

# 1 Ejercicio 1

## 1.1

a. Demuestra que un conjunto de medida cero no tiene puntos interiores. Primeramente fijaremos algunas definiciones que usaremos para demostrar la proposición.

### Definición 1.1.1 .

Sea  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ . Se define la bola abierta de  $\mathbb{R}^n$  con centro en  $\vec{x}_0$  y radio  $\epsilon$  por:

$$B(\vec{x}_0, \epsilon) = V_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

### Definición 1.1.2 .

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y sea  $\vec{x}_0 \in A$ . Entonces  $\vec{x}_0$  se llama punto interior de  $A$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(\vec{x}_0, \epsilon) \subseteq A$ .

### Definición 1.1.3 .

Un rectángulo cerrado en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

con  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Se define el volumen del rectángulo  $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  por:

$$Vol(S) = v(s) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

si  $a_i \leq b_i$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$  y  $Vol(s) = 0$  si  $S = \emptyset$ .

### Definición 1.1.4 .

Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que tiene medida 0 si dado  $\epsilon > 0$ , existe un recubrimiento a lo más numerable  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  de  $A$  de rectángulos cerrados es decir

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty U_n$$

con  $U_n$  un rectángulo cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$\sum_{i=1}^\infty Vol(U_i) < \epsilon.$$

### **Demostración**

Sea un  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto de medida 0. Supongamos que  $A$  posee un punto interior  $x_0$  por definición existe un cierto  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \subseteq A$  ello implica que  $B(x_0, \epsilon)$  consta de todos los puntos  $x$  tal que  $\|x - x_0\| < \epsilon$ . Ahora dado que  $A$  tiene medida 0 existe un recubrimiento de rectángulos que satisface  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon.$$

Para todo  $\varepsilon > 0$ . Lo que a su vez implica que  $B(x_0, \epsilon) \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Puesto que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon.$$

se satisface para cualquier  $\varepsilon > 0$  se cumple que para cualquiera de los sub-rectángulos  $U_k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , se satisface que  $Vol(U_k) < \sum_{i=1}^{\infty} Vol(U_i) < \varepsilon$ . Si tomamos  $\epsilon > \varepsilon$  se hace evidente que  $B(x_0, \epsilon) \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  lo cual contradice el hecho de que  $B(x_0, \epsilon) \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Análogamente si tomamos  $\epsilon \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ , se tiene necesariamente que  $\epsilon = 0$  lo cual es una contradicción puesto que hemos supuesto que  $\epsilon > 0$ . Por tanto podemos concluir que si  $A$  tiene medida cero entonces  $A$  no posee puntos interiores. ■

## 1.2

b. Construye un conjunto que tenga medida cero pero que su cerradura sea  $\mathbb{R}^n$ .

De igual forma establecemos primeramente algunas definiciones que nos ayudaran a demostrar la proposición.

### Definición 1.2.1 .

Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un punto  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Se llama punto de adherencia de  $A$  si para todo  $\epsilon > 0$ ,  $B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ .

El conjunto

$$\overline{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} \text{ es un punto de adherencia de } A\}$$

recibe el nombre de cerradura de  $A$ .

### Demostración

Sabemos que un conjunto que tiene medida por el ejercicio no contiene puntos interiores por lo que podemos proponer un conjunto que tenga medida 0 en  $\mathbb{R}$  y cuya cerradura sea precisamente  $\mathbb{R}$ . Tomando en consideracion lo anteriormente mencionado sea  $A = \mathbb{Q}$ , con  $\mathbb{Q}$  el conjunto de números racionales procederemos a demostrar que  $\mathbb{Q}$  tiene medida cero en  $\mathbb{R}$  para ello consideremos la colección de todos los números racionales De la forma  $p/q$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  y con la condición de que  $p$  y  $q$  sean primos relativos. Sea dicho conjunto  $A = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  y definamos los intervalos

$$I_n = (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n})$$

Si consideramos la unión de los infinitos intervalos, se cumple que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Ahora puesto que  $Vol(U_k) = \frac{\epsilon}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k-1}} \leq \epsilon$$

la serie anterior converge para cualquier  $\epsilon$  que escojamos y preserva la desigualdad, ahora puesto que podemos hacer  $\epsilon$  tan pequeño como queramos se tiene necesariamente que el conjunto  $A$  tiene medida cero en  $\mathbb{R}$ . Es decir el conjunto  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  es de medida cero. Ahora puesto que  $\mathbb{Q}$ , es de medida cero y se tiene que la cerradura  $\overline{\mathbb{Q}}$  es precisamente  $\mathbb{R}$ , tomemos el conjunto

