Análisis Numérico: Taller 3

Diana Sofía Carrillo Nelson Alejandro Mosquera Sergio Esteban Triana

Pontificia Universidad Javeriana
{ds-carrillog, nelson.mosquera, triana_se}@javeriana.edu.co
19 de octubre de 2021

Índice

1. Introducción **1**

2. Punto 1 **1**

3. Punto 13 **4**
3.1. Introducción . . . 4
3.2. Interpolación de segundo grado . . . 4
3.3. Interpolación de tercer grado . . . 4
3.4. Conclusiones . . . 5

Índice de figuras

1. Enunciado 1 . . . 1
2. Definición Polinomio de Interpolación de Lagrange [1]. . . . 2
3. Gráfico del polinomio de interpolación usando Lagrange. . . . 3
4. Gráfico del polinomio utilizando Lagrange y de la función real de e^x. . . . 3
5. Gráfico de la relación entre base imponible y cuota integra . . . 5

1. Introducción

En este documento se evidencia el desarrollo de los ejercicios asignados al grupo 1 del taller número 3 de la clase Análisis Numérico. Los ejercicios asignados fueron el ejercicio 1 de los primeros problemas propuestos y el ejercicio 13 del resumen.

2. Punto 1

Para el primer ejercicio se nos entregó la siguiente tabla en la cual se evidencian las estadísticas de un curso con la cantidad de estudiantes en cada rango de notas:

Rango de Notas	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
N^o Estudiantes	35	48	70	40	22

Figura 1: Enunciado 1

Se nos pidió estimar la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55.

Con el fin de adaptar los datos a la solución pedida, decidimos alterar la tabla de datos de tal forma de que el número de estudiantes no estuviera agrupado por el intervalo de notas si no por una nota menor o igual. A continuación el resultado:

$x \leq$	40	50	60	70	80
y	35	83	153	193	215

Para resolver el problema, caemos en cuenta de que necesitamos construir una función a partir de los puntos obtenidos que nos permita hallar la respuesta al evaluarla en $x = 55$.

Después de una pequeña investigación, nos encontramos con el concepto de interpolación, el cual se define como la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto de puntos.

Decidimos hallar el polinomio de interpolación usando el algoritmo de Lagrange, debido a que fue el algoritmo del que encontramos más documentación.

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Figura 2: Definición Polinomio de Interpolación de Lagrange [1].

Siguiendo la definición, implementamos el algoritmo utilizando los puntos obtenidos en la tabla:

$$P_4(x) = 35\frac{(x-50)(x-60)(x-70)(x-80)}{(40-50)(40-60)(40-70)(40-80)} + 83\frac{(x-40)(x-60)(x-70)(x-80)}{(50-40)(50-60)(50-70)(50-80)} + 153\frac{(x-50)(x-40)(x-70)(x-80)}{(60-50)(60-40)(60-70)(60-80)} + 193\frac{(x-50)(x-60)(x-40)(x-80)}{(70-50)(70-60)(70-40)(70-80)} + 215\frac{(x-50)(x-60)(x-70)(x-40)}{(80-50)(80-60)(80-70)(80-40)}$$

Utilizando la ayuda del software Symbolab, evaluamos el polinomio en $x = 55$, obteniendo el resultado en $P_4(55) = 120$

Con el objetivo de reducir el error del cálculo a mano, desarrollamos una implementación en Python del algoritmo de Lagrange. El resultado evaluando $x = 55$ siguió siendo el mismo: 120. Por medio de la implementación, hallamos el siguiente gráfico:

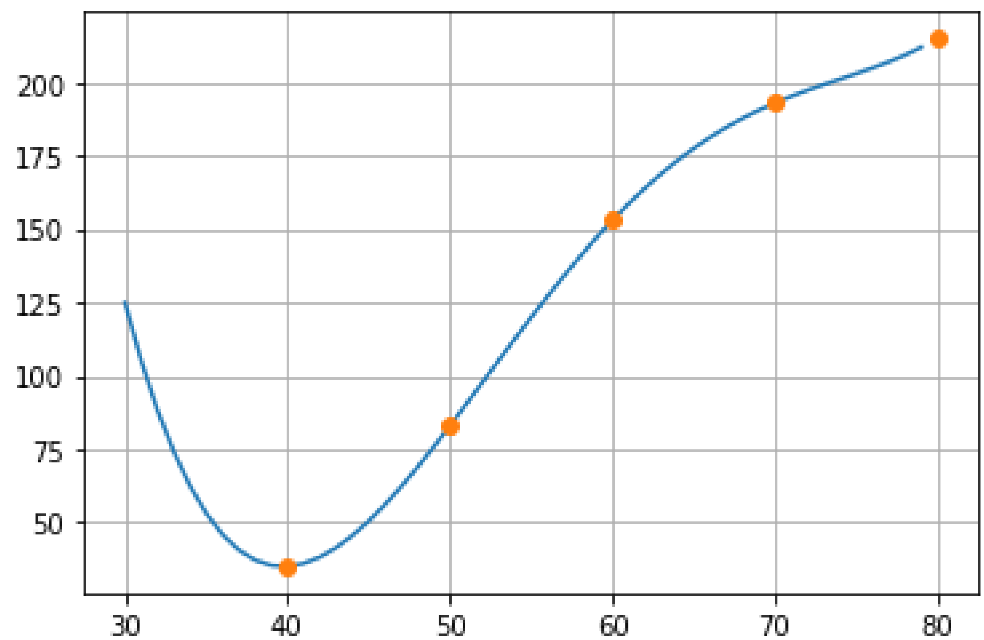

Figura 3: Gráfico del polinomio de interpolación usando Lagrange.

Como se puede observar, el polinomio obtenido es útil para los valores de x del 40 al 80, sin embargo, no es aplicable para el valor de x menor o igual a 30. La solución que proponemos sería hallar otro polinomio usando solo los datos de x menor o igual a este valor, en este documento no la desarrollamos debido a que no es pertinente para el descubrimiento de la solución.

Continuando con la investigación, descubrimos que existe un error en la interpolación. En el problema propuesto no es evidente debido a que no tenemos la función real, sin embargo, al aplicar el algoritmo de Lagrange a una función conocida como $f(x) = e^x$ el error en la aproximación sale a la luz:

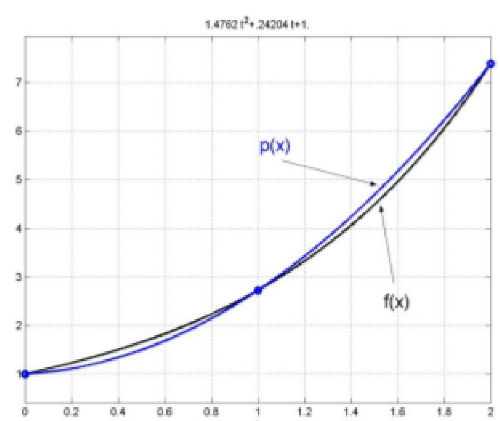

Figura 4: Gráfico del polinomio utilizando Lagrange y de la función real de e^x.

Restando el valor real de $f(x) = e^x$ evaluado en 0.5 por el valor del polinomio de interpolación evaluado en 0.5 tenemos que: $f(0{,}5) - p_2(0{,}5) = e^{0{,}5} - 1{,}462(0{,}5)^2 - 0{,}24204(0{,}5) - 1 = 0{,}1587$

Siguiendo con el análisis del problema, no creemos que sea oportuno quitar alguno de los puntos obtenidos. Esto se debe a que a la hora de hacer las pruebas, el resultado al evaluar el polinomio de interpolación sin alguno de los puntos nunca dio el valor formal de 120 estudiantes. Por lo que concluimos que entre más puntos se tengan para aplicar el algoritmo de interpolación de Lagrange, más precisa será la aproximación al valor real.

Creemos que la interpolación, puede ser usada en varios campos que requieran de algún tipo de estimación. Por ejemplo, el campo financiero a la hora de obtener estimaciones de tasas de crecimiento o interés.

Además, descubrimos la posibilidad de aplicar interpolación múltiple, abriendo la puerta a problemas que impliquen información espacio-temporal. Para esta también se puede usar el algoritmo de Lagrange.

3. Punto 13

3.1. Introducción

La interpolación es un método con el cual podemos llegar a estimar una función de x (f(x)) para un x arbitrario, a partir de una curva o superficie que une los puntos donde se han realizado las mediciones y cuyos valores se conocen. En el ejercicio se buscara explicar como se encontró la cuota integra sobre el impuesto de renta utilizando dos tipos de interpolaciones, las cuales serán : Interpolación de segundo grado y de tercer grado.

3.2. Interpolación de segundo grado

Al ser una interpolación cuadrática se sabe que nuestra función va a ser de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

También podemos aclara que en nuestro ejercicio se tomara y como la cuota integra y x como la base imponible. Esto se debe a que la cuota integra dependerá de la base imponible.

Con esto presente se puede llegar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a * 4410000^2 + b * 4410000 + c = 1165978$$

$$a * 4830000^2 + b * 4830000 + c = 1329190$$

$$a * 5250000^2 + b * 5250000 + c = 1501474$$

Al momento de la implementación este sistema de ecuaciones se dividirá en una matriz que tenga los polinomios y en un vector que tenga los resultados. Para resolver este sistema de ecuación, se decide utilizar el método de Gauss Jordan.

Al realizar la implementación en un programa de python se obtuvo la siguiente ecuación:

$$y = 2{,}57142857 * 10^{-8}x^2 + 1{,}51000000 * 10^{-1}x - 2{,}60000000 * 10^1$$

Ahora al remplazar x por el valor de 5 millones, se obtiene que la cuota integra de :

$$1397831{,}14285714$$

3.3. Interpolación de tercer grado

Para realizar la interpolación de tercer grado se usara el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a * 4410000^3 + b * 4410000^2 + c * 4410000 + d = 1165978$$

$$a * 4830000^3 + b * 4830000^2 + c * 4830000 + d = 1329190$$

$$a * 5250000^3 + b * 5250000^2 + c * 5250000 + d = 1501474$$

$$a * 5670000^3 + b * 5670000^2 + c * 5670000 + d = 1682830$$

Al momento de la implementación este sistema de ecuaciones se dividirá en una matriz que tenga los polinomios y en un vector que tenga los resultados. Para resolver este sistema de ecuación, se decide utilizar el método de Gauss Jordán.

Al realizar la implementación en un programa de python se obtuvo la siguiente ecuación:

$$y = 1{,}45803140 * 10^{-27}x^3 + 2{,}57142857 * 10^{-8}x^2 + 1{,}51000000 * 10^{-1}x - 2{,}60000002 * 10^1$$

Ahora al remplazar x por el valor de 5 millones, se obtiene que la cuota integra de :

$$1397831{,}14285696$$

3.4. Conclusiones

Podemos evidenciar al final de los dos métodos de interpolación aplicados que sabiendo los datos del gravamen de impuesto de renta, para una base imponible de 5 millones el valor de la cuota integra seria de 1'397.831 aproximadamente, ya que en la aplicación de interpolación cuadrática nos da 1397831,14285714 y la de interpolación de tercer grado nos da 1397831,14285696. Por lo que podemos decir que la interpolación cuadrática es mejor debido a que da una cuota integra mas alta que la de interpolación de grado 3.

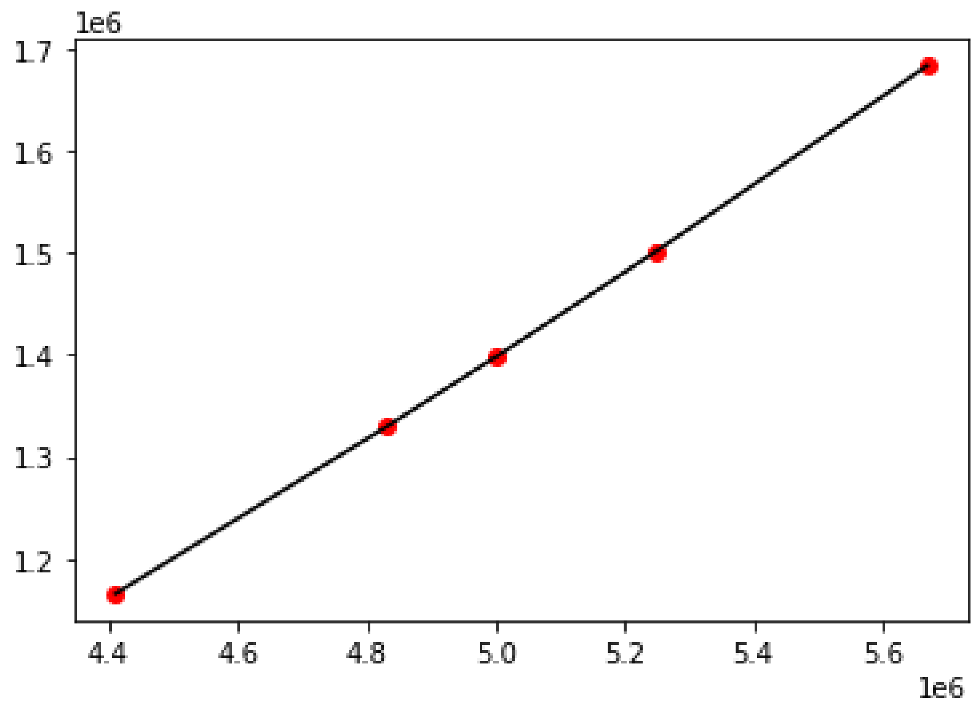

Figura 5: Gráfico de la relación entre base imponible y cuota integra

Finalmente podemos ver en el gráfico anterior que el aumento de la base imponible hace que la cuota crezca linealmente proporcional al valor.

Referencias

[1] L. Ojeda, "Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas Departamento de Matemáticas ANÁLISIS NUMÉRICO BÁSICO Un enfoque algorítmico con el soporte de Python." [Online].

9