Ampliació de matemàtiques – EETAC

Examen MQ – 7 de novembre de 2.018

Duració: 2 hores

Entregueu els problemes en fulls separats
Poseu el NOM en MAJÚSCULES en tots els fulls
No es permet l'ús de calculadores ni apunts de cap tipus
És necessari justificar totes les respostes.

`Problema 1 [3,5 punts]`: Sigui $F(x,y,z) = (y^2, -2z + x^3, x)$ un camp vectorial. Sigui S la superfície definida per

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - z = x^2 + (y-1)^2,\ z \geq 0\}.$$

Sigui C la corba vora de S.

Utilitzeu el teorema de Stokes per calcular la integral del camp F sobre la corba C orientada en sentit antihorari vista des de $z > 0$.

`Problema 2 [2,5 punts]`: Sigui $F(x,y,z) = (az^2 + by, 2x - czy^2, -y^3 + 2xz)$ un camp vectorial, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) (1 punt) Calculeu els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ pels quals F és un camp conservatiu.

b) (1 punt) Per a aquests valors a, b, c calculeu un potencial de F.

c) (0,5 punts) Calculeu la integral de F al llarg d'una corba que té per origen el punt $(1,1,1)$ i extrem $(3,2,-1)$.

`Problema 3 [4 punts]`: Sigui $F(x,y,z) = (xz, yx, zy)$ un camp vectorial. Sigui V el volum definit al tallar el cilindre $x^2 + y^2 = 4$ amb $z = 0$ i $z + y = 2$. Sigui S_1 la tapa lateral del volum, S_2 la tapa superior i S_3 la tapa inferior.

a) (1,5 punt) Calculeu el flux de F a través de S_2 i S_3, amb l'orientació cap enfora.

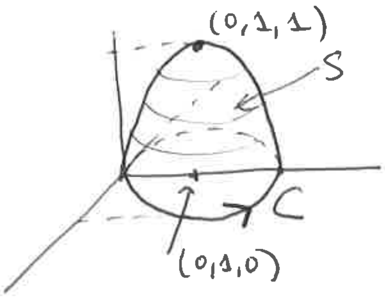
b) (1,5 punts) Useu el teorema de la divergència per a calcular el flux total de F a través de la vora de V.

c) (1 punt) Deduïu dels apartats anteriors el flux de F a través de S_1 amb l'orientació cap enfora.

PROBLEMA 1

$$F(x,y,z) = (y^2, -2z+x^3, x)$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1-z = x^2+(y-1)^2, z \geq 0\}$$



- C vora de S $\int_C \vec{F}\, ds$?
- orientada en sentit antihorari vista des de $z>0$

$1-z = x^2+(y-1)^2$ paraboloide circular vèrtex $(0,1,1)$

que té per vora la circumferència

$x^2+(y-1)^2 = 1$ → centre $(0,1,0)$ radi 1

Calculem $\operatorname{rot}\vec{F}$:
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -2z+x^3 & x \end{vmatrix} = (2, -1, 3x^2-2y)$$

Considerem S' = disc de centre $(0,1,0)$ i radi 1.

(també té vora la corba C), orientat amb el vector normal cap amunt.

Aleshores
$$\int_C \vec{F}\, ds \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema de} \\ \text{Stokes}}}{=} \iint_{S'} \operatorname{rot}\vec{F}\, d\vec{S}$$

Parametritzem el disc:
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y-1 = r\sin\theta \to y = r\sin\theta + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Calculem els vectors tangents i el vector normal:

$$\vec{T}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{T}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = (0, 0, \overset{r>0}{r}) \to \text{cap amunt ok.}$$

Aleshores:

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}\vec{F}\, d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2, -1, 3r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta - 2)\cdot(0,0,r)\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^3\cos^2\theta - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral } 0 \\ \cos\theta]_0^{2\pi} = 0}}{2r^2\sin\theta} - 2r)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^1 3r^3\, dr \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \int_0^1 2r \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{3r^4}{4}\Big]_0^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\theta + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{\sin 2\theta}{4}}}\right]_0^{2\pi} - r^2\Big]_0^1 \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - 2\pi = \boxed{\frac{-5\pi}{4}}$$

<u>Nota</u>: També es pot fer prenent S el paraboloide amb parametrització

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta + 1 \\ z = 1 - r^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