$$\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$$

formado al realizar el producto de  $\mathbb{Q}$  con sigo mismo  $n$  veces. Entoces se hace evidente que  $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$  es de medida cero, esto se sigue del hecho de que podemos verificar esto siguiendo los pasos anteriormente descritos, de que  $\mathbb{Q}$  es de medida cero considerando unicamente rectángulos en  $\mathbb{R}^n$ . Con ello obtenemos que  $\mathbb{Q}^n$  es de medida cero y su cerradura  $\overline{\mathbb{Q}^n}$  es  $\mathbb{R}^n$ . ■

## 2 Ejercicio 2

*Construye una función acotada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que sea igual a cero en casi todo punto del intervalo  $I$  y que no sea Riemann integrable.*

**Definición 2.0.1** (Riemann-integrabilidad).

Una función  $f$  definida en  $[a, b]$  es Riemann integrable (R-integrable) si existe un número real  $\mathfrak{R}$  tal que para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , tal que  $\forall \mathcal{P}$  partición de  $[a, b]$  con  $\|\mathcal{P}\| < \delta$  y toda elección  $\xi$  se tiene

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

En este sentido la función  $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$  esta dada por

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}|$$

A esta suma la llamaremos **Suma de Riemann** de  $f$  relativa a la partición  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  de  $[a, b]$  y la elección  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , donde  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . A este número  $\mathfrak{R}$  lo denotaremos mediante el símbolo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$$

### Demostración

Sea la función  $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

es claro que la función  $f$  es igual a 0 en casi todos los puntos del intervalo  $[0, 1]$ , se demostrara que la función  $f$  no es Riemann-integrable. De acuerdo a lo anteriormente mencionado se tiene que si  $f$  es R-integrable entonces debe existir un número real  $\mathfrak{R}$  tal que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  de tal modo que

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathfrak{R}| < \epsilon$$

Para toda partición  $\mathcal{P}$  de el intervalo  $[0, 1]$  y toda elección  $\xi$ .

Sea  $\mathcal{P} = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$  una partición de intervalo  $[0, 1]$  tal que  $\|\mathcal{P}\| < \delta$ , para algún  $\delta > 0$  y sea  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  una elección de tal forma que  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Queda claro entonces que el valor de  $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$  dependera de la elección  $\xi$  que escojamos puesto que independientemente de que  $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$  se tendra que cuando menos el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  contendra un número  $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  y otro  $b \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , sin importar cuan fina sea la partición  $\mathcal{P}$ . Ello implica que en este caso la elección  $\xi$  determinara el valor de  $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$  puesto que si tomamos la elección  $\xi_{\mathbb{Q}}$  de tal forma que  $\forall \xi_i \in \xi_{\mathbb{Q}}, \xi_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  se tendra que

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathbb{Q}}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n 1 * |x_i - x_{i-1}| = 1$$

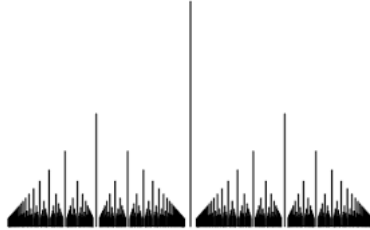
Analogamente si tomamos la elección  $\xi_{\mathbb{I}}$  de tal forma que  $\forall \xi_i \in \xi_{\mathbb{I}}, \xi_i \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  se tendra que

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi_{\mathbb{I}}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n 0 * |x_i - x_{i-1}| = 0.$$

Por tanto el resultado de  $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)$  dependera de la elección  $\xi$  y por tanto de existir un número real  $\mathfrak{R}$  este deberia de cumplir que  $\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |1 - \mathfrak{R}| < \epsilon$  y a su vez  $\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow |0 - \mathfrak{R}| < \epsilon$ . Esto implica que si  $\mathfrak{R}$  existe entonces  $\mathfrak{R}$  debe de cumplir

$$\mathfrak{R} \in (-\epsilon + 1, \epsilon + 1) \text{ y } \mathfrak{R} \in (-\epsilon, \epsilon)$$

Por lo tanto dicho número  $\mathfrak{R}$  no puede existir puesto que de existir deberia pertenecer a dos entornos distintos al mismo tiempo. Con ello queda demostrado que la función  $f$  no es Riemann-integrable.



### 3 Ejercicio 3