Ampliació de matemàtiques – Examen FQ – 8 de gener de 2019

Durada: 2 hores

Entregueu els exercicis en fulls separats. Poseu el NOM en MAJÚSCULES en tots els fulls
No es permet l'ús de calculadores ni apunts de cap tipus.
És necessari justificar totes les respostes.

`Problema 1 [2 punts]:` Sabent que la sèrie de Fourier de $f(t) = \pi^2 - t^2$ definida a $[-\pi, \pi]$ és

$$\frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt),$$

calculeu el valor de la suma de la sèries numèriques següents:

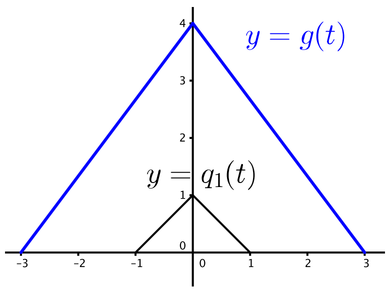
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

`Problema 2 [2,5 punts]:` Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier complexa de

$$f(t) = \cos t, \quad t \in (0, \pi).$$

`Problema 3 [2,5 punts]:` Considereu la funció $g(t)$ que apareix, juntament amb $q_1(t)$ en la figura que segueix.



a) (1 punts) Expresseu $g(t)$ en termes de la funció $q_1(t)$.

b) (0,5 punts) Trobeu la transformada de $g(t)$ sabent que $Q_1(\omega) = \dfrac{4\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$.

c) (1 punts) Dibuixeu $q_1(2(t-1))$. Trobeu la seva transformada.

`Problema 4 [3 punts]:` Sigui $h(t) = p_2(t-1) + p_1(t+1)$.

a) (1,5 punts) Dibuixeu la funció $h(t)$ i $h'(t)$. Calculeu la transformada de Fourier de $h'(t)$.

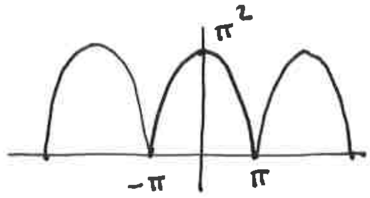
b) (1 punts) Dibuixeu $h(t) * (\delta(t-1) + \delta(t+1))$.

c) (0,5 punts) Mitjançant el mètode de la convolució gràfica, calculeu $h(t) * 3p_2(t)$ en $t = 1$.

PROBLEMA 1

$f(t) = \pi^2 - t^2 \qquad t \in [-\pi, \pi]$

$$SF: \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n\geq 1}{}' \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$



$T = 2\pi$

$\omega_0 = 1$

f parella

a) Calculem $\sum_{n\geq 1}' \frac{1}{n^2}$ pel Th. de Dirichlet. Prenem $t = \pi \Rightarrow \cos n\pi = (-1)^n$

Com que $t=\pi$ és un punt de continuïtat la SF és igual a $f(\pi) = 0$:

$$0 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n\geq 1}{}' \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n$$

$$0 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n\geq 1}{}' \frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 1}{}' \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

b) Calculem $\sum_{n\geq 1}' \frac{1}{n^4}$ aplicant la relació de Parseval.

① $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\pi^4 t - 2\pi^2 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right)_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi^5 - \frac{4\pi^5}{3} + \frac{2\pi^5}{5} \right) = \frac{8\pi^4}{15}$$

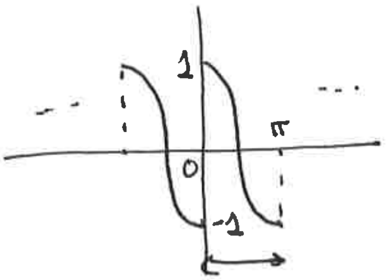
② $$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}{}' a_n^2 = \frac{4\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}{}' \frac{16}{n^4} = \frac{4\pi^4}{9} + 8 \sum_{n\geq 1}{}' \frac{1}{n^4}$$

① = ② $$\Rightarrow \frac{8\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{9} + 8 \sum_{n\geq 1}{}' \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}{}' \frac{1}{n^4} = \left(\frac{8\pi^4}{15} - \frac{4\pi^4}{9} \right) \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi^4}{90}}$$

PROBLEMA 2

$f(t) = \cos t \,,\quad t \in (0,\pi)$



$T = \pi$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \, e^{-j2nt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\, e^{-2jnt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[e^{(1-2n)jt} + e^{-(1+2n)jt}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{(1-2n)jt}}{(1-2n)j}\right]_0^{\pi} + \left.\frac{e^{-(1+2n)jt}}{-(1+2n)j}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\left[\frac{e^{(1-2n)j\pi}-1}{1-2n} + \frac{e^{-(1+2n)j\pi}-1}{-(1+2n)}\right] \overset{(*)}{=}$$