PROBLEMA 2

a) $\vec{F}$ és C^1 a $\mathbb{R}^3$, per tant

$\vec{F}$ és conservatiu $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\vec{F} = 0$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ az^2+by & 2x-czy^2 & -y^3+2xz \end{vmatrix} = (-3y^2+cy^2,$$

$$, 2az-2z, 2-b)$$

$$\left.\begin{array}{r} -3y^2+cy^2=0 \\ 2az-2z=0 \\ 2-b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c=3 \\ a=1 \\ b=2 \end{array}}$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2+2y \xrightarrow{\int x} f(x,y,z) = z^2x+2xy+h_1(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x-3zy^2 \xrightarrow{\int y} f(x,y,z) = 2xy-zy^3+h_2(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y^3+2xz \xrightarrow{\int z} f(x,y,z) = -zy^3+z^2x+h_3(x,y)$$

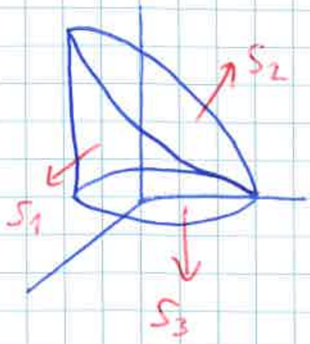
$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = 2xy+z^2x-zy^3+C}$$

c) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(3,2,-1)} \underset{\overset{\shortparallel}{\vec{F}}}{\vec{\nabla} f}\ ds \overset{\text{teorema del gradient}}{=} f(3,2,-1) - f(1,1,1) =$

$= 12 + 3 + 8 - 2 = \boxed{21}$

$F(x,y,z) = (xz, yx, zy)$

V = volum obtingut de tallar $x^2+y^2=4$ amb $z=0$ i $z+y=2$



a) Calculeu el flux de F a través de S_2 i S_3

i) $\underline{S_3}$: $S_3(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)$, $0\le u\le 2$, $0\le v<2\pi$

$T_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $T_v = (-u\sin v, u\cos v, 0) \Rightarrow T_u\times T_v = (0,0,u)$

El prenem cap a fora $(0,0,-u)$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} F\,dS = \int_0^2\int_0^{2\pi} (u\cos v\cdot 0,\ u^2\sin v\cos v,\ u\sin v\cdot 0)(0,0,-u)\,dv\,du = 0$$

ii) $\underline{S_2}$: $S_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2-u\sin v)$, $0\le u\le 2$, $0\le v<2\pi$

$T_u = (\cos v, \sin v, -\sin v)$, $T_v = (-u\sin v, u\cos v, -u\cos v)$

$\Rightarrow T_u\times T_v = (0,u,u)$ ← correcte, cap a fora de V.

$$\iint_{S_2} F\,dS = \int_0^2\int_0^{2\pi} (u\cos v\,\cancel{(2-u\sin v)}^{\,0},\ u^2\sin v\cos v,\ (2-u\sin v)u\sin v)\,(0,u,u)\,dv\,du$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} u^3\sin v\cos v + 2u^2\cancel{\sin v}^{\,0} - u^3\sin^2 v\,dv\,du = -\int_0^2 u^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cancel{\cos(2v)}^{\,0}}{2}\,dv\,du$$

$$= -\frac{1}{4}2^4\cdot\frac{2\pi}{2} = -4\pi$$

b) $\iiint_V \nabla\cdot F\,dV$: $\nabla\cdot F = x+y+z$, i el volum s'escriu com

$$\left.\begin{array}{ll} x=r\cos v & 0\le r\le 2 \\ y=r\sin v, & 0\le v<2\pi \\ z=z & 0\le z\le 2-r\sin v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla\cdot F\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{2-r\sin v} (r\cos v + r\sin v + z)\cdot r\,dz\,dr\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos v\,\cancel{(2}-r\sin v) + r\sin v(\cancel{2}-r\sin v) + r\frac{(2-r\sin v)^2}{2}\,dr\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -r^3\sin^2 v + \frac{1}{2}r\left[4 + r^2\sin^2 v - 4r\cancel{\sin v}^{\,0}\right]dr\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -\frac{r^3}{2} + 2r + \frac{r^3}{4}\,dr\,dv = 2\pi\cdot\left[-\frac{r^4}{8} + r^2 + \frac{r^4}{16}\right|_0^2 = 2\pi[4-1] = 6\pi$$

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

c) Calculeu $\iint_{S_1} F\,ds$:

usant el teorema de la divergència sabem que

$$\iiint_V \nabla\cdot F\,dv = \iint_{S_1} F\,ds + \iint_{S_2} F\cdot ds + \iint_{S_3} F\cdot ds$$

on els fluxos es prenen prenent la orientació cap enfora. Per tant,

$$\iint_{S_1} F\cdot ds = 6\pi - 0 - (-4\pi) = 10\pi$$