Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria d'Aeronavegació/Grau en Enginyeria d'Aeroports
Algebra i Geometria. Curs 2014-2015

MIG QUADRIMESTRE. Dimarts 4 de novembre de 2014.

1. (2pt) D'un polinomi mònic de grau 5, a coeficients reals, es coneix que $4-2j$ és una arrel, i que també ho són les arrels cubiques de -1. Doneu l'expressió binòmica de totes les arrels i la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi.

2. (2pt) Sabent que $B_1 = \{u_1, u_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ i que els vectors $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, -1)$ s'expressen com $v_1 = 2u_1 + 3u_2$ i $v_2 = u_1 + 2u_2$, trobeu les coordenades de u_1 i u_2 en base canònica.

3. (3pt) Sigui $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per

$$f_a\,(x, y, z) = (x + y + (a + 1)z, 2x + 4y, x + (a - 1)y + 3z)$$

   (a) Per quin(s) valor(s) de a es té que f_a és bijectiva?

   (b) Per cada valor de a, doneu una base de la Im f_a.

   (c) Existeix algun valor de a per al qual $(2a - 2, 2a, a)$ sigui de la Im f_a?

4. (3pt) Sigui A la matriu que segueix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Per a quin valor d'a es té que $(-1, 0, 1)$ és un vector propi de A?

   (b) Per $a = -2$, determineu els valors propis de A. Estudieu si A és diagonalitzable i, si és així, doneu una base en la qual això és possible i la forma diagonal D associada. Detalleu també la relació entre les dues matrius A i D.

1. (2pt) D'un polinomi mònic de grau 5, a coeficients reals, es coneix que $4-2j$ és una arrel, i que també ho són les arrels cubiques de -1. Doneu l'expressió binòmica de totes les arrels i la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi.

Solució

Sigui $p(z)$ el polinomi que descriuen. Com $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ si $4-2j$ és arrel, també ho és $4+2j$. La resta d'arrels coincideixen amb les arrels cúbiques de -1. Per tant,

$$z_k = \sqrt[3]{e^{\pi j}} = \sqrt[3]{e^{(\pi+2\pi k)j}} = e^{(\pi+2\pi k)j/3},\ k = 0,1,2.$$

És a dir,

$$\begin{aligned} k=0: &\qquad z_0 = & e^{\pi j/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \\ k=1: &\qquad z_1 = & e^{\pi j} = -1, \\ k=2: &\qquad z_2 = & e^{5\pi j/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j. \end{aligned}$$

D'aquí, les arrels del polinomi són:

$$\{4 \pm 2j, -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j\}.$$

I la descomposició factorial a $\mathbb{C}$ és:

$$p(z) = (z-4-2j)(z-4+2j)(z+1)(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j).$$

Finalment, multiplicant els factors corresponents a les arrels complexes conjugades, obtenim la descomposició factorial a $\mathbb{R}$:

$$p(z) = ((z-4)^2+4)(z+1)((z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}).$$

2. (2pt) Sabent que $B_1 = \{u_1, u_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ i que els vectors $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,-1)$ s'expressen com $v_1 = 2u_1 + 3u_2$ i $v_2 = u_1 + 2u_2$, trobeu les coordenades de u_1 i u_2 en base canònica.

Solució:

Els vectors $v_1 = (1,2)$ i $v_2 = (2,-1)$ en la base B_1 s'expressen com: $v_1 = 2u_1 + 3u_2 = (2,3)_{B_1}$ i $v_2 = u_1 + 2u_2 = (1,2)_{B_1}$. Considerem la matriu $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de canvi de base de B_1 a base canònica. Aleshores:

$$P\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment,

$$P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1},$$

és a dir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Com la matriu P té per columnes els vectors de la base B_1 expressats en la base canònica, obtenim:

$$u_1 = (-4,7) \quad \text{i} \quad u_2 = (3,-4).$$

3. (3pt) Sigui $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per

$$f_a(x,y,z) = (x+y+(a+1)z, 2x+4y, x+(a-1)y+3z)$$

(a) Per quin(s) valor(s) de a es té que f_a és bijectiva?

(b) Per cada valor de a doneu una base de la Im f_a.

(c) Existeix algun valor de a per al qual $(2a-2, 2a, a)$ sigui de la Im f_a?

Solució:

(a) Considerem la matriu associada a f_a en base canònica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & a-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Com f_a és un endomorfisme, f_a és bijectiva, si i només si, f_a és exhaustiva. És a dir, si i només si, es té que dim Im $f_a = 3$. Com dim Im $f_a =$ rang (A), estudiem el det A.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & a-1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 2 & -2(a+1) \\ 0 & a-2 & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2(a+1) \\ a-2 & 2-a \end{vmatrix} \\ &= (a-2)(-2+2a+2) = 2a(a-2). \end{aligned}$$

D'aquí, f_a és bijectiva si i només si, $a \neq 0, 2$.

(b) Per l'apartat (a), deduïm que, qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és base de la Im f_a, quan $a \neq 0, 2$. Per exemple, la base canònica: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Quan $a = 0$, una base de Im f_0 és, per exemple, $\{(1,2,1),(1,4,-1)\}$. Finalment, quan $a = 2$, una base de la Im f_2 és, per exemple, $\{1,2,1),(1,4,1)\}$.

(c) Per l'apartat (a) deduïm que, qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ és de la Im f_a, quan $a \neq 0, 2$. Per tant, només hem d'estudiar què passa quan $a = 0$ o $a = 2$.

<u>Cas $a = 0$.</u> En aquest cas, el vector és el $(-2,0,0)$. Com Im $f_0 =< (1,2,1),(1,4,-1) >$, $(-2,0,0) \in$ Im f_0 si i només si, $(-2,0,0)$ és combinació lineal de $(1,2,1)$ i $(1,4,-1)$. Ara bé,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} > \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

per tant, $(-2,0,0)$ no és de Im f_0.

<u>Cas $a = 2$.</u> En aquest cas, el vector és el $(2,4,2)$. Com Im $f_2 =< (1,2,1),(1,4,1) >$, $(2,4,2) \in$ Im f_2 si i només si, $(2,4,2)$ és combinació lineal de $(1,2,1)$ i $(1,4,1)$. Ara bé,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

per tant, $(2,4,2)$ és de Im f_2.

Per tant, $(2a-2, 2a, a)$ és de la Im f_a, sempre que $a \neq 0$.

4. (3pt) Sigui A la matriu que segueix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Per a quin valor d'a es té que $(-1, 0, 1)$ és un vector propi de A?

(b) Per $a = -2$, determineu els valors propis de A. Estudieu si A és diagonalitzable i, si és així, doneu una base en la qual això és possible i la forma diagonal D associada. Detalleu també la relació entre les dues matrius A i D.

Solució:

(a) Imposem que $(-1, 0, 1)$ sigui un vector propi de valor propi λ de A, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6+a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí, $\lambda = -2$ i $-6 + a = -2$, és a dir, $a = 4$.

(b) Considerem ara la matriu donada, per $a = -2$. El seu polinomi característic és:

$$c_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 3 \\ 0 & 4-x & 0 \\ 6 & -6 & -2-x \end{vmatrix} = (4-x)^2(-5-x).$$

Els valors propis de A són $\{4(\textit{doble}), -5\}$. Per saber si A és diagonalitzable, considerem la matriu $A - 4Id$:

$$A - 4Id = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Com clarament, el rang $(A - 4Id) = 1$, la dimensió del Nuc $(A - 4Id)$ és 2 i podem completar una base de vectors propis.

Els vectors propis de A de valor propi 4 els trobem resolent l'equació: $-x+y+z = 0$. Una base del Nuc $(A - 4Id)$ és, per exemple, $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1)\}$. Per completar una base de vectors propis, considerem la matriu $A + 5Id$:

$$A + 5Id = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com clarament, el rang $(A + 5Id) = 2$, la dimensió del Nuc $(A + 5Id)$ és 1. Per trobar una base del Nuc $(A + 5Id)$, resolem el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \rightarrow z = -2x, \; y = 0.$$

Una base del Nuc $(A + 5Id)$ és, per exemple, $\{v_3 = (1, 0, -2)\}$. D'aquí, si triem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

obtenim $P^{-1}AP = diag(4, 4, -5)$. Una base de vectors propis és $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
DT de Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica
Algebra i Geometria. Curs 2015-2016

MIG QUADRIMESTRE. Dimarts 3 de novembre de 2015.

****
Els problemes s'han de lliurar **per separat**, comenceu cada problema en un full nou.
Indiqueu els vostres **nom i cognoms de forma clara i en majúscules**.
No oblideu posar també **el vostre grup**: DT, 1GM4, 1GM6, o bé, 1GT8.

Justifiqueu totes les respostes i detalleu els càlculs
****

1. (3p) Resoleu a $\mathbb{C}$ el sistema d'equacions que segueix. Expresseu les solucions en forma binòmica i en forma exponencial.

$$\begin{cases} z_1 - z_2 &= 2j \\ z_1 \cdot z_2 &= 2 \end{cases}$$

2. (3.5pt) Donat $a \in \mathbb{R}$, definim:

$$V_a = \langle (1,a,1,1), (1,a,1-a,0), (0,1,2a,2), (1,1+a,1+a,2) \rangle.$$

   (a) Trobeu, segons els valors de a, la dimensió i una base de V_a.

   (b) Existeix algun valor de a pel qual el vector $v = (0,2,0,5)$ pertany al subespai V_a? Si és el cas, trobeu-lo i escriviu v com a combinació lineal de la base trobada a l'apartat anterior (pel valor corresponent de a).

3. (3.5pt) Sigui $B = \{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ i f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 \ \text{ i } \ f(e_2) = 4e_1 - 2e_2.$$

   (a) Escriviu la matriu associada a f en la base B.

   (b) Especifiqueu una base i la dimensió del Nuc f i la Im f. Trobeu $\mathrm{Nuc} f \cap \mathrm{Im} f$. És $\mathrm{Nuc} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$?

   (c) Trobeu els valors i vectors propis de la matriu trobada a l'apartat a). És aquesta matriu diagonalitzable?

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
DT de Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica
Algebra i Geometria. Curs 2015-2016

MIG QUADRIMESTRE. Dimarts 3 de novembre de 2015.

****
Los problemas se han de entregar **por separado**, empezad cada problema en una hoja nueva.
Indicad vuestros **nombres y apellidos de forma clara y en mayúsculas**.
No olvidéis poner también **vuestro grupo**: DT, 1GM4, 1GM6, o, 1GT8.

Justificad todas las respuestas y detallad los cálculos
****

1. (3p) Resolved en $\mathbb{C}$ el sistema de ecuaciones que sigue. Expresad las soluciones en forma binómica y en forma exponencial.

$$\begin{cases} z_1 - z_2 &= 2j \\ z_1 \cdot z_2 &= 2 \end{cases}$$

2. (3.5pt) Dada $a \in \mathbb{R}$, definimos:

$$V_a = \langle (1,a,1,1), (1,a,1-a,0), (0,1,2a,2), (1,1+a,1+a,2) \rangle.$$

   (a) Encontrad, según los valores de a, la dimensión y una base de V_a.

   (b) ¿Existe algún valor de a por el cual el vector $v = (0,2,0,5)$ pertenece al subespacio V_a? En caso afirmativo, encontrarlo y escribid v como combinación lineal de la base encontrada en el apartado anterior (para el valor correspondiente de a).

3. (3.5pt) Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 \ \text{ y } \ f(e_2) = 4e_1 - 2e_2.$$

   (a) Escribid la matriz asociada a f en la base B.

   (b) Especificad una base y la dimensión del Nuc f y la Im f. Encontrad Nuc$f \cap$Imf. ¿Es Nuc$f \oplus$ Im$f = \mathbb{R}^2$?

   (c) Encontrad los valores y vectores propios de la matriz encontrada en el apartado a). ¿Es esta matriz diagonalizable?