(*) $e^{(1-2n)j\pi} = e^{j\pi}\cdot e^{-2nj\pi} = (-1)\cdot 1 = -1$

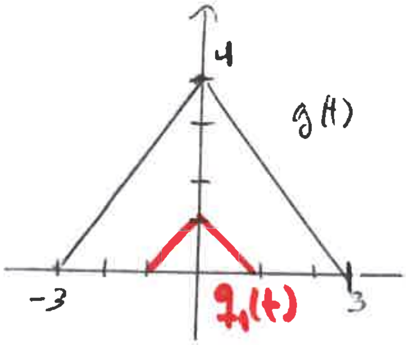
$e^{-(1+2n)j\pi} = e^{-j\pi}\cdot e^{-2nj\pi} = (-1)\cdot 1 = -1$

$$= \frac{1}{2\pi j}\left[\frac{-2}{1-2n} - \frac{-2}{1+2n}\right] = \frac{j}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n}\right) =$$

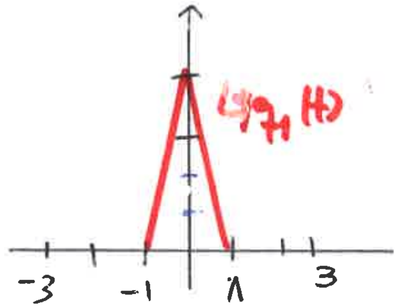
$$= j\,\frac{4n}{\pi(1-4n^2)} \,,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Per tant, SFC: $\boxed{\dfrac{4j}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{n}{1-4n^2}\, e^{2jnt}}$

P3



a) $\Rightarrow$



Falta escala
$\Rightarrow$ en t:

$\Rightarrow g(t) = 4 q_1(t/3).$

b) Trobem $\mathcal{F}\{g(t)\}$: tenim que $\mathcal{F}\{g(t)\} = 4\mathcal{F}\{q_1(t/3)\} = 4\cdot 3\, Q_1(3\omega)$

$$= 4\cdot 3\cdot 4 \sin^2(3\omega/2)/9\omega^2 = 16\,\frac{\sin^2\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{3\omega^2}$$

c) Dibuixem $q_1(2(t-1))$ i calculem $\mathcal{F}\{q_1(2(t-1))\}$.

Fem el càlcul de la transformada primer:

$$\mathcal{F}\{q_1(2(t-1))\} = e^{-j\omega}\mathcal{F}\{q_1(2t)\} = e^{-j\omega}\,\frac{1}{2}\,Q_1\left(\frac{\omega}{2}\right) =$$

$$= e^{-j\omega}\,\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = e^{-j\omega}\,2\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\omega^2/4} =$$

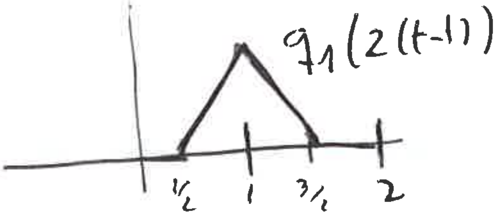
$$= 8e^{-j\omega}\,\frac{\sin^2(\omega/4)}{\omega^2}$$

Per a fer el dibuix hem de veure quan $2(t-1) \in (-1,1)$:

$-1 \leq 2(t-1) \Rightarrow -1 \leq 2t-2 \Rightarrow 1 \leq 2t \Rightarrow t \geq 1/2$

$1 \geq 2(t-1) \Rightarrow 1 \geq 2t-2 \Rightarrow 3 \geq 2t \Rightarrow t \leq 3/2.$

