Ampliació de Matemàtiques
Tema 5. Sèries de Fourier

Lali Barrière
Departament de Matemàtiques - UPC

Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
Enginyeria d'Aeroports
Enginyeria d'Aeronavegació
EETAC

Continguts

Previs: sèries numèriques

Definició Una sèrie és la suma dels termes d'una successió.
Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de nombres (reals), la sèrie associada és la successió

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Diem que la sèrie és convergent si existeix (i és finit) el límit:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Si el límit no existeix o és infinit, diem que la sèrie és divergent.

Exemple La suma d'una progressió aritmètica sempre té límit infinit:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_0,\, a_0+d,\, a_0+2d, a_0+3d, \dots\} \Rightarrow a_n = a_0 + n\cdot d$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)\cdot a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\cdot d \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \text{ (si } d>0)$$

Progressió i sèrie geomètrica

La suma d'una progressió geomètrica té límit finit si la raó és més petita que 1, en valor absolut:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a,\, a\cdot r,\, a\cdot r^2, \dots\} \Rightarrow a_n = a\cdot r^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a\cdot r^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_N = \frac{a - a\cdot r^{N+1}}{1-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{a - a\cdot r^{N+1}}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & \text{si } |r|<1 \\ \pm\infty, & \text{si } r \geq 1 \\ \text{no existeix}, & \text{si } r < -1 \end{cases}$$

A més, si la suma no comença en $n = 0$:

$$\sum_{n\geq k} a\cdot r^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{a\cdot r^k - a\cdot r^{N+1}}{1-r} = \frac{a\cdot r^k}{1-r}, \text{ sempre i quan } |r|<1.$$

Criteri 0

Si la sèrie $\sum_{n\geq 1} a_n$ és convergent, aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

És a dir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{és divergent.}$$

5.1 Funcions periòdiques

Objectiu

Expressar una funció periòdica (o una funció definida en un interval) com a suma (finita o infinita) de sinusoïdals.

Definició Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és periòdica amb període T si

$$f(t+T) = f(t)$$

per a qualsevol $t \in \mathbb{R}$.

- Si f és periòdica amb període T diem que f és T-periòdica.
- Si f és T-periòdica també és nT-periòdica, per a tot n enter.
- El menor dels períodes de f s'anomena període fonamental.
- Si T és el període fonamental de f, aleshores $\nu_0 = \frac{1}{T}$ i $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ són, respectivament, la freqüència fonamental i la freqüència angular fonamental de f.

Funcions periòdiques: exemples

- $\cos t$, $\sin t$ són funcions 2π-periòdiques.
- $\cos(2t)$, $\sin(2t)$ són funcions π-periòdiques i, per tant, també 2π-periòdiques.
- $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ són funcions $\frac{2\pi}{n}$-periòdiques i, per tant, també 2π-periòdiques.
- $\cos(\pi t)$, $\sin(\pi t)$ són funcions 2-periòdiques.
- $\cos \frac{2\pi t}{T}$, $\sin \frac{2\pi t}{T}$ són funcions T-periòdiques.
- $t - \lfloor t \rfloor$ és 1-periòdica.

Propietat Si $f_1(t)$ és T_1-periòdica i $f_2(t)$ és T_2-periòdica, llavors $g(t) = af_1(t) + bf_2(t)$, amb $a_1, a_2 \neq 0$, és periòdica si i només si $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

Funcions periòdiques: exemples (2)

Funcions 2π-periòdiques

- $f(t) = \cos t - \sin(2t) + 4\cos(3t)$ és 2π-periòdica.
- Qualsevol combinació lineal de sinus i cosinus de la forma

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$$

  és 2π-periòdica.

Sinusoïdals amb altres períodes

- $f(t) = \cos(2\pi t) + 3\sin(4\pi t) - 5\sin(6\pi t)$ és 1-periòdica.
- Qualsevol combinació lineal de sinus i cosinus de la forma

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

  és $\frac{2\pi}{\omega_0}$-periòdica.