SOLUCIÓ MaQ.-AiG-Q1-1516

(1) $\begin{cases} z_1 - z_2 = 2j \\ z_1 \cdot z_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{z_1 = 2j + z_2}\ (1)$

$\downarrow (1)$

$(2j + z_2)\cdot z_2 = 2 \longrightarrow z_2^2 + 2j\cdot z_2 - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z_2 = \dfrac{-2j \pm \sqrt{(2j)^2+8}}{2} = \dfrac{-2j \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 1-j \\ -1-j \end{cases}$

$\boxed{z_2 = 1-j} \xrightarrow{(1)} z_1 = 2j + (1-j) \longrightarrow \boxed{z_1 = 1+j}$

$\boxed{z_2 = -1-j} \xrightarrow{(1)} z_1 = 2j - 1 - j \longrightarrow \boxed{z_1 = -1+j}$

Per tant, hi ha dos parells de solucions:

$\begin{cases} \text{(i)} & z_1 = 1+j = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}j}\ ;\ z_2 = 1-j = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{4}\cdot j} \\ \text{(ii)} & z_1 = -1+j = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}\cdot j}\ ;\ z_2 = -1-j = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{5\pi}{4}\cdot j} \end{cases}$

(2) (a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 1 & 1+a & 1+a & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Per tant, per tots els valor del paràmetre a: $\boxed{\dim(V_a) = 3}$

$\boxed{\text{Base: } \{\vec{v}_1 = (1,a,1,1),\ \vec{v}_2 = (0,1,a,1),\ \vec{v}_3 = (0,0,a,1)\}}$

② (b)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (a\cancel{+}1)\cdot x + z - a.t = 0$$

$$(a\cancel{+}1)\cdot 0 + 0 - a.5 = 0 \rightarrow 5a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$$

Si $a = 0$: $\vec{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0,1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,0,1)$

$$\vec{w} = (0,2,0,5) = \alpha.\vec{v}_1 + \beta.\vec{v}_2 + \gamma.\vec{v}_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta \cancel{+} \gamma = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{array}\right.$$

Per tant:

$$\boxed{\vec{w} = 2.\vec{v}_2 + 3.\vec{v}_3}$$

③ $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ $\quad B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$\vec{e}_1 \longrightarrow 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$\vec{e}_2 \longrightarrow 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

(a) $[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ -x-2y \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow f(\vec{u}) = (2x+4y).\vec{e}_1 + (-x-2y).\vec{e}_2$

$\vec{u} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 \in Nuc(f) \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y \rightarrow \vec{u} = -2y \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$

$\rightarrow \vec{u} = y \cdot [-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2] = -y \cdot [2\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$

Per tant: $\boxed{\dim Nuc(f) = 1}$ $\boxed{Nuc(f) = \langle \vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \rangle}$

$\boxed{\dim Im(f)} = 2 - \dim Nuc(f) = 2 - 1 = \boxed{1}$

Una base de $Im(f)$: $f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \vec{u}$

$\boxed{Im(f) = \langle \vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \rangle}$

Per tant: $\boxed{Nuc(f) = Im(f)}$

Per tant: $Im(f) \cap Nuc(f) = Nuc(f)$

$Im(f) + Nuc(f) = Nuc(f) \neq \mathbb{R}^2$

(c) $\begin{vmatrix} 2-x & 4 \\ -1 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0$ (arrel doble)

$\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow u_0 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (2,-1)_B$

Per tant, aquesta matriu $\boxed{\text{no}}$ diagonalitza.

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
DT de Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica
Algebra i Geometria. Curs 2016-2017

MIG QUADRIMESTRE. Dimecres 26 d'octubre de 2016.

****
Els problemes s'han de lliurar **per separat**, comenceu cada problema en un full nou.
Indiqueu els vostres **nom i cognoms de forma clara i en majúscules**.
No oblideu posar també **el vostre grup**: DT, 1GM4, 1GM5, o bé, 1GT8.

Justifiqueu totes les respostes i detalleu els càlculs
****

1. (3pt) Considereu el polinomi $p(z) = z^5 + 2z^4 + z + 2$
   (a) Trobeu totes les arrels complexes de p i expresseu-les tant en forma binòmica com en forma exponencial.
   (b) Doneu la factorització de p en factors irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$.
2. (3pt) Siguin $F = \langle (1, a, 1), (-1, 1, a) \rangle$ i $G = \langle (4, a, 10), (0, 1, 1) \rangle$.
   (a) Discutiu els valors de dim $(F + G)$ i dim $(F \cap G)$ en funció d'$a \in \mathbb{R}$.
   (b) Per a $a = -2$, doneu una base de $F \cap G$ i amplieu-la a una base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Per a $a = -1$, doneu una base de $F + G$ i determineu si existeix algun valor de $b \in \mathbb{R}$ per al qual $(3, 0, b) \in F + G$
3. Considereu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + 5y + z, x + y + z)$.
   (a) (0.5pt) Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.
   (b) (1pt) Trobeu la dimensió i una base del nucli i la imatge de f.
   (c) (1pt)Trobeu la matriu associada a f en les bases: $\{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(1, -1), (1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   Considereu ara l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que en les bases canòniques té matriu associada $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) (0.5pt) Trobeu la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques.
   (e) (1pt) Trobeu els valors propis de $g \circ f$ i estudieu si és diagonalitzable.

1 Considerem $p(z) = z^5 + 2z^4 + z + 2$

a) Les arrels de p són les solucions $z^5 + 2z^4 + z + 2 = 0$.
Com $p(z) \in \mathbb{R}[z]$, i és de grau senar, té almenys una arrel real.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow p(z) = (z+2)(z^4+1)$$

$$\boxed{-2 = 2e^{\pi j}}$$

La resta d'arrels són les arrels quartes de -1.

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\pi j}} = \sqrt[4]{e^{(\pi + 2\pi k)j}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

D'aquí,

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= e^{\pi/4 j} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 &= e^{3\pi/4 j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 &= e^{\frac{5\pi}{4} j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 &= e^{7\pi/4 j} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}}$$

b) Observem que $\{z_0 \text{ i } z_3\}$, i $\{z_1, z_2\}$ són conjugats.
La descomposició en factors irreductibles a $\mathbb{C}[z]$ és:

$$p(z) = (z+2)\underbrace{(z - e^{\pi/4 j})\underbrace{(z - e^{3\pi/4 j})(z - e^{5\pi/4 j})}(z - e^{7\pi/4 j})}$$

i la descomposició en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$

$$p(z) = (z+2)\left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\left(\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

és a dir:

$$p(z) = (z+2)(z - \sqrt{2}z + 1)(z + \sqrt{2}z + 1).$$

$\boxed{2.}$ Siguin $F = \langle (1,a,1), (-1,1,a) \rangle$
$G = \langle (4,a,10), (0,1,1) \rangle$

a) Considerem $F+G = \langle (1,a,1), (-1,1,a), (4,a,10), (0,1,1) \rangle$

La $\dim(F+G)$ és el rg A, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

· Com $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 10 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \mapsto F_2 - aF_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1+a & -3a & 1 \\ 0 & 1+a & 6 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\underset{F_3 \mapsto F_3 - F_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1+a & -3a & 1 \\ 0 & 0 & 6+3a & 0 \end{pmatrix}$$

deduïm: $\dim(F+G) = 3$ si $a \neq -2$
$\dim(F+G) = 2$, si $a = -2$.

· Clarament, la $\dim G = 2$, p.ex., $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

· En canvi, la $\dim F = 2$ si $a \neq -1$, i $\dim F = 1$ si $a = -1$.

Per trobar la $\dim(F \cap G)$ usem la fórmula de Grassmann:

$$\dim(F \cap G) + \dim F+G = \dim F + \dim G.$$

Cas $a \neq -2, -1$:	Cas $a = -2$	Cas $a = -1$
$\dim(F+G) = 3$	$\dim(F+G) = 2$	$\dim(F+G) = 3$
$\dim F = 2$	$\dim F = 2$	$\dim F = 1$
$\dim G = 2$	$\dim G = 2$	$\dim G = 2$
$\Rightarrow \dim(F \cap G) = 1$	$\Rightarrow \dim(F \cap G) = 2$	$\Rightarrow \dim(F \cap G) = 0$.

b) Si $a=-2$, $F\cap G \subset F$, $\dim(F\cap G) = \dim F$

$\Rightarrow F\cap G = F$

Una base de $F\cap G$, és qualsevol base de F, p.ex

$\{(1,-2,1), (-1,1,-2)\}$

afegim un vector de la base canònica de $\mathbb{R}^3$, l. indep. amb els vectors de la base de F, p-ex

$\{(1,-2,1), (-1,1,2), (0,0,1)\}$.

ja que: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

c) Si $a=-1$, $\dim(F+G)=3$, però $F+G \subset \mathbb{R}^3$

per tant, $F+G = \mathbb{R}^3$, de fet, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

$\forall b \in \mathbb{R}$, $(3,0,b) \in F+G$!

$\boxed{3}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ def. per $f(x,y,z) = (x+5y+z, x+y+z)$

a) $f \xleftrightarrow[B_c^2]{B_c^3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$ ja que: $\begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,1) \\ f(0,1,0) = (5,1) \\ f(0,0,1) = (1,1) \end{array}$

b) $\mathrm{Im} f = \langle (1,1), (5,1) \rangle$. Clarament,

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\, A = 2 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Una base és, p. ex, $\{(1,1), (5,1)\}$

Pel teorema de la dimensió:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$$

deduïm $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.

Busquem una base del $\operatorname{Nuc} f$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+5y+z=0 & ① \\ x+y+z=0 & ② \end{cases}$$

De ①−② deduïm $4y=0 \Rightarrow y=0$

Subs. en ②, deduïm $x=-z$.

$(x,y,z)\in \operatorname{Nuc} f \iff (x,y,z) = (-z,0,z) = z(-1,0,1)$

Una base del $\operatorname{Nuc} f$ és, p.e. $\{(-1,0,1)\}$.

c) Considerem:

$$B_1' = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

$$B_2' = \{(1,-1),(1,0)\}$$

introduïm les matrius de canvi de base:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f \xrightarrow[B_2']{B_1'} \quad Q^{-1}AP \underset{(a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

d) La matriu associada en les bases canòniques de $g\circ f$ és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Calculem el polinomi característic de $R = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_R(x) = (4-x)\big((3-x)(1-x)-3\big)$$
$$= -x(4-x)^2$$

Els valors propis són: $\{0, 4 \text{ (doble)}\}$.

Per saber si diagonalitza estudiem dim Nuc$(R-4Id)$

$$R-4\,Id = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ ; però } \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

com rg$(R-4Id) = 2$, la dim Nuc$(R-4Id) = 1$

No podem completar una base de vectors propis

$\Rightarrow$ $g \circ f$ no és diagonalitzable.

Scanned by CamScanner

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
(DT de)Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/
(Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica). Curs 2017-2018

Nom i Cognoms:...

Algebra i Geometria. Examen de Mig Quadrimestre. 30 d'octubre de 2017.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (2 pt) Troba dos nombres complexos tals que el quadrat del primer dividit pel segon dóna $2j$ i el quadrat del segon dividit pel primer dóna 2. Expressa la solució en forma exponencial i en forma binòmica.

2. (2 pt) Discuteix i resol el sistema següent en funció dels paràmetres reals a i b:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ & & ay & - & 2az & + & at & = & b \\ x & + & 2y & - & 7z & + & 2t & = & 3 \end{array}\right.$$

3. (3 pt) Donats els $\mathbb{R}$-subespais vectorials:

$$F = \langle (2,0,1), (1,1,2), (1,3,5) \rangle, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}.$$

   (a) Dóna una base i la dimensió de F i de G.

   (b) Dóna una base i la dimensió de $F + G$ i de $F \cap G$.

