6. Transformada de Fourier

1. Calculeu la transformada de Fourier de les funcions següents:

   a) $f(t) = e^{-|t|}$

   b) $f(t) = \begin{cases} je^{jat} & \text{si} \quad t \geq 0 \qquad (a \in C, \operatorname{Im}\{a\} > 0), \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

2. Calculeu l'antitransformada de Fourier de la funció $F(\omega)$ (feu-ho directament i també utilitzant $F(\omega) = p_{2\pi}(\omega)e^{j\omega}$).

$$F(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & \text{si} \quad |\omega| \leq 2\pi \ , \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

3. Sabent que $\dfrac{1}{a^2+t^2} \leftrightarrow -\dfrac{\pi}{a}e^{a|\omega|}, \quad \operatorname{Re}\{a\} < 0$, calculeu l'antitransformada de la funció $2e^{-|\omega|} + 3e^{-2|\omega|}$.

4. Sabent que $\dfrac{t}{(a^2+t^2)^2} \leftrightarrow \dfrac{j\omega\pi}{2a}e^{a|\omega|}, \quad \operatorname{Re}\{a\} < 0$, calculeu l'antitransformada de la funció $\dfrac{\omega}{(1+\omega^2)^2}$.

5. Proveu que si $f(t)$ és solució de l'equació diferencial $x''(t) - t^2x(t) = \lambda x(t)$, aleshores la seva transformada de Fourier $F(\omega)$ també n'és solució.

6. Calculeu la transformada de Fourier de $f(t) = e^{a|t|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$.

   Deduïu

   a) l'antitransformada de Fourier de $e^{a|\omega|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

   b) la transformada de Fourier de $\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

   c) la transformada de Fourier de $\dfrac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

   d) l'antitransformada de Fourier de $\dfrac{\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$.

7. Sigui $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si}\, 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$

   a) Calculeu la transformada de Fourier de $f(t)$.

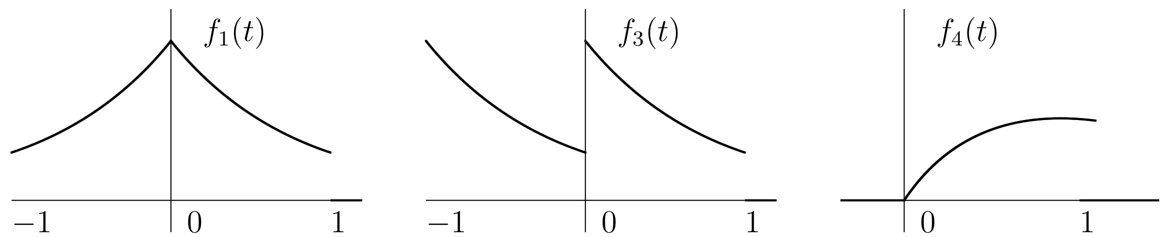
   Resoleu els apartats següents mitjançant l'aplicació de les propietats de la transformada de Fourier. (notació: $f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$)

b) Calculeu $F_1(\omega)$.

c) Sigui $F_2(\omega) = e^{-\omega}p_{1/2}(\omega - \frac{1}{2}) + e^{\omega}p_{1/2}(\omega + \frac{1}{2})$. Calculeu $f_2(t)$.

d) Calculeu $F_3(\omega)$.

e) Calculeu $F_4(\omega)$.



on $\quad f_1(t) = \begin{cases} e^t & \text{si} \quad -1 \le t \le 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad f_3(t) = \begin{cases} e^{-(t+1)} & \text{si} \quad -1 \le t \le 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$

$f_4(t) = te^{-t} \quad$ si $\quad 0 \le t \le 1; \quad$ i $\; f_i(t) = 0\;$ altrament, per $i = 1, 3, 4$.

