Solución al Problema de la Mochila usando Búsqueda Local

Marialicia Suárez Sergio Teŕan

Resúmen.

El problema de la mochila surge cuando hay una asignación de recursos con restricciones de costo. Cada ítem tiene un costo y un valor, se busca obtener el mayor valor posible con un presupuesto dado. El término *Problema de la mochila* evoca la imagen de un viajero con una mochila de tamaño fijo que debe llenar sólo con los ítem más útiles. Este problema se clasifica como un problema de optimización combinatoria y, computacionalmente, se categoriza como NP-Completo [1]. Este artículo propone solucionar el problema planteado usando una función heurística de búsqueda local.

Palabras Clave:

Optimización Combinatoria, Metaheuristica, Busqueda Local, Iterativo

Abstract.

The Knapsack problem arises when there is an allocation of resources with cost constraints. Each item has a cost and a value, it seeks to obtain the highest value possible with a given budget. The term *Knapsack Problem* evokes the image of a traveler with a backpack fixed size that should be filled only with the most useful item. This problem is classified as a combinatorial optimization problem and, computationally, categorized as NP-Hard. This article proposes to solve the problem raised using a local search heuristic function.

Keywords:

Combinatorial Optimization, Metaheuristics, Local Search, Iterative

1. Introducción.

El problema de la mochila (KP por sus siglas en inglés, *Knapsack Problem*) es un problema que ha sido intensamente estudiado por muchos años. El interés en este problema se debe, por una parte a sus aplicaciones directas e indirectas, y por la otra, por ser un campo de prueba que permite ensayar la eficiencia de métodos de solución de búsqueda inteligente en problemas de optimización combinatoria.
Este artículo busca probar la eficiencia de la heurística de optimización combinatoria con búsqueda local utilizando las estrategias de pivoteo *first-improvement* y *best-improvement*.

2. Buúqueda Local.

Búsqueda local es un método determinístico y sin memoria, utilizado en muchos otros problemas de optimización. Se puede ver como un proceso iterativo que empieza en una solución y la perturba realizando modificaciones locales, buscando en su vecindad por una mejor solución. Si la encuentra, reemplaza su solución actual por la nueva y continua con el proceso, hasta que no se pueda mejorar la solución actual.

Algorithm 1: Busqueda Local

Input: S_0 Solución inicial generada
Output: S Optimo local

```
1 S = S_0
2 while S no es optimo local do
3 |   S' ∈ N_(S) con f_(S) < f_(S') (Solución mejor
  |     dentro de la vecindad)
4 |   S ← S'
5 return S
```

El diseño de la vecindad es fundamental para el desempeño del algoritmo. Al hablar de vecindad nos referimos a un conjunto de soluciones cercanas a la solución actual. Para seleccionar cuál solución escoger de esta vecindad, existen distintos acercamientos, siendo posible escoger entre el acercamiento de mejor mejora (*best improvement rule*), primer mejora (*first improvement rule*), aleatorio (*random rule*) entre otros.

2.1. Estrategias.

La estrategia de pivoteo, puede llegar a ser crucial para el desarrollo del algoritmo, pudiendo generar óptimos locales distintos según el caso, y es importante saber escoger cual estrategia es la más adecuada para la función objetivo en cuestión. En la realización de este articulo, se usaron las reglas de pivoteo de *best-improvement* y *random*.

2.1.1. Mejor Mejora.

Bajo esta estrategia, se toma el S' perteneciente al conjunto de soluciones vecinas de S ($S' \in N_{(S)}$) que genera la mejor mejora, es decir, del conjunto de todas las soluciones que superan a la solución actual, se toma el supremo, y se sustituye $S \leftarrow S'$ para continuar con la iteración.

2.1.2. Primer Mejora.

La estrategia de selección de primer mejora, comienza a recorrer la vecindad $N_(S)$, comparando cada S' que toma con el S actual, al momento que consigue un S' mejor que la solución actual, lo toma, para de recorrer el vecindario y sustituye $S \leftarrow S'$

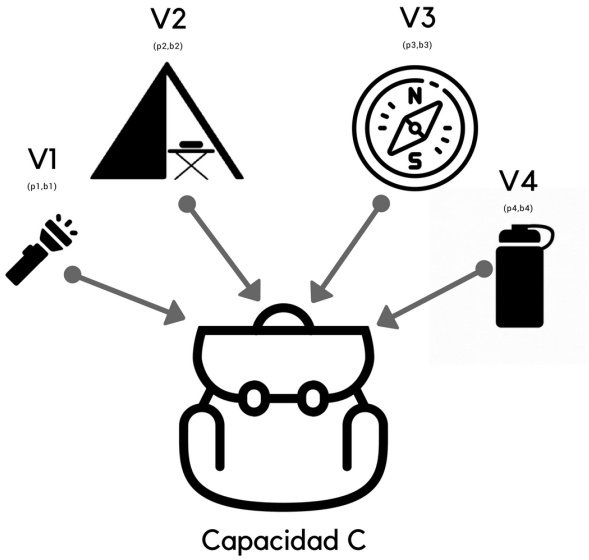
3. Problema de la Mochila.

El problema KP es un problema de optimización combinatoria de formulación sencilla, aunque su resolución es compleja, y que aparece, directamente o como un subproblema en una gran variedad de aplicaciones, incluyendo planificación de la producción, modelización financiera, muestreo estratificado, planificación de la capacidad de instalaciones, etc.
Además de sus potenciales aplicaciones, el KP es de particular interés por sus características combinatorias y su estructura sencilla, que lo vuelven un problema ideal para el diseño de métodos de búsqueda inteligente. Con el tratamiento del problema KP se pueden evaluar las ventajas y desventajas de estos algoritmos, sobretodo su precisión y rapidez.
El KP es un problema combinatorio que es NP-Completo [2], que figura en la lista de 21 problemas NP-completos de Karp [5], por tanto es improbable que, en algún momento, pueda ser encontrado un algoritmo que pueda resolverlo en tiempo polinomial. A pesar de esto, no se cuenta como un problema fuertemente NP-Completo, por lo que puede ser resuelto en tiempo pseudo-polinomiales particularmente por programación dinámica. Para la realización de este artículo, se implementó una solución con programación dinámica, para considerar como casos óptimos, y realizar la comparación de resultados con la heurística en cuestión (LS).

3.1. Formulación.

Dado un conjunto de objetos $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, donde cada V_i tiene un peso p_i y un beneficio b_i respectivamente, donde $i \in [1, n]$, y dado que se tiene un recipiente (Mochila) con capacidad C, el problema KP consiste en determinar la combinación de objetos de V que se agregan en la mochila, de manera que el beneficio obtenido sea el máximo posible, como se puede ver en la Figura 1, donde se tienen 4 items, es decir $V = (p_1, b_1), (p_2, b_2), (p_3, b_3), (p_4, b_4)$ y la mochila tiene una capacidad total de C.

Figura 1: Problema de la Mochila. Cómo cargar óptimamente la mochila sin rebasar su capacidad máxima.



3.2. Función objetivo.

En el KP el objetivo es maximizar la suma de los beneficios, por lo que la función objetivo del problema se puede representar como

$$Max \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

Esta función está sujeta a las restricciones de no negatividad y no nulidad además de la capacidad máxima, que no puede ser excedida por la sumatoria de los pesos depositados en la mochila.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq c$$

$$x_i \in \{0, 1\}; i = 1, 2, \ldots, n$$

La variable x_i toma el valor de 1 o 0 según el elemento V_i pertenece a la combinación dentro de la mochila o no respectivamente.

4. Búsqueda local para KP.

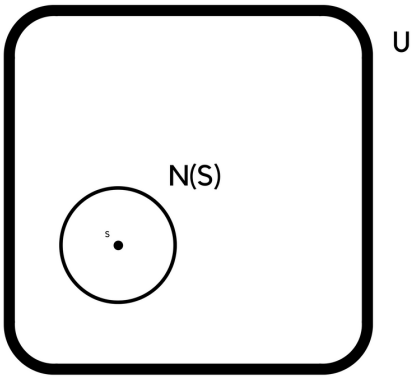
La idea de este estudio es comparar la eficiencia de los procedimientos de búsqueda local bajo las estrategias de *best-improvement* y *first-improvement* para resolver el problema KP. Para esta comparación se utilizaron instancias de pruebas generadas de manera aleatoria,

y se compararon los resultados de la heurística de LS, con los resultados obtenidos por la solución de programación dinámica implementada.

