Exercicis de Càlcul

Enginyeria Aeronàutica EETAC

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2019-2020

1 Introducció. Funcions

Exercicis introductoris

1. Resoleu les següents inequacions:
   (a) $-6x + \frac{7}{3} \leq \frac{3}{2}x + 1$
   (b) $\frac{4}{3}x + \frac{1}{2} > -x$
   (c) $x^2 + x > 6$
   (d) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$
   (e) $|x| < 1$
   (f) $|x| \geq 1$
   (g) $|x+1| \leq 3$
   (h) $|x+1| > 3$

2. Estudieu els límits laterals de les següents funcions, en els punts que s'indiquen:
   (a) $\frac{1}{x-1}$ en $x = 1$
   (b) $\frac{1}{\ln(1+x)}$ en $x = 0$
   (c) $\frac{|x|}{x}$ en $x = 0$
   (d) $e^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$
   (e) $e^{\frac{1}{|x|}}$ en $x = 0$
   (f) $e^{-\frac{1}{|x|}}$ en $x = 0$

3. Estudieu la continuïtat de les següents funcions i classifiqueu-ne les eventuals discontinuïtats:
   (a) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$
   (d) $f(x) = \begin{cases} e^{1+\ln|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4. Doneu una equació de cadascuna de les següents còniques:
   (a) Circumferència de centre $(4, -1)$ i radi 1.
   (b) Circumferència de centre $(-2, -2)$ i radi $5\sqrt{2}$.
   (c) El·lipse de centre $(4, -3)$ i semieixos de longitud $\sqrt{3}$ i 2.
   (d) Paràbola de vèrtex $(1, -4)$ que passa pel punt $(-5, 1)$.
   (e) Paràbola de vèrtex $(1, 4)$ que passa pel punt $(-5, 1)$.
   (f) Hipèrbola de centre $(0, 0)$, vèrtexs $(\pm 2, 0)$ i asímptotes d'equació $y = \pm 3x$.

5. Identifiqueu i dibuixeu les corbes següents:
   (a) $y^2 - x^2 = 1$
   (b) $25x^2 + 36y^2 = 900$
   (c) $2x^2 - y^2 = 4$
   (d) $xy = 4$
   (e) $4x^2 + 4y^2 = 1$
   (f) $8x = y^2$
   (g) $10y = x^2$
   (h) $4x^2 + 9y^2 = 16$
   (i) $xy = -1$
   (j) $3y^2 - x^2 = 9$
   (k) $xy = 0$

Exercicis bàsics

6. Resoleu les següents inequacions:
   (a) $\frac{x+2}{3x-4} < 0$
   (b) $(x+1)(x+2)(x-4) < 0$
   (c) $2x + \frac{x}{x+1} - 3 > 0$
   (d) $\frac{x-1}{x^2 - x - 12} < \frac{1}{x+2}$
   (e) $|1 - x| < 4x + 1$
   (f) $\frac{|x-1|}{x} \leq 0$
   (g) $(1+x)^2 \geq |1 - x^2|$
   (h) $|34 + 21x - x^2| \leq -1$
   (i) $1 - x^2 \leq |x - 1|$
   (j) $\frac{3e^{-x}}{x^3 - x} \leq 0$
   (k) $x^2 - \left|\frac{1}{4} - x\right| > 0$

7. Calculeu el domini de les funcions definides per les següents expressions:
   (a) $f(x) = \sqrt{x(x^2-1)}$
   (b) $g(x) = \ln(1 - \ln x)$
   (c) $h(x) = \arcsin \dfrac{x}{1-x}$
   (d) $j(x) = \dfrac{x}{\sin x - \cos x}$
   (e) $m(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)}$
   (f) $n(x) = \ln(\ln(\ln x))$

8. Estudieu els límits laterals de les següents funcions, en els punts que s'indiquen:
   (a) $\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ en $x = 1$
   (b) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = 0$
   (c) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = 0$
   (d) $\operatorname{tg} x$ en $x = \dfrac{3\pi}{2}$

9. Doneu una expressió simplificada de $\sinh(\ln 2)$ i $\cosh(\ln 3)$.

10. Demostreu que $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$, per tot $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

11. Determineu les equacions de les següents còniques i dibuixeu-les:
    (a) Circumferència de centre $(6, 1)$ que passa per l'origen.
    (b) El·lipse de centre $(-1, 2)$ amb vèrtexs als punts $(1, 2)$ i $(-1, 1)$.
    (c) El·lipse de centre $(0, 5)$ amb vèrtexs als punts $(0, 2)$ i $(-1, 5)$.
    (d) Paràbola de vèrtex $(1, -2)$, eix de simetria paral·lel a l'eix OX i que passa pel punt $(4, 3)$.
    (e) Paràbola de vèrtex $(1, -2)$, eix de simetria paral·lel a l'eix OX i que passa per l'origen.
    (f) Hipèrbola de centre $(-1, -3)$ amb un vèrtex al punt $(0, -3)$ i una asímptota d'equació $y = 2x - 1$.
    (g) Hipèrbola de centre $(-1, -3)$ amb un vèrtex al punt $(0, -3)$ i una asímptota de pendent -2.
    (h) Hipèrbola de centre $(-1, -3)$ amb un vèrtex al punt $(-1, 0)$ i una asímptota de pendent 2.
    (i) Hipèrbola equilàtera de centre $(1, 6)$ que passa pel punt $(2, 4)$.

12. Identifiqueu i dibuixeu les corbes següents:
    (a) $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 10 = 0$
    (b) $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 10 = 0$
    (c) $x^2 + y^2 + x - y = 0$
    (d) $4x^2 + 4y^2 + 8y - 3 = 0$
    (e) $x^2 + y^2 - x - 2y + 3 = 0$
    (f) $x^2 + y^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$

13. Identifiqueu i dibuixeu les corbes següents:
    (a) $xy - y = 0$
    (b) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 2$
    (c) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 1$
    (d) $3x^2 - 6x - y^2 + 4y = 4$
    (e) $y^2 - 4y + 4 - x = 0$
    (f) $(x + y)^2 - 1 = 0$
    (g) $2x^2 + 2x + y^2 - y = 1/4$
    (h) $-4x^2 + y^2 - 2y = 0$

14. Considerem la corba d'equació $ax^2 + 2x + 3y^2 + by + 1 = 0$.
    Determineu per a quins valors de a i b es tracta de:
    (a) Una circumferència de radi 1
    (b) Una el·lipse de centre $(-2, 1)$
    (c) Una paràbola de vèrtex $(1, 1)$
    (d) Una hipèrbola amb centre a l'eix OX

    Quina corba es té quan $a = -3$ i $b = -4$?

Exercicis avançats

15. Proveu que el perímetre d'un polígon regular de n costats inscrit en una circumferència de radi r és $2rn\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. A quin valor tendeix aquest perímetre quan n és gran?