8. *a*) Feu la gràfica de les funcions $2p_1(t)$ i $2p_1(3t)$.

   b) Apliqueu propietats per calcular la transformada de Fourier de la funció

$$f(t) = 2t \cdot p_1(3t).$$

9. Calculeu el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt \cos tx}{t} dt.$$

Indicació: utilitzeu la transformada de Fourier de l'impuls rectangular $p_b(t)$.

Deduïu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

10. Proveu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 at}{t^2} dt = a\pi.$$

Indicació: apliqueu la fórmula de Parseval a l'impuls rectangular $p_a(t)$.

11. Calculeu la transformada de Fourier de la funció:

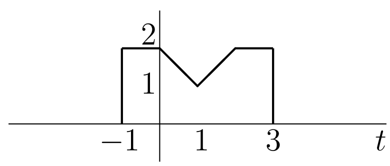
$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Apliqueu el resultat anterior al càlcul de la integral següent:

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right] \cos \frac{x}{2} dx.$$

12. Sigui $f(t)$ una funció que val 0 fora de l'interval $[a, b]$ i $g(t)$ una funció que val 0 fora de l'interval $[c, d]$. Trobeu els valors e, f tals que $(f * g)(t)$ val 0 fora de l'interval $[e, f]$. (Deduïu-los mitjançant la convolució gràfica.)

13. Sigui $f(t)$ el senyal de la figura i $F(\omega)$ la seva transformada de Fourier.



Resoleu els apartats següents **sense calcular** $F(\omega)$.

a) Calculeu l'argument de $F(\omega)$.

b) Calculeu $F(0)$.

c) Calculeu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)d\omega$.

d) Calculeu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$.

e) Calculeu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$.

f) Feu la gràfica de la transformada inversa de la part real de $F(\omega)$.

14. Sigui $F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$.

a) Relacioneu la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)d\omega$ amb $f(0)$.

b) Relacioneu la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega F(\omega)d\omega$ amb $f'(0)$.

c) Raoneu per cada un dels senyals de la figura quines de les següents propietats verifiquen:

1) $R(\omega) = 0$ 2) $I(\omega) = 0$

3) Existeix $\alpha \in R$ tal que $e^{j\alpha\omega}F(\omega)$ és real.

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)d\omega = 0$ 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega F(\omega)d\omega = 0$