Teorema de Fourier

"Tota" funció 2π-periòdica admet un desenvolupament en sèrie de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$$

5.2 Sèrie de Fourier trigonomètrica

Sigui $f(t)$ una funció T-periòdica, amb freqüència fonamental $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.
La sèrie de Fourier trigonomètrica de $f(t)$ és:

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right)$$

on a_n i b_n s'anomenen coeficients de Fourier, i es calculen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n\omega_0 t\right)\, dt, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(n\omega_0 t\right)\, dt, \quad n \geq 1$$

Observació Es poden calcular també integrant en l'interval $[0, T]$ o també $[a, a+T]$, per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$.

Coeficients de Fourier d'una funció 2π-periòdica

Si $f(t)$ és 2π-periòdica, té freqüència fonamental 1 i la seva sèrie de Fourier és:

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$$

Els coeficients de Fourier de $f(t)$ són:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \qquad \left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \sin nt\ dt \end{aligned}\right\} \quad n \geq 1.$$

Demostració Per a la demostració necessitem recordar:

$$\cos x\ \cos y = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$
$$\sin x\ \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$
$$\sin x\ \cos y = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

Coeficients de Fourier d'una funció 2π-periòdica (2)

Observem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = \frac{1}{n} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{1}{n} (-\cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

A més:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, \sin mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m-n)t + \sin(m+n)t) \, dt = 0, \quad \forall \, n, m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, \cos mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + \cos(m+n)t) \, dt = 0, \quad \forall \, n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, \sin mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t) \, dt = 0, \quad \forall \, n \neq m$$

Si $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mt) \, dt = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 mt) \, dt = \pi$$

Coeficients de Fourier d'una funció 2π-periòdica (3)

A partir de l'expressió

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt)$$

- Integrant entre $-\pi$ i π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt \right) = a_0\, \pi$$

- Multiplicant per $\cos mt$ i integrant entre $-\pi$ i π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\, \cos mt\, dt = a_m \pi$$

- Multiplicant per $\sin mt$ i integrant entre $-\pi$ i π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt\, dt = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\, \sin mt\, dt = b_m \pi$$

$\square$

5.3 Sèrie cosinus i sèrie sinus

Definició Una funció f és parella si es compleix, per a tot $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = f(t)$$

La gràfica d'una funció parella és simètrica respecte de l'eix Y.

Una funció f és senar si es compleix, per a tot $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = -f(t)$$

La gràfica d'una funció senar és simètrica respecte de l'origen.

Hi ha funcions que no són ni parelles ni senars.

- f parella $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$
- f senar $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$
- Tota funció f és suma d'una funció parella i una funció senar.

$$f(t) = f_p(t)+f_s(t), \text{ on } f_p(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, \quad f_s(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

El producte de funcions parelles i senars compleix:

- parella $\cdot$ parella $=$ parella
- parella $\cdot$ senar $=$ senar
- senar $\cdot$ senar $=$ parella

Sèries de Fourier de funcions parelles i de funcions senars

1. Si f és una funció T-periòdica i parella, el seu desenvolupament en sèrie de Fourier és de la forma

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\ dt, \quad n \geq 0$$

2. Si f és una funció T-periòdica i senar, el seu desenvolupament en sèrie de Fourier és de la forma

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\ dt, \quad n \geq 1.$$

En ambdós casos $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Sèrie cosinus i sèrie sinus

Si $f(t)$ és una funció definida en un interval $[0, L]$, aleshores:

1. La sèrie cosinus de f és la sèrie de Fourier de l'extensió parella de f.
2. La sèrie sinus de f és la sèrie de Fourier de l'extensió senar de f.

- Les extensions parella o senar de f es defineixen en l'interval $[-L, L]$.
- Les funcions resultants se suposen T-periòdiques, amb $T = 2L$.

Sèrie cosinus

Extensió parella de $f(t)$, amb període $T = 2L$ i, per tant, $\omega_0 = \dfrac{\pi}{L}$:

$$\tilde{f}_p(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } 0 < t < L \\ f(-t), & \text{si } -L < t < 0 \end{cases} \quad \text{amb } \tilde{f}_p(t+2L) = \tilde{f}_p(t)$$

La seva sèrie de Fourier és:

$$\tilde{f}_p(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt, \quad n \geq 0$$

En l'interval $[0, L]$ es compleix: $\tilde{f}_p(t) = f(t)$.