16. Considerem les funcions $f(x) = x\sin^2 x$, $g(x) = x^2(1+\sin^2 x)$, $h(x) = x + \sin x$, $j(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Raoneu l'existència dels següents límits:
    (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
    (b) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
    (c) $\lim_{x\to+\infty} h(x)$
    (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h^2(x)}$
    (e) $\lim_{x\to 0} j(x)$
    (f) $\lim_{x\to+\infty} h(x)\cdot j(x)$
    (g) $\lim_{x\to 0} j(x)\cdot h(x)$
    (h) $\lim_{x\to 0} \frac{j(x)}{x}$

17. Resoleu les equacions següents:
    (a) $\cosh^2 x + \frac{3}{4}\sinh x = 1$
    (b) $\cosh(2x) + \sinh x = 7$

2 Derivació de funcions d'una variable

Exercicis introductoris

1. Calculeu la derivada de les següents funcions i simplifiqueu per expressar-la en la forma indicada:
   (a) $f(x) = \dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$ .... $f'(x) = ((q-p)x - p - q)\dfrac{(1-x)^{p-1}}{(1+x)^{q+1}}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ .... $f'(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$
   (c) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ .... $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
   (d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ .... $f'(x) = -\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{1}{2}a^2 \arcsin\dfrac{x}{a}$ $\quad (a>0)$ .... $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2}$
   (f) $f(x) = 2\arctan\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ .... $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   (g) $f(x) = 2\tan\dfrac{x}{2} - x$ .... $f'(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
   (h) $f(x) = \dfrac{1}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)\,e^{ax}$ .... $f'(x) = e^{ax}\cos bx$

2. Calculeu i simplifiqueu la derivada de les següents funcions:
   (a) $\cosh^2 x + \sinh^2 x$ (b) $\tanh x + \tan x$ (c) $\ln(\cosh x) + \ln(\cos x)$ (d) $x^{\ln x}$

3. Estudieu la derivabilitat de les funcions següents en els punts que s'indiquen:
   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \le 2, \\ 4-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x=2$
   (b) $f(x) = |x-4|$ en $x=4$
   (c) $f(x) = (x-3)^{2/3}$ en $x=3$
   (d) $f(x) = (x-3)^{3/2}$ en $x=3$
   (e) $f(x) = \sqrt{x-5}$ en $x=2$
   (f) $f(x) = \sqrt{x-5}$ en $x=5$

4. Calculeu les equacions de les rectes tangents a les següents corbes, als punts que s'indiquen:
   (a) $f(x) = x^x$ en el punt d'abcissa 1
   (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$ en el punt d'abcissa $\frac{\pi}{3}$

5. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x) = x^3 - 9x$ en el punt d'abcissa a.
   És possible que aquesta recta tangent talli la gràfica de la funció en algun altre punt?
   Comproveu-ho per $a = \sqrt{3}$.

6. Determineu les equacions de totes les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = \ln x$.
   Donat $k \in \mathbb{R}$, determineu quina d'elles passa pel punt $(0, k)$.

7. Per cadascuna de les següents corbes, trobeu l'expressió de $y'(x)$ derivant implícitament.
   (a) $\cos(xy) = 2y$ (b) $y^3 = \ln(x^3+y^3)$ (c) $e^{xy} - x + y^2 = 1$

8. Calculeu les equacions de les rectes tangents a les següents corbes, als punts que s'indiquen:
   (a) Hipèrbola d'equació $x^2 - y^2 - x = 1$, en el punt $(2,1)$
   (b) Cúbica d'equació $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$, en el punt $(1,1)$
   (c) Lemniscata d'equació $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ en el punt $(3,1)$.

9. Trobeu les equacions de les rectes tangent i normal a la corba $x^2 - y^2 = 7$ en el punt $(4, -3)$. Dibuixeu conjuntament la corba i les rectes.

10. Calculeu els següents límits:
    (a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-7}$
    (b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2+9}$
    (c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+9}$
    (d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x-1}$
    (e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}$
    (f) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3^x + 2}{3^x + 6}$

11. Calculeu els següents límits, usant la regla de l'Hôpital:
    (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
    (b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
    (c) $\lim_{x\to-\infty} xe^x$
    (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
    (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x}$
    (f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

12. El polinomi de Taylor de grau ≤ 2 de la funció $f(x) = \sin(x)$ al voltant de l'origen és $P_2(x) = x$. A l'adreça *http://www.calculusapplets.com/linearapprox.html* trobareu un *applet* que us permetrà comparar aquestes dues funcions.
    (a) Useu l'*applet* per comprovar que $\sin(0.01) \sim 0.01$ és una aproximació amb 6 decimals correctes.
    (b) Useu la fórmula del residu de Lagrange per trobar una estimació de l'error comès en aproximar $\sin(0.01)$ per 0.01.
    (c) Useu l'*applet* per representar gràficament la funció $g(x) = \sin(x) - x$ en l'interval [-0.1,0.1] i observeu-ne el valor en $x = 0.01$. Compareu aquest resultat amb el de l'apartat anterior.
    (d) Què se'n pot deduir del valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

13. Determineu el polinomi de Taylor de grau N de la funció f en el punt a. Escriviu-ne també l'expressió del residu de Lagrange.
    (a) $f(x) = 3\sin 2x - 2\cos 3x,\ a = 0,\ N = 5$
    (b) $f(x) = x^5,\ a = 1,\ N = 5$
    (c) $f(x) = e^{2x},\ a = -1,\ N = 4$
    (d) $f(x) = x^2e^x - xe^{-x},\ a = 0,\ N = 5$
    (e) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 8,\ N = 2$
    (f) $f(x) = \sin x,\ a = \frac{\pi}{2},\ N = 6$

14. Trobeu el polinomi P, de grau mínim, tal que $P(-1) = 3$, $P'(-1) = 2$,$P''(-1) = -2$, $P'''(-1) = 12$.

15. Calculeu l'equació de la paràbola que millor aproxima, al voltant de l'origen, la corba d'equació $y = e^x \ln(x+1)$.

16. Trobeu els valors $a, b \in \mathbb{R}$ per als quals $f(x) = a\ln x + bx^2 + x - 2$ té extrems relatius en els punts $x = 1$ i $x = 2$. Determineu si són màxims o mínims.

17. Estudieu els extrems absoluts de les funcions següents en els intervals donats:
    (a) $f(x) = -x^2$ en $[-2, 2]$
    (b) $f(x) = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $[-2, 2]$
    (c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ en $[-2, 3]$
    (d) $f(x) = \sqrt{x-4}$ en $[4, 29]$

18. Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $(3, 4)$ i talla el primer quadrant en un triangle d'àrea mínima.

