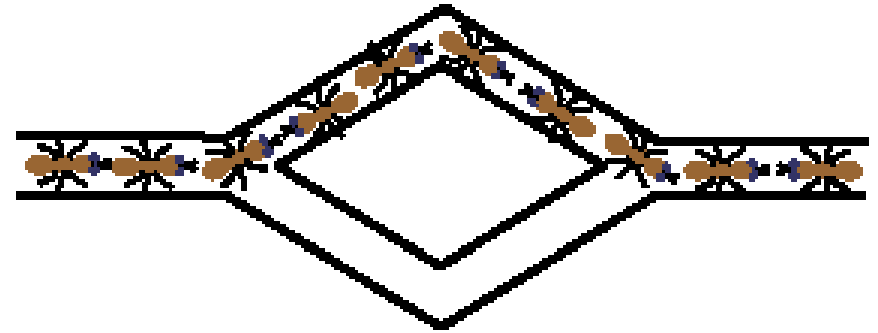


- As formigas são deixadas **livres** para escolher o caminho.
- **Não** há feromônio ainda.

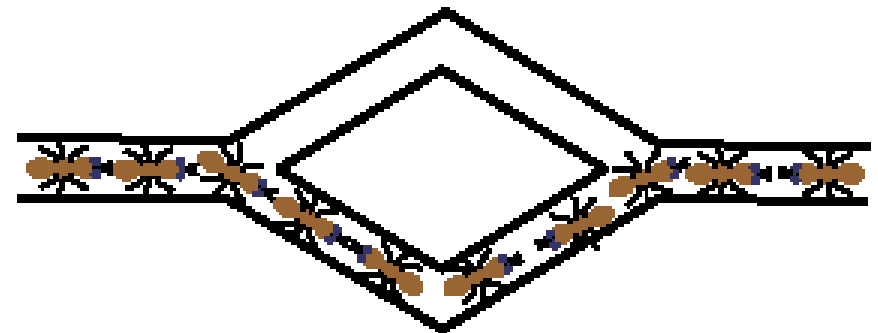
# *O Experimento da Ponte Binária*

- As formigas **convergem** para um dos caminhos com igual probabilidade.
- Devido a flutuações aleatórias, uma das pontes terá mais feromônio e atrairá as formigas com maior probabilidade.

No Fim:



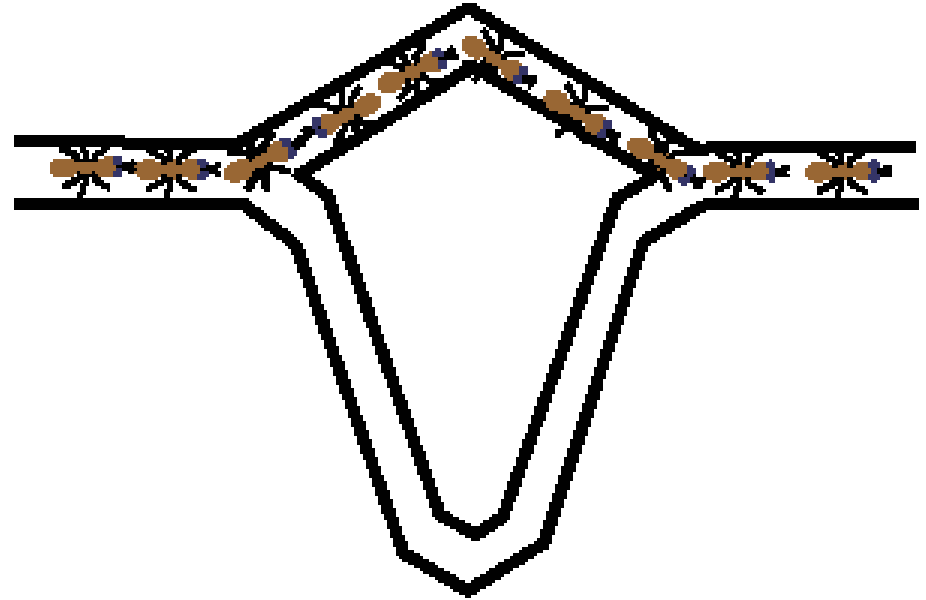
ou





# *O Experimento da Ponte Binária*

- Usando pontes de tamanhos diferentes, as formigas convergem para a ponte mais curta:
- A ponte curta é percorrida em menos tempo, fazendo com que mais formigas achessem ela. Logo, mais feromônio é depositado.
- As formigas escolhem, com maior probabilidade, a ponte curta (com mais feromônio).



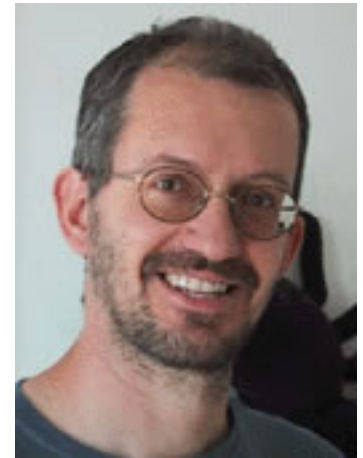


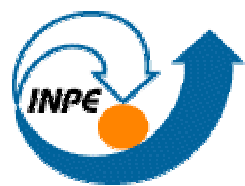
# *Formigas Artificiais*

- Formigas artificiais são **heurísticas construtivas**.
- Elas constroem soluções de forma **probabilística** utilizando duas informações:
  1. A **trilha de feromônio** (artificial) que muda dinamicamente durante a execução do programa de modo a refletir a experiência já adquirida durante a busca.
  2. A **informação heurística** específica do problema a ser resolvido.

# *Ant System*

- Proposto por Marco Dorigo e colaboradores (DORIGO et al., 1991)
- O Ant System é o primeiro algoritmo que surgiu inspirado em colônia de formigas.
- Peculiaridades do ambiente das formigas utilizadas:
  - Ao tomar um caminho a formiga deixa no mesmo uma certa quantidade de **feromônio**;
  - Uma formiga escolhe determinado caminho de acordo com uma função probabilística envolvendo a **distância deste caminho** e a **quantidade de feromônio** presente neste;
  - As formigas **lembram** os pontos por onde já passaram e não retornam a estes pontos até que tenham chegado à fonte de alimento;

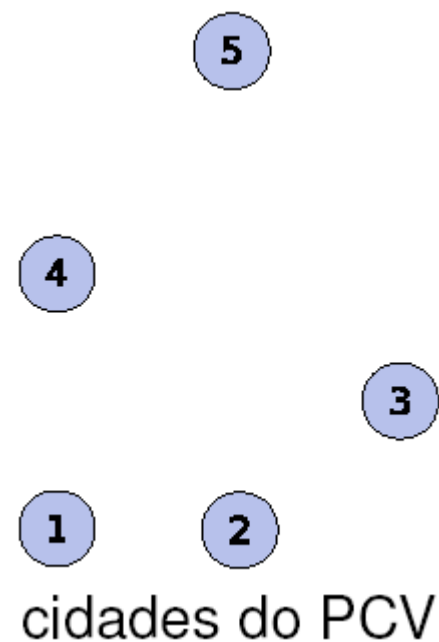




# *Aplicação do Ant System ao PCV*

Matriz Distância do PCV

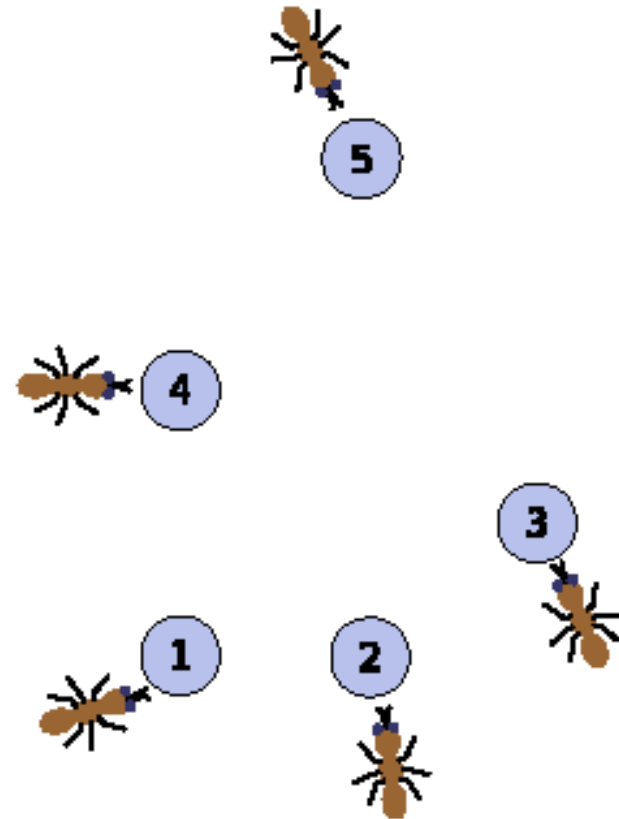
	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0





# *Aplicação do Ant System ao PCV*

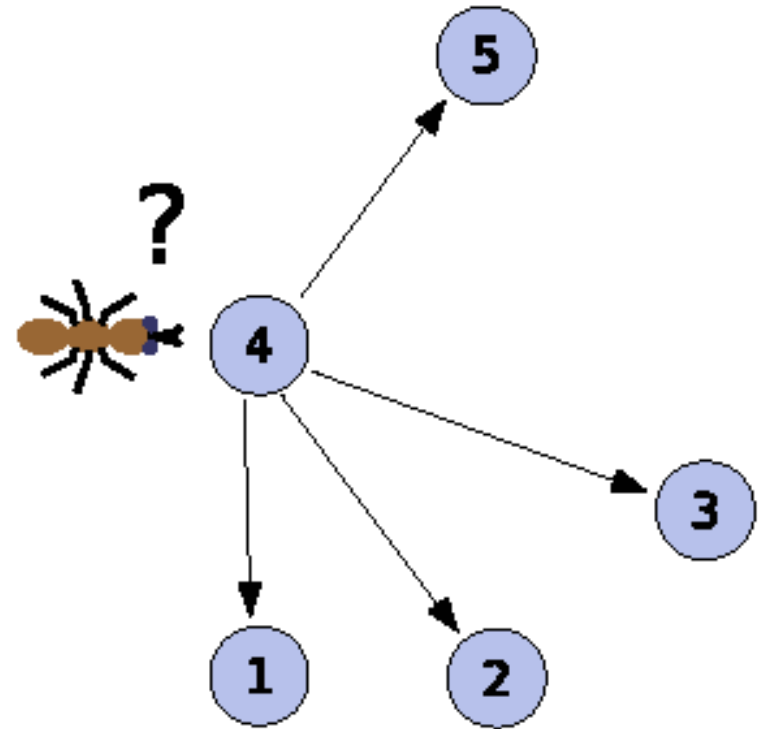
- Cada formiga irá **construir** uma solução movendo-se de uma cidade para outra.
- No início, cada formiga é colocada em uma **cidade diferente** (ou colocada aleatoriamente).

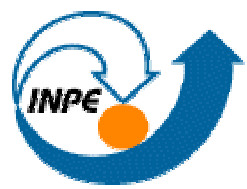


# *Aplicação do Ant System ao PCV*

## A Construção da Solução pela Formiga

- Começando de uma cidade  $i$ , a formiga **move-se** escolhendo probabilisticamente a cidade vizinha  $j$  (entre os vizinhos factíveis).





# *Probabilidade de Transição*

- A **probabilidade** da formiga  $k$  que está na cidade  $i$  de escolher a cidade  $j$  é dada pela regra:

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\tau_{il}(t)]^\alpha [\eta_{il}]^\beta}, & \text{se } j \in N_i^k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

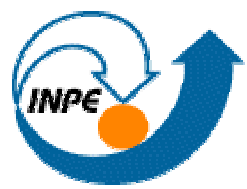
onde,

$\tau_{ij}(t)$ : quantidade de feromônio presente no caminho  $(i,j)$

$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ : visibilidade da cidade  $j$  com relação a cidade  $i$

$\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros para determinar a influência do feromônio e da informação heurística,

$N_i^k$  é a vizinhança factível da formiga  $k$  (i.e., o conjunto das cidades ainda não visitadas pela formiga  $k$ ).



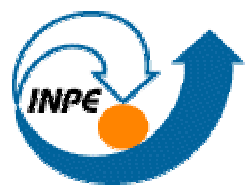
# *A Informação Heurística do PCV*

- Associada a aresta  $(i, j)$  existe um valor heurístico  $\eta_{ij}$  dado por

$$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

que representa a **atratividade** da formiga visitar a cidade  $j$  depois de visitar a cidade  $i$ .

- O valor  $\eta_{ij}$  é inversamente proporcional a distância  $d_{ij}$  entre as cidades  $i$  e  $j$ .



## *Construção das rotas - Passo 1*

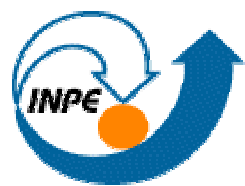
formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	2(45%), 3(21%), 4(23%), 5(11%)	1-2
2	1(41%), 3(30%), 4(19%), 5(10%)	2-1
3	1(23%), 2(37%), 4(23%), 5(16%)	3-4
4	1(27%), 2(24%), 3(24%), 5(24%)	4-5
5	1(19%), 2(20%), 3(25%), 4(36%)	5-2

- A escolha do candidato é de acordo com a **probabilidade de transição**. É feita de forma similar ao algoritmo da **roleta** dos algoritmos genéticos.



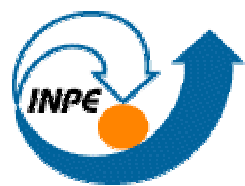
## *Construção das rotas - Passo 2*

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	3(50%), 4(32%), 5(18%)	1-2-3
2	3(38%), 4(42%), 5(20%)	2-1-4
3	1(35%), 2(32%), 5(32%)	3-4-5
4	1(30%), 2(31%), 3(39%)	4-5-2
5	1(46%), 3(33%), 4(21%)	5-2-1



## *Construção das rotas - Passo 3*

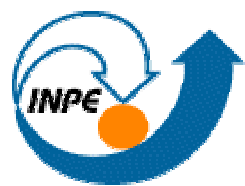
formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	4(59%), 5(41%)	1-2-3-5
2	3(50%), 5(50%)	2-1-4-5
3	1(49%), 2(51%)	3-4-5-1
4	1(58%), 3(42%)	4-5-2-1
5	3(48%), 4(52%)	5-2-1-4



## *Construção das rotas - Passo 4*

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	4(100%)	1-2-3-5-4
2	3(100%)	2-1-4-5-3
3	2(100%)	3-4-5-1-2
4	3(100%)	4-5-2-1-3
5	3(100%)	5-2-1-4-3





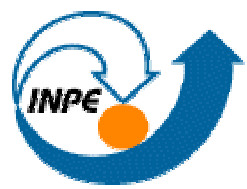
## *Término da Primeira Iteração*

formiga (k)	solução completa	comprimento da viagem ( $L_k$ )
1	1-2-3-5-4-1	9,8
2	2-1-4-5-3-2	9,8
3	3-4-5-1-2-3	10,9
4	4-5-2-1-3-4	11,6
5	5-2-1-4-3-5	12,4



# *Atualização do Feromônio*

- No **feromônio**  $\tau_{ij}$  associado a aresta  $(i, j)$  ocorre dois eventos:
  1. A **evaporação**;
    - Evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente;
    - Permite esquecer decisões ruins do passado da busca.
  2. O **depósito** de feromônio de todas as formigas que passaram sobre  $(i, j)$ .



## *Atualização do Feromônio*

- Depois que todas as formigas construíram suas rotas, o feromônio é atualizado.
- $\Delta \tau_{ij}^k$  é a quantidade de feromônio que a formiga  $k$  **deposita** sobre a aresta  $(i, j)$ . É dado por:

$$\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} Q / L_k, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ pertence a rota } S_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde

$Q$ : quantidade de feromônio excretada por uma formiga a cada iteração



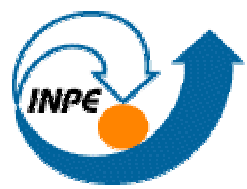
## *Atualização do Feromônio*

- O feromônio  $\tau_{ij}$  associado a aresta  $(i, j)$  é **atualizado** pelo fórmula:

$$\tau_{ij}(t+1) = \underbrace{(1-\rho)\tau_{ij}(t)}_{\text{evaporação}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)}_{\text{depósito}}$$

onde

$\rho \in [0,1]$  é a taxa de evaporação de feromônio



# *Exemplo de Atualização do Feromônio*

## Atualização do Feromônio da aresta (3,5)

- Apenas as formigas 1, 2 e 5 depositam feromônio nesta aresta. Suponha  $Q = 1, 0$ . A contribuição de cada formiga:

$$\Delta \tau_{3,5}^{(1)} = 1 / L_1 = 0,102$$

$$\Delta \tau_{3,5}^{(2)} = 1 / L_2 = 0,102$$

$$\Delta \tau_{3,5}^{(5)} = 1 / L_5 = 0,081$$

$k$	viagem	$L_k$
1	1-2-3-5-4-1	9,8
2	2-1-4-5-3-2	9,8
3	3-4-5-1-2-3	10,9
4	4-5-2-1-3-4	11,6
5	5-2-1-4-3-5	12,4

Suponha  $\rho = 0,5$

$$\begin{aligned}\tau_{3,5} &= (1 - \rho) \tau_{ij} + \Delta \tau_{3,5}^{(1)} + \Delta \tau_{3,5}^{(2)} + \Delta \tau_{3,5}^{(5)} \\ &= (1 - 0,5) 1,0 + 0,102 + 0,102 + 0,081 \\ &= 0,785\end{aligned}$$



# *Critérios de Parada*

- Número **máximo** de iterações;
- **Estagnação**.

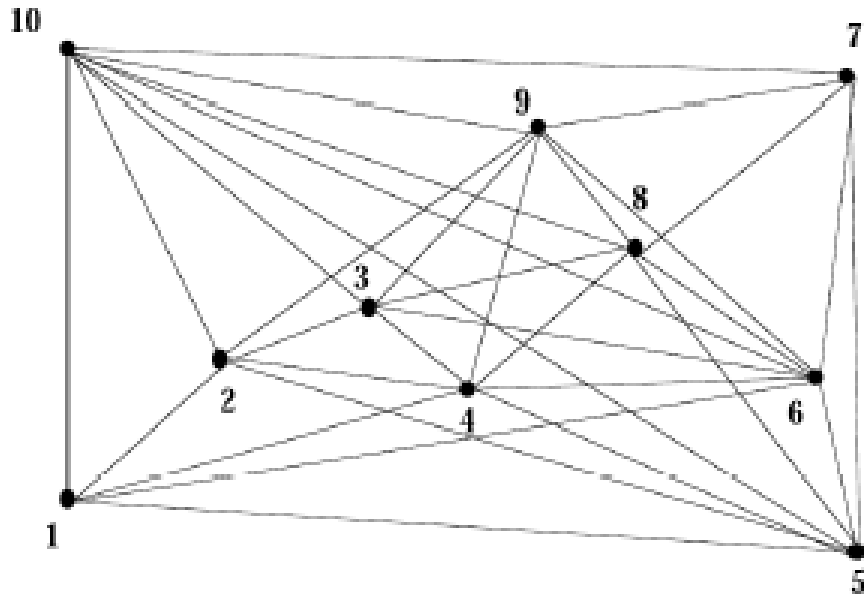


# *Estagnação*

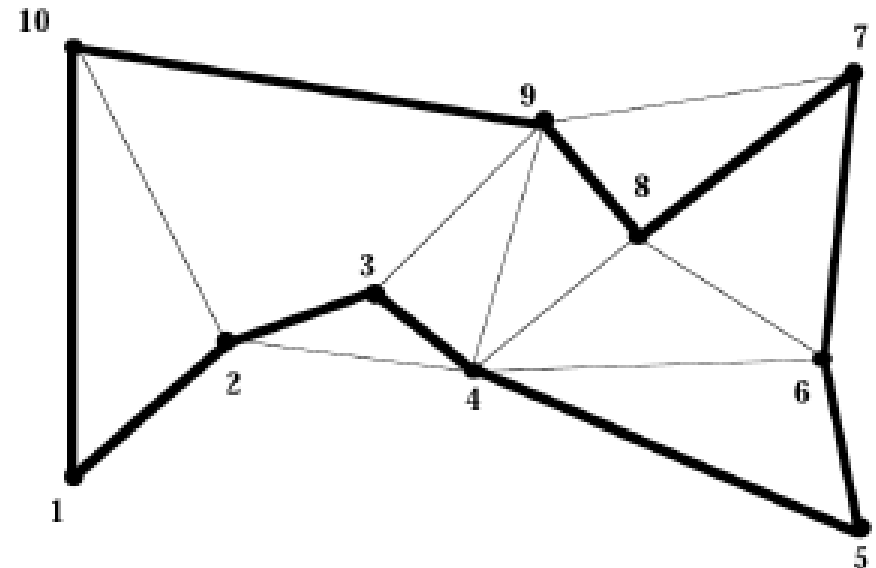
- **Estagnação** é a situação na qual **todas** as formigas seguem sempre o **mesmo** percurso.
- A Estagnação é causado pelo excessivo crescimento de feromônio nas arestas de uma rota sub-ótima.