4. (3 pt) Sigui l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y, -x+z)$. Considerem les següents bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}, \\ B_2 & = & \{w_1 = (1,-2,1), w_2 = (0,1,-1), w_3 = (1,2,-1)\}. \end{array}$$

   (a) Obté una base i la dimensió del nucli i de la imatge de f.

   (b) Calcula les següents matrius associades a f:

      (i) base de sortida B_1 i base d'arribada B_1.

      (ii) base de sortida B_2 i base d'arribada B_2.

→ SOLUCIÓ MQ - A1G — 30 oct. 2017 ←

1

$$\begin{cases} \dfrac{z_1^2}{z_2} = 2j \quad (1) \\ \dfrac{z_2^2}{z_1} = 2 \quad (2) \end{cases}$$

De (2) $z_1 = \dfrac{z_2^2}{2}$ subst. en (1)

$$\frac{1}{z_2}\left(\frac{z_2^2}{2}\right)^2 = 2j \iff z_2^3 = 8j$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{8j} = \sqrt[3]{2^3 e^{(\pi/2 + 2\pi k)j}} = 2e^{\frac{\pi + 4\pi k}{6}j}$$

- $k=0$: $z_2 = 2e^{\pi/6 j} = \sqrt{3} + j \Rightarrow z_1 = 2e^{\pi/3 j} = 1 + j\sqrt{3}$
- $k=1$: $z_2 = 2e^{5\pi/6 j} = -\sqrt{3} + j \Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{3}j} = 1 - j\sqrt{3}$
- $k=2$: $z_2 = 2e^{9\pi/6 j} = 2e^{3\pi/2 j} = -2j \Rightarrow z_1 = -2$

R: $\{(1+j\sqrt{3}, \sqrt{3}+j), (1-j\sqrt{3}, -\sqrt{3}+j), (-2, -2j)\}$

2

$$\begin{cases} x - 2y + z - 2t = 1 \\ x + 2y - 7z + 2t = 3 \\ ay - 2az + at = b \end{cases} \rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & a & -2a & a & b \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \mapsto F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & a & -2a & a & b \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \mapsto F_3 - aF_2/4 \\ F_2 \mapsto F_2/4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b - a/2 \end{array}\right)$$

D'aquí:

→ S. compatible $\iff rg A = rg(A|b) \iff b - a/2 = 0 \iff \boxed{b = \frac{a}{2}}$

CASOS:

→ Si $a/2 \neq b$: s. incompatible.

→ Si $a/2 = b$: s. comp. INDETERMINAT amb 2 graus de llibertat

En aquest cas, resolem el sist. equivalent:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 2t = 1 \quad (1) \\ y - 2z + t = 1/2 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $x = 1 + 4z - \cancel{2t} - z + \cancel{2t} + 1 = \boxed{2 + 3z}$

(2) → $\boxed{y = \frac{1}{2} + 2z - t}$

R: $\{x = 2 + 3z,\ y = \frac{1}{2} + 2z - t,\ \forall z, t \in \mathbb{R}\}$

[3] a) * $\dim F = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_1 \mapsto F_1 - 2F_3}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$

Una base de F és, p. ex, $\{(2,0,1), (1,1,2)\} \Rightarrow \dim F = 2$

* $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\} = \{(x,x,z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)\}$

Una base de G és, p. ex: $\{(1,1,0), (0,0,1)\} \Rightarrow \dim G = 2$

b) Estudiem $F \cap G$:

$v \in F$: $v = \alpha(2,0,1) + \beta(1,1,2) = (2\alpha + \beta, \beta, \alpha + 2\beta)$

$v \in G$: $x = y$: $2\alpha + \beta = \beta \rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow F \cap G = \langle (1,1,2) \rangle$

Una base de $F \cap G$ és, p. ex $\{(1,1,2)\}$, $\dim F \cap G = 1$

Com $\dim F = \dim G = 2$, per la fórmula de Grassmann

$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G) = 3$

$\Rightarrow F + G = \mathbb{R}^3$, Una base de $F+G$ és p. ex la base canònica de $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

[4] a) $f \underset{B_c}{\overset{B_c}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Im f = \langle (1,2,-1), (1,1,0), (1,0,1) \rangle$

$\dim Im f = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Aleshores, $\dim Nuc f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Im f = 1$.

$(x,y,z) \in Nuc f \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \rightarrow x = -y - z = z \\ y + 2z = 0 \rightarrow y = -2z \end{cases}$

Una base del $Nuc f$ és, p. ex, $\{(1,-2,1)\}$.

Una base de $Im f$ és, p. ex, $\{(1,2,-1), (1,1,0)\}$.

b) i) Con $B_1 = B_c$ de $\mathbb{R}^3$, .

$$f \xrightarrow[B_1]{B_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

ii) $f \xrightarrow[B_2]{B_2} C = P^{-1} A P$ on $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det P = 2$

fent càlculs: $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria d'Aeronavegació/Grau en Enginyeria d'Aeroports
Àlgebra i Geometria. Curs 2014-2015

MIG QUADRIMESTRE. Divendres 17 d'abril de 2015.

****
Els problemes s'han de lliurar **per separat**, comenceu cada problema en un full nou.
Indiqueu els vostres **nom i cognoms de forma clara i en majúscules**.
No oblideu posar també **el vostre grup**: 1GM3, o bé, 1GT5.

Justifiqueu totes les respostes i detalleu els càlculs
****

1. (2p) Trobeu tots els nombres complexos z que compleixen

$$\mathrm{Re}(z^2) + j\mathrm{Im}(\overline{z}(1+2j)) = -3.$$

2. (2p) Discutiu el següent sistema segons els valors dels paràmetres a i b:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & & & = & 1 \\ 3x & + & ay & + & z & = & b. \end{array}\right\}$$

3. (3p) Donats els subespais

$$M = \langle(1,1,1,1),(1,3,1,3),(1,-1,1,-1)\rangle$$
$$N = \langle(1,2,0,2),(1,2,-1,2),(3,6,-2,6)\rangle$$

calculeu bases de M, N, i $M+N$. És la suma $M+N$ directa?

4. (3p) Sigui $a \in \mathbb{R}$. Considerem $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, on

$$f_a(x,y,z,t) = (x+y+az, -2x+y+t, ax+2y-2t, az+t).$$

(a) Trobeu per a quins valors de a l'aplicació lineal f_a és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

En els apartats que segueixen, fixeu $a = 0$.

(b) Calculeu el polinomi característic de f_0 i comproveu que 1 és un valor propi.

(c) Calculeu els vectors propis de valor propi 1 de f_0.

Solucions:

1. Escrivim $z = a + bj$ a l'equació $\mathrm{Re}(z^2) + j\mathrm{Im}(\overline{z}(1 + 2j)) = -3$ i obtenim

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}((a + bj)^2) + j\mathrm{Im}((a - bj)(1 + 2j)) = -3,\\
&\mathrm{Re}(a^2 - b^2 + 2abj) + j\mathrm{Im}(a + 2b + (2a - b)j) = -3,\\
&a^2 - b^2 + j(2a - b) = -3.
\end{aligned}$$

   D'aquí tenim el sistema d'equacions (equivalent) següent:

$$\left.\begin{array}{c} a^2 - b^2 = -3, \\ 2a - b = 0. \end{array}\right\}$$

   De la segona equació obtenim $2a = b$, substituint a la primera obtenim $a = \pm 1$. Per tant, $z = 1 + 2j$ i $z = -1 - 2j$.

2. Per discutir el sistema usarem el Teorema de Rouché-Frobenius. Per això, considerem la matriu ampliada del sistema i estudiem el seu rang.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 3 & a & 1 & b \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{\substack{F_2 \mapsto F_2 - aF_1 \\ F_3 \mapsto F_2 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 - b \\ 0 & 1 + a & -a & 1 - a \\ 0 & a + 3 & -2 & b - 3 \end{array}\right). \quad (1)$$

   Calculem el determinant de A: $\det A = -2(1 + a) + a(a + 3) = a^2 + a - 2$. Com que $a^2 + a - 2 = 0$ si i només si $a = -2$ o $a = 1$ distingim tres casos.

   (i) Cas $a \neq -2, 1$. En aquest cas, rang A =rang $(A|b) = 3$. Per tant el sistema és compatible i determinat.

   (ii) Cas $a = -2$. En aquest cas, l'equivalència (1) és:

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 - b \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & b - 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 - b \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

   D'aquí, el rang $(A) = 2$ i el rang$(A|b) = \left\{\begin{array}{ll} 2, & \text{si } b = 0, \\ 3, & \text{altrament.} \end{array}\right.$ Per tant, si $a = -2$ i $b = 0$ el sistema és compatible i indeterminat amb un grau de llibertat. Si $a = -2$ i $b \neq 0$ el sistema és incompatible.

   (iii) Cas $a = 1$. En aquest cas, l'equivalència (1) és:

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 - b \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & b - 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 - b \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b - 3 \end{array}\right).$$

   D'aquí, el rang $(A) = 2$ i el rang$(A|b) = \left\{\begin{array}{ll} 2, & \text{si } b = 3, \\ 3, & \text{altrament.} \end{array}\right.$ Per tant, si $a = 1$ i $b = 3$ el sistema és compatible i indeterminat amb un grau de llibertat. Si $a = 1$ i $b \neq 0$ el sistema és incompatible.

3. Com que
$$M = \langle (1,1,1,1),(1,3,1,3),(1,-1,1,-1)\rangle$$
$$N = \langle (1,2,0,2),(1,2,-1,2),(3,6,-2,6)\rangle,$$
obtenim
$$M+N = \langle (1,1,1,1),(1,3,1,3),(1,-1,1,-1),(1,2,0,2),(1,2,-1,2),(3,6,-2,6)\rangle.$$
D'aquí, per obtenir una base de $M+N$, estudiem quins d'aquests vectors formen un conjunt màxim de vectors linealment independents.

$$\begin{aligned}
\dim M+N &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\
&\underbrace{=}_{F_2=F_4} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\underbrace{=}_{\substack{F_2 \mapsto F_2 - F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - F_1}} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'aquí deduïm que la $\dim M+N=3$. A més, com que hem fet manipulacions per files, el mateix càlcul ens permet, de l'observació de les tres primeres columnes de la darrera matriu, deduir que $\dim M = 2$ i, de les tres darreres columnes que la $\dim N=2$.

Finalment, usant la fórmula de Grassman:
$$\dim M\cap N = \dim M + \dim N - \dim M+N,$$
deduïm que $M\cap N$ té dimensió 1, per tant, que la suma $M+N$ no és directa.

4. (a) La matriu associada a f_a en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

   Com que la dimensió de $\mathrm{Im}(f_a)$ és el rang de A, calculem el seu determinant:
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} &\underbrace{=}_{F_1\mapsto F_1-F_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{des. per } C_3} -a\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2a(2-a).
\end{aligned}$$

   D'aquí, observem que hem de distingir entre els casos $a\neq 0,2$, $a=0$ i $a=2$:

   - Si $a\neq 0,2$ aleshores la dimensió de $\mathrm{Im}(f_a)$ és 4. Com que $\mathrm{Im}(f_a)\subset \mathbb{R}^4$ deduïm que f és exhaustiva. Sabem que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Nuc}(f_a) + \dim \mathrm{Im}(f_a)$. Com que la $\dim \mathrm{Im}(f_a)=4$, aleshores $\dim \mathrm{Nuc}(f_a)=0$ i, per tant, f_a és injectiva. Com que és injectiva i exhaustiva, f_a és bijectiva.

- Si $a = 0$ o $a = 2$ la dimensió de $\mathrm{Im}(f_a) < 4$. Aleshores, f_a no és exhaustiva. Com que la dim $\mathrm{Im}(f_a) < 4$, usant la fórmula $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Nuc}(f_a) + \dim \mathrm{Im}(f_a)$, deduïm que la dim $\mathrm{Nuc}(f_a) > 0$ i, per tant, f_a no és injectiva. Com que no és exhaustiva, tampoc és bijectiva.