19. Volem inscriure un rectangle a l'el·lipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$, de manera que els costats siguin paral·lels als eixos de l'el·lipse. Calculeu les dimensions del rectangle en cadascun dels casos següents:
    (a) La seva àrea sigui màxima
    (b) El seu perímetre sigui màxim

Exercicis bàsics

20. A continuació teniu dos resultats d'aspecte molt semblant. Un fa referència al càlcul de la potència n-èsima d'un binomi, l'altre al càlcul de la derivada n-èsima del producte de dues funcions. S'anomenen, respectivament, Teorema del Binomi de Newton i Fórmula de Leibniz. El coeficient $\binom{n}{k}$, nombre combinatori n sobre k, es defineix com: $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, on $k! = k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

    Els enunciats són:

    $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \qquad \text{(Binomi de Newton)}$$

    $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} = \binom{n}{0}f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + \binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)} + \binom{n}{n}fg^{(n)} \qquad \text{(Fórmula de Leibniz)}$$

    Useu-los per calcular:

    (a) $(1+x)^4$

    (b) $(1-x)^5$

    (c) $\left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)^5$

    (d) La derivada cinquena de $f(x) = x\cos x$

    (e) La derivada n-èsima de $g(x) = (ax^2+bx+c)e^x$

    (f) $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, on $f(x) = x\cos x$ i $g(x) = x\sin x$

21. Per a quin valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ la corba $y = e^{\lambda x}$ i la recta $y = x$ són tangents?

22. Hi ha alguna recta que sigui tangent, simultàniament, a les paràboles d'equacions $y = -x^2$ i $y = x^2 - 2x + 5$?

23. Trobeu l'equació de la paràbola amb eix de simetria horitzontal, que passa pel punt $(1,0)$ i és tangent a la recta $y = 2x$ en el punt $(2,4)$. Doneu-ne també les coordenades del vèrtex.

24. Calculeu les equacions de les rectes tangents a la circumferència de centre $(3,-1)$ i radi 2, paral·leles a la recta d'equació $y = \sqrt{3}x$. Doneu també els punts de tangència.

25. Trobeu les equacions de les rectes tangents a $9x^2 + 16y^2 = 52$ paral·leles a la recta $9x - 8y = 1$.

26. Considerem la corba C d'equació

    $$\ln\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + y\arctan(x) = \tan(2xy)$$

    (a) Determineu els punts de tall de C amb l'eix OX.

    (b) Calculeu l'equació de la recta perpendicular a C en el punt (o punts) de l'apartat anterior.

27. Calculeu l'àrea del triangle format per l'eix OX i les rectes tangent i normal a la cúbica d'equació $x^3 + y^3 = \dfrac{9}{2}xy$, en el punt $(1,2)$.

28. Quin angle formen les rectes tangents en $(0,0)$ a les corbes d'equació $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ i $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$?

29. Quin angle formen, en el punt de tall, la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$ i la paràbola $y = \sqrt{x}$?

30. Calculeu els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{\sin^3 x}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$
(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln x$
(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{e^x}$, on $n \in \mathbb{N}$
(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{(1 - \cos^2 x)^2}$
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x^2}$
(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sin x$
(l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sin x}$.

31. Donats $\alpha \in (0, +\infty)$ i $\beta \in (0, 1)$, calculeu els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x}$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta}$

32. Calculeu, en funció de $n \in \mathbb{N}$, el polinomi de Taylor de grau $\leq n$ de $f(x)$ a l'origen:
(a) $f(x) = \ln(1 + x)$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ (d) $f(x) = \cos x$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

33. En cadascun dels següents apartats, calculeu el polinomi de Taylor de grau n de la funció f centrat en el punt $x = a$, useu-lo per calcular un valor aproximat de V i determineu, mitjançant la fórmula del residu de Lagrange, una fita de l'error en l'aproximació.

(a) $f(x) = \sin x,\ n = 3,\ a = 0,\ V = \sin(1)$.
(b) $f(x) = \ln(1 + x),\ n = 3,\ a = 0,\ V = \ln(3/2)$.
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ n = 2,\ a = 8,\ V = \sqrt[3]{10}$.
(d) $f(x) = \sqrt{4 + x},\ n = 2,\ a = 0,\ V = \sqrt{4.1}$.
(e) $f(x) = e^x,\ n = 3,\ a = 0,\ V = \sqrt[4]{e}$.

34. Estudieu els extrems relatius de les funcions següents:
(a) $f(x) = x^3 + 48/x$
(b) $f(x) = (x - 1)^{1/3}(x + 2)^{2/3}$
(c) $f(x) = |x^2 - 1| + 1$
(d) $f(x) = x^3 - x + 2|x - 1| + 1$
(e) $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2} - 1$
(f) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 - 2$
(g) $f(x) = 1 - e^{-x}x^4$
(h) $f(x) = \sin^3 x$

35. Estudieu els extrems absoluts de les funcions següents en els intervals donats:
(a) $f(x) = |x - 3|$ en $[0, 4]$
(b) $f(x) = x^5 + x^3$ en $\mathbb{R}$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$
(d) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x$ en $[0, +\infty)$
(e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$
(f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$ en $(0, \pi)$

36. Trobeu la distància mínima pel punt $(4, 2)$ a la paràbola $y^2 = 8x$.

37. Calculeu els punts de la corba d'equació $y^2 = 2xy + x + \dfrac{1}{2}$, tals que el quadrat de la diferència de les seves coordenades sigui mínim.

38. Raoneu si la funció $f(x) = 1 + x^8 e^{-x}$ té un extrem relatiu a l'origen, de dues maneres diferents: estudiant-ne el creixement, i a partir dels polinomis de Taylor de la funcio e^{-x}.

Exercicis avançats

39. Considerem la funció $f(x) = 2\arctan x + \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
    (a) Demostreu que és constant a cadascun dels interval $(-\infty, -1]$ i $[1, +\infty)$. Quins valor pren?
    (b) És f constant a l'interval $(-1, 1)$?
40. Determineu el mínim $K \in \mathbb{R}$ tal que $x - x^2 \leq Ke^x$, per tot $x \in \mathbb{R}$.
41. Sigui $P = (a, b)$ un punt del primer quadrant ($a, b > 0$). Considerem la recta que passa per P i té pendent $m \in (-\infty, 0)$, i anomenem A i B els punts on aquesta recta talla a l'eix OX i OY respectivament.
    (a) Doneu una funció $S : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $S(m)$ sigui l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i l'origen.
    (b) Doneu una funció $L : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(m)$ sigui la longitud del segment AB.
    (c) Raoneu si aquestes funcions tenen extrems absoluts i, en cas afirmatiu, calculeu-los.
42. Considerem la funció definida per $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2x^2$ (si $x \neq 0$), $f(0) = 0$.
    (a) És f derivable en $x = 0$?
    (b) Té f un extrem relatiu en $x = 0$?
43. En cadascun dels següents apartats, volem usar polinomis de Taylor per calcular el valor h amb un error inferior a ϵ. Determineu de quina funció, en quin punt i de quin grau serà el polinomi més adient.
    (a) $h = \sqrt[4]{e}$, $\epsilon = 3 \times 10^{-4}$
    (b) $h = \ln(0.8)$, $\epsilon = 10^{-3}$
    (c) $h = \sin(0.1)$, $\epsilon = 10^{-6}$
    (d) $h = \cos(-0.3)$, $\epsilon = 2 \times 10^{-3}$

