PROBLEMES TEMA 1a

1. Amb els dígits 0-1-2-3-4-5 volem comptar els nombres que es poden formar agafant 4 xifres de les anteriors, seguint les especificacions següents, (tingueu en compte el cas en què es poden repetir les xifres i el cas en què no es poden repetir).

   a) Totes les possibilitats
   b) Nombres de 4 xifres, (0132 és un nombre de 3 xifres)
   c) Són capicua
   d) Nombres de 4 xifres que són capicua.

2. De quantes maneres es poden repartir tres ordinadors iguals entre cinc persones si:

   a) Cada persona només pot rebre un ordinador com a màxim
   b) No hi ha la restricció anterior.

   Repetiu l'exercici considerant ara que els ordinadors són diferents.

3. De quantes maneres poden formar els 12 membres d'un club tres comissions de 5,4 i 3 membres respectivament, si cada persona només pot estar en una comissió?

4. Tenim 10 plaques de memòria iguals i les volem posar a 20 ordinadors.

   a) De quantes maneres ho podem fer si els ordinadors no tenen límit de memòria?
   b) De quantes maneres si com a màxim a un ordinador només li podem posar una placa?

   Repeteix els apartats anteriors considerant ara que les plaques de memòria són diferents.

5. Si tenim 11 amics, de quantes maneres en podem convidar 5 a dinar? Si dos són parella i van sempre junts, de quantes maneres en podem convidar 5? I si dos estan barallats i no els podem convidar junts, de quantes maneres els podem convidar?

6. Quina és la mida mínima d'un alfabet per poder identificar els individus d'una població de mida 10^6 amb paraules de tres lletres? Quina és la llargada mínima de les paraules d'un alfabet de tres lletres per poder identificar els individus d'una població de mida 10^6?

7. En un ascensor hi ha n usuaris a la planta baixa i puja m pisos. Quantes distribucions de nombres d'usuaris sortint a cada planta hi ha? En quantes d'aquestes distribucions no baixa ningú a la planta 1? En quantes d'aquestes distribucions surt com a molt un usuari a cada planta?

8. Quantes paraules de llargada n d'un alfabet de tres símbols $\{0, 1, -1\}$ tenen exactament r 0's? Quantes tenen exactament r 0's i s uns? Quantes n'hi ha que la suma de dígits és 0?

9. De quantes maneres diferents es poden distribuir n boles en m caixes numerades si $m \geq n$ i :

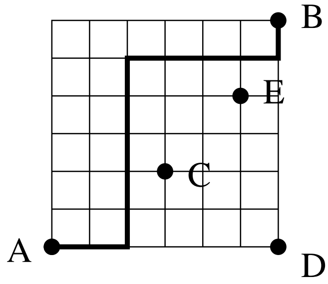
   a) Les boles són distingibles.

   b) Les boles no són distingibles.

   c) Cada caixa té com a molt una bola (considereu els casos de boles distingibles i boles no distingibles).

   d) Si exactament una de les caixes està buida i les boles són indistingibles.

10. Es vol connectar (cablejar) els punts A i B, de manera que el camí segueixi la quadrícula que marca el dibuix. Només és permès anar a la dreta(1) i a dalt(0). En el gràfic teniu representat un dels camins possibles, que vindria descrit per la seqüència 110000011110.



   a) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B.

   b) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C.

   c) Calcula el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C i per E.

11. Considereu totes les solucions de l'equació $x_1+x_2+x_3+x_4 = 50$, on x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors enters $x_i \geq 0$.

   a) Quantes n'hi ha?

   b) Quantes solucions hi ha amb exactament una de les incògnites és igual a 0?

   c) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors parells?

   d) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors senars?

12. Cal repartir 100 alumnes en 4 aules (cada aula té una capacitat per a 100 alumnes). De quantes maneres es pot fer si els alumnes són " indistingibles " i:

   a) No hi posem cap restricció.

   b) Volem 25 alumnes a cada aula.

   c) Volem que la primera aula quedi buida.

   d) Volem que alguna aula quedi buida.

   e) Volem, almenys, 15 alumnes per aula.

13. De quantes maneres es poden posar en fila 15 persones distingibles si

    a) No hi posem cap restricció.

    b) Dues persones concretes han d'anar sempre juntes.

    c) Quatre persones concretes han d'anar sempre juntes.

    d) Dues persones concretes han d'anar sempre separades.(Feu-ho de dues maneres diferents, fent servir els apartats a) i b), i directament, col.loca primer 13 persones i després les altres dues separades).