(b) Per trobar el polinomi característic de f_0 fem $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1+j\sqrt{2})(\lambda-1-j\sqrt{2}).$$

Aleshores, $\lambda = 1$ és valor propi (de multiplicitat 1).

(c) Per trobar els vectors propis de valor propi 1, trobem el Nuc $(A - I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, resolem el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ -2x + t &= 0, \\ 2y - z - 2t &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Obtenim un únic vector propi linealment independent, per exemple, $v = (1, 0, -4, 2)$. La resta de vectors propis són $\langle(1, 0, -4, 2)\rangle \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
DT de Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica
Algebra i Geometria. Curs 2015-2016. QP

MIG QUADRIMESTRE. Dijous 11 d'abril de 2016.

****
Els problemes s'han de lliurar **per separat**, comenceu cada problema en un full nou.
Indiqueu els vostres **nom i cognoms de forma clara i en majúscules**.
No oblideu posar també **el vostre grup**.

Justifiqueu totes les respostes i detalleu els càlculs
****

1. **(2 p)** Trobeu totes les solucions de l'equació $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$. Expresseu-les en forma binòmica i exponencial.

   Solució. Fem el canvi de variable $t = z^3$, llavors $z^6 - 7z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 7t - 8 = 0$, que té solucions $t = -1$ i $t = 8$.

   Desfent el canvi tindrem:

   - $t = -1 \Rightarrow z^3 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{\pi \mathtt{j}}} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{3}\mathtt{j}} = \frac{1}{2} + \mathtt{j}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{\pi \mathtt{j}} = -1 \\ e^{\frac{5\pi}{3}\mathtt{j}} = \frac{1}{2} - \mathtt{j}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
   - $t = 8 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow z = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8e^{0\mathtt{j}}} = \begin{cases} 2 \cdot e^{0\mathtt{j}} = 2 \\ 2 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathtt{j}} = -1 + \mathtt{j}\sqrt{3} \\ 2 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}\mathtt{j}} = -1 - \mathtt{j}\sqrt{3} \end{cases}$

2. **(1.5 p)** Resoleu el següent sistema per Gauss:

$$\left.\begin{array}{llll} x & +2y & -z & = -1 \\ 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ x & +y & & = 0 \end{array}\right\}$$

   Solució. Els passos del Gauss són els següents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   i per tant, els dos rangs són iguals a 3, i el sistema és compatible determinat. La solució és $z = 0$, $y = -1$ i $x = 1$.

3. **(2.5 p)** Donats els subespais de $\mathbb{R}^3$

$$F = \langle (1,2,1), (1,0,-1), (2,1,-1) \rangle \qquad G = \langle (1,1,0), (-1,1,a) \rangle,$$

trobeu la dimensió i una base de $F+G$ en funció del paràmetre a.

Solució. Tot el problema es pot fer per Gauss o per determinants. Per al subespai F, veiem que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

i per tant, els tres vectors són linealment dependents. Com que els dos primers són independents (no són múltiples un de l'altre), ja formen una base de F, que té dimensió 2.

Per a G, com que el determinant format per les dues primeres components és

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ja sabem que els dos vectors són sempre linealment independents (sigui quina sigui la a), i per tant, formen una base de G, que té sempre dimensió 2.

I per fer la suma, podem observar que el vector $(1,1,0)$ de G també pertany a F:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

i doncs, per trobar la dimensió i la base de la suma, només cal mirar el següent determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 4 - 2a$$

i per tant, si $a = 2$ tenim que $F+G$ té dimensió 2 (i és igual a F i a G), i per base la mateixa que F (o la de G). I si $a \neq 2$ aleshores $F+G$ té dimensió 3 i és igual a tot $\mathbb{R}^3$. Per base es pot agafar qualsvol de $\mathbb{R}^3$, o si volem les que apareixen aquí, la base és, per exemple,

$$(1,2,1), (1,0,-1), (-1,1,a)$$

4. **(4 p)** Sigui f_a l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f_a(x,y,z) = (ax - z, x + (a-1)y - z, 2y + z).$$

(a) Per a cada valor de a doneu una base del nucli i de la imatge de f_a.

Solució. La matriu de l'endomorfisme f_a és $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculem el determinant i l'igualem a 0, per veure en quins casos l'endomorfisme no és bijectiu:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 + 2a = a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2, \text{ o bé } a = 1$$

Ara, si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, tindrem $Nuc(f) = 0$, que no té base, i $Im(f) = \mathbb{R}^3$, que ens permet prendre qualsevol base, per exemple la base canònica.
Estudiem els casos $a = -2$ i $a = 1$:

- $a = -2$: $A_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Resolem el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant $Nuc(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + z = 0,\, 2y + z = 0\} =< (-1, -1, 2) >$.
Una base de $Nuc(f)$ és el vector $(-1, -1, 2)$.
Com que el nucli té dimensió 1, la imatge té dimensió 2. Tenim:

$$Im(f) =< (-2, 1, 0), (0, -3, 2), (-1, -1, 1) >$$

Una base d'aquest subespai és, per exemple, $\{(-2, 1, 0), (0, -3, 2)\}$.

- $a = 1$: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Resolem el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant $Nuc(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = 0,\, 2y + z = 0\} =< (2, -1, 2) >$.
Una base de $Nuc(f)$ és el vector $(2, -1, 2)$.
Com que el nucli té dimensió 1, la imatge té dimensió 2. Tenim:

$$Im(f) =< (1, 1, 0), (0, 0, 2), (-1, -1, 1) >$$

Una base d'aquest subespai és, per exemple, $\{(1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$.

(b) Per $a = -2$ el polinomi característic de f_a és $c(x) = -x^3 - 4x^2 - 3x$. Estudieu per aquest valor de a si l'endomorfisme és diagonalitzable, i si ho és, doneu una base de vectors propis i la matriu diagonal associada.

Solució. Descomposant: $c(x) = -x^3 - 4x^2 - 3x = -x(x+3)(x+1)$. Com que tots els valors propis tenen multiplicitat 1, la matriu és diagonalitzable. En la base adequada, la matriu diagonal associada és:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Busquem la base de vectors propis:

- $\lambda = 0$. Els vectors propis de valor propi 0 són els vectors del nucli de f_{-2}, que hem calculat a l'apartat anterior:

$$Nuc(A_{-2}) =< (-1,-1,2) >$$

- $\lambda = -3$. Hem de calcular $Nuc(A_{-2} + 3I)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = z,\ y = -2z \Rightarrow Nuc(A_{-2} + 3I) =< (1,-2,1) >$$

- $\lambda = -1$. Hem de calcular $Nuc(A_{-2} + I)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = -z,\ y = -z \Rightarrow$$

$$Nuc(A_{-2} + I) =< (1,1,-1) >$$

El canvi de base que ens porta de la matriu A_{-2} a la matriu D donada és:

$$\{(-1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,-1)\}$$

Escola Enginyeria Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
DT de Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials/Telecomunicació o Enginyeria Telemàtica
Algebra i Geometria. Curs 2016-2017. QP

MIG QUADRIMESTRE. Divendres 31 de març de 2017.

****
Els problemes s'han de lliurar **per separat**, comenceu cada problema en un full nou.
Indiqueu els vostres **nom i cognoms de forma clara i en majúscules**.
No oblideu posar també **el vostre grup**: 1GM3, o bé, 1GT5.

Justifiqueu totes les respostes i detalleu els càlculs
****

1. (2 pt) Troba les arrels i dóna la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi:

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45,$$

sabent que $2 - j$ és una de les seves arrels.

2. Considera el subespai de $\mathbb{R}^4$ definit per:

$$F = \langle u = (-1, 1, 2, 3), v = (1, r, 1, s), w = (5, -2, -4, -6) \rangle .$$

   (a) (1.25 pt) Troba el valor de r i s per a que la dimensió de F sigui 2.

   (b) (1.25 pt) Pels valors de l'apartat anterior, dóna una base de F i amplia-la a una base de $\mathbb{R}^4$.

3. Sigui f_a l'aplicació lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida per

$$f_a(x, y, z) = (2x - y + az, 4x + ay - 4z),$$

on a és un paràmetre real.

   (a) (0.5 pt) Dóna la matriu associada a f_a en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

   (b) (2 pt) Troba, en funció de a, la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f_a.

   (c) (0.5 pt) Discuteix en funció de a, quan f_a és un monomorfisme, epimorfisme i/o isomorfisme.

4. (2.5 pt) Estudia si la matriu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable, i si ho és, troba una matriu P tal que $P^{-1}AP = D$ sigui diagonal. Especifica també la matriu D.

$\boxed{1}$ $p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$

Com $2-j$ és una arrel de $p(z) \in \mathbb{R}[z]$, també ho és $2+j$ i el polinomi: $(z-(2-j))(z-(2+j))$ és un divisor de $p(z)$.

$$(z-(2-j))(z-(2+j)) = (z-2)^2 + 1 = z^2 - 4z + 5.$$

Busquem l'altre divisor de grau 2 de $p(z)$ fent la divisió.

$$\begin{array}{l|l} z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 & z^2 - 4z + 5 \\ \hline -z^4 + 4z^3 - 5z^2 & z^2 + 9 \\ \quad / \quad / \quad 9z^2 - 36z + 45 & \\ \qquad\quad -9z^2 + 36z - 45 & \\ \hline \qquad\quad / \quad / \quad / & \end{array}$$

$\Rightarrow p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 9)$ és la descomp. a $\mathbb{R}$.

Ja que $z^2 + 9 = 0$: $z = \pm 3j$

Les arrels de $p(z)$ són: $\{2 \pm j, \pm 3j\}$ i la descomposició a $\mathbb{C}$:

$$p(z) = (z-(2-j))(z-(2+j))(z-3j)(z+3j)$$

$\boxed{2}$ a) Com $\{u, w\}$ són l. independents, $\dim F = 2$ si i només si, $v \in \langle u, w \rangle$, és a dir, si i només si, existeixen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(1, r, 1, s) = \alpha(-1, 1, 2, 3) + \beta(5, -2, -4, 6)$$

Scanned by CamScanner

És a dir,

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + 5\beta & (1) \\ r = \alpha - 2\beta & (2) \\ 1 = 2\alpha - 4\beta & (3) \\ s = 3\alpha - 6\beta & (4) \end{cases}$$

De $2\cdot(1) + (3)$ deduïm: $3 = 6\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ i

de $4\cdot(1) + 5(3)$ deduïm: $9 = 6\alpha \rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$.

Substituïm en (2) trobem $r = \frac{1}{2}$ i subst. en (4),

trobem $s = \frac{3}{2}$.

R: $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{2}$.

b) Una base de F és p. ex.

$\{u = (-1, 1, 2, 3),\ w = (5, -2, -4, -6)\}$

una base de $\mathbb{R}^4$ és, p. ex:

$B_1 = \{u = (-1, 1, 2, 3), w = (5, -2, -4, -6), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

ja que: $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-5 \neq 0$, implica

que els 4 vectors de B_1 són l. independents.

Scanned by CamScanner

3) $f_a(x,y,z) = (2x - y + az,\ 4x + ay - 4z)$

a) $f(1,0,0) = (2,4)$

$f(0,1,0) = (-1, a)$

$f(0,0,1) = (a,-4)$

$f \xrightarrow[B_c \text{ de } \mathbb{R}^2]{B_c \text{ de } \mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 4 & a & -4 \end{pmatrix} = A$

b) Estudiem si existeix algun valor de a que faci $rg\,A = 1$, és a dir, estudiem si

$\frac{2}{4} = \frac{-1}{a} = \frac{a}{-4}$ té alguna solució.

$2a = -4\ ;\ -8 = 4a \iff \boxed{a=-2}$

Casos:

1.|| $a \neq -2$, $rg\,A = 2 \iff \dim \mathrm{Im} f_a = 2$, però com $\mathrm{Im} f_a \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{Im} f_a = \mathbb{R}^2$.

Una base de $\mathrm{Im} f_a$ és, p.ex, $\{(1,0),(0,1)\}$.