3 Integració de funcions d'una variable (1a. part)

Exercicis introductoris

1. Calculeu, com a quasi-immediates, les primitives següents:
(a) $\int (x-2)^{3/2}\,dx$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ (e) $\int \sqrt{2-3x}\,dx$ (g) $\int y^3\sqrt{1+y^4}\,dy$
(b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ (d) $\int \sqrt{3x-1}\,dx$ (f) $\int x\sqrt[3]{2x^2+3}\,dx$ (h) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^3}$

2. Calculeu, com a quasi-immediates, les primitives següents:
(a) $\int \cos 3x\,dx$ (d) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ (g) $\int (x^2-x)^4(2x-1)\,dx$ (j) $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,dx$
(b) $\int \frac{\sin y}{\cos^2 y}\,dy$ (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ (h) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$ (k) $\int \cos^4 x \sin x\,dx$
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (f) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ (i) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$ (l) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

3. Calculeu, com a quasi-immediates, les primitives següents:
(a) $\int \frac{x^8}{x^9-1}\,dx$ (c) $\int \frac{\sin 3x}{1-\cos 3x}\,dx$ (e) $\int (e^x+1)^2\,dx$ (g) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$
(b) $\int \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x}\,dx$ (d) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ (f) $\int (e^x-x^e)\,dx$ (h) $\int x\tan(x^2)\,dx$

4. Calculeu les següents primitives pel mètode d'integració per parts:
(a) $\int x\cos x\,dx$ (c) $\int x \arctan x\,dx$ (e) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
(b) $\int \arccos 2x\,dx$ (d) $\int x^2 e^{-3x}\,dx$ (f) $\int x\cosh x\,dx$

5. Calculeu les integrals racionals següents:
(a) $\int \frac{x^4-8}{x+2}\,dx$ (c) $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}\,dx$
(b) $\int \frac{x^3+6x^2+4x-7}{x^2+2x-1}\,dx$ (d) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

6. Calculeu les integrals racionals següents:
(a) $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx$ (c) $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$
(b) $\int \frac{2x-1}{x^2+x}\,dx$ (d) $\int \frac{x^4\,dx}{(1-x)^3}$

Exercicis bàsics

7. Calculeu, com a quasi-immediates, les primitives següents:
(a) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\int \frac{x}{x^4+3}\,dx$ (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$ (g) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
(b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$ (d) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ (f) $\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx$ (h) $\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}\,dx$

8. Calculeu, com a quasi-immediates, les primitives següents:

(a) $\int \sin 3x \cos^5 3x \,\mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$ (g) $\int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\,\mathrm{d}x$ (j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$

(b) $\int (x+1)(x^2+2x)^{10}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + b^2x^2}$ (k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x}$

(c) $\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$ (l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln \ln x}$

9. Calculeu les següents primitives pel mètode d'integració per parts:

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(3x)}\,dx$ (b) $\int x^3 \sin x \,dx$ (c) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ (d) $\int \sin \sqrt{x}\,dx$

10. Calculeu les integrals següents pel mètode d'integració per parts:

(a) $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, on $a, b \in \mathbb{R}$. (c) $\int x^n \ln x\,dx$, on $n \in \mathbb{Z}$.

(b) $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, on $a, b \in \mathbb{R}$. (d) $\int x e^{3x} \sin x\,dx$

11. Donada una constant $a \in \mathbb{R}$, considerem per cada $n \in \mathbb{N}$ la integral $I_n = \int x^n e^{ax}\,dx$.

(a) Useu el mètode d'integració per parts a fi d'establir la igualtat $I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$.

(b) Utilitzeu l'expressió anterior per calcular $\int x^2 e^{2x}\,dx$.

12. Calculeu les integrals racionals següents:

(a) $\int \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx$ (c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$

(b) $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x}\,dx$ (d) $\int \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$

13. Calculeu les integrals racionals següents:

(a) $\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{1}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x^2+4x+9)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^2+x-2)(x^2+x+2)}$ (d) $\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

Exercicis avançats

14. Sigui $a \in \mathbb{R}$ una constant i P un polinomi. Indiquem $H_P = \int P(x)e^{ax}\,dx$.

(a) Useu el mètode d'integració per parts a fi d'establir la següent relació:

$$H_P = \frac{e^{ax}}{a} P(x) - \frac{1}{a} H_{P'}$$

(b) Iterant aquesta igualtat obteniu l'expressió:

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P''(x)}{a^2} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \cdots\right)$$

(c) Apliqueu-ho a calcular primitives de $f(x) = x^5 e^{2x}$ i $g(x) = (x^2 - 3x + 11)e^{-x}$.

3 Integració de funcions d'una variable (2a. part)

Exercicis introductoris

1. Useu les fórmules de l'angle doble i la relació $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ per calcular les integrals següents:
   (a) $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ (d) $\int \sin^4(2x) \, \mathrm{d}x$ (e) $\int \cos^7 x \sin^9 x \, \mathrm{d}x$
2. Calculeu les següents integrals indefinides:
   (a) $\int \sinh^2 x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \cosh^3 x \sinh^2 x \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \cosh^2 x \sinh^2 x \, \mathrm{d}x$ (d) $\int \cosh^7 x \sinh^9 x \, \mathrm{d}x$

   Indicació: useu fórmules anàlogues a les de l'exercici anterior.
3. Calculeu les següents integrals quasi-immediates, emprant canvis de variable adients:
   (a) $\int x \cos(x^2) \sin(x^2) \, dx$ (b) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(2+\operatorname{arctg}^2 x)} \, dx$ (c) $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} \, dx$
4. Calculeu les integrals definides següents, utilitzant les propietats de funció parell o senar.
   (a) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+4} \, dx$ (b) $\int_{-2}^{2} x \cos(\sqrt[3]{x}) \, dx$ (c) $\int_{-3}^{3} \sin^3\left(\frac{x^5}{5}\right) dx$ (d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$
5. Calculeu el valor mitjà de les funcions següents en els intervals indicats:
   (a) $f(x) = x\sqrt[4]{x^2+1}$, en $[0,\, 3/4]$ (b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, en $[0,\, \pi/3]$
6. Calculeu $\int_0^{2\pi} x \sin(nx) \, dx$, en funció de $n \in \mathbb{N}$.
7. Calculeu l'àrea de la regió fitada limitada per les corbes següents:
   (a) $y = 9 - x^2,\ y = x + 3$
   (b) $y = x^2 - 4,\ y = 8 - 2x^2$
   (c) $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 0,\ x = 2$
   (d) $y = \operatorname{tg} x,\ x = 0,\ x = \pi/4$