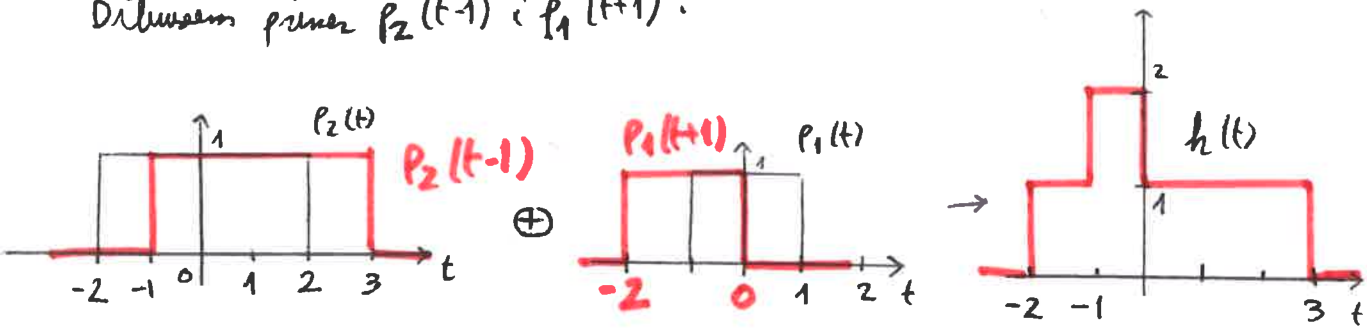
$\Rightarrow$



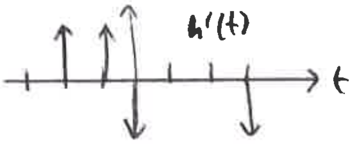
P4 $h(t) = p_2(t-1) + p_1(t+1)$

a) Dibuixar $h(t)$, $h'(t)$ i calcular $\mathcal{F}\{h'(t)\}$.

Dibuixem primer $p_2(t-1)$ i $p_1(t+1)$:



Per tant $h'(t) = \delta(t+2) + \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t-3)$, que té dibuix

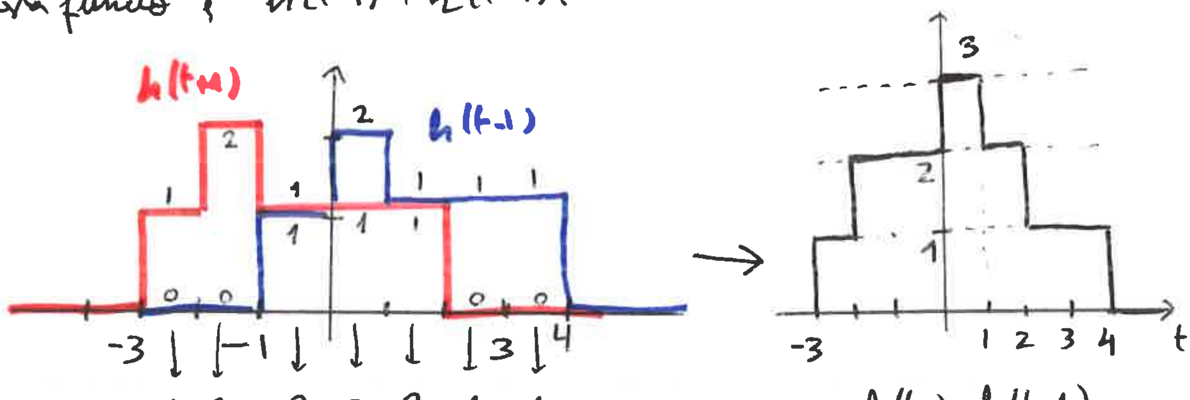


Finalment, $\mathcal{F}\{h'(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t+2)+\delta(t+1)-\delta(t)-\delta(t-3)\}$

$$= \left(e^{j2\omega} + e^{j\omega} - 1 - e^{-j3\omega}\right) = e^{j2\omega} + e^{j\omega} - 1 - e^{-j3\omega}$$

b) Dibuixar $h(t) * (\delta(t-1) + \delta(t+1))$

Aquesta funció és $h(t-1) + h(t+1)$. Per tant:



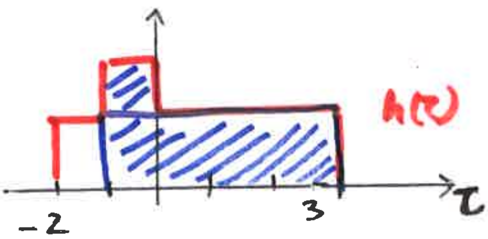
$h(t-1) + h(t+1)$

c) Calcular $h(t) * 3p_2(t)$ en $t=1$.

Calculem $h(t) * p_2(t)$ en $t=1$, i el resultat el multipliquem per 3.

$$h(t) * p_2(t)\Big|_{t=1} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, p_2(1-\tau)\, d\tau \qquad -2 \le 1-\tau \le 2 \Rightarrow \begin{cases} -2 \le 1-\tau \Rightarrow \tau \le 3 \\ 1-\tau \le 2 \Rightarrow \tau \ge -1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ l'àrea és 5 $\Rightarrow$ ho multiplicam per 3 $\Rightarrow$ obtenim $\underline{15}$