

1 Ejercicio 1

1.1

a. Demuestra que un conjunto de medida cero no tiene puntos interiores. Primeramente fijaremos algunas definiciones que usaremos para demostrar la proposición.

Definición 1.1.1 .

Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$. Se define la bola abierta de \mathbb{R}^n con centro en \vec{x}_0 y radio ϵ por:

$$B(\vec{x}_0, \epsilon) = V_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

Definición 1.1.2 .

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{x}_0 \in A$. Entonces \vec{x}_0 se llama punto interior de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \epsilon) \subseteq A$.

Definición 1.1.3 .

Un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Se define el volumen del rectángulo $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ por:

$$Vol(S) = v(s) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

si $a_i \leq b_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$ y $Vol(s) = 0$ si $S = \emptyset$.

Definición 1.1.4 .

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que tiene medida 0 si dado $\epsilon > 0$, existe un recubrimiento a lo más numerable $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ de A de rectángulos cerrados es decir

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n$$

con U_n un rectángulo cerrado de \mathbb{R}^n , tal que

$$\sum_{i=1}^\infty Vol(U_i) < \epsilon.$$

Demostración

Sea un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida 0. Supongamos que A posee un punto interior x_0 por definición existe un cierto $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subseteq A$, ello implica que $B(x_0, \epsilon)$ consta de todos los puntos x tal que $\|x - x_0\| < \epsilon$. Ahora dado que A tiene medida 0 existe un recubrimiento de rectángulos que satisface $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon.$$

Para todo $\varepsilon > 0$. Lo que a su vez implica que $B(x_0, \epsilon) \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Puesto que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon.$$

se satisface para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto se tiene que para cualquiera de los subrectángulos U_k con $k \in \mathbb{N}$, se satisface que $Vol(U_k) < \sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon$. Si tomamos un punto $x_0 \in A$ con $\epsilon > \varepsilon$ se hace evidente que $B(x_0, \epsilon) \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ lo cual contradice el hecho de que $B(x_0, \epsilon) \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Análogamente si tomamos $\epsilon \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ implica que $B(x_0, \epsilon) \subseteq U_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ o $B(x_0, \epsilon) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, se tiene entonces necesariamente que $\epsilon = 0$ lo cual es una contradicción puesto que hemos supuesto que $\epsilon > 0$. Por tanto podemos concluir que si A tiene medida cero entonces A no posee puntos interiores. ■

1.2

b. Construye un conjunto que tenga medida cero pero que su cerradura sea \mathbb{R}^n .

De igual forma establecemos primeramente algunas definiciones que nos ayudaran a demostrar la proposición.

Definición 1.2.1 .

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se llama punto de adherencia de A si para todo $\epsilon > 0$, $B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto

$$\overline{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} \text{ es un punto de adherencia de } A\}$$

recibe el nombre de cerradura de A .

Demostración

Sabemos que un conjunto que tiene medida por el ejercicio no contiene puntos interiores por lo que podemos proponer un conjunto que tenga medida 0 en \mathbb{R} y cuya cerradura sea precisamente \mathbb{R} . Tomando en consideracion lo anteriormente mencionado sea $A = \mathbb{Q}$, con \mathbb{Q} el conjunto de números racionales procederemos a demostrar que \mathbb{Q} tiene medida cero en \mathbb{R} para ello consideremos la colección de todos los números racionales De la forma p/q con $p, q \in \mathbb{Z}$ y con la condición de que p y q sean primos relativos. Sea dicho conjunto $A = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ y definamos los intervalos

$$I_n = (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n})$$

Si consideramos la unión de los infinitos intervalos, se cumple que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Ahora puesto que $Vol(U_k) = \frac{\epsilon}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k-1}} \leq \epsilon$$

la serie anterior converge para cualquier ϵ que escojamos y preserva la desigualdad, ahora puesto que podemos hacer ϵ tan pequeño como queramos se tiene necesariamente que el conjunto A tiene medida cero en \mathbb{R} . Es decir el conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es de medida cero. Ahora puesto que \mathbb{Q} , es de medida cero y se tiene que la cerradura $\overline{\mathbb{Q}}$ es precisamente \mathbb{R} , tomemos el conjunto