Exercicis bàsics

8. Calculeu les següents integrals de funcions trigonomètriques:
   (a) $\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx$ (b) $\int \sin^3(2x) \, dx$ (c) $\int \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) dx$ (d) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (e) $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{1+\cos x} \, dx$ (f) $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^4 x}$
9. Calculeu les següents integrals de funcions trigonomètriques:
   (a) $\int x(\cos^3(x^2) - \sin(x^2)) \, dx$
   (b) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$
   (c) $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{1-\sin x}$
10. Calculeu les integrals següents, aplicant canvis de variable trigonomètrics o hiperbòlics adients:
    (a) $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$ (b) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} \, dx$ (c) $\int \sqrt{x^2+4} \, dx$ (d) $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2-16}}$ (e) $\int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ (f) $\int \sqrt{-x^2+2x} \, dx$ (g) $\int \sqrt{x^6+x^4} \, dx$ (h) $\int \sqrt{x^2+2x} \, dx$

11. Calculeu les integrals següents, aplicant un canvi trigonomètric després d'integrar per parts.
    (a) $\int x \arcsin x \, dx$ (b) $\int x \arccos x \, dx$

12. Calculeu les integrals següents, fent un canvi adequat per convertir-les en integrals racionals.
    (a) $\int \frac{dx}{\sin x}$ (c) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$ (e) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx$ (g) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$
    (b) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (d) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ (f) $\int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x} dx$ (h) $\int \frac{(2+\operatorname{tg}^2 x)\, dx}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg}^3 x)}$

13. Calculeu les integrals següents, mitjançant un canvi de variable adient:
    (a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ (c) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$ (e) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$ (g) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$
    (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ (d) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx$ (f) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$ (h) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$

14. Calculeu les integrals següents, mitjançant un canvi de variable adequat:
    (a) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ (b) $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1} dx$ (c) $\int \frac{\ln(3x)}{x\,\ln(6x)} dx$

15. Calculeu l'àrea de la regió fitada limitada per les corbes següents:
    (a) $x = 1+y^2$, $x = 10$
    (b) $x = 3y^2 - 9$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$
    (c) $xy = 12$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$
    (d) $y^2 = 4x$, $4x - 4y + 3 = 0$
    (e) $x = 6y - y^2$, $x = y^2 - 2y$

16. Calculeu l'àrea de la regió limitada per les gràfiques de les funcions següents:
    (a) $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = x^3$
    (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $g(x) = 0$
    (c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 5$, $g(x) = x + 1$
    (d) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 4x - 4$

17. Calculeu l'àrea de la regió fitada limitada per les corbes $y = \sin x$, $y = \dfrac{3x}{5\pi}$ i $y = 0$.
    Indicació: observeu que els punts de tall es poden calcular a ull.

18. Calculeu el volum dels sòlids de revolució obtinguts fent girar les regions del pla limitades per les corbes donades, respecte dels eixos indicats.
    (a) $y^2 = 8x$ i $x = 2$; eix OY
    (b) $y = 2x^2$, $x = 0$, $y = 0$ i $x = 5$; eix OX
    (c) $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$; eix OY
    (d) $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$ i $x = 8$; eix OX
    (e) $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$ i $x = 8$; eix OY
    (f) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eix OX
    (g) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eix OY
    (h) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; eix OX
    (i) $y = x^2 - 5x + 6$ i $y = 0$; eix OY
    (j) $y = 2x$, $y = 0$ i $x = 1$; eix OY

19. Determineu, a partir de la definició, quines de les integrals impròpies següents són convergents i, en tal cas, calculeu-ne el valor.
    (a) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(2+x)^3} dx$ (c) $\int_{-\infty}^{1} xe^{-x} dx$ (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$
    (b) $\int_{2}^{+\infty} e^{-3x} dx$ (d) $\int_{\pi/12}^{+\infty} e^{-x}\cos(3x)\, dx$ (f) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x} dx$

Exercicis complementaris

20. Estudieu la convergència de les següents integrals impròpies:
    (a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\, \mathrm{d}x$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ (e) $\int_2^{+\infty} \frac{4-4\sin(2x)}{x^3+x^{1/3}}\, \mathrm{d}x$
    (b) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, \mathrm{d}x$ (d) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x+\sin x}\, \mathrm{d}x$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$

4 Funcions de diverses variables

Exercicis introductoris

1. Dibuixeu les corbes de nivell de les funcions següents:
   (a) $f(x,y) = x + y$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   (d) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

2. Useu seccions planes per identificar les superfícies següents:
   (a) $x + 2y + 3z = 1$.
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$
   (c) $36y^2 - x^2 + 36z^2 = 9$
   (d) $5y = -z^2 + x^2$
   (e) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$
   (f) $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36$
   (g) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 4 = 0$
   (h) $x^2 + 4y^2 = 1$
   (i) $x^2 + y^2 + 2y = z^2 - 1$
   (j) $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 6x - 16y - 16z + 53 = 0$

3. Doneu una parametrització de cadascuna de les següents corbes de $\mathbb{R}^2$:
   (a) Segment que uneix els punts (a_1, b_1) i (a_2, b_2).
   (b) Circumferència de centre (a, b) i radi R.
   (c) El·lipse de centre $(0, 0)$ i semieixos $a, b > 0$.
   (d) Paràbola d'equació $x = ay^2 + by + c$.

4. En cadascuna de les següents corbes parametritzades, elimineu el paràmetre t, representeu la corba i determineu-ne el sentit de recorregut.
   (a) $\gamma(t) = (t - 1, 3t + 2)$, $t \in (-\infty, 2]$
   (b) $\gamma(t) = (t - 1, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$
   (c) $\gamma(t) = (t - 1, t(t + 4))$, $t \in \mathbb{R}$
   (d) $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, $a, b > 0$
   (e) $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 6\pi]$, $a, b > 0$
   (f) $\gamma(t) = (a \sin t, b \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, $a, b > 0$
   (g) $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$
   (h) $\gamma(t) = (-a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in [0, +\infty)$, $a, b > 0$

5. Quina és la diferència entre les corbes parametritzades $\alpha(t) = (t, t, t^2)$, $\beta(t) = (t^2, t^2, t^4)$ i $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sin^2 t)$, quan t recorre la recta real?

6. Calculeu el vector tangent i l'equació cartesiana de la recta tangent a les següents corbes parametritzades, per als valors indicats del paràmetre:
   (a) $\gamma(t) = (t - 1, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$ i $t_1 = 1$.
   (b) $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ i $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \ln 2$ i $t_2 = -\ln 2$.
   (d) $\gamma(t) = (\sinh t, -\cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \ln 3$.
   (e) $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$ i $t_3 = 2\pi$.