# Estagnação

- Apesar da natureza **estocástica** do algoritmo, a forte concentração de feromônio nas arestas força a formiga a fazer **sempre** o mesmo percurso.

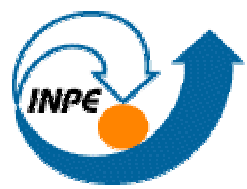


Distribuição de feromônio no início da busca.



Distribuição de feromônio após 100 iterações.

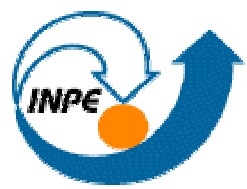




# *Procedimento Ant System*

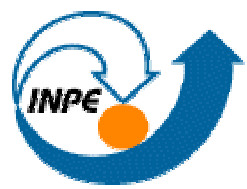
## Algoritmo AntSystem

- 1: Seja  $Q$  e  $\tau_0$  constantes;  
Faça  $f(s^*) \leftarrow \infty$ ;
- 2: Faça  $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$  e  $\tau_{ij} \leftarrow \tau_0$  para todo arco  $(i, j)$ ;
- 3: **Para** ( cada formiga  $k = 1, \dots, m$  ) **faça**
  - (a) Selecione a cidade inicial para a  $k$ -ésima formiga;
  - (b) Obtenha uma rota  $R^k$  para cada formiga  $k$  de acordo com o procedimento seguido por cada formiga;
  - (c) Seja  $L^k$  o comprimento da rota  $R^k$ ;
  - (d) **Se** (  $L^k < f(s^*)$  ) **então**  $s^* \leftarrow R^k$ ;
  - (e) Calcule a quantidade de rastro deixado pela formiga  $k$ :  
**se** ( arco  $(i, j)$  pertence à rota  $R^k$  )  
**então**  $\Delta\tau_{ij} \leftarrow Q / L^k$  ;  
**senão**  $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$ ;
  - (f) Faça  $\Delta\tau_{ij} \leftarrow \Delta\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}(k)$ ;
- 4: Faça  $\tau_{ij} \leftarrow (1-\rho) \times \tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$ ;
- 5: **se** ( a melhor rota  $s^*$  não foi alterada nas últimas  $k_{\max}$  iterações )  
**então** PARE:  $s^*$  é a melhor solução;  
**senão** retorne ao Passo 3;



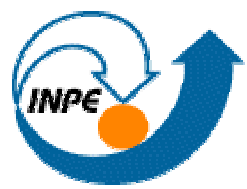
# *Ant Colony Optimization (ACO)*

- Proposta por **Dorigo e Gambardella** (1997)
- **Objetivo**: Transformar a heurística Ant System em uma metaheurística.
- Através de **elitismo**, faz uso de mais **intensificação** do que o AS;
- Apenas a formiga “**best-so-far**” deposita feromônio;
- As formigas removem feromônio para aumentar a **diversificação**.



# *Semelhanças entre formigas reais e artificiais*

- Ambos os sistemas são constituídos por múltiplos **agentes cooperando entre si**;
- Ambos os sistemas utilizam um fator de cooperação, através do qual acontece a sinergia entre os agentes (**feromônio**). O feromônio representa a informação coletiva, e é essencial no desenvolvimento de ambos os sistemas. Ocorre também a **evaporação** do feromônio, o que permite às formigas a possibilidade de explorarem novos horizontes;
- Os agentes dividem a **mesma função** em ambos os sistemas: buscar o **menor caminho** entre uma origem (ninho) e um destino (alimento);
- O comportamento **estocástico** e **local** dos agentes na busca por soluções. Não há, em ambos agentes, a visão supra adjacente.



# *Diferenças entre formigas reais e artificiais*

- As formigas artificiais possuem **movimentação discreta**, sendo que seus movimentos consistem em origens e destinos discretos;
- Existe, nas formigas artificiais, um estado interno ou **memória**, para que não haja sobreposição de movimentos;
- O depósito de feromônio no mundo artificial ocorre com base na **qualidade** da solução encontrada;
- Diferentemente do mundo real, onde formigas depositam feromônio sob demanda.
- Aproximação para o modelo computacional: formigas deixam o feromônio em cada arco visitado **após** chegar ao destino (na vida real as formigas deixam o feromônio durante o movimento e não após chegar ao seu destino)