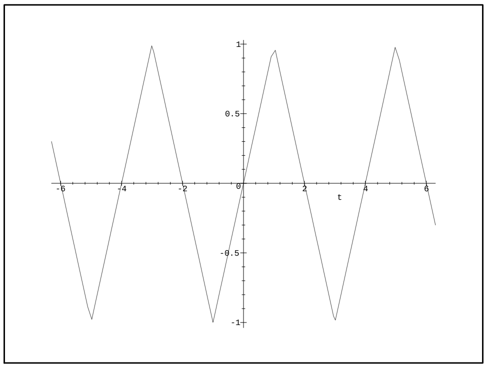


Figura 1

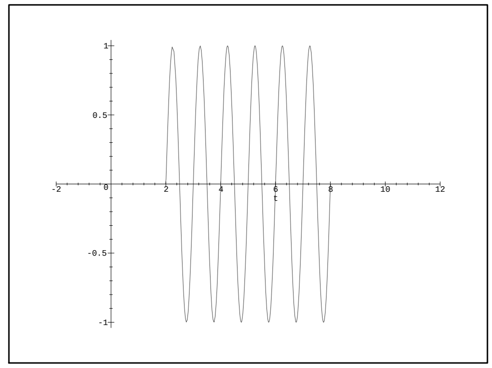


Figura 2

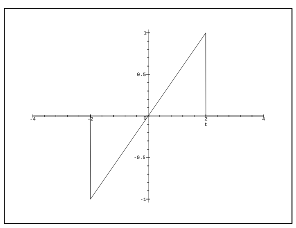


Figura 3

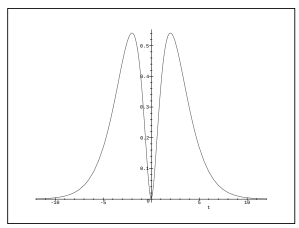


Figura 4: $x(t) = t^2 e^{-|t|}$

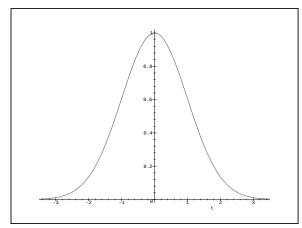


Figura 5: $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

15. Calculeu i representeu gràficament la transformada de Fourier de

    a)
    $$f(t) = \cos\frac{7t}{2}\cos\frac{3t}{2}$$

    b)
    $$f(t) = \cos^2(3t)$$

    c)
    $$f(t) = \cos^2(3t)\cos t$$

16. Calculeu la transformada de la funció triangle: $q_1(t) = t + 1$ si $-1 < t < 0$, $q_1(t) = 1 - t$ si $0 < t < 1$ i $q_1(t) = 0$ altrament, a partir de la transformada de la segona derivada de $q_1(t)$.

17. Representeu gràficament:

    a) La funció $f(t) = 2p_{1/2}(t - 1/2) + p_1(t - 2)$.

    b) $f(t) * (\delta(t) + \delta(t - 3))$.

    c) $f(t) * (\delta(t) + \delta(t - 2))$.

    d) $p_1(t) * f(t)$ (utilitzeu la convolució gràfica)

18. Trobeu l'antitransformada de Fourier de la funció esglaó unitat $u(\omega)$.

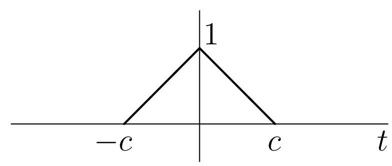
19. Calculeu la transformada de Fourier de $u(t) \cos \omega_0 t$ (vid. transparència 25)

    a) per la propietat de modulació,

    b) utilitzant el teorema de convolució en freqüència.

20. Sigui $q_c(t)$ la funció de la figura.

    Siguin $f(t) = q_c(t + a) + q_c(t - a)$,
    $g(t) = k(\delta(t + a) + \delta(t - a)), \quad a > c > 0.$



    a) Representeu gràficament $f(t)$, $g(t)$, $f(t) * \delta(t - a)$.

    b) Calculeu i representeu gràficament $f(t) * g(t)$.

    c) Sabent que

$$\frac{c}{2\pi} \mathrm{sinc}^2 \left(\frac{ct}{2\pi}\right) \leftrightarrow q_c(\omega),$$

    calculeu la transformada de Fourier de $f(t) * g(t)$.

21. (*)

    a) Calculeu la transformada de Fourier de la funció

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & |t| < a \\ e^{-b|t|} & |t| > a \end{array} \right\} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

    b) Estudieu el comportament per a $a \to 0$ i per a $b \to \infty$, interpretant els resultats obtinguts.

22. Sigui f la funció definida a $\mathbf{R}$ donada per $f(t) = 1 - |t|$ si $0 \leq |t| \leq 1$ i $f(t) = 0$ altrament.

    a) Doneu una funció g tal que $G(\omega) = j\omega F(\omega)$, on $F(\omega)$, $G(\omega)$ són les transformades de Fourier de f i g respectivament.
    Calculeu $G(\omega)$ utilitzant la funció pols rectangular. Deduïu $F(\omega)$.

    b) Quin és el valor de la integral $\int_0^\infty F(\omega) \cos \frac{\omega}{2}\, d\omega$? Justifiqueu la resposta.

    c) Calculeu i representeu gràficament la funció $h(t)$.

    $$h(t) = f(t) * (\delta(t - 1/2) + \delta(t + 1/2))$$

    Quins valors pren $h(t)$ per $t \in [-1/2, 1/2]$?

Solucions Tema 2.3

1. (a) $F(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2 + 1}$ (b) $F(\omega) = \dfrac{1}{\omega - a}$

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2\pi(1+t)}{\pi(1+t)}$

3. $f(t) = \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} + \dfrac{6}{\pi(4+t^2)}$

4. $f(t) = \dfrac{jt}{4} e^{-|t|}$

5.

6. $\dfrac{-2a}{a^2 + \omega^2}$

   (a) $\dfrac{-a}{\pi(a^2 + t^2)}$ (b) $-\dfrac{\pi}{a} e^{a|\omega|}$ (c) $\dfrac{j\omega\pi}{2a} e^{a|\omega|}$ (d) $-\dfrac{jt}{4a} e^{a|t|}$

7. *a*) $\dfrac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega}$

   b) $\dfrac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega} + \dfrac{1 - e^{-(1-j\omega)}}{1 - j\omega}$

   També: $2\,Re\left(\dfrac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega}\right) = \dfrac{2(1 + e^{-1}(\omega \sin \omega - \cos \omega))}{1 + \omega^2}$

   c) $\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1 - e^{-(1+jt)}}{1 + jt} + \dfrac{1 - e^{-(1-jt)}}{1 - jt}\right) = \dfrac{(1 + e^{-1}(t \sin t - \cos t))}{\pi(1 + t^2)}$

d) $(1+e^{j\omega})\,\dfrac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$

e) $j\,\dfrac{(1+jw)je^{-(1+j\omega)}-j(1-e^{-(1+j\omega)})}{(1+j\omega)^2}$

8. *a*)

   b) $4j\dfrac{(1/3)\omega\cos(\omega/3)-\sin(\omega/3)}{\omega^2}$

9. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin bt\cos tx}{t}dt=\pi p_b(x).$$

10.

11. $F(\omega)=2F_c(\omega)=\frac{4}{\omega^3}[\sin\omega-\omega\cos\omega]$

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right]\cos\frac{x}{2}dx=-\frac{3\pi}{16}$$

12. $e=a+c,\ f=b+d.$

13. a) $-\omega$ o $\pi-\omega$ b) 7 c) 4π d) 7π e) $\dfrac{76\pi}{3}$

14. a) $2\pi f(0)$ b) $-2\pi jf'(0)$

    c)

Fig.	Propietats que verifica
1	i, iii, iv
2	iv, v
3	i, iv
4	ii, iii, iv, v
5	ii, iii, v

15. *a*) A partir de $f(t)=\frac{1}{2}(\cos 5t+\cos 2t)$ es té

$$F(\omega)=\frac{\pi}{2}(\delta(\omega+5)+\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)+\delta(\omega-5)).$$

També, utilitzant la propietat de modulació dues vegades

$$1\longrightarrow 2\pi\delta(\omega)\quad\Longrightarrow\quad\cos\frac{7t}{2}\longrightarrow\pi[\delta(\omega+\frac{7}{2})+\delta(\omega-\frac{7}{2})]$$

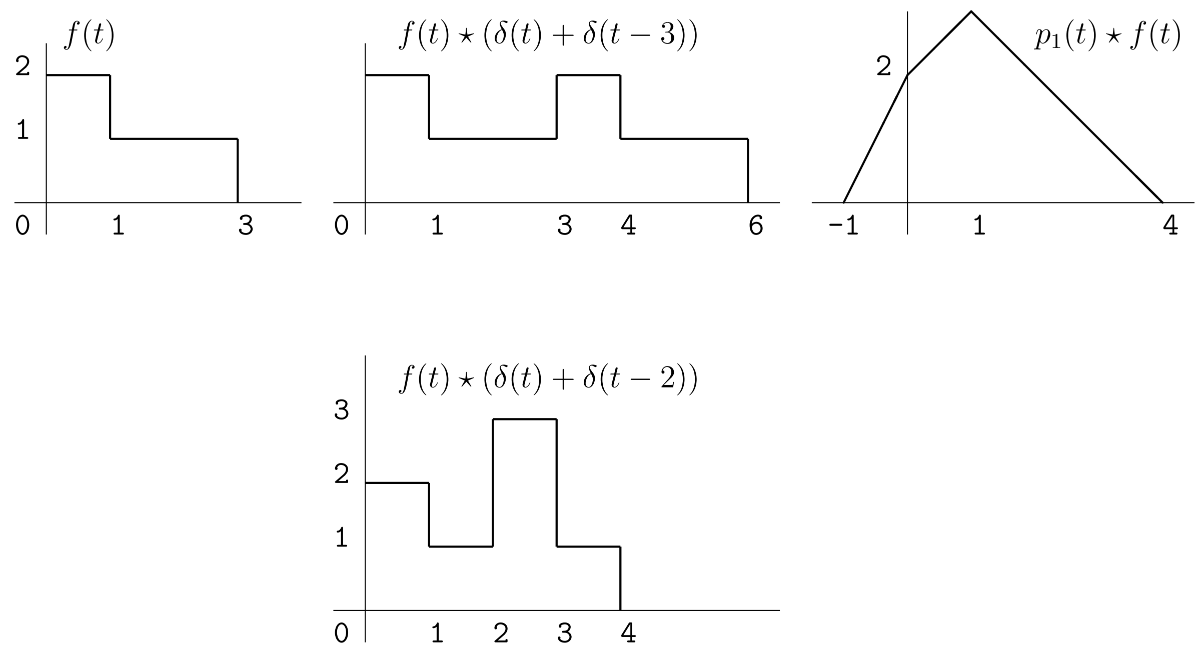
$$\Longrightarrow\quad\cos\frac{7t}{2}\cos\frac{3t}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+5)+\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)+\delta(\omega-5)]$$

b) $\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+6)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-6)]$

c) $\frac{\pi}{4}[\delta(\omega+7)+\delta(\omega+5)+2\delta(\omega+1)+2\delta(\omega-1)+\delta(\omega-5)+\delta(\omega-7)]$

16. $F(\omega) = \dfrac{e^{j\omega}-2+e^{-j\omega}}{-\omega^2} = \dfrac{2\cos\omega-2}{-\omega^2} = \dfrac{4}{\omega^2}\sin^2\omega/2$

17. (a), (b), (d) i (c)



18. $f(t) = \dfrac{\delta(t)}{2} + \dfrac{j}{2\pi t}$

19. $\dfrac{\pi}{2}(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)) + \dfrac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

20. b) $f(t)*g(t) = k(q_c(t+2a)+2q_c(t)+q_c(t-2a))$

c) $f(t)*g(t) \leftrightarrow k\Big(c\,\mathrm{sinc}^2\Big(\dfrac{c\omega}{2\pi}\Big)(e^{-2aj\omega}+2+e^{2aj\omega})\Big) = 4kc\,\mathrm{sinc}^2\Big(\dfrac{c\omega}{2\pi}\Big)\cos^2 a\omega$

21. *a)*

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin a\omega + 2\,\frac{b\cos\omega a - \omega\sin\omega a}{\omega^2+b^2}\,e^{-ab}$$

b) Si $a \to 0$ aleshores $X(\omega) \to \dfrac{2b}{\omega^2+b^2}$.

Si $b \to \infty$ aleshores $X(\omega) \to \dfrac{2}{\omega}\sin a\omega$.

22. *a*) $g(t) = \dfrac{d}{dt} f(t) = p_{1/2}(t + 1/2) - p_{1/2}(t - 1/2)$

$$G(\omega) = \frac{4j}{\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2} = j\omega F(\omega) \qquad \Longrightarrow \qquad F(\omega) = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

b)

$$\int_0^{\infty} F(\omega) \cos \frac{\omega}{2} \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos \frac{\omega}{2} \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j \frac{\omega}{2}} \, d\omega = \pi f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

c) $h(t) = f(t - 1/2) + f(t + 1/2)$