Exercicis bàsics

7. Determineu el domini i el recorregut (imatge) de les funcions següents:
   (a) $f(x,y) = \ln(y-x)$
   (b) $f(x,y) = \arcsin(x/y)$
   (c) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$
   (d) $f(x,y) = \sqrt{\cos(2\pi x) - 1}$
   (e) $f(t) = \left(\cos \dfrac{1}{t}, \sin \dfrac{1}{t}\right)$

8. Descriviu les corbes de nivell de les funcions següents:
   (a) $f(x,y) = x + 5y - 7$
   (b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$
   (c) $f(x,y) = xy$
   (d) $f(x,y) = (xy)^{1/2}$
   (e) $f(x,y) = y/x^{1/2}$
   (f) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$
   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$
   (h) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4y$
   (i) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 16x + 2y$

9. Descriviu les superfícies de nivell de les funcions següents:
   (a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
   (b) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
   (d) $f(x,y,z) = y^2 + z^2$
   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$
   (f) $f(x,y,z) = z/(x^2 + y^2)$

10. Considerem la superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x^2 + 3y^2 + 12y + 12 = z^2\}$.

    (a) Determineu les seccions de S amb els plans d'equació $z = k$, per tot $k \in \mathbb{R}$.

    (b) Useu aquestes seccions (i d'altres, si us cal) per identificar la superfície.

    (c) Doneu una parametrització de la corba intersecció de S amb el pla $z = 3\sqrt{3}$.

11. Identifiqueu les següents corbes parametritzades, tot expressant-les com a intersecció de dues superfícies a l'espai, i calculeu-ne el vector tangent per als valors indicats del paràmetre:

    (a) $\gamma(t) = (t, t^2, 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$, i $t_1 = -1$.

    (b) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -4)$, $t \in [0, 2\pi]$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ i $t_2 = \pi$.

    (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ i $t_2 = \pi$.

    (d) $\gamma(t) = (1, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ i $t_2 = \pi$.

    (e) $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, per $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ i $t_2 = 2\pi$.

12. Identifiqueu les superfícies S_1 i S_2, dibuixeu-ne la corba intersecció i parametritzeu-la:

    (a) $S_1 = \{x^2 + y^2 = 9\}$, $S_2 = \{y + z = 2\}$
    (b) $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_2 = \{x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$
    (c) $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, $S_2 = \{z = x^2 - y^2\}$
    (d) $S_1 = \{z^2 - x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\}$, $S_2 = \{y = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

13. En cadascuna de les següents corbes parametritzades, elimineu el paràmetre t, representeu la corba i determineu-ne el sentit de recorregut.

    (a) $\gamma(t) = (\sin^2 t, 3\cos^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$

    (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 t}, \operatorname{tg}^2 t\right)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

    (c) $\gamma(t) = \left(\dfrac{1}{\cos t}, \operatorname{tg} t\right)$, $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

    (d) $\gamma(t) = (x_0 + (x_1 - x_0)t, y_0 + (y_1 - y_0)t, z_0 + (z_1 - z_0)t)$, $t \in [0,1]$, on (x_0, y_0, z_0), $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$

14. (a) Considereu el segment que uneix els punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2), doneu dues parametritzacions que, per $t \in [0,1]$, recorrin el mateix segment però en sentits oposats l'una respecte de l'altra.

(b) Considerem dues funcions contínues f, g i una corba parametritzada $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, $t \in [0, 1]$. Comproveu que $\nu(t) = (f(1-t), g(1-t))$, $t \in [0, 1]$ és una parametrització de la mateixa corba recorreguda en sentit contrari.

(c) Donada una funció contínua i invertible $f : I \to \mathbb{R}$, on I interval, doneu una parametrització de la gràfica de la funció inversa f^{-1}.

15. Determineu els punts de la corba parametritzada $\gamma(t) = (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, amb recta tangent paral·lela al pla d'equació $3x + y + z + 2 = 0$.

16. Considerem les corbes parametritzades $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ i $\beta(t) = (1, t^2 - 1, t + 1 - 12\pi)$, $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Expresseu la corba parametritzada β com la intersecció de dues superfícies. Demostreu que descriu una paràbola i trobeu-ne el vèrtex.

    (b) Calculeu la recta tangent (en un punt genèric) a l'hèlix descrita per α.

    (c) Calculeu els punts d'interseccio de la paràbola amb l'hèlix. Quin és l'angle d'intersecció?

17. Considerem la corba parametritzada $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(t/2))$, $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Demostreu que la corba no és fitada i que està continguda en el cilindre parabòlic $z^2 = 8y$.

    (b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba, en un punt genèric $\gamma(t)$.

    (c) Calculeu els punts d'intersecció de la corba amb l'eix OX.

    (d) Demostreu que l'angle format pel vector tangent a un punt genèric de la corba, $\gamma(t_0)$, i l'eix OZ és equivalent a $\dfrac{t_0}{2}$.

Exercicis complementaris

18. Sigui $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada diferenciable tal que $\|\sigma(t)\|$ és constant (és a dir, és dins una superfície esfèrica amb centre l'origen). Proveu que els vectors posició $\sigma(t)$ i velocitat $\sigma'(t)$ són ortogonals en cada instant. (Indicació: Partiu de $\sigma(t) \cdot \sigma(t) = a^2$ (constant) i deriveu.)
    És cert el recíproc?

5 Càlcul diferencial en diverses variables

Exercicis introductoris

1. Calculeu les derivades parcials i la matriu jacobiana de les funcions següents en un punt arbitrari del seu domini:
   (a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$
   (c) $f(x,y) = \sin(3x)\cos(4y)$
   (d) $c(t) = (\cos t, \sin t)$
   (e) $f(x,y) = \text{arctg}(y/x)$
   (f) $F(x,y) = (x^2 - y, 3x + y^3, xy)$
   (g) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
   (h) $F(x,y) = (\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-x^2})$

2. Calculeu les derivades direccionals $D_u f(a)$ següents:
   (a) $f(x,y) = x^2 - 3y^3 + 5xy, \quad a = (1,-1), \quad u = (-4,3)$
   (b) $f(x,y,z) = x + xy + xyz, \quad a = (1,2,-1), \quad u = (3,2,-2)$
   (c) $f(x,y) = y + x\cos xy, \quad a = (0,0), \quad u = (1,\sqrt{3})$
   (d) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2, \quad a = (1,-1), \quad u = (2,1)$

3. Calculeu el pla tangent i la recta normal a les superfícies següents en els punts indicats.
   (a) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$, en el punt $(1,-2,-1)$
   (b) $2z^3 - x^2 = 3y^2$, en el punt $(2,-2,2)$
   (c) $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0$, en el punt $(1,-2,-3)$
   (d) $z = xy$, en el punt $(3,-4,-12)$

4. Calculeu el gradient de les següents funcions en els punts indicats:
   (a) $\sqrt{x^2+2y^2}, \quad (1,2)$
   (b) $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad (1,1)$
   (c) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}\right), \quad (\pi,3)$

5. La temperatura d'un punt del pla ve donada per $T(x,y) = 10 + 6\cos x\cos y + 3\cos(2x) + 4\cos(3y)$. Trobeu la direcció de màxim increment de la temperatura, la de màxima disminució i la de no variació, en el punt $P = (\pi/3, \pi/3)$.