$$\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$$

formado al realizar el producto cartesiano de \mathbb{Q} con sigo mismo n veces. Entoces se hace evidente que $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ es de medida cero, esto se sigue del hecho de que podemos verificar esto siguiendo los pasos anteriormente descritos, de que \mathbb{Q} es de medida cero considerando unicamente rectángulos en \mathbb{R}^n . Con ello obtenemos que \mathbb{Q}^n es de medida cero y su cerradura $\overline{\mathbb{Q}^n}$ es \mathbb{R}^n . ■

2 Ejercicio 2

Construye una función acotada $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que sea igual a cero en casi todo punto del intervalo I y que no sea Riemann integrable.

Definición 2.0.1 (Riemann-integrabilidad).

Una función f definida en $[a, b]$ es Riemann integrable (R-integrable) si existe un número real \mathfrak{R} tal que para cualquier $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall \mathcal{P}$ partición de $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y toda elección ξ se tiene

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

En este sentido la función $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$ esta dada por

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}|$$

A esta suma la llamaremos **Suma de Riemann** de f relativa a la partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ y la elección $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$. A este número \mathfrak{R} lo denotaremos mediante el símbolo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$$

Demostración

Sea la función $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

es claro que la función f es igual a 0 en casi todos los puntos del intervalo $[0, 1]$, se demostrara que la función f no es Riemann-integrable. De acuerdo a lo anteriormente mencionado se tiene que si f es R-integrable entonces debe existir un número real \mathfrak{R} tal que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ de tal modo que

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

Para toda partición \mathcal{P} de el intervalo $[0, 1]$ y toda elección ξ .

Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$ una partición de intervalo $[0, 1]$ tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta$, para algún $\delta > 0$ y sea $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ una elección de tal forma que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Queda claro entonces que el valor de $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$ dependera de la elección ξ que escojamos puesto que independientemente de que $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ se tendra que cuando menos el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contendra un número $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y otro $b \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, sin importar cuan fina sea la partición \mathcal{P} . Ello implica que en este caso la elección ξ determinara el valor de $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$ puesto que si tomamos la elección $\xi_{\mathbb{Q}}$ de tal forma que $\forall \xi_i \in \xi_{\mathbb{Q}}, \xi_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ se tendra que

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathbb{Q}}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n 1 * |x_i - x_{i-1}| = 1$$

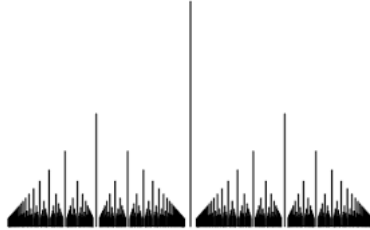
Analogamente si tomamos la elección $\xi_{\mathbb{I}}$ de tal forma que $\forall \xi_i \in \xi_{\mathbb{I}}, \xi_i \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ se tendra que

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathbb{I}}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n 0 * |x_i - x_{i-1}| = 0.$$

Por tanto el resultado de $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$ dependera de la elección ξ y por tanto de existir un número real \mathfrak{R} este deberia de cumplir que $\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |1 - \mathfrak{R}| < \epsilon$ y a su vez $\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |0 - \mathfrak{R}| < \epsilon$. Esto implica que si \mathfrak{R} existe entonces \mathfrak{R} debe de cumplir

$$\mathfrak{R} \in (-\epsilon + 1, \epsilon + 1) \text{ y } \mathfrak{R} \in (-\epsilon, \epsilon)$$

Por lo tanto dicho número \mathfrak{R} no puede existir puesto que de existir deberia pertenecer a dos entornos distintos al mismo tiempo. Con ello queda demostrado que la función f no es Riemann-integrable.