Sèrie sinus

Extensió senar de $f(t)$, amb període $T = 2L$ i, per tant, $\omega_0 = \dfrac{\pi}{L}$:

$$\tilde{f}_s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } 0 < t < L \\ -f(-t), & \text{si } -L < t < 0 \end{cases} \quad \text{amb } \tilde{f}_s(t+2L) = \tilde{f}_s(t)$$

La seva sèrie de Fourier és:

$$\tilde{f}_s(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt, \quad n \geq 1$$

En l'interval $[0, L]$ es compleix: $\tilde{f}_s(t) = f(t)$.

5.4 Convergència de la sèrie de Fourier

Considerem $f(t)$ una funció T-periòdica, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, i la successió de sumes parcials de la sèrie de Fourier de f:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \quad N > 0$$

Estudiem alguns resultats sobre convergència:

1. Condicions de Dirichlet.
2. Fenomen de Gibbs.
3. Aproximació en mitjana quadràtica.
4. Desigualtat de Bessel.
5. Igualtat de Parseval.

Condicions de Dirichlet

Si es compleix en cada període:

- f té és contínua a trossos (té un nombre finit de discontinuïtats).
- f té un nombre finit d'extrems (màxims o mínims).

Aleshores:
La sèrie de Fourier de f convergeix puntualment (en cada punt t):

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

on $f(t^+)$ i $f(t^-)$ indiquen els límits laterals de f per la dreta i per l'esquerra, respectivament.

Les condicions de Dirichlet garanteixen la convergència puntual de la sèrie de Fourier cap a la funció f, si aquesta és contínua.

Fenomen de Gibbs

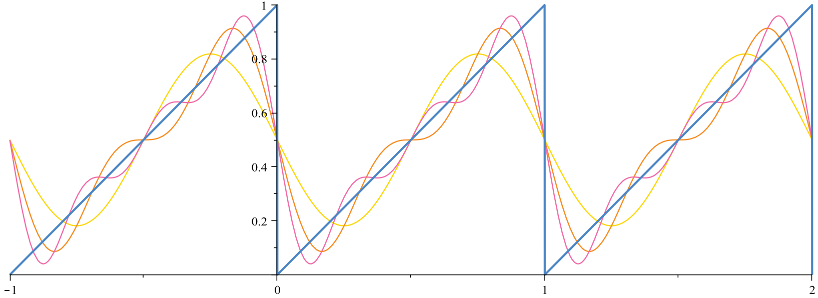
- La convergència de la sèrie de Fourier és uniforme si:

$$\lim_{N\to\infty} \max |S_N(t) - f(t)| = 0$$

- Si f és contínua i f' contínua a trossos, hi ha convergència uniforme.
- El fenomen de Gibbs es produeix quan NO hi ha convergència uniforme. Al voltant dels punts de discontinuïtat de la funció, S_N desborda els valors $f(t^+)$ i $f(t^-)$ en aproximadament un 9% del salt de la funció en aquest punt, sigui quin sigui el valor de N.
- El salt no desapareix augmentant N, només es desplaça cap al punt de discontinuïtat.
- Observem que això no contradiu la convergència puntual de Dirichlet.

Fenomen de Gibbs (2)

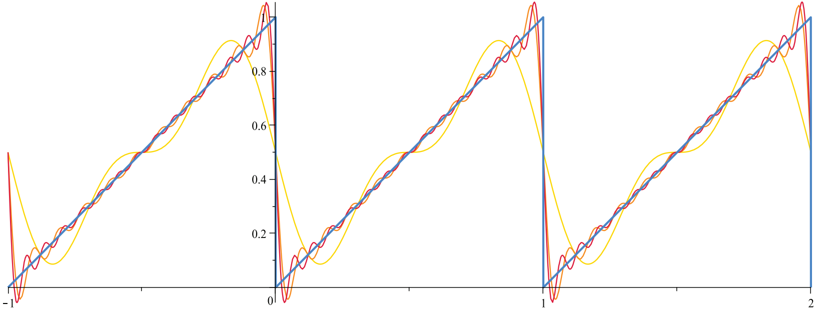
$$f(t) = t - \lfloor t \rfloor, \quad t \in [0,1] \Rightarrow f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin(2\pi n t)$$



Sumes parcials S_N, amb $N=1$, $N=2$, $N=3$.