6. Donada $f(x,y) = (x^2 + \text{arctg } y)e^{-x}$
   (a) Calculeu la direcció i sentit de màxim decreixement de la funció f en el punt $(1,0)$.
   (b) Quin és l'angle que forma la direcció anterior amb el vector $(1,0)$?
   (c) Calculeu un vector tangent a la corba de nivell de f que passa pel punt $(1,0)$.
   (d) Trobeu el pla tangent a la gràfica de la funció f en el punt amb coordenades $x = 1$ i $y = 0$.

7. Donada $f(x,y) = x\,\text{arctg}\, y$
   (a) Trobeu un vector perpendicular a la corba de nivell de f que passa pel punt $(0,1)$.
   (b) Determineu la direcció de màxim decreixement de la funció f en el punt $(0,1)$.
   (c) Calculeu el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(0,1,0)$, en la direcció del vector $(3,4)$.

8. (a) Considereu les funcions $f(x,y,z) = xyz$ i $g(t) = (2+t, 1-t, 1+t)$.
   Calculeu $(f\circ g)'(0)$ de dues maneres diferents.

(b) Donades $f(x, y) = (e^x, x + y)$ i $g(u, v) = (u - v, \cos(uv), u - v)$, calculeu la diferencial de $g \circ f$ en $(0, 0)$ de dues formes diferents.

9. Calculeu les derivades parcials segones de les funcions següents:
   (a) $f(x, y) = \sin\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$
   (b) $g(x, y) = x^y$
   (c) $h(x, y) = x \sin xy + y \cos xy$
   (d) $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

10. Calculeu el polinomi de Taylor de grau ≤ 2 de $f(x, y)$ centrat en el punt P:
    (a) $f(x, y) = e^x \cos y,\ P = (0, 0)$
    (b) $f(x, y) = x^y,\ P = (1, 1)$
    (c) $f(x, y) = \ln(2 + x - 3y),\ P = (0, 0)$
    (d) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy),\ P = (0, 0)$
    (e) $f(x, y) = e^{x^2 + \sin y},\ P = (0, 0)$
    (f) $f(x, y) = \sin(xy^2),\ P = (1, 0)$

11. Estudieu els extrems locals de les següents funcions:
    (a) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$
    (b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$
    (c) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$
    (d) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$
    (e) $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$
    (f) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

12. Estudieu l'existència d'extrems absoluts de la funció f en el conjunt C. Calculeu-los, quan existeixin.
    (a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
    (b) $f(x, y) = x, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 3\}$.
    (c) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$.
    (d) $f(x, y, z) = x - y + z, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.

Exercicis bàsics

13. Calculeu les derivades parcials de la funció $v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2$.

14. Donada $f(x, y) = y + x^{(\ln x)(\arctan(\sin(\cos(xy))))}$, calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.
    (*Indicació: en comptes d'usar les regles de derivació, penseu en la definició de derivada parcial*).

15. Donada $f(x, y) = \dfrac{y \sin^2(x^2 + xe^{xy})}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$ i $a \in \mathbb{R}$, calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, 0)$.
    (*Indicació: en comptes d'usar les regles de derivació, penseu en la definició de derivada parcial*).

16. (a) Demostreu que les superfícies d'equacions $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ i $xy = 9$ són tangents en el punt $(3, 3, 0)$.
    (b) Demostreu que les superfícies d'equacions $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24 = 0$ i $x^2+3y^2+2z^2 = 9$ són tangents en el punt $(2, 1, 1)$.

17. Calculeu tots els punts de $\mathbb{R}^2$ on la gràfica de la funció $f(x, y) = (1 - \sin x)\, y + y^3 + 1$ té pla tangent paral·lel al pla XY. Escriviu també l'equació d'aquests plans tangents.

18. Calculeu les derivades parcials de les funcions compostes indicades.
    (a) $F = f \circ g$, amb $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - xyz$, $g(u, v) = (u + v, u - v, u)$.
    (b) $F = f \circ g$, amb $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $g(u, v) = (\operatorname{tg} u, \operatorname{tg} v)$

19. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, i definim $g(x, y, z) = f(3x - y + 2z, x + y - 2z, 2x + 5y - z)$. Raoneu que g és diferenciable i expresseu en termes de f la seva matriu jacobiana en el punt $(1, 1, 3)$.

20. (a) Considerem la funció $f(x,y) = (\sin(y \ln x), (y \ln x)^2)$ definida a $D = \{x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Determineu dues funcions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $f = g \circ h$ i useu la regla de la cadena per calcular $Df(x,y)$.

    (b) Considerem la funció $f(x,y) = (e^{x-y^2}, \dfrac{1}{y^2 - x})$ definida a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Determineu dues funcions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $f = g \circ h$ i useu la regla de la cadena per calcular $Df(x,y)$.

21. (a) Sigui $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una corba parametritzada diferenciable tal que $\sigma(0) = (0,0)$ i $\sigma'(0) = (1,0)$. Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x,y) = (x+y+1, 2x-y)$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $f \circ \sigma$ en l'instant $t = 0$.

    (b) Considereu $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ i sigui σ una corba parametritzada de R^2, diferenciable, tal que $\sigma(0) = (0,0)$ i $\sigma'(0) = (1,1)$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $f \circ \sigma$ en l'instant $t = 0$.

22. Considereu la funció $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$.
Sigui $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Si el pla tangent a la gràfica de g en el punt $(0,1,3)$ té equació $2x + y - z = -2$, trobeu l'equació del pla tangent a la gràfica de $(g \circ f)$ en el punt $(0,0,3)$.

23. Estudieu els extrems locals de les funcions $f(x,y)$ definides per les següents expressions:
    (a) $x^3 + y^3 - 3xy$
    (b) $(x-y)(1-xy)$
    (c) $xy(2x + 4y + 1)$
    (d) $x^4 + y^4 - 2y^2 + 4xy - 2x^2$
    (e) $\ln(1 + x^2 + y^2)$
    (f) $x^5 y + xy^5 + xy$

24. Calculeu els punts crítics de les funcions següents:
    (a) $f(x,y,z) = x^2 - yz - \sin(xz)$
    (b) $f(x,y,z) = x^4 - y^2 + z^2 - 2z$
    (c) $f(x,y,z) = xy - 2y + z^4 - 2$
    (d) $f(x,y,z) = xy + yz$
    (e) $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$
    (f) $f(x,y,z) = x^2 z + y^2 z + \dfrac{2}{3} z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$
    (g) $f(x,y,z,t) = x^4 + z^2 - (t-1)^2$
    (h) $f(x,y,z,t) = (x-2)^2 - 2(y-3)^2 + t^2$
    (i) $f(x,y,z,t) = (x-2)^2 + 2(y-3)^2 + t^2$

25. Estudieu, en funció de $k \in \mathbb{R}$, el caràcter dels punts crítics de $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + kxy$.