3 Ejercicio 3

Demuestra que si f es Riemann integrable sobre un intervalo I y $f(x) = 0$ en casi todos los puntos del intervalo I , entonces

$$\int_I f(x)dx = 0$$

Demostración Supongamos que f es Riemann-integrable en el intervalo $[a, b]$. Por definición ello implica que $\exists \mathfrak{R} \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \mathcal{P}$ partición de $[a, b]$ y $\forall \xi$ elección. Se cumple que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathfrak{R}| < \epsilon.$$

Ahora supongamos que $f(x) = 0$ en casi todo el intervalo I y existe un conjunto a lo más numerable de puntos \hat{x} que satisfacen $f(\hat{x}) \neq 0$. Es evidente entonces que para cualquier elección $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ donde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Es decir ξ_i pertenece al subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de la partición

$$\mathcal{P} = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

y se cumple que cuando menos $\exists \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(\hat{\xi}_1) = 0$ y $f(\hat{\xi}_2) \neq 0$. Por tanto si consideramos la elección $\xi_{\mathcal{O}} = \{\xi_i \in \xi_{\mathcal{O}} : f(\xi_i) = 0\}$ y la elección $\xi_{\mathcal{Q}} = \{\xi_i \in \xi_{\mathcal{Q}} : f(\xi_i) \neq 0\}$, con $1 \leq i \leq n$. Si tomamos las sumas de Riemann relativas para las elecciones $\xi_{\mathcal{O}}$, $\xi_{\mathcal{Q}}$ y la partición \mathcal{P} . Resulta entonces evidente que $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{O}}) = 0$, ahora si consideramos $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{Q}})$ se tiene que puesto que f es R-integrable se satisface que

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{Q}}) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

Ahora sabemos que si hacemos $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, puesto que hemos supuesto que los puntos donde la función f son distintos de 0 son un conjunto a lo más numerable implica necesariamente que no importa cuan fina se la partición se tendra que la elección ξ tendra necesariamente puntos para los cuales $f(\xi_i)$ sea 0. Por tanto se tiene que cuando menos

$$0 \leq |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{Q}}) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

como podemos hacer ϵ tan pequeño como queramos podemos concluir que puesto que \mathfrak{R} existe y cumple que

$$-\epsilon - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{Q}}) < \mathfrak{R} < \epsilon - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{Q}})_{(1)}$$

Puesto que hemos supuesto que la desigualdad anterior se conserva para cualquier partición y elección que tomemos, puesto que f es R-integrable. Y

considerando la elección $\xi_{\mathcal{O}}$ de igual forma satisface la desigualdad podemos concluir que

$$\int_I f(x)dx = 0$$

Es decir si \mathfrak{R} existe la desigualdad (1) se cumple para cualquier suma de Riemann relativa $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$, podemos concluir entonces que necesariamente $\mathfrak{R} = 0$. ■

4 Ejercicio 4

Usando la definición de suma de Riemann con ayuda del criterio de Darboux, encuentra

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (x^2y + x) dx dy$$

Sea \mathcal{P} una partición del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$, de tal modo que $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$, donde \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son una partición del intervalo $[0, 1]$

5 Ejercicio 5

Sea $f(x, y, z) = z \sin(x + y)$ y considerando el intervalo $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$. Usa el teorema de Fubini para calcular:

$$\int_I f(x, y, z) dx dy dz$$

La integral esta dada por

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi z \sin(x + y) dx dy dz \\ \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi z \sin(x + y) &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z \left[\int_0^\pi \sin(x + y) dx \right] dy dz \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z [-\cos(x + y)|_y^{y+\pi}] dy dz = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z [2 \cos(y)] dy dz \\ &= \int_0^1 2z \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y) dy \right] dz = \int_0^1 2z [\sin(y)|_{-\pi/2}^{\pi/2}] dz \\ &= \int_0^1 4z dz = 4 \int_0^1 z dz = 4 \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^1 \right) = 2 \end{aligned}$$

6 Ejercicio 6

Usa el teorema de Fubini para mostrar que si una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ para algún $m \geq 1$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$