

## CINEMÀTICA

Utilitzeu  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

1. Una capsa es mou sobre una taula. Escollim els eixos de tal manera que Z és perpendicular a la taula i els eixos X e Y formen el pla de la taula. L'origen de coordenades és una de les cantonades de la taula. Respecte a aquest sistema de referència pots veure que la capsa fa un moviment aproximat  $\vec{r}(t) = (4t + 0.2)\vec{i} + 0.5t^2\vec{j} \text{ m}$

- Quina és la trajectòria  $y(x)$  que fa la capsa?
- Quina és la velocitat mitjana durant el primer segon?
- Com es modifica  $\vec{r}$  si el mateix moviment l'analitzes respecte a un origen de coordenades que es troba l'altre extrem de la taula al punt  $\vec{C} = 1.4\vec{i} + 0.6\vec{j} \text{ m}$
- Es modifica la velocitat mitjana durant el primer segon si ho mires des de l'altre extrem?
- Depèn l'acceleració de l'origen de coordenades? És en aquest cas l'acceleració instantànea igual que l'acceleració promig en tot moment?

{Sol: a)  $y(x) = \frac{(x-0.2)^2}{32}$ , b)  $\vec{v} = 4\vec{i} + 0.5\vec{j} \text{ m/s}$ , c)  $\vec{r} = (4t - 1.2)\vec{i} + 0.5t^2 - 0.6\vec{j} \text{ m}$  d) No, e)  $\vec{a} = \vec{j} \text{ m/s}^2$  és constant per tot temps. Igual }

2. El vector posició d'una partícula ve donat per  $\vec{r} = (3t^3)\vec{i} + (40t - t^2)\vec{j}$ , on  $\vec{r}$  s'expressa en metres i  $t$  en segons. Escriuiu els vectors velocitat instantània i acceleració instantània en funció del temps, i calculeu-los a  $t = 5 \text{ s}$ .

{Sol  $\vec{v} = 9t^2\vec{i} + (40 - 2t)\vec{j} \text{ m/s}$ ;  $\vec{a} = 18t\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2$ ;  
a  $t = 5 \text{ s}$ :  $\vec{v} = 225\vec{i} + 30\vec{j} \text{ m/s}$ ;  $\vec{a} = 90\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2$ ;  $|\vec{v}| = 227 \text{ m/s}$ ;  $|\vec{a}| = 90 \text{ m/s}^2$ }

3. Un tir d'un canó segueix una trajectòria descrita per  $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + (20 - 0.5gt^2)\vec{k} \text{ m}$ . Quina és la component tangencial i normal de l'acceleració d'aquest tir parabòlic a l'instant inicial  $t_0 = 0$ , al moment que toca el terra  $t_f$  i a mig camí temporal de la trajectòria  $t_h = t_f/2$ .

{Sol:  $a_c(t_0) = g$ ,  $a_t(t_0) = 0$ ,  $a_c(t_f) = 0.2g$ ,  $a_t(t_f) = 0.98g$ ,  
 $a_c(t_h) = 0.37g$   $a_t(t_h) = 0.93g$ }

4. La posició en el pla del centre de masses d'un cos ve donat per  $\vec{r}(t) = (-2t^2\vec{i} + (12\exp(t) - 12)\vec{j}) \text{ m}$ . Trobeu el mòdul de la velocitat, les components tangencials i normals de l'acceleració i el radi de curvatura al cap de 10 s.

5. L'acceleració d'un coet ve donada per  $a = bt$ , on  $b$  és una constant positiva. Trobeu les expressions que donen la posició i la velocitat del coet en funció del temps i pinteu una gràfica de cada una de les tres magnituds. Calculeu la posició i la velocitat a  $t = 4 \text{ s}$  sabent que  $b = 3 \text{ m/s}^2$  i que  $x_0 = 10 \text{ m}$  i  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ . {Sol a  $t = 4 \text{ s}$ :  $a = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $v = 24 \text{ m/s}$  i  $x = 42 \text{ m}$ }

6. Un coet inicialment en repòs es llança verticalment cap amunt de manera que porta una acceleració de  $20 \text{ m/s}^2$ . Al cap de 25 segons el combustible s'esgota i el coet continua com una partícula lliure fins que torna a arribar a terra. Negligint la fricció amb l'aire, calculeu:

- L'alçada màxima  $h$  a la què ha arribat el coet.
- El temps total  $t$  que el coet ha estat a l'aire.
- La velocitat  $v$  del coet just abans de xocar contra el terra.

{Sol:  $h = 19 \text{ km}$ ,  $t = 2 \text{ min } 18 \text{ s}$  i  $v = 610 \text{ m/s}$ }

7. Un ascensor de 3 m d'alçada puja amb una acceleració d' $1 \text{ m/s}^2$ . Quan està a una certa alçada, la làmpara del sostre es deixa anar. Calculeu el temps que triga a arribar al terra de l'ascensor. {Sol:  $t = 0.75 \text{ s}$ }

8. Una rentadora gira a 15000 r.p.m. Calculeu l'acceleració centrípeta que pateix una samarreta que està girant a 15 cm de l'eix de rotació. Per aconseguir la velocitat de rotació anterior, la rentadora ha accelerat uniformement des del repòs durant 1 min i 15 seg. Quina ha sigut l'acceleració tangencial que ha patit la samarreta durant aquest temps? Quan acaba de centrifugar, el motor s'apaga però el tambor encara fa 12700 voltes abans de frenar degut a la fricció. Quina és l'acceleració tangencial que ha patit la samarreta durant aquest darrer període?

