Taller 4

David Alejandro Castillo Chíquiza,
Juan Pablo Ortiz Rubio,
Juan Sebastián Ruiz Bulla,
Sergio Esteban Triana

1. Integración

1.1. Simpson

Dados los siguientes puntos:

$$(0{,}1, 1{,}8), (0{,}2, 2{,}6), (0{,}3, 3{,}0), (0{,}4, 2{,}8), (0{,}5, 1{,}9)$$

Utilicé la fórmula de Simpson para encontrar una aproximación del área bajo la curva y calculé su error. Qué resultado se obtendría si utilizamos si primero interpola con Lagrange y luego calcula la integral.

1.1.1. Solución

Se implemento la solucion en python utilizando la libreria scipy, se inicio inicializando los puntos X y Y que daba el ejercicio, luego se usa la formula simpson de la libreria scipy para hallar una aproximacion del area bajo la curva y despues hallar el error de trucamiento con la formula.
Siguiente de esto se utiliza la funcion de interpolacion de lagrange para hallar un polinomio y evaluarlo con el fin de hallar la el valor y finalmente con este valor poder hallar el error comparandolo con respecto al resultado de la formula de simpson.

Los resultados de esto nos dio lo siguiente:

Integral Usando función simpson:	1,04333333333E+15
Error de truncamiento:	-0.000222222222222
Resultado de la interpolación lagrange:	1,04333333333E+15
Error:	0.000000000000028

Cuadro 1: Resultados

1.2. Distribuciones

Genere una tabla, donde se pueda aproximar los valores de la distribución binomial a una normal, con una corrección por continuidad de 0.05 y para cuando $\rho = 0{,}5$ y $n = 1000$. Compare los valores aproximados con los valores exactos de la binomial.

1.2.1. Solución

Para la solucion implementamos las librerias llamado seaborn y aplicamos scipy con las cuales aplicanos las funciones para hacer la distribucion binomial y la distribucion normal, lo que hicimos fue hallar la distribucion binomial y la normal y despues aplicamos un proceso para realizar la aproximacion y finalmente ploteamos la grafica. Plantilla para colocar imagenes en LaTex

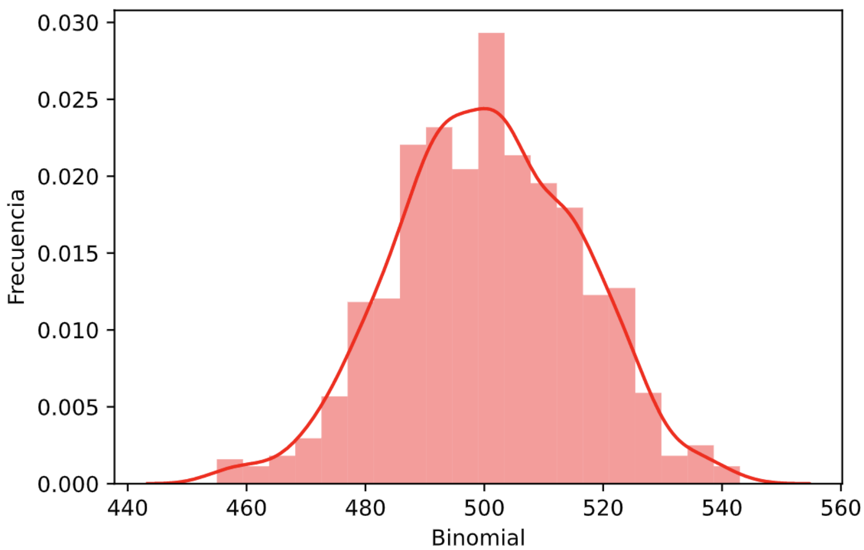

Figura 1: Distribucion Binomial

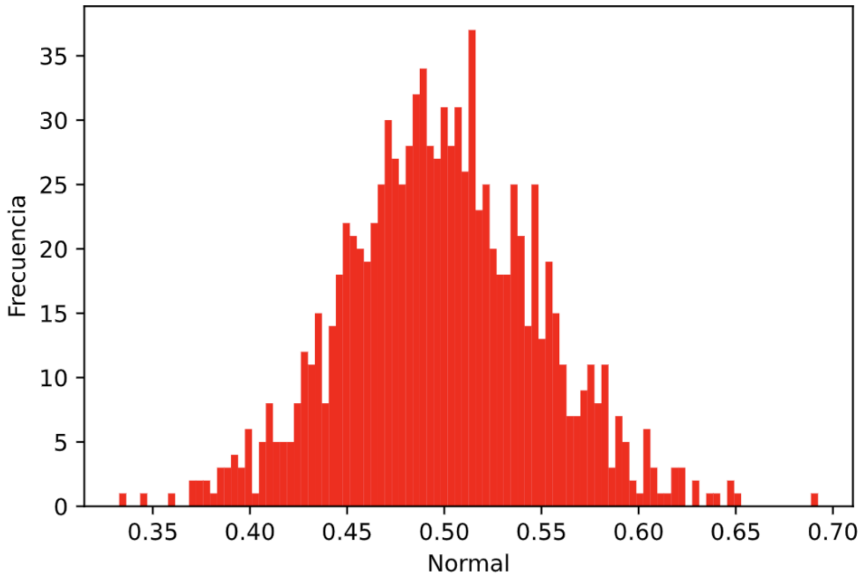

Figura 2: Distribución Normal

2. Ecuaciones Diferenciales

2.1. Valor Inicial

Considere el problema de valor inicial

$$y' = te^{3t} - 40y, t \in [1, 2], y(1) = 10$$

Utilice Taylor de orden cuatro para aproximar las soluciones en $t = 0{,}4; 0{,}01; 1{,}55$ y estime el error de truncamiento.

2.1.1. Solución

Para la solución de este punto realizamos una implementación de la serie de taylor a la cual le llega una ecuacion diferencial, realizamos 4 iteraciones para obtener el 4 orden de, finalmente obtenemos la siguiente ecuacion (Simplificada) como resultado de esto.

$$\frac{t^4\left(27-10\,\frac{d^4}{dt^4}y(t)\Big|_{t=0}\right)}{6}+\frac{t^3\left(27-40\,\frac{d^3}{dt^3}y(t)\Big|_{t=0}\right)}{6}+t^2\left(3-20\,\frac{d^2}{dt^2}y(t)\Big|_{t=0}\right)-t\left(40\,\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0}-1\right)-40y(0)$$

Luego evaluamos la ecuacion resultante en los puntos dados.

t=0.4

Valor Aproximado:

$$-40y(0)-16{,}0\,\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0}-3{,}2\,\frac{d^2}{dt^2}y(t)\Big|_{t=0}-0{,}426666666666667\,\frac{d^3}{dt^3}y(t)\Big|_{t=0}-0{,}0426666666666667\,\frac{d^4}{dt^4}y(t)\Big|_{t=0}+1{,}2832$$

Error:

$$\left|40y(0) - 40y(0{,}4) + 16{,}0 \ \frac{d}{dt}y(t)\right| t{=}0 + 3{,}2 \ \frac{d^2}{dt^2}y(t)\Bigg| t{=}0 + 0{,}426666666666667 \ \frac{d^3}{dt^3}y(t)\Bigg| t{=}0 + 0{,}0426666666666667 \ \frac{d^4}{dt^4}y(t)\Bigg| t{=}0 + 0{,}0448467690946193\Bigg|$$

t=0.01

Valor Aproximado:

$$-40y(0)-0{,}4 \ \frac{d}{dt}y(t)\Bigg| t{=}0-0{,}002 \ \frac{d^2}{dt^2}y(t)\Bigg| t{=}0-6{,}66666666666667\cdot 10^{-6} \ \frac{d^3}{dt^3}y(t)\Bigg| t{=}0-1{,}66666666666667\cdot 10^{-8} \ \frac{d^4}{dt^4}y(t)\Bigg| t{=}0+0{,}010304545$$

Error:

$$\left|40y(0) - 40y(0{,}01) + 0{,}4 \ \frac{d}{dt}y(t)\right| t{=}0 + 0{,}002 \ \frac{d^2}{dt^2}y(t)\Bigg| t{=}0 + 6{,}66666666666667 \cdot 10^{-6} \ \frac{d^3}{dt^3}y(t)\Bigg| t{=}0 + 1{,}66666666666667 \cdot 10^{-8} \ \frac{d^4}{dt^4}y(t)\Bigg| t{=}0 + 3{,}3953516907$$

t=1.55

Valor Aproximado:

$$-40y(0)-62{,}0 \ \frac{d}{dt}y(t)\Bigg| t{=}0-48{,}05 \ \frac{d^2}{dt^2}y(t)\Bigg| t{=}0-24{,}8258333333333 \ \frac{d^3}{dt^3}y(t)\Bigg| t{=}0-9{,}62001041666667 \ \frac{d^4}{dt^4}y(t)\Bigg| t{=}0+51{,}488965625$$