Com $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3} = \dim \mathrm{Nuc} f_a + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim \mathrm{Im} f_a}$

deduïm $\dim \mathrm{Nuc} f_a = 1$. Calculem una base del nucli resolent el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + az = 0 \\ 4x + ay - 4z = 0 \end{cases} \underset{\text{Gauss}}{\iff} \begin{cases} 2x - y + az = 0 \\ (a+2)y - (4+2a)z = 0 \end{cases}$$

Com $a+2 \neq 0$, la segona equació és equivalent a

$y - 2z = 0 \rightsquigarrow y = 2z$

substituint en la primera:

$$2x - 2z + az = 0 \rightarrow x = \frac{(2-a)z}{2}$$

$(x,y,z) \in \text{Nuc} f_a$: $\left\{ \left(\frac{2-a}{2}, 2, 1 \right) z \quad , z \in \mathbb{R} \right\}$

Una base del Nuc f_a és, p. ex $\left\{ \left(\frac{2-a}{2}, 2, 1 \right) \right\}$.

2) ~~a≠~~ $a = -2$. En aquest cas,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$rg\, A = 1$. Una base de la Im f_a és, p. ex

$\{(2,4)\}$

Com $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3} = \dim \text{Nuc} f_a + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim \text{Im} f_a}$, deduïm

$\dim \text{Nuc} f_a = 2$. Una base del Nuc f és:

$$-2x - y - 2z = 0 \rightarrow y = -2x - 2z$$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \text{Nuc} f_a$: $(x, -2x-2z, z) =$

$$= x(1,-2,0) + z(0,-2,1)$$

Una base és, p. ex, $\{(1,-2,0), (0,-2,1)\}$

c) Com $\dim \mathrm{Nuc} f_a \geq 1$, f_a no és mai monomorfisme.

Com $\mathrm{Im} f_a = \mathbb{R}^2$ si i només si $a \neq -2$,

f_a és un epimorfisme si i només si, $a \neq -2$.

f_a mai és isomorfisme $(\dim \mathbb{R}^3 \neq \dim \mathbb{R}^2 !!!)$.

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem $c_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 2 \\ -1 & 1-x & -1 \\ -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-3x+2)$

$$= (1-x)^2(2-x)$$

Els valors propis són: $\{1 \text{ (doble)}, 2\}$.

Calculem ara els vep's:

<u>VEP 1</u>:

$A - Id = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, com $rg(A-Id) = 1$

diagonalitza!

Com $A - 2Id \sim (+1 \;\; 0 \; +1)$, plantegem

$x + z = 0 \rightarrow x = -z$

D'aquí:

$(x,y,z) \in Nuc(A - Id)$: $(-z, y, z) = z(-1,0,1) + y(0,1,0)$.

$\Rightarrow v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (0,1,0)$

<u>VEP de 2</u>:

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Plantegem : $\left.\begin{array}{r} x + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -2y \\ z = y \end{array}$

$(x, y, z) \in Nuc(A - 2Id)$:

$$(-2y, y, y) = y(-2, 1, 1) \rightarrow v_3 = (-2, 1, 1)$$

D'aquí:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

satisfan:

$$P^{-1}AP = D.$$

EXAMEN MQ AiG/GESA/EETAC/UPC 09-04-18

Nom...Grup....................

---

1. Considerem el sistema d'equacions lineals $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ d'ordre 3x3 on:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -1+j \end{pmatrix}$$

(a){12pt} Classifica i resol en $\mathbb{C}$ aquest s.e.l.

(b){08pt} Expressa les solucions de l'apartat anterior en forma binòmica i en forma exponencial.

---

2. Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ d'ordre 4x3 i paràmetre a on:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a){15pt} Quan $a=1$, classifica i resol aquest s.e.l.

(b){15pt} Esbrina per quins valors del paràmetre a aquest s.e.l. és compatible determinat.

---

3. Considerem els subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$: $F=\langle\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\rangle$ i $G=\langle\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}\rangle$, on: $\vec{u}_1=(1,2,1),\vec{u}_2=(1,0,-1),\vec{u}_3=(2,1,-1),\vec{w}_1=(1,1,0),\vec{w}_2=(-1,1,k)$.

(a){15pt} Obté la dimensió i una base del subespai vectorial $F+G$, en funció del paràmetre k.

(b){15pt} Obté la dimensió, una base i les equacions del subespai vectorial $F\cap G$, quan $k=1$.

---

4. Considerem l'endomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(-2x-z,x-3y-z,2y+z)$.

(a){10pt} Calcula la dimensió i una base del nucli $Nuc(f)$ i de la imatge $Im(f)$.

(b){10pt} Obté les matrius associades $[f]_{\mathcal{C}}$ i $[f]_{\mathcal{B}}$, on:

$$\mathcal{C}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \text{ i } \mathcal{B}=\{(1,1,-1),(1,1,-2),(1,-2,1)\}$$

(c){10pt} Comprova que el polinomi característic de f és $p_f(x)=-x^3-x^2-3x$, i demostra que aquest endomorfisme és diagonalitzable.

(d){10pt} Obté els vectors propis i una base de vectors propis de f.

EXAMEN: ALGEBRA I GEOMETRIA. MQ, 9-IV-18.

1. Considerem el sistema d'equacions lineals $A\cdot x = b$, d'ordre 3 on:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -1+j \end{pmatrix}$$

a) Clasifica i resol en $\mathbb{C}$ aquest s.e.l.

b) Expressa les solucions de l'apartat anterior en forma binòmica i exponencial.

SOLUCIONS:

a) Calculem: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 18+18-20-(15+18-24) = -2-(-9) = 7 \neq 0$

per tant: rang $A = 3$, y també: rang $(A,b) = 3$.

Així que com tenim que rang A = rang $(A,b) = n$ incògnites $(=3)$, el Teorema de Rouché-Frobenius afirma que el sistema és compatible determinat.

Podem trobar les seves solucions usant les fórmules de Cramer:

$$x = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & -2 \\ -1+j & 6 & 3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \\ 5 & -1+j & 3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 14 \\ 5 & 6 & -1+j \end{vmatrix}$$

b) Càlcul de les solucions:

$$x = \frac{1}{7}\left[-14\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + (-1+j)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right] = \frac{1}{7}(-1+j)(-7) = 1-j$$

$$y = \frac{1}{7}\left[14\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1+j)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right] = \frac{1}{7}\left[14\cdot 1 - (-1+j)(-7)\right] = \frac{1}{7}(7+7j) = 1+j$$

$$z = \frac{1}{7}\left[-14\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1+j)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right] = \frac{1}{7}\left[-14\cdot 2\right] = -4$$

totes tres en forma binòmica i:

$$x = 1-j = \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{4}j}, \quad y = 1+j = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}j}, \quad z = -4 = 4e^{\pi j}$$

en forma exponencial.

2. Considerem la família uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $A\cdot x = b$ d'ordre 4×3 i paràmetre "a" on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Quan $a=1$, classifica i resol aquest s.e.l.

b) Esbrina per quins valors del paràmetre "a" aquest s.e.l. és compatible determinat.

SOLUCIONS

a) Trobem els rangs amb el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow E_1 + E_2 \\ E_3 \leftarrow E_1 - E_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2/3 \\ E_3/3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_4 \leftarrow E_2 - E_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ és triangular, tenim que $\text{rang } A = \text{rang}(A, b) = 3 = n$ incògnites

i, per tant, el Teorema de Rouché-Frobenius assegura que el sistema és compatible determinat. Per trobar les solucions, continuem amb el mètode de Gauss:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{E_1 \leftarrow E_1 - 2E_3 \\ E_2 \leftarrow E_3 - E_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-E_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_1 \leftarrow E_2 - E_1]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{per tant: } \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. , \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

b) Si el sistema és compatible (determinat o no), vector b és combinació lineal de les tres columnes de la matriu A, que formen una matriu 4×4, per tant, el seu determinant és nul:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \leftarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & a-1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & a-1 \\ 3 & 3 & -3 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & a-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1 \leftarrow F_1 - 3F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_2}}{=} 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+2 \\ 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & a+2 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = -3(a-1)(a+2)$$

per tant, el determinant és nul quan: $a=1$ o $a=-2$

Per $a=1$, el sistema és compatible determinat.

Veiem per $a=-2$ si el sistema és compatible determinat o indeterminat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow 2E_1 - E_2 \\ E_3 \leftarrow E_1 - E_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow E_2/3 \\ E_3 \leftarrow E_2 - E_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_x \leftrightarrow C_y]{} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y & x & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

com $\text{rang}\, A = \text{rang}\,(A,b) = 3 = n$ incògnites, el Teorema de Rouché-Frobenius, garanteix que el sistema és compatible determinat i trobem les solucions amb el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftarrow E_3 - E_2]{E_1 \leftarrow 2E_3 - E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftarrow 2E_1 + E_2} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} y & x & z & \end{array} \end{array}$$

per tant: $z = -3/2$, $x = -1/2$, $y = -1$, es a dir: $(x,y,z) = \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}\right)$.

O sigui que per $a=1$ i $a=-2$ el sistema és compatible determinat.

Obviament, quan $a \neq 1; -2$, $\text{rang}\,(A,b) = 4$, però com $\text{rang}\, A \leq 3$, del Teorema de Rouché-Frobenius, es pot dir que el sistema és incompatible.

EXTRA: Utilitzem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow 2E_1 - E_2 \\ E_3 \leftarrow E_1 - E_3 \\ E_4 \leftarrow E_4 - aE_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -(2+a) & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1-2a & a & a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_3 \leftarrow E_3 - E_2 \\ E_4 \leftarrow 3E_4 - (1-2a)E_2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -(2+a) & -3 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-a)(1+a) & 3(1-a) \end{array}\right)$$

ja que: $\left|\begin{array}{l} 3a - (1-2a)(-1)(2+a) = 3a + (1-2a)(2+a) = 3a + 2 - 3a - 2a^2 = 2(1-a^2) = 2(1-a)(1+a) \\ 3a - (1-2a)(-3) = 3(a+1-2a) = 3(1-a) \end{array}\right.$

Ara: $\det(A', b') = 1 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2+a & 0 \\ 2(1-a)(1+a) & 3(1-a) \end{vmatrix} = 3(2+a)3(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = -2; 1 \Rightarrow \text{rang}(A',b') < 4$

com $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A' \geq 2$

i també: $\left\{\begin{array}{l} 2+a = 0 \Leftrightarrow a = -2, \text{ però: } 2(1-a)(1+a) = 2 \cdot 3(-1) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A' = 3 \\ 2(1-a)(1+a) = 0 \Leftrightarrow a = 1; -1, \text{ però: } 2+a = 3; 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A' = 3 \end{array}\right.$

Per tant: per $a = -2; 1$, $\text{rang}\, A' = \text{rang}\,(A',b') = 3 = n$ incògnites i el Teorema de Rouché-Frobenius assegura que el sistema és compatible determinat.

per $a \neq -2; 1$, $\text{rang}\, A' = 3$, $\text{rang}\,(A',b') = 4$, i el Teorema afirma que el sistema és incompatible.

3. Considerem els subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$: $F = \langle\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\rangle$ i $G = \langle\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}\rangle$, on: $\vec{u}_1 = (1,2,1), \vec{u}_2 = (1,0,-1), \vec{u}_3 = (2,1,-1), \vec{w}_1 = (1,1,0), \vec{w}_2 = (-1,1,k)$.

(a){15pt} Obté la dimensió i una base del subespai vectorial $F+G$, en funció del paràmetre k.

(b){15pt} Obté la dimensió, una base i les equacions del subespai vectorial $F \cap G$, quan $k = 1$.

(a)

$$F \begin{cases} \bar{u}_1 = (1,2,1) \\ \bar{u}_2 = (1,0,-1) \\ \bar{u}_3 = (2,1,-1) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 4 + 0 + 2 + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = -2x + 2y - 2z = 0 \longrightarrow \boxed{x - y + z = 0}$$

$\hookrightarrow \underline{y = x + z}$

Base de F: $\{\bar{u}_1, \bar{u}_3\}$ $\dim(F) = 2$

$$G \begin{cases} \bar{w}_1 = (1,1,0) \\ \bar{w}_2 = (-1,1,k) \end{cases} \qquad \boxed{\dim(G) = 2 \quad \forall k}$$

$F + G = \langle \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2\} \rangle$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k+1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k-2 \end{bmatrix}$$

CASOS:

(1) $k \neq 2$ $\dim(F+G) = 3$

(2) $\boxed{k = 2}$ $\dim(F+G) = 2$

(1) $k \neq 2$ Base: $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_2\}$ [Ull!: $\vec{w}_1 \in F$]

(2) $k = 2$ Base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ [Ull! : $F = G$]

(b) $k=1$

$$F \begin{cases} \vec{u}_1 = (1,2,1) \\ \vec{u}_2 = (1,0,-1) \end{cases} \qquad \boxed{x-y+z=0}$$

$$G \begin{cases} \vec{w}_1 = (1,1,0) \\ \vec{w}_2 = (-1,1,1) \end{cases} \qquad \boxed{x-y+2z=0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = x - y + 2z$$

$$\boxed{F \cap G : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x-y+z=0 \to \\ z=0 \end{cases}$$

$x = y \longrightarrow \vec{v} = (1, 1, 0)$

$\boxed{\{\vec{v}\} \text{ base di } F \cap G}$

$\boxed{\dim (F \cap G) = 1}$

4. Considerem l'endomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (-2x - z, x - 3y - z, 2y + z)$.

(a){10pt} Calcula la dimensió i una base del nucli $Nuc(f)$ i de la imatge $Im(f)$.

(b){10pt} Obté les matrius associades $[f]_\mathcal{C}$ i $[f]_\mathcal{B}$, on:

$$\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \text{ i } \mathcal{B} = \{(1,1,-1),(1,1,-2),(1,-2,1)\}$$

(c){10pt} Comprova que el polinomi característic de f és $p_f(x) = -x^3 - 4x^2 - 3x$, i demostra que aquest endomorfisme és diagonalitzable.

(d){10pt} Obté els valors propis i una base de vectors propis de f.

(a) $Nuc(f) : \begin{cases} -2x - z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} -2x - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} \cdot z \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (1, 1, -2)$

$Nuc(f) = \langle \vec{u} \rangle \quad \dim(Nuc(f)) = 1$

$Im(f) = \langle f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3) \rangle =$

$= \langle (-2,1,0), (0,-3,2), (-1,-1,1) \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg(A) = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow \dim Im(f) = 2 \quad$ Base : $\{(-2,1,0), (0,-3,2)\}$

(b) $[f]_\mathcal{C} = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$$[f]_\mathcal{B} = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 4

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & -1 \\ 1 & -3-X & -1 \\ 0 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & -1 \\ 3+X & -3-X & 0 \\ 0 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & -1 \\ 0 & -3-X & 0 \\ 2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-X)\cdot \begin{vmatrix} -2-X & -1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (-3-X)\left[(-2-X)(1-X)+2\right] =$$

$$= (-3-X)\left[-2+2X-X+X^2+2\right] = (-3-X)\left[X^2+X\right] =$$

$$= -X\cdot(X+1)(X+3)$$

$$\overset{\shortparallel}{-3X^2-3X-X^3-X^2}$$

$$\overset{\shortparallel}{\boxed{-X^3-4X^2-3X}}$$

$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Diagonalitza (3 VAP's diferents!!)

(d) $\boxed{\lambda_1 = -3:}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \rightarrow \boxed{\bar{v}_1 = (1, -2, 1)}$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \rightarrow \boxed{\bar{v}_2 = (1, 1, -1)}$

$\boxed{\lambda_3 = 0}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = -z \\ 2y = -z \end{cases} \rightarrow \boxed{\bar{v}_3 = (1, 1, -2)}$

$\longrightarrow$ Base de VEP's: $\boxed{\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}}$

EXAMEN MQ AiG/GESA/EETAC/UPC 31-10-18

Nom...Grup...................

---

[1] Considerem la matriu quadrada d'ordre 4:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} z^2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & z & -4 & 2 \\ 0 & 0 & z+1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & z \end{pmatrix}$$

(a){10pt} Comprova que el determinant de la matriu $\mathbf{C}$ és: $\det(\mathbf{C}) = z^5 + z^4 + 4z + 4$.

(b){10pt} Resol en $\mathbb{C}$ l'equació: $\det(\mathbf{C}) = 0$, expressant totes les solucions en forma binòmica i en forma exponencial.

---

[2] Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre a on:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 1 & 4 & a \\ 7-a & 10 & 14 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 3-3a \\ 26 \end{pmatrix}$$

(a){10pt} Quan $a = -1$, classifica i resol aquest s.e.l.

(b){10pt} Esbrina per quins valors del paràmetre a aquest s.e.l. és incompatible.

---

[3] Considerem els subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$: $F = \langle S_1 \rangle$ i $G = \langle S_2 \rangle$, on
$S_1 = \{\vec{u}_1 = (2, 1, -1, 1), \vec{u}_2 = (1, -1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 5, -5, 2)\}$, $S_2 = \{\vec{w}_1 = (1, 2, -2, 1), \vec{w}_2 = (0, 3, -3, k)\}$.

(a){15pt} Obté la dimensió i una base dels subespais vectorials F i G, en funció del paràmetre k.

(b){10pt} Esbrina si per algun valor del paràmetre k, $F = G$.

---

[4] Considerem l'endomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + 3y + 3z, 4y, 6x - 6y + bz)$.

(a){10pt} Calcula la dimensió i una base del nucli $Nuc(f)$ i de la imatge $Im(f)$, en funció del paràmetre b.

(b){10pt} Per a quins valors del paràmetre b el vector $(1, 0, 1)$ és un vector propi de l'endomorfisme f?

(c){15pt} Quan $b = -2$, comprova que l'endomorfisme f és diagonalitzable, i obté una base de vectors propis.

$\boxed{1}$

a) $\begin{vmatrix} z^2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & z & -4 & 2 \\ 0 & 0 & z+1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & z \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} (z+1)\begin{vmatrix} z^2 & 2 & 0 \\ 0 & z & 2 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$

desenv. per fila 3

$= (z+1)(z^4+4) = z^5 + z^4 + 4z + 4.$

b) D'aquí, clarament

$z = -1 = e^{\pi j}$ és una arrel, i la resta

$z_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4e^{\pi j}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi + 2\pi k}{4} j}$

$z_0 = \sqrt{2}\, e^{\pi/4\, j} = 1 + j$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{3\pi/4\, j} = -1 + j$

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{5\pi/4\, j} = -1 - j$

$z_3 = \sqrt{2}\, e^{7\pi/5\, j} = 1 - j$

R: $\left\{ -1 = e^{\pi j},\ 1 + j = \sqrt{2}\, e^{\pi/4\, j},\ -1 + j = \sqrt{2}\, e^{3\pi/4\, j},\ -1 - j = \sqrt{2}\, e^{5\pi/4\, j},\ 1 - j = \sqrt{2}\, e^{7\pi/4\, j} \right\}$

$\square$

SOLUCIÓN AL EJERCICIO 2.

Tenemos el sistema lineal: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 4 & a+2 \\ 1 & 4 & a & 3(1-a) \\ 7-a & 10 & 14 & 26 \end{array}\right)$

(a) Estudiar y resolver con $a=-1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 8 & 10 & 14 & 26 \end{array}\right)$, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}} = b$

Calculamos el rango de A:

como $a_{1,1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A \geq 1$

como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-1) = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A \geq 2$

como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 8 & 10 & 14 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-8F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 18 & -18 \end{vmatrix} = 5\cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

ya que las filas 2ª y 3ª son iguales, así que como todos los determinantes de orden 3 son nulos: $\text{rang}\, A < 3$

y puesto que: $2 \leq \text{rang}\, A < 3 \Rightarrow \text{rang}\, A = 2$, y obviamente: $\text{rang}\,(A,b) \geq 2$

para determinar el rango de (A,b) orlamos el menor de mayor orden no nulo:

$\det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ \hline 8 & 10 & 26 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-8F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 18 & 18 \end{vmatrix} = 5\cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, filas 2 y 3 iguales

por tanto, como antes: $\text{rang}\,(A,b) < 3$, y ahora: $2 \leq \text{rang}(A,b) < 3 \Rightarrow \text{rang}(A,b) = 2$

Puesto que $\text{rang}\, A = \text{rang}\,(A,b) = 2 < 3 =$ nº incógnitas, el Teorema de Rouché-Frobenius permite afirmar que el sistema es compatible indeterminado con $3-2=1$ grado de libertad. Para encontrar las soluciones usaremos el subsistema obtenido con el menor de mayor orden no nulo:

$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-4z \\ 1 & 4 & 6+z \end{array}\right)$

y las fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1-4z & -1 \\ 6+z & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\left[4(1-4z)+6+z\right] = 2-3z$$

$$y = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1-4z \\ 1 & 6+z \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\left[6+z-(1-4z)\right] = 1+z$$

así que las soluciones son: $(x,y,z) = (2-3t, 1+t, t) = (2,1,0) + t(-3,1,1)$.

Para resolver el problema también podemos usar el método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 8 & 10 & 14 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-8F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 18 & -18 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3/18]{F_2/5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, y es evidente que $\text{rang}\, A = \text{rang}\,(A,b) = 2$

Para encontrar las soluciones volvemos a emplear el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} \Rightarrow x+3z=2 \Rightarrow x=2-3z \\ \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \end{array}\right\} \text{como antes}$$

(b) Para que el sistema sea incompatible se ha de cumplir que $\det A=0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 1 & 4 & a \\ 7-a & 10 & 14 \end{vmatrix} \underset{F_1-F_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a-4 & 4-a \\ 1 & 4 & a \\ 7-a & 10 & 14 \end{vmatrix} = (a-4)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 7-a & 10 & 14 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3}{=}$$

$$=(a-4)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4+a \\ 7-a & 10 & 24 \end{vmatrix} = (a-4)(-1)^{1+2}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 4+a \\ 7-a & 24 \end{vmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} 1 & 4+a \\ 7-a & 24 \end{vmatrix} = 24-(4+a)(7-a) = 24-(28+3a-a^2) = a^2-3a-4 = (a-4)(a+1)$

luego: $\det A = -(a-4)^2(a+1)=0 \Leftrightarrow a=4$ o $a=-1$

Para $a=-1$, el sistema es compatible indeterminado: apartado (a).

Estudiamos qué ocurre para $a=4$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & -9 \\ 3 & 10 & 14 & 26 \end{array}\right)$

observando las dos primeras ecuaciones tenemos: $6=x+4y+4z=-9$, que no puede ser.

También podemos emplear el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & -9 \\ 3 & 10 & 14 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$$

luego $\operatorname{rang} A=2<3=\operatorname{rang}(A,b)$, por tanto, del Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es incompatible.

Y también pueden usarse menores para calcular los rangos de A y (A,b):

como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10-12=-2\neq 0$, y es un menor no nulo de orden 2: $\operatorname{rang} A\geq 2$

como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$, todos los menores de orden 3 son nulos: $\operatorname{rang} A<3$

por tanto: $\operatorname{rang} A=2$, y falta por calcular el menor de orden 3 que orla el menor no nulo de mayor orden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & -9 \\ 3 & 10 & 26 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(-15)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 15(-2)\neq 0$$

por tanto: $\operatorname{rang}(A,b)\geq 3$,

y como $\operatorname{rang}(A,b)\leq \min(3,4)$ tenemos que $\operatorname{rang}(A,b)=3$

así que hemos encontrado: $\operatorname{rang} A=2<3=\operatorname{rang}(A,b)$.

