Ampliació de matemàtiques – EETAC

Control 1 – 10 d'octubre de 2019

Duració: 1 hora

No es permet l'ús de calculadora ni de formulari. Detalleu i raoneu les vostres respostes. Poseu el vostre nom i cognom a tots els fulls.

Problema 1 [3 punts]: Trobeu el volum delimitat per l'interior del con $x^2 + y^2 = z^2$ i l'interior de l'esfera de radi 1 centrada en l'origen en el semiespai de coordenades $z \geq 0$.

Problema 2 [4 punts]: Sigui C la corba donada per l'equació en el pla cartesià $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$.

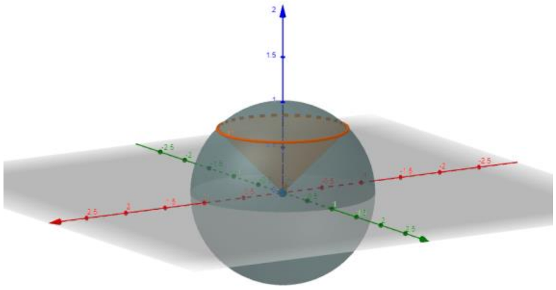
a) [1 punt] Demostra que $\gamma(t) = (\cos t - \sin t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi)$ és una parametrització de C i que la corba és tancada.
b) [1 punt] Expresseu la longitud de C en forma d'integral definida.
c) [2 punts] Sabent que C és una corba simple, apliqueu el teorema de Green per trobar l'àrea del recinte delimitat per C.

Problema 3 [3 punts]: Sigui $\vec{F}(x, y) = (ye^x - e^y, e^x - xe^y)$ un camp vectorial.

a) [1,5 punts] Demostreu que es tracta d'un camp conservatiu.
b) [1,5 punts] Sigui $\sigma(t) = \left(\sqrt{t^6 + 2t + 1}, 2^t - (t-1)\sin t\right)$ per $t \in [0, 1]$, trobeu la integral de línia de $\vec{F}$ sobre σ.

Solució problema 1:

El resolem en coordenades esfèriques. Així, l'esfera esdevé $r \leq 1$ i el con esdevé



$$(r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 \leq (r\cos\varphi)^2$$

$$r^2\sin^2\varphi \leq r^2\cos^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi \leq \cos^2\varphi$$

Que, restringit a $0 \leq \varphi \leq \pi$ (semiespai $z \geq 0$), queda com $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ (també es pot veure directament si ens n'adonem que és un con d'angle $\frac{\pi}{4}$).

Així, i sabent que el Jacobià per les coordenades esfèriques és $r^2 \sin\varphi$, la integral queda com

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{3} d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi\frac{\sin\varphi}{3} d\varphi = \frac{2\pi}{3}[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}$$

Solució problema 2:

a) Efectivament és una parametrització de C, doncs

$$(\cos t - \sin t)^2 + 2(\cos t - \sin t)\sin t + 2(\sin t)^2$$
$$= 1 - 2\cos t\sin t + 2\cos t\sin t - 2(\sin t)^2 + 2(\sin t)^2 = 1$$

Per veure que és tancada, comprovem que $\gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi)$.

b) Com que $\mathrm{Long}_a^b(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$, tenim

$$\mathrm{Long}(\sigma) = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t - \cos t, \cos t)\|\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t}\ dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\sin t\cos t + \cos^2 t}\ dt$$

c) Fent ús del Teorema de Green, sabem que $\text{Àrea}(D) = \left|\frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx\right|$ (el valor absolut és degut a que no sabem l'orientació de la corba, i si aquesta estigués orientada negativament el resultat tindria el signe canviat, com hem vist a teoria). Així, com que

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((\cos t - \sin t)\cos t - \sin t\,(-\sin t - \cos t)\big)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi$$

l'àrea és $|\pi| = \pi$. També és vàlid comprovar abans d'aplicar el Teorema de Green que l'orientació de la corba és positiva per, seguidament, aplicar-lo sense haver de fer la consideració del valor absolut.

Solució problema 3:

a) Com que el domini és connex, podem comprovar que el camp és conservatiu comprovant que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Efectivament,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x - e^y = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Per tant es tracta d'un camp conservatiu.

b) Com que el camp és conservatiu, no importa sobre quina corba integrem mentre comparteixin extrems. Així, podem fer servir una corba més senzilla amb mateix origen i final. Veiem que $\sigma(0) = (1,1)$ i que $\sigma(1) = (2,2)$. Així, podem prendre com a corba $\varsigma(t) = (t,t)$ per $t \in [1,2]$ i calcular

$$\int_1^2 \langle \vec{F}(t,t), (1,1)\rangle dt = \int_1^2 (te^t - e^t + e^t - te^t)dt = \int_1^2 0dt = 0$$