14. D'una baralla espanyola de 40 cartes (cada pal va numerat 1,2,...,7,10,11,12) prenem mostres no ordenades de mida tres sense reposició, quantes mostres diferents obtenim:

    a) Sense cap restricció.

    b) Amb totes les cartes d'oros.

    c) Amb totes les cartes de pals diferents.

    d) Amb almenys una carta d'espases.

    e) Amb el número de cadascuna de les cartes múltiple de 3.

15. Amb els codis $\{0, 1, 2\}$ s'envien cadenes de 10 dígits.

    a) Quantes cadenes es poden enviar?

    b) Quantes cadenes tenen exactament 3 zeros?

    c) Quantes cadenes tenen exactament 3 zeros en posicions contigües?

    d) Quantes cadenes tenen exactament 2 zeros i 5 uns?

    e) Quantes cadenes fan servir únicament els dígits $\{0, 1\}$ com a màxim?

    f) Quantes fan servir, com a màxim, dos dígits diferents?

16. Es passa una enquesta a una mostra de 20 persones d'un col.lectiu de 100 persones de les quals 60 són homes i la resta dones.

    a) Quantes mostres es poden prendre?

    b) Quantes mostres es poden prendre formades exclusivament per homes?

    c) Quantes mostres es poden prendre formades per 10 homes i 10 dones?

    d) Si hi ha 2 homes i 3 dones molt interessats en respondre les enquestes, quantes mostres hi ha formades per 10 homes i 10 dones que els incloguin?

17. Sigui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

    a) Quants subconjunts d'A contenen tots els nombres imparells d'A?

    b) Quants subconjunts d'A contenen exactament tres nombres imparells?

    c) Quants subconjunts d'A de 5 elements contenen exactament tres nombres imparells?

    d) Quants subconjunts no buits d'A tenen tants nombres parells com imparells?

18. Disposem d'una baralla espanyola de 40 cartes. Volem comptar quantes mostres de mida 4 agafades sense reposició hi ha que tinguin:

    a) Totes les cartes de pals diferents.

    b) Totes les cartes del mateix pal.

    c) Dues cartes d'oros i dues de copes.

    d) Dues cartes d'un mateix pal i les altres dues d'un mateix pal diferent de l'anterior.

19. L'etiquetament d'un producte consta de tres dígits del zero al 9 i de sis lletres (disposem de 25 lletres diferents). Els dígits i les lletres poden ser iguals o diferents. Quants etiquetaments hi ha amb:

    a) Els tres dígits numèrics davant i les lletres al darrera.

    b) Els tres dígits numèrics seguits.

    c) Les lletres només poden ser vocals.

    d) Les lletres només poden ser consonants i han d'estar a l'inici de l'etiqueta.

20. Tirem un dau de sis cares 10 vegades. Quants resultats possibles amb les següents característiques hi ha:

    a) Els 10 resultats són parells.

    b) Hi ha exactament quatre tresos i quatre sisos.

    c) Hi ha exactament tres sisos.

    d) Han sortit tres cincs, quatre uns i tres sisos.

21. Volem posar 8 cartes en 12 sobres diferents. De quantes maneres ho podem fer si:

    a) Totes les cartes són iguals i com a màxim volem posar una carta a cada sobre.

    b) Totes les cartes són iguals i podem omplir cada sobre amb tantes cartes com vulguem.

    c) Totes les cartes són diferents i com a màxim volem posar una carta a cada sobre.

    d) Totes les cartes són diferents i podem omplir cada sobre amb tantes cartes com vulguem.

22. Fent servir el sistema de numeració en base 2 (només amb els dígits 0 i 1)

    a) Quants nombres de 10 xifres hi ha?

    b) Quants, dels anteriors, no comencen per 0?

    c) Quants tenen exactament tres zeros i no comencen per zero?

    d) Quants tenen exactament quatre uns i són capicues?

23. En el sistema de numeració decimal,

   a) Quants nombres de tres xifres hi ha? (002 té tres xifres)

   b) Quant sumen tots els nombres de tres xifres?

   c) Quants nombres de tres xifres amb totes les xifres senars hi ha?

   d) Quants nombres de tres xifres hi ha amb dues xifres parells i una de senar?

24. De quantes maneres poden seure en una fila de 14 seients 10 nois i 4 noies si:

   a) No hi ha cap restricció.

   b) Els nois seuen tots junts i les noies també.

   c) Les noies volen seure totes juntes i als nois els és igual seure junts o separats.

   d) Hi ha una parella (un noi i una noia) que volen seure junts, i no hi ha cap altra restricció sobre la resta de nois/ies.