Error:

$$\left|40y(0) - 40y(1{,}55) + 62{,}0 \ \frac{d}{dt}y(t)\right| t{=}0 + 48{,}05 \ \frac{d^2}{dt^2}y(t)\Bigg| t{=}0 + 24{,}8258333333333 \ \frac{d^3}{dt^3}y(t)\Bigg| t{=}0 + 9{,}62001041666667 \ \frac{d^4}{dt^4}y(t)\Bigg| t{=}0 + 110{,}617762019527\Bigg|$$

2.2. Modelo depredador presa

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponden a una muestra estudio del sistema depredador presa de capturas de linces y conejos entre los años 1900 y 1920:

$$\begin{cases} x'(t) = 0{,}4x(t) - 0{,}010x(t)y(t); \quad x(0) = 30 \\ \\ y'(t) = -0{,}8y(t) + 0{,}023x(t)y(t); \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

Utilizando: Ringe-Kutta de orden 4. Encuentre la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales con una evolución por año.

Realice la gráfica que nos muestra la evolución de las presas.

Compare la solución con los datos reales y evalúe el error total promedio y el error local, en que año se produce el mayor error.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Figura 3: Tabla dada.

2.2.1. Solución

En la implementacion lo que realizamos es pasarle las dos funciones correspondientes, los puntos iniciales de cada funcion, la distancia entre puntos y la cantidad de años a evaluar el cambio de poblacion de conejos y linces. Siguiente de esto en el algoritmo va evaluando cada punto, multiplicando por la funcion, y esto retorna pues el respectivo valor de la evaluacion del punto en la ecuacion y eso se evidencia en una matriz, siendo la primera columna de la matriz los años, la segunda los conejos y la tercera los linces, y para finalizar se evaluan los errores siendo los errores locales los primeros, lo que se hace es comparar los resultados con los resultados reales y finalmente se halla el error promedio.

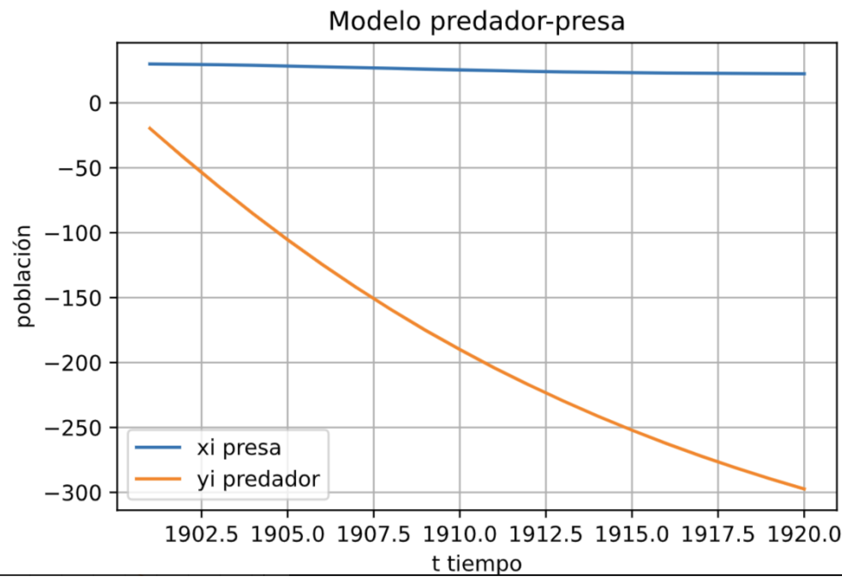

Figura 4: Grafica 1

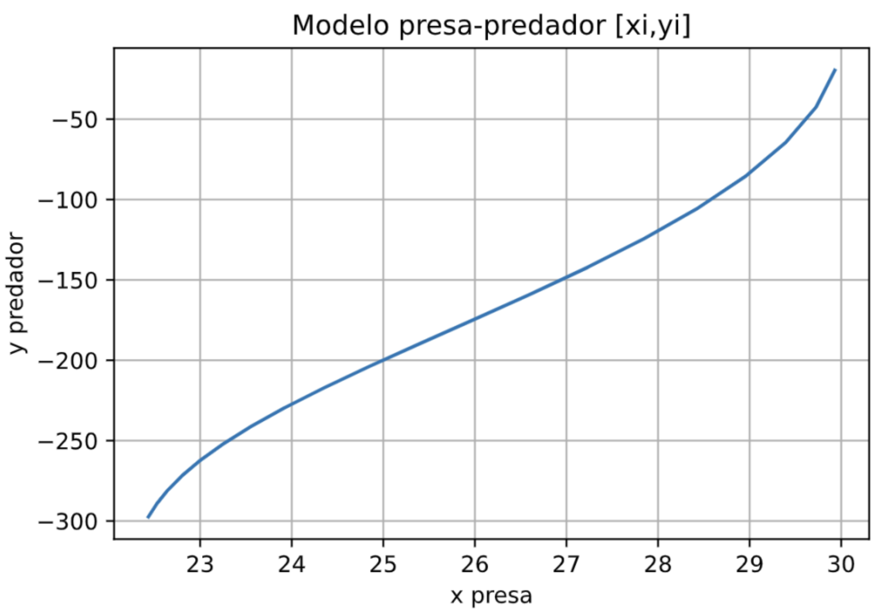

Figura 5: Grafica 2

```
ERRORES LOCALES
Año: 1901.0 Error Conejos: 0.1, Error linces: 23.6
Año: 1902.0 Error Conejos: 17.5, Error linces: 48.6
Año: 1903.0 Error Conejos: 40.8, Error linces: 74.2
Año: 1904.0 Error Conejos: 48.4, Error linces: 120.6
Año: 1905.0 Error Conejos: 7.9, Error linces: 164.8
Año: 1906.0 Error Conejos: 7.2, Error linces: 166.1
Año: 1907.0 Error Conejos: 9.1, Error linces: 161.3
Año: 1908.0 Error Conejos: 5.2, Error linces: 172.2
Año: 1909.0 Error Conejos: 4.0, Error linces: 183.4
Año: 1910.0 Error Conejos: 0.0, Error linces: 199.1
Año: 1911.0 Error Conejos: 2.3, Error linces: 211.4
Año: 1912.0 Error Conejos: 15.9, Error linces: 225.2
Año: 1913.0 Error Conejos: 33.1, Error linces: 241.9
Año: 1914.0 Error Conejos: 53.0, Error linces: 260.7
Año: 1915.0 Error Conejos: 29.1, Error linces: 297.8
Año: 1916.0 Error Conejos: 3.5, Error linces: 313.5
Año: 1917.0 Error Conejos: 11.6, Error linces: 301.7
Año: 1918.0 Error Conejos: 15.0, Error linces: 296.8
Año: 1919.0 Error Conejos: 7.9, Error linces: 299.2
Año: 1920.0 Error Conejos: 6.2, Error linces: 307.5
```

Figura 6: Errores Locales

```
ERROR PROMEDIO
Conejos: 15.133333333333335 Linces: 193.7904761904762
```

Figura 7: Error Promedio

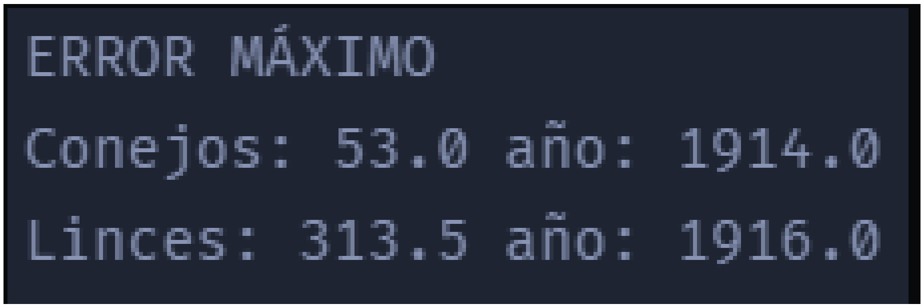

Figura 8: Error Maximo