3a) $* \; F = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle \Rightarrow \dim F = \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 = -F_2}{\overset{\uparrow}{=}} \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

orlem l'element $(1,1)$: $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 5 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} F = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(2,1,-1,1), (1,-1,1,0)\} \\ \dim F = 2 \end{array}}$

$* \; G = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \Rightarrow \dim G = \text{rang}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 1 & K \end{pmatrix}$

orlem l'element $(1,1)$: $|1| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = 2, \; \forall K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} G = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,2,-2,1), (0,3,-3,K)\}, \; \forall K \in \mathbb{R} \\ \dim G = 2, \; \forall K \in \mathbb{R} \end{array}}$

3b) Com que $\dim F = \dim G = 2 \Rightarrow F = G \Leftrightarrow \dim(F+G) = 2 \Leftrightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) = 2$

Aleshores:

$\text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & K \end{pmatrix} \underset{}{\overset{F_3 = -F_2}{=}} \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & K \end{pmatrix}$

orlem l'element $(1,1)$:

$|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 1 - 1 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & K \end{vmatrix} = -2K + 3 - K = 3 - 3K = 0 \Leftrightarrow K = 1$

$\Rightarrow \text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) = 2 \Leftrightarrow K = 1 \Rightarrow \boxed{F = G \Leftrightarrow K = 1}$

EXAMEN MQ AiG/GESA/EETAC/UPC 31-10-18

Nom...Grup..................

[4] Considerem l'endomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+3y+3z, 4y, 6x-6y+bz)$.

(a){10pt} Calcula la dimensió i una base del nucli $Nuc(f)$ i de la imatge $Im(f)$, en funció del paràmetre b.

(b){10pt} Per a quins valors del paràmetre b el vector $(1,0,1)$ és un vector propi de l'endomorfisme f?

(c){15pt} Quan $b=-2$, comprova que l'endomorfisme f és diagonalitzable, i obté una base de vectors propis.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix} \qquad |A| = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & b \end{vmatrix} = 4(b-18)$$

(a) $\boxed{b \neq 18} \Rightarrow r(A) = 3 \to \begin{cases} \dim Nuc(f) = 0 \mapsto Nuc(f) = \{\vec{0}\} \\ \dim Im(f) = 3 \mapsto Im(f) = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$\boxed{b = 18} \Rightarrow r(A) = 2 \mapsto \begin{cases} \dim Nuc(f) = 1 \\ \dim Im(f) = 2 \end{cases}$

Base de $Im(f)$: $\{(1,0,6), (3,4,-6)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x+3y+3z=0 \to x+3z=0 \to x=-3z \\ y=0 \end{cases}$

Base de $Nuc(f)$: $\{(-3,0,1)\}$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6+b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 4 = \lambda \\ 0 = 0 \\ 6+b = \lambda \end{cases} \to \begin{cases} \lambda = 4 \\ b = -2 \end{cases} \to \boxed{b = -2}$

(c) $b=-2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)(-2-\lambda) - 18\right] = (4-\lambda)\cdot\left[\lambda^2+\lambda-20\right] =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+5) = -(\lambda-4)^2(\lambda+5)$$

$\boxed{\lambda=4}$ $A-4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{m}(4) = 3 - r(A-4I_3) = 2$

λ	$\overline{m}$	m
4	2	2
-5	1	1

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{DIAGONALIZA}}$

$\boxed{\lambda=4}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $x-y-z=0 \leftrightarrow x=y+z$

x	y	z	
1	1	0	$\rightarrow \vec{v}_1=(1,1,0)$
1	0	1	$\rightarrow \vec{v}_2=(1,0,1)$

$\boxed{\lambda=-5}$ $\begin{pmatrix} +6 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \rightarrow 2x=-z \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{v}_3=(1,0,-2)}$

Una base de vectors propis:

$$\boxed{\{\vec{v}_1=(1,1,0),\ \vec{v}_2=(1,0,1),\ \vec{v}_3=(1,0,-2)\}}$$

EXAMEN MQ AiG/GESA/EETAC/UPC **29-03-19** Nom.. Grup......

1. Considerem la família uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre m on:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 4 & 1 \\ 14 & 10 & 7-m \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 3-3m \\ 26 \end{pmatrix}$$

(a){10pt} Quan $m = 0$, classifica i resol aquest s.e.l.

(b){10pt} Quan $m = -1$, classifica i resol aquest s.e.l.

(c){10pt} Esbrina per quins valors del paràmetre m aquest s.e.l. és incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & m & 1 & m+2 \\ m & 4 & 1 & 3-3m \\ 14 & 10 & 7-m & 26 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2 = 4f_2 - mf_1 \\ f_3 = f_3 - 4f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & m & 1 & m+2 \\ 0 & 16-m^2 & 4-m & 12-14m-m^2 \\ -2 & 10-4m & 3-m & 18-4m \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{f_3 = 2f_3 + f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & m & 1 & m+2 \\ 0 & 16-m^2 & 4-m & 12-14m-m^2 \\ 0 & 20-7m & 7-2m & 38-7m \end{array}\right)$$

$$\det = 2(m-4)^2(m+1) \Rightarrow \boxed{m \neq 4, -1 \quad S.C.D.}$$

(a) $m = 0$ C.D. $\Rightarrow \begin{cases} x = -19/8 \\ y = -17/8 \\ z = 23/2 \end{cases}$

(b) $m = -1$ C.I (1 grado de lib) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 4x - y + z = 1 \\ 3y + z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = y \\ z = 5 - 3y \end{cases}$

(c) S.I. $\Leftrightarrow m = 4$

2. Considerem els subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$: $U = \langle\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\rangle$ i $W = \langle\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}\rangle$, on:

$$\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (1,1,-2), \vec{u}_3 = (3,1,0),$$
$$\vec{w}_1 = (-1,-2,5), \vec{w}_2 = (0,1,-3), \vec{w}_3 = (3,3,k).$$

(a){10pt} Obté la dimensió del subespai vectorial W, en funció del paràmetre k.

(b){10pt} Obté la dimensió i una base del subespai vectorial $U + W$, en funció del paràmetre k.

(c){10pt} Obté la dimensió, una base i les equacions del subespai vectorial $U \cap W$, quan $k = -6$.

(a) $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & K \end{pmatrix} \underset{f_3 = f_3 + 3f_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 15+K \end{pmatrix} \underset{f_3 = f_3 + 3f_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6+K \end{pmatrix}$$

Per tant $\begin{cases} K = -6 \Rightarrow \dim W = 2 \\ K \neq -6 \Rightarrow \dim W = 3 \end{cases}$

(b) Calculem dim U: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - 3f_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim U = 2$, $B_U = \{(1,0,1),(0,1,-3)\}$

(Observem que quan $K = -6$, $U = W$ i quan $K \neq -6$ $W = \mathbb{R}^3$)

Per tant: $\begin{cases} K = -6 \Rightarrow U + W = U, \; B = \{(1,0,1),(0,1,-3)\} \\ K \neq -6 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3, \; B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \end{cases}$

(c) quan $K = -6 \Rightarrow U \cap W = U$.

Equacions de U $\rightarrow$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & -3 & z \end{pmatrix} \underset{f_3 = f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -3 & z-x \end{pmatrix} \underset{f_3 = f_3 + 3f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x+3y \end{pmatrix}$$

Equacions de U $\boxed{x - 3y - z = 0}$

1. .

2. .

3. Considerem l'aplicació lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (2x - 4y + 2z, -3x + 6y - 3z)$.
   Considerem les bases:

$$\mathcal{C}_1 = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (1,0,2), \vec{u}_3 = (2,-1,-4)\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{\vec{v}_1 = (1,0), \vec{v}_2 = (0,1)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1 = (1,-1), \vec{w}_2 = (-1,2)\}$$

(a){15pt} Calcula la dimensió, una base i les equacions implícites del nucli $Nuc(f)$ i de la imatge $Im(f)$.

$$\boxed{[f]_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{dim\, Im(f) = r(A) = 1,\ dim\, Ker(f) = 3 - r(A) = 2}$

$\boxed{\text{L'equació implícita del nucli de } f \text{ és: } x - 2y + z = 0.}$

$\boxed{\text{Una base de la imatge de } f \text{ és: } \{\vec{u} = (2,-3)\}}$

$\boxed{\text{Una base del nucli de } f \text{ és: } \{\vec{z}_1 = (1,0,-1), \vec{z}_2 = (0,1,2)\}}$

$\boxed{\text{L'equació implícita de la imatge de } f \text{ és: } 3x + 2y = 0.}$

(b){10pt} Obté les matrius associades $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_2}$ i $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$.

$$\boxed{P = [I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Q = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_2} = AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. Considerem l'endomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{CC}} = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & m & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a){10pt} Esbrina, per quins valors del paràmetre m, aquest endomorfimsme diagonalitza.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 3 & m-\lambda & -2 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (m-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (m-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)$$

Si $m \neq 0$ i $m \neq 1$, llavors f diagonalitza;

$m = 0$: $p_A(\lambda) = -\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)$; $\overline{m}(0) = 3 - r(A - 0 \cdot I_3) = 2$. Per tant, f diagonalitza.

$m = 1$: $p_A(\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2$; $\overline{m}(0) = 3 - r(A - 1 \cdot I_3) = 1$. Per tant, f no diagonalitza.

(b){15pt} Demostra que si $m = -3$, llavors aquest endomorfisme diagonalitza.
A continuació, obté una base de vectors propis de f.
Finalment, comprova que la fòrmula $D = P^{-1}AP$ es compleix.

$m = -3$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $p_A(\lambda) = (-3-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)$. Per tant, f diagonalitza.

$\lambda_1 = -3$: $A + 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$; $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$

$\lambda_2 = 0$: $A - 0 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$; $\vec{v}_2 = (2, 0, 3)$

$\lambda_3 = 1$: $A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$; $\vec{v}_3 = (4, 1, 4)$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$:

$$PD = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials + DT
Àlgebra i Geometria. Curso 2019-2020

Examen de medio cuatrimestre. 6 de Noviembre de 2019.

Publicación de calificaciones: 11/11/2019
Revisión de exámenes: 12/11/2019 - 15:00-16:30 - despachos C3-014 y C3-015

Nota: La resolución de la prueba no puede reducirse a la realización de cálculos, es necesario que estos vayan precedidos de pequeñas explicaciones que justifiquen su uso. **Los ejercicios deben entregarse en hojas separadas.**

1. (a) **(1.5p)** Factorizar en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio
$$p(x) = x^4 + (4+2j)x^3 + (-1+10j)x^2 + (-14+8j)x + (10-20j)$$
sabiendo que $1-2j$ es una de sus raíces.
   (b) **(0.5p)** Encontrar todos los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ con grado mínimo que sean múltiplos del polinomio $p(x)$ definido en el apartado (a).
   (c) **(1p)** Resolver la ecuación $z^4 - j = 0$ en $\mathbb{C}$ y dar el resultado en forma exponencial y binómica. (Indicación: para este último recuérdese que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.)

2. Sean $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x-y=0,\ z-t=0\}$ y $T = \langle (a,1,0,-a), (-a,0,3a,1) \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.
   (a) **(1p)** Encontrar bases y dimensiones de S y T, para este último en función de a.
   (b) **(1.5p)** Discutir la dimensión de $S+T$ y $S \cap T$ en función de a. Existe algún valor de a para el cual se tenga $S = T$?
   (c) **(1p)** Encontrar una base de $S \cap T$ para $a = \frac{1}{2}$, y completarla a una base de $\mathbb{R}^4$.

3. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (x, 2x-y+2z, x-y+2z)$.
   (a) **(0.5p)** Calcular la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) **(0.5p)** Existe algun valor del parámetro b para el cual el vector $\vec{v} = (b,0,-1)$ cumple la condición $f(\vec{v}) = \vec{v}$?
   (c) **(0.5p)** Calcular la matriz de $f \circ f$ en la base canónica.
   (d) **(1p)** Encontrar la dimensión y una base de $\ker f$ y $\mathrm{Im} f$. Razonar si f es invertible.
   (e) **(1p)** Comprobar que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

1. (a) Dividimos usando el algortimo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4+2j & -1+10j & -14+8j & 10-20j \\ 1-2j & & 1-2j & 5-10j & 4-8j & -10+20j \\ \hline & 1 & 5 & 4 & -10 & 0 \\ 1 & & 1 & 6 & 10 & \\ \hline & 1 & 6 & 10 & 0 & \end{array}$$

Finalmente: $x^2+6x+10=0 \Longleftrightarrow x=-3\pm j$. Por tanto, la factorización de $p(x)$ en $\mathbb{C}[x]$ es:

$$p(x)=(x-1+2j)(x+3-j)(x+3+j)(x-1)$$

(b) A la vista de la primera división por el método de Ruffini tenemos que

$$p(x)=(x-(1-2j))(x^3+5x^2+4x-10)$$

Los múltiplos de $p(x)$ que pertenecen a $\mathbb{R}[x]$ deben incluir el término $x-(1+2j)$ en su factorización, puesto que

$$(x-(1-2j))(x-(1+2j))=(x-1)^2+4=x^2-2x+5\in\mathbb{R}[x],$$

con lo cual $(x-(1+2j))p(x)=(x^2-2x+5)(x^3+5x^2+4x-10)$. Si, además, deben tener grado mínimo, deben ser forzosamente de la forma

$$\alpha(x-(1+2j))p(x)=\alpha(x^2-2x+5)(x^3+5x^2+4x-10),\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(c) $z^4-j=0\Leftrightarrow z^4=j\Leftrightarrow z^4=e^{j\frac{\pi}{2}}\Rightarrow z_k=\sqrt[4]{e^{j\frac{\pi}{2}}}=e^{j\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}}=e^{j\frac{1+4k}{8}\pi},\ k=0,1,2,3.$

$$\begin{aligned} k=0\to z_0&=e^{j\frac{\pi}{8}}=\cos\tfrac{\pi}{8}+j\sin\tfrac{\pi}{8}\\ k=1\to z_1&=e^{j\frac{5\pi}{8}}=\cos\tfrac{5\pi}{8}+j\sin\tfrac{5\pi}{8}=-\sin\tfrac{\pi}{8}+j\cos\tfrac{\pi}{8}\\ k=2\to z_2&=e^{j\frac{9\pi}{8}}=\cos\tfrac{9\pi}{8}+j\sin\tfrac{9\pi}{8}=-\cos\tfrac{\pi}{8}-j\sin\tfrac{\pi}{8}\\ k=3\to z_3&=e^{j\frac{13\pi}{8}}=\cos\tfrac{13\pi}{8}+j\sin\tfrac{13\pi}{8}=\sin\tfrac{\pi}{8}-j\cos\tfrac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Así, las raíces en forma exponencial son $e^{j\frac{\pi}{8}}, e^{j\frac{5\pi}{8}}, e^{j\frac{9\pi}{8}}, e^{j\frac{13\pi}{8}}$. Para la forma binómica, usando la relación del coseno del ángulo doble, la relación fundamental de la trogonometría y el hecho de que $\frac{\pi}{8}$ es un ángulo del primer cuadrante, se tiene que:

$$\begin{aligned}\cos^2\tfrac{\pi}{8}&=\tfrac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\tfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}\to\cos\tfrac{\pi}{8}=\tfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\tfrac{\pi}{8}&=\sqrt{1-\cos^2\tfrac{\pi}{8}}=\sqrt{1-\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}}=\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Por tanto, las raíces en forma binómica son:

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+j\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right),\quad \pm\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-j\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$$

2. (a) Los vectores de S son de la forma (x,y,z,t), con $y=x$ y $z=t$, esto es:

$$(x,y,z,t)=(x,x,t,t)=x(1,1,0,0)+t(0,0,1,1)\Longrightarrow S=\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\},$$

y $\dim S=2$. Por lo que repecta a T se tiene que:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & -a\\ 1 & 0\\ 0 & 3a\\ -a & 1\end{pmatrix}=2,\ \forall a\in\mathbb{R},\quad\text{puesto que}\quad \begin{vmatrix}1 & 0\\ -a & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Por tanto, $T=\{(a,1,0,-a),(-a,0,3a,1)\}$, y $\dim T=2$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

(b) Usando la fórmula de Grassmann y teniendo en cuenta las dimensiones de S y T obtenidas en el apartado resulta que:

$$\dim(S\cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = 4 - \dim(S+T).$$

A su vez, sabemos que $\dim(S+T) = \operatorname{rang}((1,1,0,0),(0,0,1,1),(a,1,0,-a),(-a,0,3a,1))$. Calculando el determinante de ese sistema de vectores tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1\to F_1-F_2\\ F_4\to F_4-F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & -a & 1-3a \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & a-1 & -a \\ 1 & 0 & 3a \\ 0 & -a & 1-3a \end{vmatrix} = -(4a^2-4a+1) = -4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$a \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow \dim(S+T) = 4 \text{ y } \dim(S\cap T) = 0.$$

Para $a = \dfrac{1}{2}$ tomamos el primer menor de orden 3 del sistema y observamos que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \dim(S+T) = 3 \text{ y } \dim(S\cap T) = 1.$$

Por último, dado que $\dim S = \dim T = 2$, para tener $S = T$ debería darse que $\dim(S+T) = 2$ y, como acabamos de ver, eso no sucede para ningún valor de $a \in \mathbb{R}$.

Alternativa al cálculo de $\dim(S+T)$. Disponemos los vectores de las bases de S y T como filas de una matriz y la triangulamos usando el método de Gauss para triangularla, operando siempre por filas y anotando los diferentes cambios y combinaciones. Para ello designamos $s_1 = (1,1,0,0)$, $s_2 = (0,0,1,1)$, $t_1 = (a,1,0,-a)$, $t_2 = (-a,0,3a,1)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ a & 1 & 0 & -a & t_1 \\ -a & 0 & 3a & 1 & t_2 \end{array}\right) \underset{F_4\to F_4+F_3}{\equiv} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ a & 1 & 0 & -a & t_1 \\ 0 & 1 & 3a & 1-a & t_2+t_1 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-aF_1}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ 0 & 1-a & 0 & -a & t_1-as_1 \\ 0 & 1 & 3a & 1-a & t_2+t_1 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-(1-a)F_4}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & -3a(1-a) & -a-(1-a)^2 & t_1-as_1-(1-a)(t_2+t_1) \\ 0 & 1 & 3a & 1-a & t_2+t_1 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3+3a(1-a)F_2}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4a^2+4a-1 & at_1-(1-a)t_2-as_1+3a(1-a)s_2 \\ 0 & 1 & 3a & 1-a & t_2+t_1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_3\\ F_3\to F_4\\ F_4\to F_2}}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 3a & 1-a & t_2+t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4a^2+4a-1 & at_1-(1-a)t_2-as_1+3a(1-a)s_2 \end{array}\right)$$

Dado que $-4a^2+4a-1=0 \Longleftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ es por tanto inmediato que

$$\dim(S+T)=\operatorname{rang}(s_1,s_2,t_1,t_2)=\begin{cases} 4 \Longleftrightarrow a\neq \frac{1}{2} \\ 3 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(c) Sea $a=\dfrac{1}{2}$ y $\vec{v}\in S\cap T$. Entonces $\vec{v}\in S$, por lo que existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $\vec{v}=\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,0,1,1)=(\alpha,\alpha,\beta,\beta)$. Sin embargo, también se tiene que $\vec{v}\in T$, por lo que existen $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tales que $\vec{v}=\gamma\left(\dfrac{1}{2},1,0,-\dfrac{1}{2}\right)+\delta\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2},1\right)=\left(\dfrac{\gamma-\delta}{2},\gamma,\dfrac{3\delta}{2},-\dfrac{\gamma}{2}+\delta\right)$. Del hecho que $\vec{v}=\vec{v}$ se deriva el siguiente sistema de ecuaciones, que es compatible indeterminado de acuerdo con lo visto en el apartado anterior:

$$\left.\begin{cases} \alpha=\frac{\gamma-\delta}{2} \\ \alpha=\gamma \\ \beta=\frac{3\delta}{2} \\ \beta=-\frac{\gamma}{2}+\delta \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\gamma-\delta}{2} \Longrightarrow \gamma=-\delta \\ \frac{3\delta}{2} = -\frac{\gamma}{2}+\delta \Longrightarrow \gamma=-\delta \;\; (OK) \end{cases}$$

Tomando entonces $\delta=2\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, resulta que

$$\vec{v}=-2\lambda\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)+2\lambda\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},1\right)=\lambda(-2,-2,3,3)\Longrightarrow S\cap T=\{(-2,-2,3,3)\}.$$

Finalmente, para completar esta base a una de $\mathbb{R}^4$ es suficiente con tomar los tres primeros vectores de la base canónica de este último, puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

de manera que $\mathbb{R}^4=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-2,-2,3,3)\}$.

Alternativa a la obtención de $S\cap T$. Al utilizar el método de Gauss en el apartado anterior observamos que existe una combinación lineal de vectores de S y T que nos proporciona el vector $\vec{0}$, concretamente:

$$at_1-(1-a)t_2-as_1+3a(1-a)s_2\big|_{a=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(t_1\big|_{a=\frac{1}{2}}-t_2\big|_{a=\frac{1}{2}}-s_1+\frac{3}{2}s_2\right)=\vec{0},$$

lo cual nos lleva a que

$$\vec{v}=t_1\big|_{a=\frac{1}{2}}-t_2\big|_{a=\frac{1}{2}}=s_1-\frac{3}{2}s_2=\left(1,1,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\in S\cap T.$$

Como, por otra parte, sabemos que $a=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow \dim(S\cap T)=1$, es inmediato que

$$S\cap T=\left\{\left(1,1,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right\}=\{(-2,-2,3,3)\}.$$

3. (a) La matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que denotamos como A, tiene por columnas las imágenes de los vectores de dicha base por f. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,2,1) \\ f(0,1,0) = (0,-1,-1) \\ f(0,0,1) = (0,2,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) El problema $f(\vec{v}) = \vec{v}$, planteado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se convierte en $A\vec{v} = \vec{v}$, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = b \;\; OK \\ 2b - 2 = 0 \Longrightarrow b = 1 \\ b - 2 = -1 \Longrightarrow b = 1 \;\; OK \end{array} \right.$$

Por lo tanto, $f(\vec{v}) = \vec{v} \Longleftrightarrow b = 1$.

(c) Sabemos que $(f \circ f)(\vec{v}) = f(f(\vec{v}))$ que, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y manteniendo la notación del apartado anterior resulta $A(A\vec{v}) = A^2\vec{v}$. Es por ello que la matriz de $f \circ f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Sabemos que $\mathrm{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle = \langle (1,2,1), (0,-1,-1), (0,2,2) \rangle$, donde usamos cálculos ya realizados en el apartado (a). Para determinar una base de entre ese sistema de generadores observamos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \{(1,2,1), (0,-1,-1)\}$$

y $\dim \mathrm{Im} f = 2$. A su vez, $\ker f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \; f(\vec{v}) = \vec{0}\}$, de manera que debemos resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2z \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{v} \in \ker f : \; \vec{v} = (0, 2z, z) = z(0,2,1),$$

de manera que $\ker f = \{(0,2,1)\}$ y $\dim \ker f = 1$. Dado que f no es un isomorfismo, no puede ser invertible.

(e) Notemos que $\ker f + \mathrm{Im} f = \langle (0,2,1), (1,2,1), (0,-1,-1) \rangle$, y

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \Longrightarrow \dim(\ker f + \mathrm{Im} f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

mientras que, usando la fórmula de Grassmann, se tiene que $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im} f) = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f - \dim(\ker f + \mathrm{Im} f) = 0$. Por tanto, efectivamente $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.