25. Tenim 12 punts sobre una circumferència.

   a) Quants triangles diferents podem fer?

   b) Quantes cordes diferents podem fer?

   c) Quantes diagonals té el dodecàgon que determinen els 12 punts?

26. Un quiosc comercialitza 5 diaris diferents. Un guia turístic demana als 25 turistes que el segueixen que triïn cadascun d'ells un diari. Quantes comandes diferents pot fer el guia al quiosquer?

27. De quantes maneres podem posar 12 llibres en tres maletes diferents si:

   a) Els llibres són diferents

   b) Els llibres són iguals.

28. Connectem 10 cables a 20 endolls diferents.

   a) Si només podem connectar com a màxim un cable a cada endoll. Troba el nombre de configuracions possibles en les casos:

      1) els cables són exactament iguals (indistingibles)

      2) els cables són diferents (distingibles).

   b) Si als endolls hi podem connectar tants cables com vulguem. Troba el nombre de configuracions possibles en les casos:

      1) els cables són exactament iguals (indistingibles)

      2) els cables són diferents (distingibles).

SOLUCIONS

1. Es poden repetir: a)1296, b)1080, c)36, d)30. No es poden repetir: a)360, b)300, c)0, d)0.
2. Iguals: a) $C_{5,3}$, b) $CR_{5,3}$. Diferents: a) $P_{5,3}$, b) $PR_{5,3}$.
3. $\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$.
4. Iguals:a) $CR_{20,10}$, b) $\binom{20}{10}$. Diferents: a) $PR_{20,10}$,b) $P_{20,10}$.
5. $C_{11,5}$, $C_{9,5} + C_{9,3}$, $C_{11,5} - C_{9,3}$.
6. 10^2, 13.
7. $\binom{m+n-1}{n}$, $\binom{m+n-2}{n}$, $\binom{m}{n}$.
8. $\binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}$, $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{s}$, $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{i}$
9. a) m^n, b) $\binom{m+n-1}{n}$, c) $P_{m,n}$ distingibles i $C_{m,n}$ indistingibles,d) $m \cdot CR_{m-1,n-(m-1)}$.
10. a) $\binom{12}{6}$, b) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3}$, c) $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}$
11. a) $\binom{50+4-1}{4-1}$, b) $4\binom{(50-3)+3-1}{3-1}$, c) $\binom{\frac{50}{2}+4-1}{4-1}$, d) $\binom{\frac{50-4}{2}+4-1}{4-1}$.
12. 176851, 1, 5151, 20002, 12341.
13. a) $1{,}3077 \cdot 10^{12}$, b) $1{,}7436 \cdot 10^{11}$, c) $1{,}1496 \cdot 10^{10}$, d) $1{,}1333 \cdot 10^{12}$.
14. a) 9880, b)120, c)4000, d)5820,e) 220.
15. a) 59049, b) 15360, c) 1024, d) 2520, e) 1024, f) 3069.
16. a) $5{,}3598 \cdot 10^{20}$, b) $4{,}1918 \cdot 10^{15}$, c) $6{,}3909 \cdot 10^{19}$, d) $1{,}9734 \cdot 10^{16}$.
17. a) 16, b) 64, c) 24, d)69.
18. a) 10000, b) 840, c) 2025, d) 12150.
19. a) $2{,}4414 \cdot 10^{11}$, b) $1{,}7090 \cdot 10^{12}$, c) $1{,}3125 \cdot 10^{9}$, d) $6{,}4 \cdot 10^{10}$.
20. a) 59049, b) 50400, c) $9,3750 \cdot 10^6$ d) 4200.
21. a) 495, b) 75582, c) $1{,}9958 \cdot 10^7$, d) $4{,}2998 \cdot 10^8$.
22. a) 1024, b) 512, c) 84, d) 10.
23. a)1000, b) 499500, c) 125, d) 375.
24. a) $8{,}7178 \cdot 10^{10}$, b) $1{,}7418 \cdot 10^8$, c) $9{,}58 \cdot 10^8$, d) $1{,}2454 \cdot 10^{10}$
25. a) 220, b) 66, c) 54.

26. 23751.

27. a) $5,3144 \cdot 10^5$, b) 91.

28. Si podem connectar com a màxim un cable: 184756, $6{,}7044 \cdot 10^{11}$. Si podem connectar tants cables com vulguem: $2{,}003 \cdot 10^7$, $1,0240 \cdot 10^{13}$.