4.1. Estructura de vecindad.

Para decidir la forma en la cual se debe determinar el espacio de soluciones $N_{(S)}$ del problema que se aborde, debemos conocer el problema [3], sin olvidar que el objetivo es maximizar.
Comenzamos partiendo de una solución factible que cumpla con las restricciones del modelo matemático. Los elementos que conforman esta solución son aquellos cuyo peso no sobrepasa el peso soportado por la mochila. La solución inicial también son todos aquellos elementos cuya sumatoria de pesos es menor que la capacidad máxima. Por simplicidad se tomó como $x_i = 0$ para $i = 1 \dots n$.
Para ilustrar la vecindad [4] (Figura 2), se toma la solución $S = x_i; i = 1 \dots n$, y se consideran los $S' = x_i$ donde solo una de las x_i cambie su valor ($x_i \in 0, 1$).

Figura 2: Dado un conjunto de soluciones U la vecindad $N_{(S)}$, indicada por el círculo, se define como los conjuntos S' que solo difieren en un elemento respecto a S (punto dentro de $N_{(S)}$).



Se observa que $S \in U$ y que $N \subset U$. Si se toma un punto $S' \in N_{(S)}$ que represente una mejora respecto a S, este se tomará como nueva solución actual. De este modo el método de LS va iterando paso a paso desde una solución inicial hacia una solución que mejore la anterior, que se evalúa en la función objetivo y que cumpla con todas las restricciones.

$$f(S') \leq f(S)$$

5. Resultados.

Para la implementación del algoritmo de programación dinámica se utilizó el lenguaje de programación Haskell, mientras que para los algoritmos de LS se utilizó el lenguaje de programación Python. Para los casos de uso se utilizaron dos *laptops*, los casos en Haskell se corrieron en un procesador Core i3 con 2Gb de RAM, y para los casos en Python se utilizó también un procesador i3 con 4Gb de memoria RAM. Luego de hacer 10 casos de prueba distintos, donde se varían la cantidad de ítems en V desde 10 hasta 50, se presentan los resultados, comparando los óptimos obtenidos para cada caso, al igual que las iteraciones para cada estrategia.

Figura 3: Tabla 1: Comparación resultados por caso de prueba

		First-Improvement		Best-Improvement		Dynamic Algorithm
		Resultado	Error (%)	Resultado	Error (%)	
|V| = 10	p1	55	19.64	45	12.7	63
	p2	45	3.57	54	22.22	56
|V| = 20	p3	179	63.92	180	16.28	215
	p4	216	4.86	150	16.24	227
|V| = 30	p5	323	21.6	380	7.77	412
	p6	196	30.25	263	6.41	281
|V| = 40	p7	230	29.88	152	53.66	328
	p8	447	19.89	526	5.76	558
|V| = 50	p9	1299	8	1288	8.78	1412
	p10	264	67.8	627	23.55	820

En la tabla presentada arriba se observa que tanto el acercamiento por FI como el BI da resultados bastante cercanos al caso de programación dinámica, con errores pequeños, sin embargo, para la mayoría de los casos el error producido por BI es más pequeño que el error de FI, dando así resultados generales mas aceptables.

En las figuras 4 y 5 se muestran los beneficios máximos en función de la cantidad de iteraciones bajo la estrategia de *best-improvement* (BI) y *first-improvement* (FI) respectivamente, el caso BI describe un crecimiento casi lineal hasta llegar a un valor máximo, mientras que el caso FI tarda mas en crecer. Se puede ver en la tabla 1 (Figura 3) que ambos métodos convergen hacia óptimos muy similares, sin embargo, las figuras 4 y 5 evidencia que el método BI converge en menos iteraciones que FI para todos los casos.
También se deduce de la Figura 1 que, en la mayoría de los casos, la estrategia de BI produce errores más pequeños con respecto a la solución de programación

Figura 4: Grafica 1: Regla Mejor Mejora

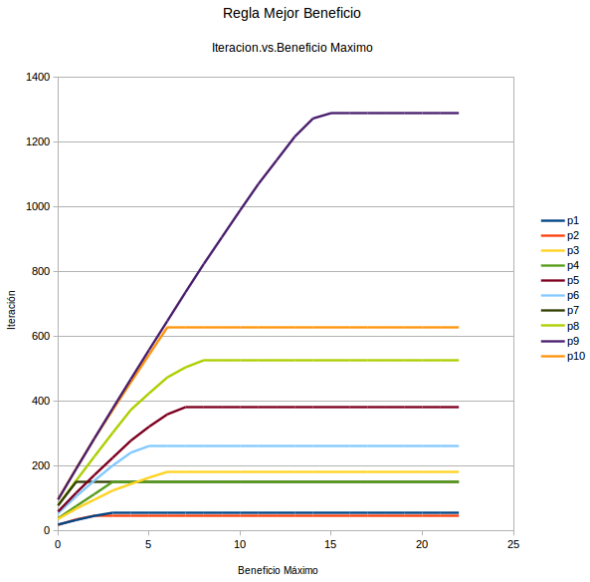
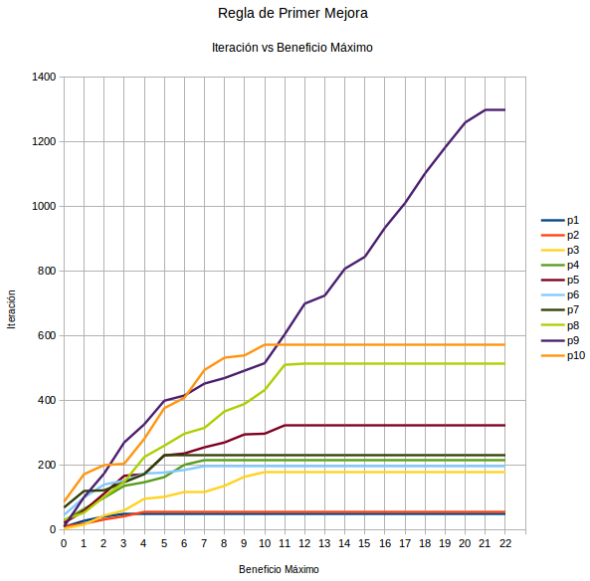


Figura 5: Grafica 2: Regla Primer Mejora



dinámica.

6. Discusión y Conclusiones.

Se puede apreciar que, a pesar de que ambos métodos generar óptimos cercanos a en tiempos mejores que exponencial, el uso de la estrategia de BI genera los mejores resultados en la menor cantidad de iteraciones para la mayoría de los casos, produciendo soluciones con errores pequeños respecto a la solución ofrecida por la programación dinámica.

Es importante destacar que para el problema KP existen casos de prueba que sacan del tiempo pseudo-polinomial al algoritmo de programación dinámica, mientras que el método de LS mantiene tiempos pequeños y pseudo-lineal, siendo más eficiente en los casos antes mencionados. Esta eficiencia en el tiempo se mantiene relativamente estable a medida que se aumenta $|V|$ al igual que, si consideramos la solución de Programación Dinámica como la óptima, el error de la solución no presenta mayores variaciones.

Para concluir podemos decir que el estudio realizado en este artículo sugiere que el método más eficiente de LS, para el problema de la Mochila, entre las implementaciones estudiadas, es el que toma como estrategia de pivoteo al regla de Mejor Mejora, ya que es la que en menos iteraciones consigue converger a una solución óptima.

Referencias

[1] Papadimitriou, C. H., Steiglitz, K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. *New York: Englewood Cliffs*, 1998.

[2] M. R. GAREY Y D. S. JOHNSON, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. *New York: W.H. Freeman*, 1979.

[3] Joyanes, A. L., Zahonero, M. I. Programación en C: Metodología, algoritmos y estructura de datos. *México: McGraw-Hill*, 2000.

[4] Michaelewicz, Z., Fogel, D. B. How to Solve it:Modern Heuristics. *Berlín: Springer-Verlag*, 2004.

[5] Richard M. Karp Reducibility Among Combinatorial Problems. En R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations. *New York: Plenum. pp. 85-103.*, 1972.