Fenomen de Gibbs (3)

$$f(t) = t - \lfloor t \rfloor, \quad t \in [0,1] \Rightarrow f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(2\pi n t)$$



Sumes parcials S_N, amb $N = 2$, $N = 10$, $N = 14$.

Aproximació en mitjana quadràtica (1)

Funcions de quadrat integrable

- Diem que una funció $f(t)$ definida a $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ és de quadrat integrable si:
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt < +\infty$$
Les funcions contínues a trossos a $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ són de quadrat integrable.
- La integral
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt < +\infty$$
dóna una mesura de l'energia del senyal $f(t)$ en $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$.
Les funcions de quadrat integrable són funcions d'energia finita.

Aproximació en mitjana quadràtica (2)

L'error quadràtic en aproximar una funció $f(t)$ per una altra funció $g(t)$ en l'interval $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ és:

$$EQ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (g(t) - f(t))^2 \, dt$$

La funció $g(t)$ podria ser una sèrie trigonomètrica:

$$g_N(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos n\omega_0 t + d_n \sin n\omega_0 t)$$

Propietat L'error quadràtic és $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (g_N(t) - f(t))^2 \, dt$, i és mínim quan $g_N(t)$ coincideix amb la sèrie de Fourier: $g_N(t) = S_N(t)$.

Aproximació en mitjana quadràtica (3)

- Si $f(t)$ és de quadrat integrable a $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$, l'error quadràtic en aproximar f per $S_N(t)$ compleix:

$$\lim_{N\to+\infty} EQ_N = \lim_{N\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (S_N(t) - f(t))^2 \, dt = 0$$

  Diem que $S_N(t)$ convergeix en mitjana quadràtica cap a $f(t)$.

- L'error quadràtic mitjà en aproximar f per $SF_N(f,t)$ és:

$$EQM_N = \frac{1}{T} EQ_N = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (S_N(t) - f(t))^2 \, dt$$

L'error quadràtic i l'error quadràtic mitjà mesuren l'energia i l'energia mitjana de l'error comès en aproximar f per la suma parcial $S_N(t)$ de la seva sèrie de Fourier.

Aproximació en mitjana quadràtica: en resum

L'error quadràtic en aproximar f per S_N és:

$$EQ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (S_N(t) - f(t))^2 \, dt$$

L'error quadràtic mitjà en aproximar f per S_N és:

$$EQM = \frac{1}{T} EQ = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (S_N(t) - f(t))^2 \, dt$$

La sèrie de Fourier és la sèrie trigonomètrica que minimitza l'error quadràtic.

L'error quadràtic i l'error quadràtic mitjà mesuren l'energia i l'energia mitjana de l'error comès en aproximar f per la suma parcial S_N de la seva sèrie de Fourier.

Observació

$$EQ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (S_N(t) - f(t))^2 \, dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) - f(t) \right)^2 \, dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt - T\frac{a_0^2}{4} - \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$$

Desigualtat de Bessel i igualtat de Parseval

- Desigualtat de Bessel. Si f és de quadrat integrable en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t))^2\,dt \geq \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

La desigualtat de Bessel implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

- Igualtat de Parseval. Si f és de quadrat integrable en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t))^2\,dt = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

La igualtat de Parseval mesura la potència mitjana de f a partir dels coeficients de Fourier.

Desigualtat de Bessel i igualtat de Parseval (2)

- La desigualtat de Bessel s'obté de:

$$0 \leq EQ_N = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (SF_N(f,t) - f(t))^2 \, dt$$

- La igualtat de Parseval s'obté a partir de la desigualtat de Bessel i de la convergència en mitjana quadràtica,

$$\lim_{N\to+\infty} EQ_N = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (SF_N(f,t) - f(t))^2 \, dt = 0$$

- El fet que els coeficients de la sèrie de Fourier tendeixen a 0 és conseqüència directa de la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

que estableix la igualtat de Parseval.

5.5 Sèrie de Fourier complexa

Sigui $f(t)$ una funció T-periòdica, amb freqüència fonamental $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

La sèrie de Fourier complexa de $f(t)$ és:

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathtt{j}k\omega_0 t}$$

on c_n s'anomenen coeficients de Fourier, i vénen donats per:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\mathtt{j}k\omega_0 t} dt, \qquad -\infty < k < \infty.$$

Observació Es poden calcular també integrant en l'interval $[0, T]$ o també $[a, a+T]$, per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$.

Coeficients de Fourier d'una funció 2π-periòdica

Observem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathtt{j}mt} e^{-\mathtt{j}kt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathtt{j}(m-k)t}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-k)t + \mathtt{j}\sin(m-k)t]\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq k, \\ 2\pi & m = k. \end{cases}$$

A partir de l'expressió

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{\mathtt{j}kt},$$

- Multiplicant per $e^{-\mathtt{j}kt}$ i integrant entre $-\pi$ i π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-\mathtt{j}kt} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathtt{j}mt} e^{-\mathtt{j}kt} dt = 2\pi c_k$$

Relació entre els coeficients a_n, b_n i c_k

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathtt{j} k\omega_0 t}$$

A partir de la fórmula d'Euler tenim:

$$\begin{aligned} e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} &= \cos n\omega_0 t + \mathtt{j} \sin n\omega_0 t \\ e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t} &= \cos n\omega_0 t - \mathtt{j} \sin n\omega_0 t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \cos n\omega_0 t &= \frac{e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} + e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t}}{2} \\ \sin n\omega_0 t &= \frac{e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} - e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t}}{2\mathtt{j}} \end{aligned}$$

Per tant:

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} + e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} - e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t}}{2\mathtt{j}} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2\mathtt{j}} \right) e^{\mathtt{j} n\omega_0 t} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2\mathtt{j}} \right) e^{-\mathtt{j} n\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\mathtt{j} k\omega_0 t}$$

Els coeficients c_k de la sèrie de Fourier complexa es poden calcular a partir dels coeficients a_n i b_n de la sèrie trigonomètrica:

- $k > 0$: $c_k = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{b_k}{2\mathtt{j}} = \dfrac{1}{2}(a_k - \mathtt{j}b_k)$
- $k = 0$: $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$
- $k < 0$: $c_k = c_{-n} = \dfrac{a_n}{2} - \dfrac{b_n}{2\mathtt{j}} = \dfrac{1}{2}(a_n + \mathtt{j}b_n)$,

Els coeficients a_n i b_n de la sèrie de Fourier trigonomètrica es poden calcular a partir dels coeficients c_k de la sèrie complexa:

- $a_0 = 2c_0$
- $a_n = c_n + c_{-n} = 2Re(c_n)$
- $b_n = \mathtt{j}(c_n - c_{-n}) = -2Im(c_n)$

Propietats de la sèrie complexa

- Es compleix: $c_{-n} = \overline{c_n}$ per a tot n.
- Una funció és parella si c_k és real per a tot k.
- Una funció és senar si c_k és imaginari pur per a tot k.

Identitat de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Espectre bilateral

$f(t)$ funció T-periòdica, amb freqüència fonamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

- Les freqüències $\omega_k = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}$ s'anomenen harmònics.
- Podem associar a cada harmònic el seu coeficient en la sèrie de Fourier complexa:

$$\omega_k \to c_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

El conjunt de freqüències i coeficients formen l'espectre de la funció f.

Representació gràfica

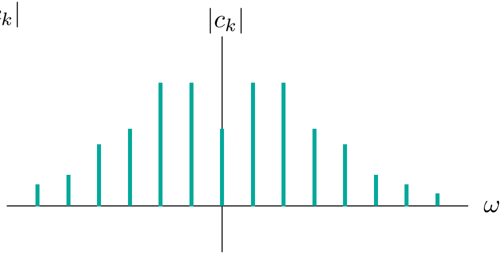
- Separem l'espectre en espectre d'amplitud i espectre de fase.
- L'espectre d'amplitud és la correspondència: $\omega_k \to |c_k|$, $k \in \mathbb{Z}$.
- L'espectre de fase és la correspondència: $\omega_k \to arg(c_k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Com que f és real

$$c_{-k} = \overline{c_k} \Rightarrow |c_{-k}| = |c_k|, \qquad \arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$$

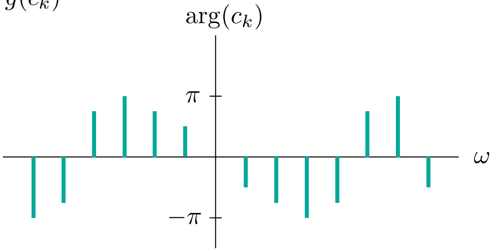
La gràfica de l'espectre d'amplitud és parella.
La gràfica de l'espectre de fase és senar.

Espectre bilateral (2)

$\omega_k \to |c_k|$



$\omega_k \to arg(c_k)$



Espectre unilateral

$f(t)$ funció T-periòdica, amb freqüència fonamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

- Les freqüències $\omega_n = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$ s'anomenen harmònics.
- Forma amplitud-fase de la sèrie de Fourier:

$$f(t) \simeq A_0 + \sum_{n\geq 1} A_k \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

- Podem associar a cada harmònic la seva amplitud i la seva fase:

$$\omega_n \to (A_n, \phi_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

El conjunt de freqüències, amplituds i fases formen l'espectre de f.

Pas de la sèrie de Fourier trigonomètrica a la forma amplitud-fase

$$\left.\begin{array}{l} a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t = A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) = A_n(\cos\omega_n t \cos\phi_n - \sin\omega_n t \sin\phi_n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

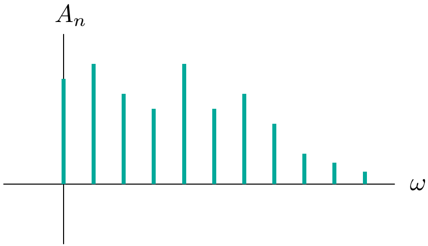
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = A_n \cos\phi_n, \quad b_n = -A_n \sin\phi_n \\ A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \tan\phi_n = -\frac{b_n}{a_n}, \quad n \geq 1 \end{array}\right.$$

Espectre unilateral (2)

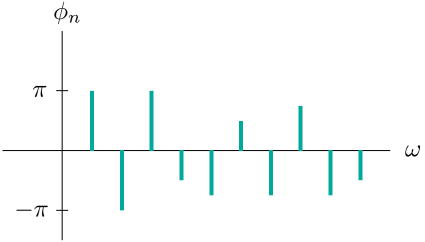
- L'espectre d'amplitud és la correspondència: $\omega_n \to A_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- L'espectre de fase és la correspondència: $\omega_n \to \phi_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- L'espectre unilateral és la representació dels espectres d'amplitud i de fase.

Espectre unilateral (3)

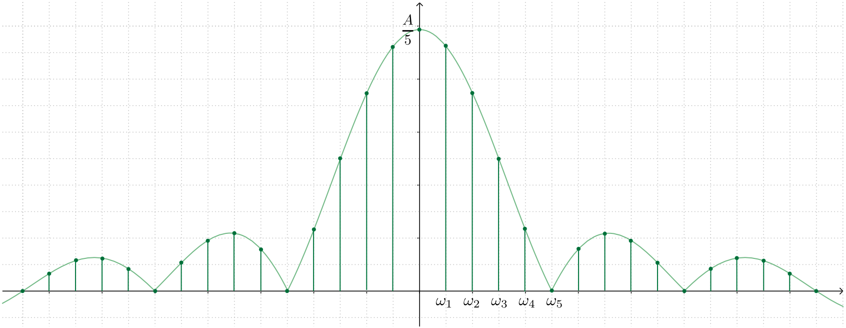
$\omega_n \to A_n$



$\omega_n \to \phi_n$



Espectre del pols rectangular



$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{d}{2} \le |t| \le \frac{T}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{j}\frac{n2\pi}{T}t}, \quad \begin{cases} c_n = \dfrac{Ad}{T}\dfrac{\sin\frac{n\pi d}{T}}{\frac{n\pi d}{T}} & \text{si } n \neq 0 \\ c_0 = \dfrac{Ad}{T} \end{cases}$$

Exemple: $d = \frac{1}{5}$, $T = 1$

Espectre bilateral: $\omega_0 = 2\pi$, $\omega_1 = 4\pi$, $\omega_{-1} = -4\pi$, $\omega_2 = 6\pi$, $\omega_2 = 6\pi$, $\ldots \omega_k = k2\pi$

Amplitud: $|c_n| = \dfrac{A}{5}\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{5}\right|}{\frac{n\pi}{5}}$ si $n \neq 0$; $|c_0| = \dfrac{A}{5}$ Fase: $\phi_n = 0$