26. Trobeu i classifiqueu tots els punts crítics de les següents funcions:
    (a) $f(x,y) = -x^4 - y^6 + 2$
    (b) $g(x,y) = x^4 - y^6$

27. Representeu els següents conjunts, determineu-ne la frontera i estudieu si són compactes:
    (a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0\}$
    (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2,\ y = 3,\ z \in (-1, 1)\}$
    (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2,\ y = 3,\ z \in [-1, 1]\}$
    (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 9z^2 = 1,\ z \geq 0\}$
    (e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ |\,z\,| < 1\}$
    (f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y = 5\}$
    (g) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1,\ x \leq 0\}$
    (h) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 = 4,\ y \geq 0,\ x \leq 1\}$
    (i) $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x^2 + 3y^2 + 12y \leq 4\}$
    (j) $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - 2y \leq 2,\ y \leq x\}$
    (k) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 9\}$
    (l) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq 3x^2 + 3y^2 + 12y \leq 4\}$

(m) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$

(n) $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1,\ y \leq x\}$

28. Estudieu l'existència d'extrems absoluts de la funció f en el conjunt A. Calculeu-los, quan existeixin.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $f(x, y) = x^2 y, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

(c) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 1,\ 2x + z = 1\}$

29. Estudieu l'existència d'extrems absoluts de la funció f en el conjunt B. Calculeu-los, quan existeixin.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq x\}.$

(c) $f(x, y) = x(1 - y^2) + \dfrac{1}{2}\, x^2(y - 1), \quad C = [0, 2] \times [0, 2].$

30. Suposem que la superfície de la lluna es modelitza per l'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si la temperatura T en un punt (x, y, z) de la lluna en un cert instant de temps és

$$T(x, y, z) = 200xy + z^2,$$

calculeu quina és la temperatura màxima i la temperatura mínima a la superfície llunar segons aquest model.

31. Calculeu de dues maneres diferents els extrems absoluts de $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ en la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$.

32. Considerem el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 3)^2 + y^2 \leq 16,\ y^2 \leq 2x + 14\}$.

(a) Dibuixeu el conjunt D i determineu si és compacte.

(b) Calculeu, si existeixen, els extrems absoluts de $f(x, y) = (x + 4)^2 + y^2$ en el conjunt D.

(c) Calculeu, si existeixen, els extrems absoluts de $f(x, y) = (x + 4)^2 + y^2$ en el conjunt $\mathrm{Fr}\,(D)$.

(d) Calculeu, si existeixen, els extrems absoluts de $g(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ en el conjunt $\mathrm{Fr}\,(D)$.

33. Siguin $P = (a, b)$ un punt de $\mathbb{R}^2$ i $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, una parametrització diferenciable d'una corba C.

(a) Doneu una funció f, d'una variable, que expressi la distància de P a un punt arbitrari de C.

(b) Doneu una interpretació geomètrica dels extrems absoluts de f.

(c) Raoneu que, si f té extrems absoluts, llavors f^2 també i són els mateixos.

(d) Calculeu els punts de la paràbola $x = y^2 + 1$ a distància mínima del punt $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$.
Quina és aquesta distància?

34. Tres països del sudest asiàtic han concertat la seva producció d'arrós en comú. Si x, y, z són les quantitats que ha de produir cada país (en milions de tones), la relació entre elles segons l'acord concertat és $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 32000$. Volem calcular la major quantitat d'arrós que poden produir entre tots tres.

(a) Determineu una funció contínua f i un conjunt compacte D, i plantegeu l'enunciat com un problema d'extrems absoluts de f en D.

(b) Resoleu el problemes d'extrems absoluts i determineu quina és la major quantitat d'arrós que poden produir entre tots tres països.

Exercicis complementaris

35. (a) Obteniu l'aproximació lineal de $F(x,y) = (x\sin y, y\cos x)$ en els punts $(0,0)$ i $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
 (b) Calculeu una aproximació de $F\left(\dfrac{\pi+1}{2}, \pi - \dfrac{1}{2}\right)$ sense usar calculadora.

36. Considerem la funció $F(x,y) = (xy^{3/2},\, x^{3/2} - y^2)$.
 Justifiqueu que és diferenciable en un entorn del punt $(4,1)$, calculeu l'aproximació lineal de F en el punt $(4,1)$, i useu-la per calcular una aproximació de $F(4.2, 1.1)$.

37. Estudieu els punts crítics de les funcions següents:
 (a) $f(x,y,z) = \cos(2x)\sin y + z^2$ (b) $f(x,y) = x^5 y + y^5 x + xy - 1$

Exercicis avançats

38. Sigui $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(x,x) = 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.
 Determineu un vector v, de norma 1, de manera que $D_v f(0,0)$ sigui màxima.

39. Siguin $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ i $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Definim $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ per $G(x,y) = F(e^x + e^y, f(x+y))$.
 Suposem $\mathrm{D}_i F(2,0) = \mathrm{D}_{ij} F(2,0) = \lambda \neq 0$ per a tot $i,j \in \{1,2\}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ i $f''(0) \neq -\frac{1}{2}$.
 Determineu per a quins valors de $f''(0)$ té G un extrem local en $(0,0)$.

40. Considerem la funció $f(x,y) = -3x^2y^2 + x^3y^3$.
 (a) Calculeu-ne els punts crítics i representeu-los gràficament.
 (b) Estudieu el caràcter dels punts crítics de $f(x,y)$ que es troben sobre els eixos coordenats.
 (c) Estudieu el caràcter de la resta de punts crítics de $f(x,y)$.

41. Estudieu si són compactes els següents conjunts:
 (a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - z^2 = 2,\ y^2 + 2z^2 \leq 10,\ |x| \geq |z|\}$
 (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = y^2,\ z = x\}$

42. Donades les constants $a, b, c > 0$, trobeu els extrems absoluts de $f(x,y,z) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}$ en la regió

$$H = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

43. Considerem la funció $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$.
 (a) Proveu que el seu únic punt crític és l'origen. $(0,0)$.
 (b) Determineu el caràcter del punt crític de f.
 (c) Proveu que f no té mínim absolut. *Indicació: considereu els valors de f sobre l'eix $0Y$.*

44. Considerem la funció $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ i el conjunt $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$.
 (a) Raoneu l'existència d'extrems absoluts de f en C. (*Indicació:* $f(x,y) = d^2((x,y),(-1,0))$)
 (b) Dibuixeu C i deduïu gràficament el mínim absolut de f en C.
 (c) Useu la tècnica dels multiplicadors de Lagrange per calcular aquest mínim i raoneu perquè no obtenim cap resultat.

45. Calculeu la mínima distància entre punts de les corbes d'equacions $x + y = 4$ i $x^2 + 4y^2 = 4$.
 Feu-ho de dues maneres diferents

46. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ en el conjunt $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 1\}$.