{Sol:  $a_c = 3.7 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$ ,  $a_t = 3.14 \text{ m/s}^2$  i  $a_t = -2.32 \text{ m/s}^2$ }

9. Una partícula es mou en el pla segons la trajectòria  $\vec{r}(t) = (0.4\cos(32t)\vec{i} + 0.4\sin(32t)\vec{j}) \text{ m}$ .

- Demostreu que la partícula descriu un moviment circular.
- Indiqueu el radi de curvatura i el període de la trajectòria.
- Calculeu quin és el vector velocitat i el seu mòdul.
- Calculeu la velocitat angular.
- Calculeu l'acceleració centrípeta.
- Calculeu l'acceleració tangencial.
- Calculeu la posició i l'acceleració de la partícula a l'instant inicial.

10. Una partícula començant del repòs a  $t = 0$  es mou en el pla en una trajectòria circular antihorària de 20 cm de radi amb una velocitat angular  $\omega(t) = 3t^2$  durant un segon i zero a partir d'aleshores. Agafem l'origen de coordenades centrat en la trajectòria de tal manera que inicialment la partícula es troba al punt  $\vec{r} = 0.2\vec{j}$  m.

- Quant val el vector posició en funció del temps  $\vec{r}(t)$ . En quina posició  $\vec{r}_f$  acaba la partícula?
- Calculeu quin és el vector velocitat i el seu mòdul al cap de 500 ms.
- Feu el mateix per l'acceleració. Calculeu també la component tangencial i normal de l'acceleració al cap de 500 ms.

{Sol: a)  $\vec{r} = 0.2 \cos(t^3 + \pi/2)\vec{i} + 0.2 \sin(t^3 + \pi/2)\vec{j}$  m,

$\vec{r}_f = 0.2(-\sin(1)\vec{i} + \cos(1)\vec{j}) = 0.2\hat{u}_r(t=1)$

b)  $\vec{v} = 0.15\hat{u}_t(t=0.5) = 0.15(-\cos(1/8)\vec{i} - \sin(1/8)\vec{j})$  m/s

c)  $a_t = 3 \text{ m/s}^2$  i  $a_n = \frac{18}{160} \text{ m/s}^2$  d'on  $\vec{a} = 3\hat{u}_t(t=0.5) - \frac{18}{160}\hat{u}_r(t=0.5)$  m/s<sup>2</sup>}

11. Amb l'ajuda d'una corda es fa girar amb una velocitat angular constant de 1.18 rad/s un cos d'1 kg en una circumferència vertical d'1 m de radi, el centre de la qual està a 10.81 m per damunt del terra. La corda es trenca quan el cos passa pel punt més baix de la trajectòria. Calculeu el mòdul de la velocitat just abans que el cos xoqui contra el terra.

{Sol:  $v_f = 13.9 \text{ m/s}$ }

12. Es dispara un projectil des de dalt d'un turó de 300 m d'alçada, fent un angle de 30° per sota de l'horitzontal. Determineu el mòdul de la velocitat inicial del projectil per a què impacti sobre un blanc que està situat a una alçada de 0 m i a una distància horitzontal de 119 m del punt de llançament.

{Sol:  $v_o = 20.0 \text{ m/s}$ }

13. Si una bala que surt d'una arma a 250 m/s ha de xocar contra un blanc situat a 100 m i a la mateixa alçada que es troba l'arma, cal que aquesta apunti a un punt per sobre del blanc. Quina distància vertical hi ha d'haver entre el blanc i aquest punt?

{Sol:  $h = 785 \text{ mm}$ }

14. Ens trobem a l'antiga Suïssa, on Guillem Tell està a punt d'intentar insertar una fletxa dins d'una poma situada sobre el cap del seu fill, que es troba a una distància horitzontal  $d$  del pare (que el noi pot variar movent-se dissimuladament). La poma està situada 25 cm per sota del punt de llançament de la fletxa.

La fletxa surt amb una velocitat inicial de 50 m/s amb una inclinació de 30° per damunt la horitzontal i el vent produeix una acceleració horitzontal oposada a la seva velocitat de  $2 \text{ m/s}^2$ .

- Calculeu la distància horitzontal  $d$  a la què s'haurà de col·locar el fill per fer feliç al pare per  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .
- Trobeu l'alçada màxima  $h$  que assoleix la fletxa mesurada des del punt de llançament.

{Sol:  $d = 195 \text{ m}$  i  $h = 31 - 32 \text{ m}$ }

15. Analitzem el llançament de falta en un partit de futbol fent l'aproximació que l'aire no afecta la trajectòria de la pilota. Suposa que vols llançar una falta a una distància de  $l = 19 \text{ m}$  de la porteria. Necessites, però, fer passar la pilota per sobre de la tanca de dos metres d'alçada constituïda per jugadors de l'equip contrari que es col·loquen a nou metres i mig de la pilota. A més a més, vols que la pilota arribi a porteria en un temps  $\tau = 1 \text{ s}$ , més petit que el que triga el porter en reaccionar i aturar-la.

- Troba la velocitat inicial  $\vec{v}_o$  necessària per tal que la pilota passi just per sobre de la tanca i arribi a la porteria en un temps  $\tau$ . Calcula el mòdul de la velocitat inicial  $v = |\vec{v}_m|$  amb dues xifres significatives.
- Troba a quina alçada està la pilota quan passa per sobre de la línia de gol en el cas anterior. És menor que l'alçada d'una porteria (245 cm)? Considera  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .