

Apunts de Càlcul

Tema 1. Equacions i gràfiques

Lali Barrière, Josep M. Olm

Departament de Matemàtica Aplicada 4 - UPC

Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació
Enginyeria Telemàtica
EETAC

Continguts

1.1 Rectes

Conceptes bàsics

Equacions de la recta

Propietats de la recta

1.2 Còniques

Introducció

Paràbola

Circumferència

El·ipse

Hipèrbola

Identificació de còniques segons la seva equació

1.3 Funcions elementals

Introducció

Polinomis i funcions racionals

Funcions exponencial i logarítmica

Funció valor absolut

Funcions trigonomètriques i les seves inverses

Conceptes bàsics (I)

- ▶ Una recta està determinada per:
 - ▶ Dos punts.
 - ▶ Un punt i una direcció. La direcció es dóna mitjançant un vector director.
- ▶ Observacions
 1. El vector director d'una recta no és únic: si \vec{v} és un vector director d'una recta r , aleshores $\lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, també és vector director de r .
 2. El vector que uneix dos punts qualssevol d'una recta és un vector director de la recta.
- ▶ Exercici 1. Sigui la recta r que passa pels punts $(1, 3)$ i $(5, 9)$:
 - (a) Dibuixa-la.
 - (b) Troba'n tres vectors directors.
 - (c) Comprova si els punts $(3, 6)$ i $(4, 10)$ són punts de la recta.

Conceptes bàsics (II)

► Observacions (cont.)

3. Si una recta és:
 - ▶ Vertical: els seus vectors directors són de la forma $\vec{v} = (0, v_2)$, $v_2 \neq 0$.
 - ▶ Horizontal: els seus vectors directors són de la forma $\vec{v} = (v_1, 0)$, $v_1 \neq 0$.
4. Quan una recta r no és vertical aleshores admet un vector director de la forma (v_1, v_2) , $v_1 \neq 0$. Per tant, el vector

$$\vec{v} = \left(1, \frac{v_2}{v_1} \right)$$

també és vector director de r .

Exemple. Els vectors $\vec{v} = (2, 6)$ i $\vec{w} = (1, 3)$ són vectors directors de la mateixa recta.

Conceptes bàsics (III)

Definició. Sigui r una recta amb vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $v_1 \neq 0$. Anomenem **pendent** de la recta el nombre

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

- ▶ Notem que $m = \tan \alpha$, on α és l'angle que forma el vector director de la recta r amb el semieix horitzontal positiu.
- ▶ Per tant, el pendent ens dóna idea del grau d'inclinació de la recta.

Exercici 2. Troba el pendent de la recta definida a l'Exercici 1.

Equacions de la recta (I)

- ▶ L'**equació d'una recta** és la relació algebraica, en forma d'equació, que satisfan les coordenades de **tots** els punts de la recta.
- ▶ Tota recta queda perfectament identificada amb la seva equació: un punt satisfà l'equació d'una recta si i només si pertany a la recta.
- ▶ En aquest apartat estudiarem les diverses maneres de donar l'equació d'una recta.
- ▶ En tots els casos suposarem que ens referim a una recta r que passa per un punt (x_0, y_0) i té per vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$. A la vegada, designarem per (x, y) un punt genèric de r .

Equacions de la recta (II)

► Equació vectorial

$$r \equiv (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- **λ** és un **paràmetre**: variant λ anem trobant tots els punts de r .
- **Exemple.** L'equació vectorial de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv (x, y) = (1, 3) + \lambda(4, 6)$$

- **Equació paramètrica.** S'obté separant l'equació vectorial en components:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$$

- **Exemple.** L'equació paramètrica de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \end{cases}$$

Equacions de la recta (III)

- **Equació contínua.** Es troba aïllant λ de l'equació paramètrica, sempre que r no sigui ni vertical ni horitzontal.

$$r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

- **Exemple.** L'equació contínua de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 3}{6}$$

- **Equació punt-pendent.** Si la recta r passa per (x_0, y_0) i té pendent m , la seva equació punt-pendent és

$$r \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **Exemple.** L'equació punt-pendent de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

Equacions de la recta (IV)

- ▶ **Equació explícita.** Es troba aïllant y de l'equació contínua o punt-pendent.

$$r \equiv y = mx + n, \quad \text{on } n = y_0 - mx_0$$

- ▶ D'entre totes les equacions de la recta, només l'explícita és única.
- ▶ **Exemple.** L'equació explícita de la recta de l'exercici 1 és

$$r \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Comprovem que el punt $(5, 9)$ és de la recta

$$9 = \frac{3}{2}5 + \frac{3}{2} \iff 9 = \frac{15}{2} + \frac{3}{2} \iff 9 = \frac{18}{2} \iff 9 = 9 \quad \text{SÍ!}$$

Equacions de la recta (V)

- **Equació implícita.** Es troba a partir de l'equació contínua, punt-pendent o explícita, passant-ho tot a una banda i igualant a zero.

$$r \equiv ax + by + c = 0$$

on:

- $\vec{v} = (-b, a)$ és un vector director de r .
- r passa pels punts $(0, -\frac{c}{b})$ i $(-\frac{c}{a}, 0)$.

Observacions

1. Notem que $\vec{w} = (a, b)$ és un vector perpendicular al vector director de r , això és, a $\vec{v} = (-b, a)$.
 2. L'equació implícita es pot obtenir directament a partir del vector director i un punt.
- **Exercici 3.** Troba l'equació implícita de la recta de l'exercici 1 a partir de la seva equació vectorial.

Propietats de la recta (I)

P1. Per dos punts, (x_A, y_A) i (x_B, y_B) , passa una única recta r . La seva equació és:

$$r \equiv y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

P2. Les equacions dels eixos de coordenades són:

- ▶ Eix vertical: $x = 0$.
- ▶ Eix horitzontal: $y = 0$.

P3. Les equacions de rectes paral·leles als eixos de coordenades són de la forma:

- ▶ $x = c \Rightarrow$ Equació d'una recta vertical, diem que té pendent ∞ .
- ▶ $y = c \Rightarrow$ Equació d'una recta horitzontal, diem que té pendent 0.

Propietats de la recta (II)

P4. Dues rectes de pendents m i m' són:

- ▶ Paral·leles $\iff m = m'$.
- ▶ Perpendiculars $\iff m \cdot m' = -1$.

P5. L'angle format per dues rectes, r i s , es defineix com l'angle del primer quadrant (això és l'angle entre 0 i $\frac{\pi}{2}$) format pels seus vectors directors, \vec{u} i \vec{v} . Axí, designant $\alpha = \angle(r, s)$, tenim que

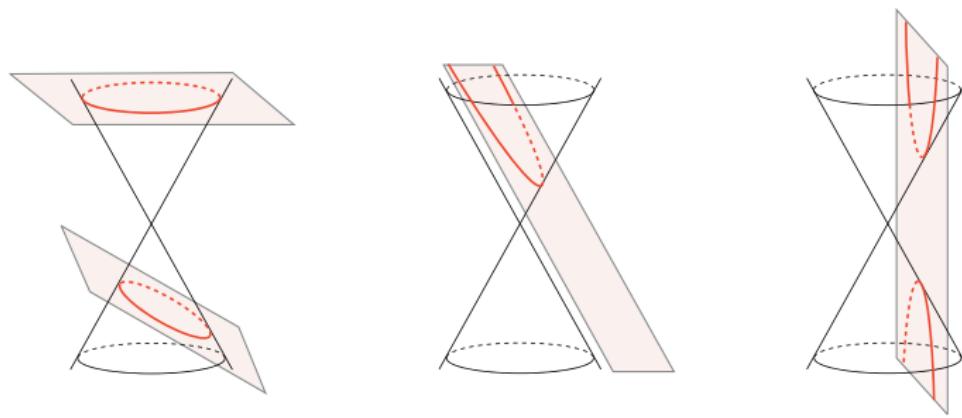
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

on cal recordar que, donats $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, resulta que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \text{i} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Seccions còniques

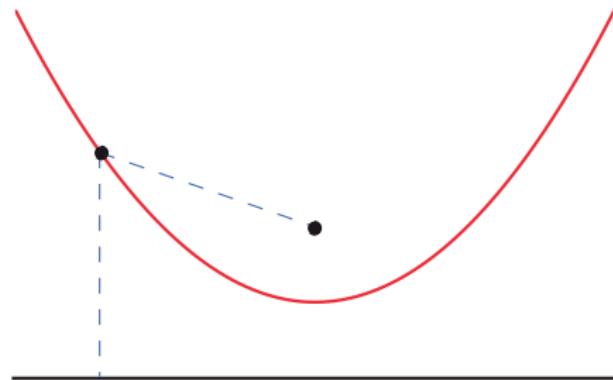
- **Definició geomètrica.** Anomenem **seccions còniques** o, simplement, **còniques**, les corbes del pla que resulten de la intersecció d'un con de revolució amb un pla que no passa pel vèrtex.



- **Definició algebraica.** Anomenem **còniques** les corbes del pla definides per una equació polinòmica de grau 2.

Paràbola

- És el conjunt format per tots els punts del pla que es troben a la mateixa distància d'un punt F , anomenat **focus**, i una recta, coneguda com a **directriu**.



-
- Totes les paràboles tenen un eix de simetria, que és perpendicular a la recta directriu. A la vegada, la paràbola talla l'eix en un punt anomenat **vèrtex**.
 - Considerarem només paràboles amb eix de simetria vertical o horitzontal.

Paràbola d'eix vertical

Equació canònica: $y - n = a(x - m)^2$, amb (m, n) vèrtex.

Equació general: $y = ax^2 + bx + c$.

El paràmetre a ens indica la direcció i l'obertura de la paràbola.

- Eix de simetria:

$$x = m \text{ o } x = \frac{-b}{2a}$$

- Vèrtex:

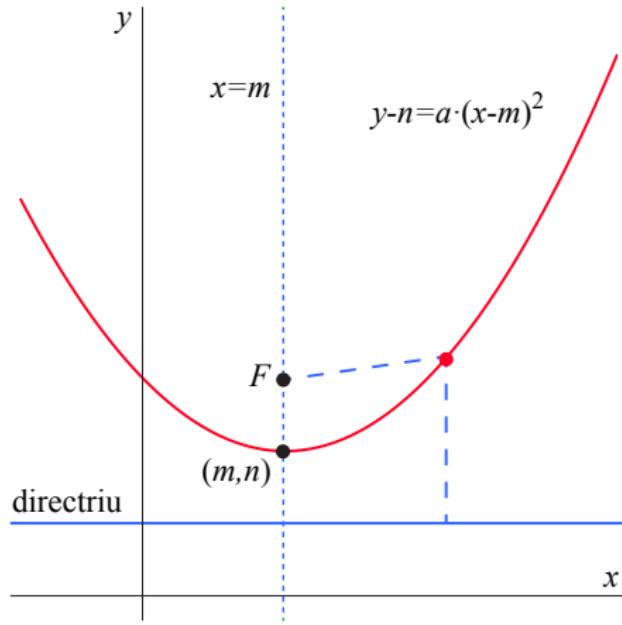
$$(m, n) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right)$$

- Focus:

$$(m, n + \frac{1}{4a})$$

- Directriu:

$$y = n - \frac{1}{4a}$$



Paràbola d'eix horitzontal

Equació canònica: $x - m = a(y - n)^2$, amb (m, n) vèrtex.

Equació general: $x = ay^2 + by + c$

El paràmetre a ens indica la direcció i l'obertura de la paràbola.

- ▶ Eix de simetria:

$$y = n \text{ o } y = \frac{-b}{2a}$$

- ▶ Vèrtex:

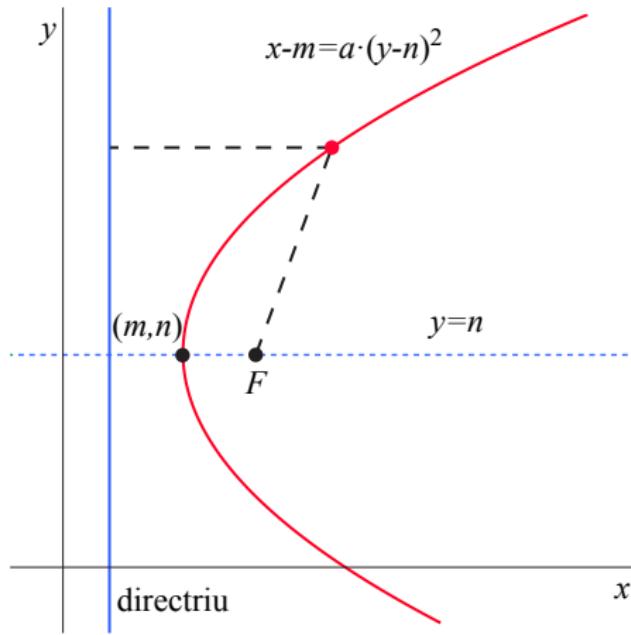
$$(m, n) = \left(-\frac{b^2}{4a} + c, -\frac{b}{2a} \right)$$

- ▶ Focus:

$$\left(m + \frac{1}{4a}, n \right)$$

- ▶ Directriu:

$$x = m - \frac{1}{4a}$$



Paràboles: exercicis

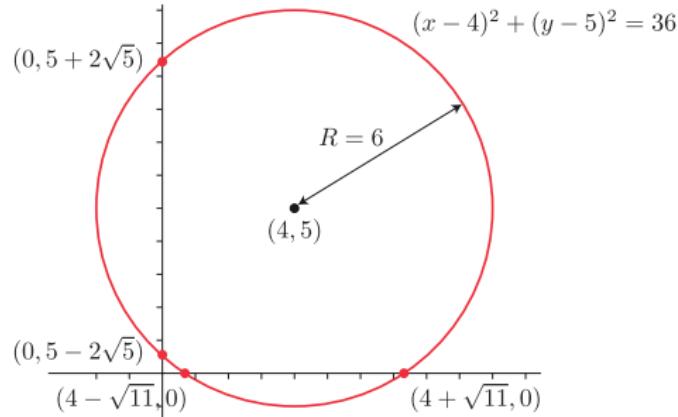
- **Exercici 4.** Determineu els elements principals i representeu les paràboles següents (per fer-ho és recomanable trobar també els punts de tall amb els eixos):
- (a) $y = 2x^2 - 12x + 10$
 - (b) $x = -y^2 + y - \frac{17}{4}$
 - (c) $4x^2 + 8x - 5 - y = 0$

Circumferència (I)

- És el conjunt format per tots els punts del pla que es troben a distància R , el radi, d'un punt (a, b) , el centre.
- Equació canònica de la circumferència de centre (a, b) i radi R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- Exemple. Circumferència de centre $(4, 5)$ i radi $R = 6$:



Circumferència (II)

- Equació general de la circumferència:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- Equivalència amb l'equació canònica:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} A = -2a \\ B = -2b \\ a^2 + b^2 - R^2 = C \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = -\frac{A}{2} \\ b = -\frac{B}{2} \\ R^2 = a^2 + b^2 - C = \frac{A^2 + B^2}{4} - C \end{array} \right\}$$

- Com que R^2 no pot ser negatiu, l'equació defineix una circumferència si i només si

$$\frac{A^2 + B^2}{4} - C > 0$$

Circumferència (III)

► **Observacions.** Equació general: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

1. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C > 0$, l'equació defineix una circumferència de centre $(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$ i radi $R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{4} - C}$.
2. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C = 0$, l'únic punt que compleix l'equació és $(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$.
Podem pensar que es tracta d'una circumferència de radi 0.
3. Si $\frac{A^2+B^2}{4} - C < 0$, no hi ha cap punt que compleixi l'equació.

Circumferència (IV)

- ▶ **Observació.** El pas de l'equació general a l'equació canònica també es pot fer aplicant el mètode de compleció de quadrats.
- ▶ **Exemple.** Estudiem l'equació $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.
Observem que $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ i que $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$.
Per tant:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 2 \end{aligned}$$

L'equació defineix una circumferència de centre $(-1, 2)$ i radi $\sqrt{2}$.

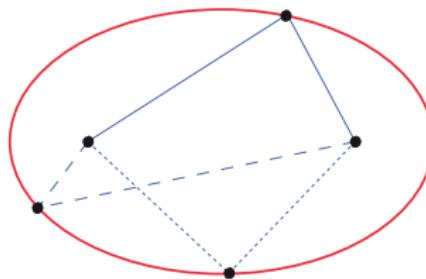
- ▶ **Exercici 5.** Aplica el mateix mètode a les equacions
 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$

Circumferències: exercicis

- **Exercici 6.** Per a cadascuna de les equacions següents, estudia si defineix una circumferència i, en cas afirmatiu, determina'n els elements principals i dibuixa-la. Igual que amb les paràboles, és recomanable trobar també els punts de tall amb els eixos.
- (a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
 - (b) $x^2 + y^2 - 16y + 70 = 0$

El·ipse (I)

- ▶ És el conjunt format per tots els punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts fixats del pla, F i F' , anomenats **focus**, és constant.



- ▶ Totes les el·lipses tenen dos eixos de simetria perpendiculars que es tallen al **centre**. A la vegada, l'el·ipse talla dues vegades cadascun dels eixos de simetria en els punts anomenats **vèrtexs**.

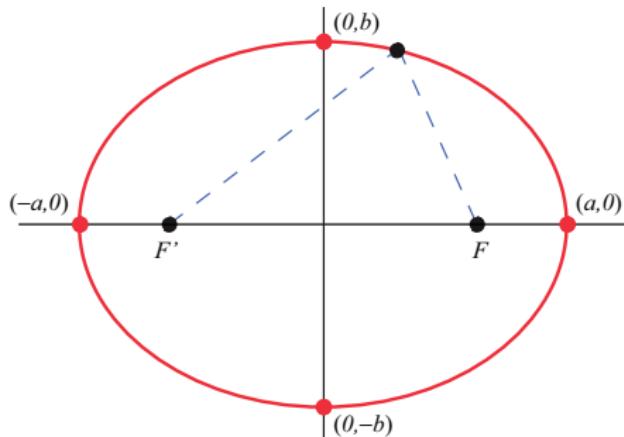
El·lipse (II)

- Equació de l'el·lipse amb centre $(0, 0)$ i eixos de simetria $x = 0$, $y = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els **semieixos** de l'el·lipse.

- Vèrtexs: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.
- Focus, F , F' : $\begin{cases} (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \text{ si } a > b; \\ (0, \pm\sqrt{b^2 - a^2}), \text{ si } a < b. \end{cases}$



El·ipse (III)

- Equació de l'el·ipse amb centre (x_0, y_0) i eixos de simetria $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els **semieixos** de l'el·ipse.

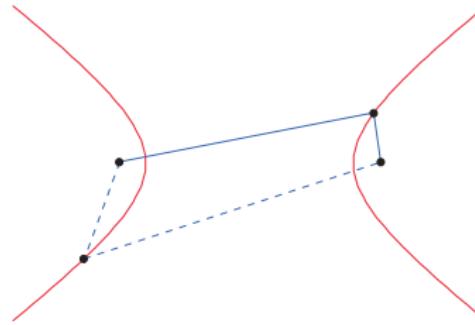
- **Exercici 7.** Representa cadascuna de les el·lipses següents i indica'n els seus elements principals:

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(b) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

Hipèrbola (I)

- És el conjunt format per tots els punts del pla tals que el valor absolut de la diferència de les seves distàncies a dos punts fixats del pla, F i F' , anomenats **focus**, és constant.



- Totes les hipèrboles tenen dos eixos de simetria perpendiculars que es tallen al **centre**. A la vegada, la hipèrbola talla un d'aquests dos eixos, l'**eix real**, en dos punts, anomenats **vèrtexs**. L'altre eix s'anomena **eix imaginari**.
- Totes les hipèrboles tenen dues **asímptotes** obliques que es tallen al centre.

Hipèrbola (II)

- Equació de la hipèrbola amb centre $(0, 0)$ i eixos de simetria $x = 0$ i $y = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{HH})$$

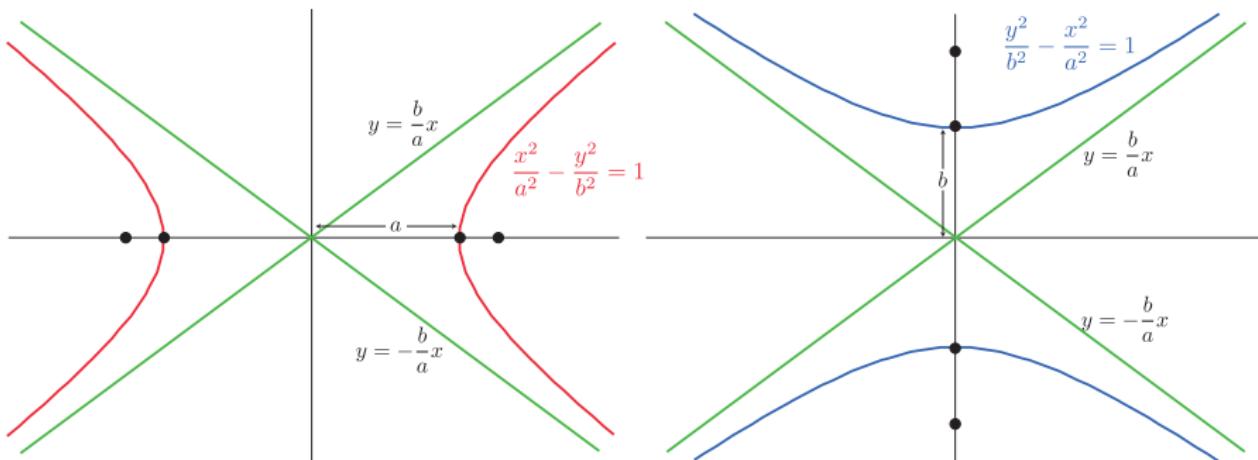
hipèrbola d'eix real horitzontal

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (\text{HV})$$

hipèrbola d'eix real vertical

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els **semieixos** de la hipèrbola.

- En ambdós casos, les equacions de les asymptotes són $y = \pm \frac{b}{a}x$.



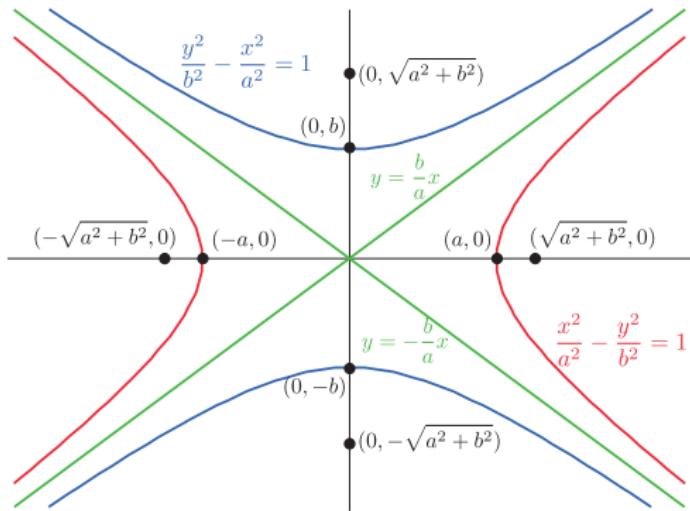
Hipèrbola (III)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (HH)}$$

- ▶ Eixos. Real: $y = 0$; imaginari: $x = 0$.
- ▶ Semieixos. Real: a ; imaginari: b .
- ▶ Vèrtexs: $(\pm a, 0)$
- ▶ Focus: $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
- ▶ Asímptotes: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (HV)}$$

- ▶ Eixos. Real: $x = 0$; imaginari: $y = 0$.
- ▶ Semieixos. Real: b ; imaginari: a .
- ▶ Vèrtexs: $(0, \pm b)$
- ▶ Focus: $(0, \pm \sqrt{a^2 + b^2})$
- ▶ Asímptotes: $y = \pm \frac{b}{a}x$.



Hipèrbola (IV)

- Equació de la hipèrbola amb centre (x_0, y_0) i eixos de simetria $x = x_0, y = y_0$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{HH})$$

o bé

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \quad (\text{HV})$$

on $a, b \in \mathbb{R}^+$ són els **semieixos** de la hipèrbola.

- **Exercici 8.** Representa cadascuna de les hipèrboles següents i indica'n els seus elements principals:

(a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

(b) $5x^2 - 3y^2 - 10x + 12y - 22 = 0$

Hipèrbola equilàtera (I)

- ▶ És una hipèrbola que té els semieixos iguals i, per tant, les asymptotes perpendiculars.
- ▶ Equació de la hipèrbola equilàtera amb centre $(0, 0)$ i eixos de simetria coincidents amb els eixos de coordenades:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{o bé} \quad y^2 - x^2 = a^2$$

- ▶ Equació de la hipèrbola equilàtera amb centre $(0, 0)$ i asymptotes coincidents amb els eixos de coordenades:

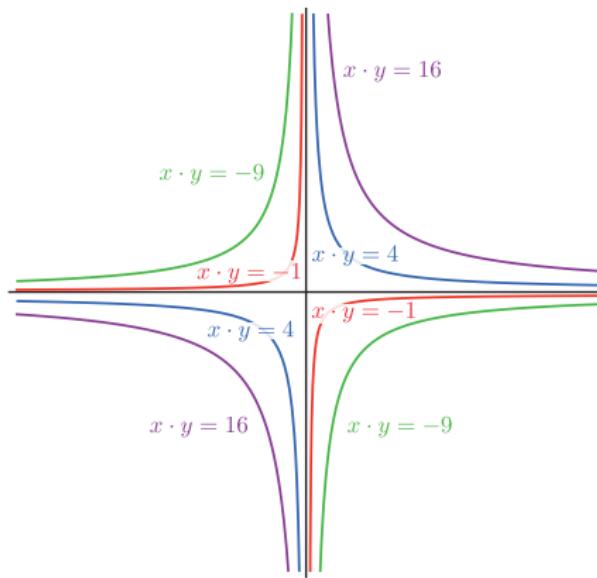
$$xy = c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Si $c > 0$, branques al primer i tercer quadrant.

Si $c < 0$, branques al segon i quart quadrant.

Hipèrbola equilàtera (II)

► Exemple:



► Exercici 9. Representa, identificant els seus elements principals:

(a) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$

(b) $xy = 3$

Identificació de còniques segons la seva equació

Tipus de cònica	Casos	Equació
Paràbola. Només una de les dues variables, x o y , és al quadrat.	Eix vertical Eix horitzontal	$y = a(x - m)^2 + n$ $y = ax^2 + bx + c$ $x = a(y - n)^2 + m$ $x = ay^2 + by + c$
Circumferència. x^2 i y^2 amb el mateix coeficient.	Canònica General o implícita	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
El·ipse. x^2 i y^2 amb coeficients del mateix signe.	Canònica, centre $(0, 0)$ Canònica, centre (x_0, y_0) General o implícita	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $mx^2 + ny^2 + Ax + By + C = 0, \text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
Hipèrbola. x^2 i y^2 amb coeficients de signe contrari.	Canònica, centre $(0, 0)$ Canònica, centre (x_0, y_0) General o implícita	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (HH)}$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (HV)}$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ (HH)}$ $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1 \text{ (HV)}$ $mx^2 + ny^2 + Ax + By + C = 0, \text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$
Hipèrbola equilàtera. Hipèrbola amb $a = b$.	Eix real $y = 0$ Eix real $x = 0$ Asímptotes als eixos	$x^2 - y^2 = a^2$ $y^2 - x^2 = a^2$ $xy = C$

Casos particulars

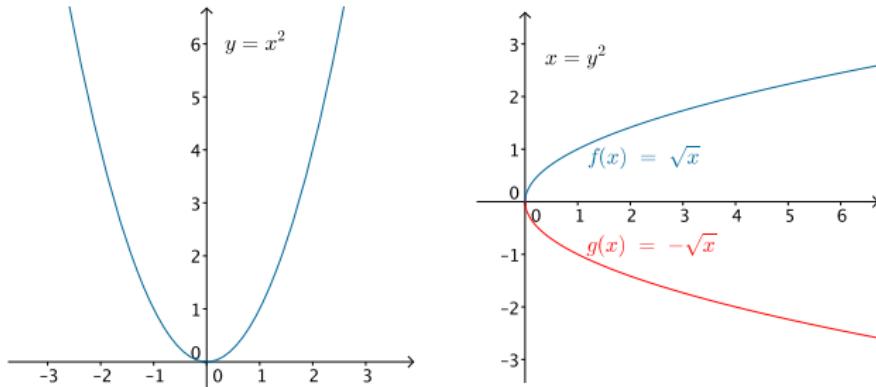
- ▶ Equacions de la forma $mx^2 + ny^2 = 0$.
 - ▶ Si $\text{sign}(m) = \text{sign}(n) \neq 0$, l'únic punt que la satisfà és el $(0, 0)$.
 - ▶ Si $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $m, n \neq 0$, l'equació correspon a un parell de rectes que es tallen a $(0, 0)$.
 - ▶ Si $m = 0$, l'equació és $y^2 = 0$, que equival a $y = 0$, l'eix X .
 - ▶ Si $n = 0$, l'equació és $x^2 = 0$, que equival a $x = 0$, l'eix Y .
- ▶ “Circumferències” de radi 0: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$.
Només el punt (a, b) satisfà l'equació.
Observació. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$ és l'equació del punt (x_0, y_0) .
- ▶ Equacions de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = C$, amb $C < 0$.
La solució és el conjunt buit, ja que cap punt la verifica.
Observació. Cap punt verifica l'equació $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$.

Definició de funció

Una funció $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assigna a cada element x del conjunt A un únic nombre real $f(x)$.

Observació

- ▶ L'equació $y = x^2$ defineix y com a funció de x , per a qualsevol valor real de x .
- ▶ L'equació $x = y^2$ no defineix y en funció de x : per a cada valor de $x \geq 0$ hi ha dos possibles valors de y . Tenim **dues funcions**.
Aïllant y , tenim $y = \sqrt{x}$ o bé $y = -\sqrt{x}$, per a $x \geq 0$.



Domini d'una funció $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

El conjunt A és el conjunt de punts en els quals la funció està definida i s'anomena **domini de f** .

El domini d'una funció $y = f(x)$ pot no estar explícit en la seva definició. Llavors, el domini és el conjunt de punts per als quals la funció existeix, és a dir, es pot calcular.

Exemples

1. $f(x) = \sqrt{x}$ es pot calcular sempre i quan $x \geq 0$. Per tant,
 $Dom f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
2. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x - 2}$ es pot calcular sempre i quan $3x - 2 \neq 0$. Per tant,
 $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.
3. $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$ es pot calcular sempre i quan
 $x^2 - 2x - 3 > 0$. Per tant, $Dom f = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Funcions i domini de funcions: exercicis

Exercici 10.

- ▶ Quines són les dues funcions que defineix l'equació $x^2 + y^2 = 4$? Quin és el seu domini?
- ▶ Quines són les dues funcions que defineix l'equació $2x^2 - y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$? Quin és el seu domini?

Límits de funcions: definició formal

- ▶ Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

- ▶ Límits laterals:

- ▶ Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a , per l'esquerra,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell,$$

si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

- ▶ Diem que ℓ és el límit de la funció $f(x)$ en el punt a , per la dreta,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell,$$

si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Límits de funcions: observacions

- ▶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$:
Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan x s'acosta a a .
- ▶ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$:
Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan $x < a$ s'acosta a a .
- ▶ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$:
Els valors de la funció $f(x)$ s'acosten a ℓ quan $x > a$ s'acosta a a .
- ▶ Si el límit d'una funció $f(x)$ en el punt a existeix, aleshores és únic.
- ▶ El límit d'una funció $f(x)$ en el punt a existeix i val ℓ si:

$$\begin{aligned}\exists \quad & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \\ \exists \quad & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

- ▶ Perquè existeixi el límit d'una funció en un punt, no cal que el punt sigui del domini de la funció.

Límits de funcions: exemples

- ▶ La funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no està definida en $x = 2$. Tot i així, els límits laterals de la funció en el punt 2 existeixen i valen tots dos 4. Per tant, existeix el límit de la funció en el punt 2 i és igual a 4.
- ▶ La funció $f(x) = \frac{|x|}{x}$ no està definida en $x = 0$. Tot i així, els límits laterals de la funció en el punt 0 existeixen.
Com que els límits laterals són diferents, no existeix el límit de la funció.
- ▶ La funció $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ no està definida en $x = 0$. El límit de la funció tampoc existeix, perquè sigui quin sigui el valor de δ que triem, la funció oscil·la entre -1 i 1 infinites vegades en els intervals $(0, \delta)$ i $(-\delta, 0)$.

Càlcul de límits: propietats (I)

1. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$, si $P(x)$ és un polinomi.

Si $a = \pm\infty$, llavors el valor de $P(a)$ és $+\infty$ o $-\infty$, dependent de la paritat del grau del polinomi i del signe del coeficient del terme de grau màxim.

Si existeixen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$:

4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$
6. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Càlcul de límits: propietats (II)

7. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\frac{p}{q}} = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{\frac{p}{q}}$, amb les condicions d'existència següents:
- ▶ Si $p < 0$, aleshores $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$;
 - ▶ si q és parell, aleshores $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.
8. $\lim_{x \rightarrow a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, sempre que $b > 0$.
9. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, sempre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.
10. $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$, sempre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.
11. $\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$, $\lim_{x \rightarrow a} \cos f(x) = \cos(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$.

Límits de funcions: funcions no acotades quan $x \rightarrow a$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$
Diem que el límit de $f(x)$ en el punt a val $+\infty$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$
Diem que el límit de $f(x)$ en el punt a val $-\infty$.

Les definicions són anàlogues per a límits laterals.

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Exemples

- ▶ La funció $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ tendeix a $+\infty$ quan x tendeix a -1 .
- ▶ La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ compleix:
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, i
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Límits de funcions: quan x tendeix a infinit

- Límit de f quan x tendeix a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) > M \\ -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) < M \end{cases}$$

- Límit de f quan x tendeix a $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists K < 0 : x < K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists K < 0 : x < K \Rightarrow f(x) > M \\ -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists K < 0 : x < K \Rightarrow f(x) < M \end{cases}$$

Per al càlcul de límits NO utilitzarem aquesta definició!

Exemple

- La funció $f(x) = e^x$ compleix:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, i

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Regles informals per al càlcul amb infinit

Podem tenir en compte les regles següents:

- ▶ $+\infty + k = +\infty, -\infty + k = -\infty;$
 $\infty - \infty$ és una indeterminació.
- ▶ $k \cdot (+\infty) = +\infty, k \cdot (-\infty) = -\infty$, si $k > 0$, (incloent $k = +\infty$);
 $k \cdot (+\infty) = -\infty, k \cdot (-\infty) = +\infty$, si $k < 0$, (incloent $k = -\infty$);
 $0 \cdot (\pm\infty)$ és una indeterminació.
- ▶ $\frac{k}{0} = \pm\infty$. Cal estudiar en detall el signe.

$$\frac{k}{\pm\infty} = 0.$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$
 i $\frac{0}{0}$ són indeterminacions.
- ▶ $0^k = \begin{cases} 0, \text{ si } k > 0, \text{ (incloent } k = +\infty\text{);} \\ \infty, \text{ si } k < 0, \text{ (incloent } k = -\infty\text{).} \end{cases}$

$$k^{+\infty} = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq k < 1; \\ +\infty, \text{ si } 1 < k, \text{ (incloent } k = +\infty\text{).} \end{cases}$$

 $0^0, \infty^0, 1^\infty$ són indeterminacions.

Exemples

En els exemples següents s'indica el tipus d'indeterminació, i el resultat. Els passos de la resolució es deixen com exercici.

- Indeterminació $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x^2-9} \right) = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-2x} \right) = 1$$

- Indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{\sqrt{2x^4 + 3x^2 + 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

- Indeterminació $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{x^2 - 7x + 6} = -\frac{3}{5}$$

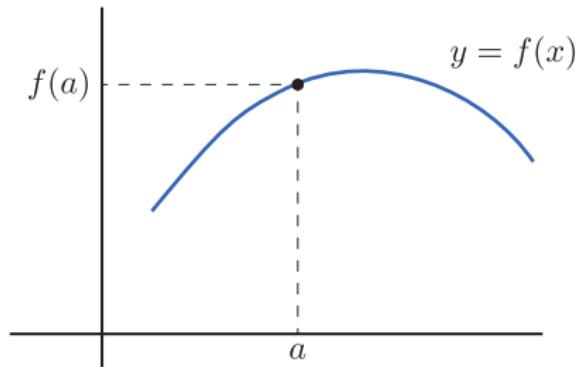
- Indeterminació 1^∞ : $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \sqrt{e}$

Continuïtat de funcions

Una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua en un punt a si existeix el límit de la funció quan x tendeix a a i és igual al valor de la funció en a .

Observació La definició equival a:

- $a \in Dom f$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ i $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$



La gràfica es pot fer d'un sol traç.

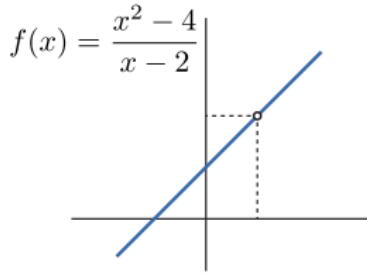
Continuitat de funcions: discontinuïtats (I)

Una funció f presenta una discontinuïtat en un punt a si f no és contínua en a . Hi ha quatre tipus de discontinuïtat:

- ▶ **Evitable.** Existeix el límit de la funció en a , però no és igual a $f(a)$.
- ▶ **De salt.** Els límits laterals de la funció en a són finits i diferents.
- ▶ **Asimptòtica.** Almenys un dels límits laterals és infinit.
- ▶ **Essencial.** Almenys un dels límits laterals no existeix.

Exemples

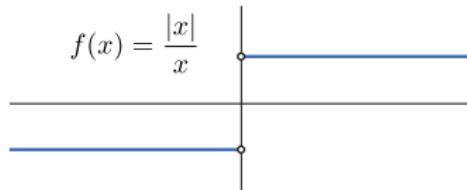
- ▶ La funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ presenta una discontinuïtat evitable en $x = 2$.



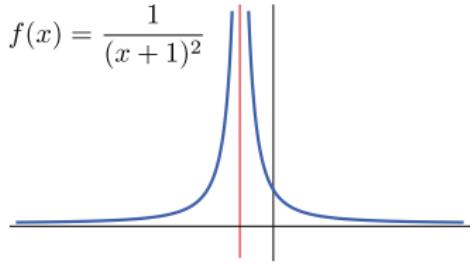
Continuitat de funcions: discontinuïtats (II)

Exemples

- La funció $f(x) = \frac{|x|}{x}$ presenta una discontinuïtat de salt $x = 0$.



- La funció $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ presenta una discontinuïtat asymptòtica en $x = -1$.

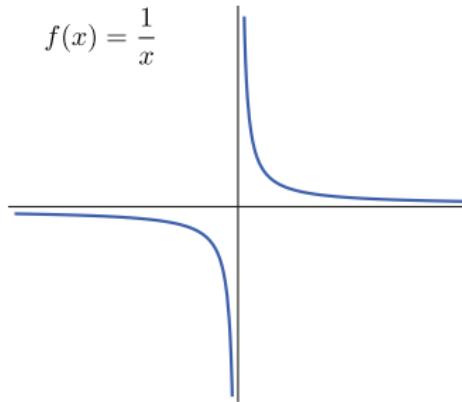


Continuitat de funcions: discontinuïtats (III)

Exemples

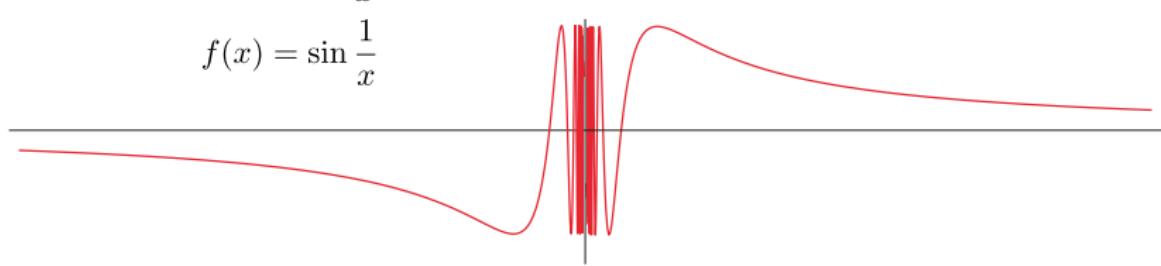
- La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



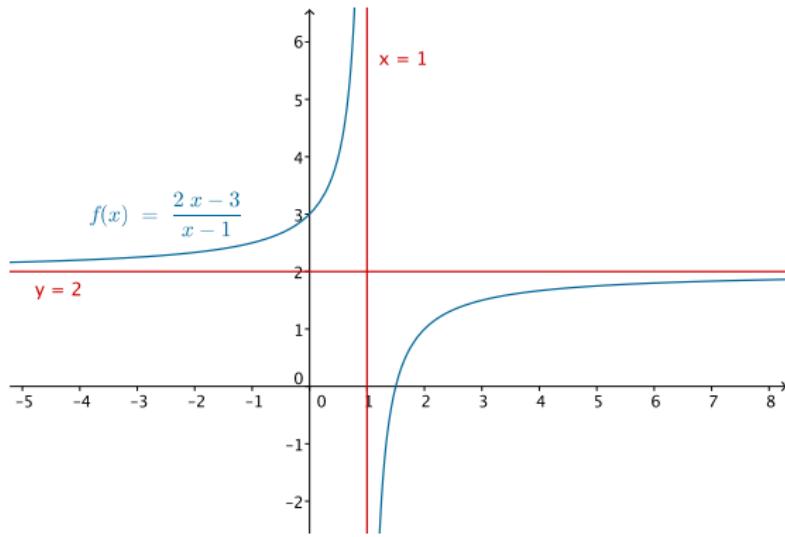
- La funció $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ presenta una discontinuïtat essencial en $x = 0$.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$



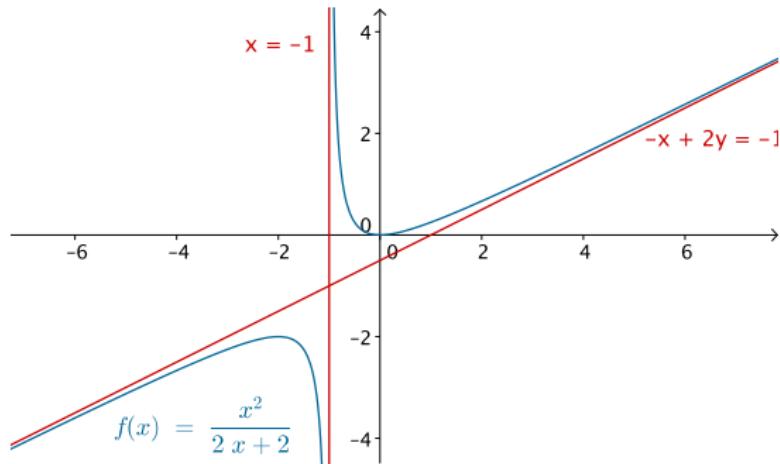
Continuïtat de funcions: asímptotes (I)

- ▶ La recta $x = a$ és una asímptota vertical de la funció f si f té una discontinuïtat asimptòtica en a .
- ▶ La recta $y = c$ és una asímptota horitzontal de la funció f si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ o bé $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.



Continuitat de funcions: asímptotes (II)

- La recta $y = ax + b$ és una asímptota obliqua de f si
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ o bé $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.



Càlcul de a i b : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$.

Anàleg per a $x \rightarrow -\infty$.

Polinomis i funcions racionals

Recordem. Les funcions més senzilles es construeixen a partir de les operacions bàsiques: $+$, $-$, $*$, $/$.

- Un **polinomi (o funció polinòmica)** de grau n , amb $n \in \mathbb{N}$, és una funció $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

amb $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$.

- Una **funció racional** és un quocient de polinomis, és a dir, una funció $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

amb P i Q polinomis.

La funció exponencial (I)

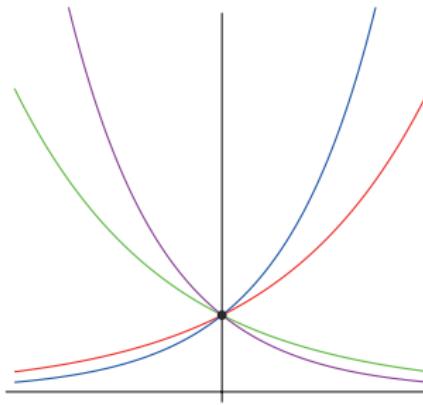
Donat $a > 0$, la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = a^x$ rep el nom de **funció exponencial** de base a .

Sigui $f(x) = a^x$, amb $a > 0$. Es compleix:

- ▶ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- ▶ $\text{Im } f = \mathbb{R}^+$.
- ▶ $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- ▶ Si $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^n$ i $f(-n) = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- ▶ Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ amb $q > 0$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

La funció exponencial (II)

- ▶ Es compleix $f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. A més, $f(x) = a^{-x}$ i $g(x) = a^x$ són simètriques respecte de l'eix vertical.
- ▶ **Exercici 11.** Identifica les funcions $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

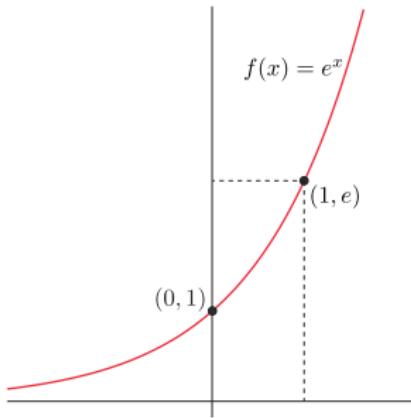


La funció exponencial de base e

- El nombre e es defineix com:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\dots$$

- La funció $f(x) = e^x$ és tal que $f'(x) = f(x)$. Això fa que e sigui la base més utilitzada en funcions exponencials.



La funció logarítmica (I)

Donat $a > 0$, la funció $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ inversa de la funció exponencial de base a , rep el nom de **funció logarítmica** de base a i es denota per $f(x) = \log_a x$.

Observació. El **logaritme en base a de x** , és el nombre y tal que $a^y = x$:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

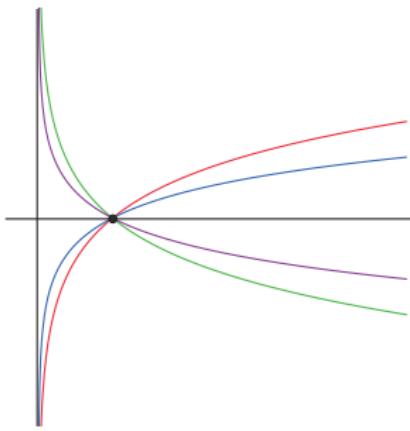
Si $y \in \mathbb{R}$, $a^y > 0$. Per tant, **no existeix el logaritme d'un nombre negatiu**.

Sigui $f(x) = \log_a x$, amb $a > 0$. Es compleix:

- ▶ $\text{Dom } f = \mathbb{R}^+$.
- ▶ $\text{Im } f = \mathbb{R}$.
- ▶ $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.

La funció logarítmica (II)

- ▶ Es compleix $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$. Per tant, $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ són simètriques respecte de l'eix horitzontal.
- ▶ **Exercici 12.** Identifica les funcions $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$:



Logaritmes: notació

- ▶ Els logaritmes en base e reben el nom de **logaritmes naturals** o **logaritmes neperians**, i es solen designar: $\ln x = \log_e x$
- ▶ La notació \log , sense base, se sol reservar per als logaritmes en base 10, $\log x = \log_{10} x$.

Hi ha una certa ambigüïtat en la notació: en alguns àmbits no s'utilitza la notació \ln , i es reserva \log per als logaritmes naturals.

Propietats d'exponentials i logaritmes

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

- ▶ Per la definició de les funcions exponencial i logaritme es compleix:

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1 & \log_a 1 = 0 \\ a^1 = a & \log_a a = 1 \\ a^{\log_a x} = x & \log_a a^u = u \end{array}$$

- ▶ Propietats que relacionen l'exponential i el logaritme amb el producte:

$$\begin{array}{ll} a^{x+y} = a^x a^y & \log_a uv = \log_a u + \log_a v \\ a^{-y} = \frac{1}{a^y} & \log_a \frac{1}{v} = -\log_a v \\ a^{xy} = (a^x)^y & \log_a u^v = v \log_a u \end{array}$$

- ▶ Propietats que relacionen exponentials i logaritmes de bases diferents:

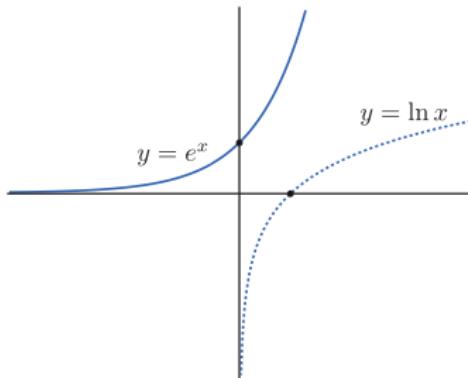
$$(ab)^x = a^x b^x \quad a^x = b^{x \log_b a} \quad \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

Propietats de les funcions exponencial i logarítmica

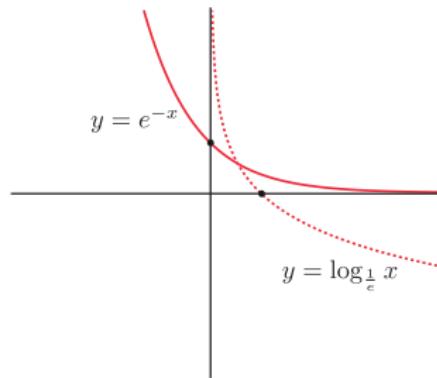
$a > 1$

$a < 1$

- $x < 0 \Rightarrow a^x < 1;$
 $x > 0 \Rightarrow a^x > 1.$
- $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0;$
 $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty;$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$



- $x < 0 \Rightarrow a^x > 1;$
 $x > 0 \Rightarrow a^x < 1.$
- $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0;$
 $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty;$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$

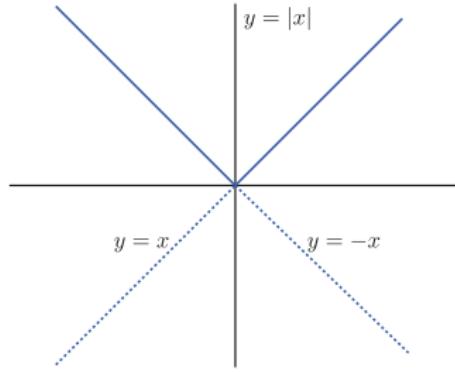


La funció valor absolut

La funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ rep el nom de **funció valor absolut**.

Sigui $f(x) = |x|$. Es compleix:

- ▶ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- ▶ $\text{Im } f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- ▶ $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



Propietats del valor absolut

Siguin $x, y, c \in \mathbb{R}$. Es compleix:

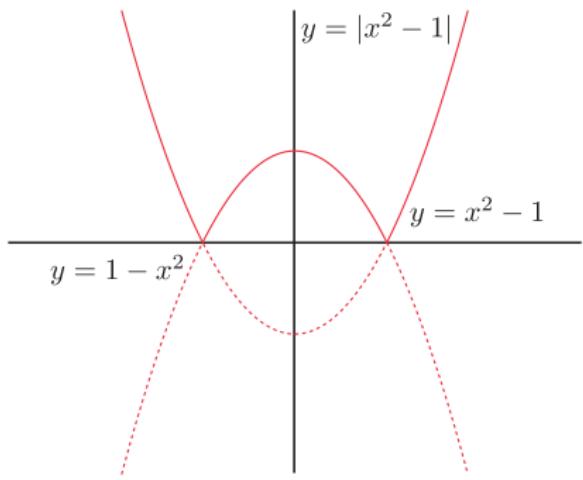
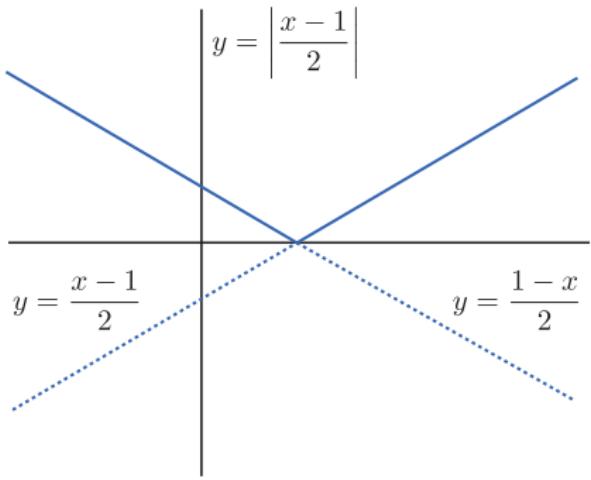
- P1. $|x| = |-x|$
- P2. $|x + y| \leq |x| + |y|$
- P3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- P4. $|x| = c \Leftrightarrow c \geq 0$ i $x = \pm c$
- P5. $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ i $c \geq 0$. Es compleix:

- P6. $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c \Leftrightarrow x \in [-c, c]$
- P7. $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c \Leftrightarrow x \in (-c, c)$
- P8. $|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c$ o bé $x \geq c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$
- P9. $|x| > c \Leftrightarrow x < -c$ o bé $x > c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

La funció valor absolut: representació gràfica

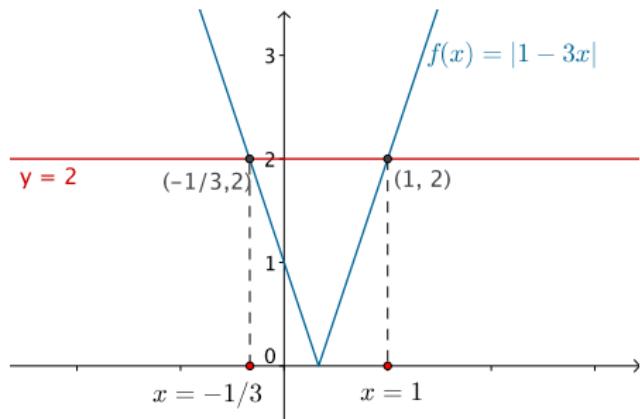
► Exemples



Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (I)

- L'equació $|1 - 3x| = 2$ es resol:

$$|1 - 3x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \\ \text{o bé} \\ 1 - 3x = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



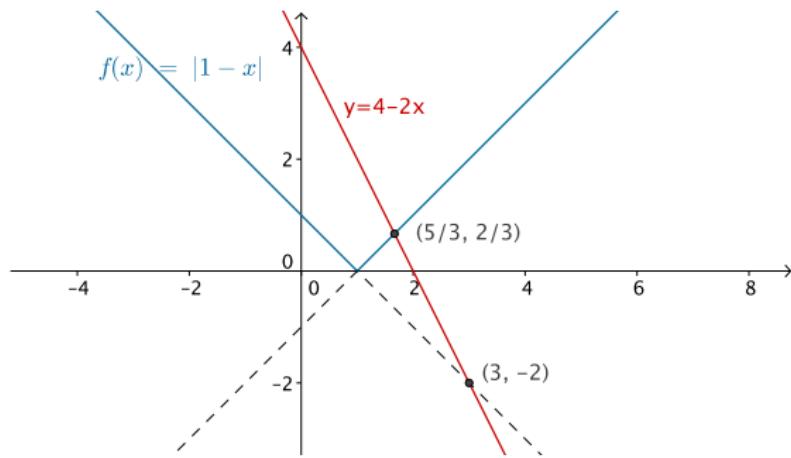
Les solucions de l'equació són els valors de x que la satisfan. Es troben, per tant, sobre l'eix OX .

Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (II)

- L'equació $|1 - x| = 4 - 2x$ s'ha de resoldre tenint en compte que s'ha de complir $4 - 2x \geq 0$:

$$|1 - x| = 4 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 4 - 2x \Rightarrow x = 3 \\ \text{o bé} \\ 1 - x = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ amb } 4 - 2x \geq 0$$

La solució $x = 3$ no compleix la condició, mentre que la solució $x = \frac{5}{3}$ sí que la compleix. Per tant, només hi ha una solució, $x = \frac{5}{3}$.



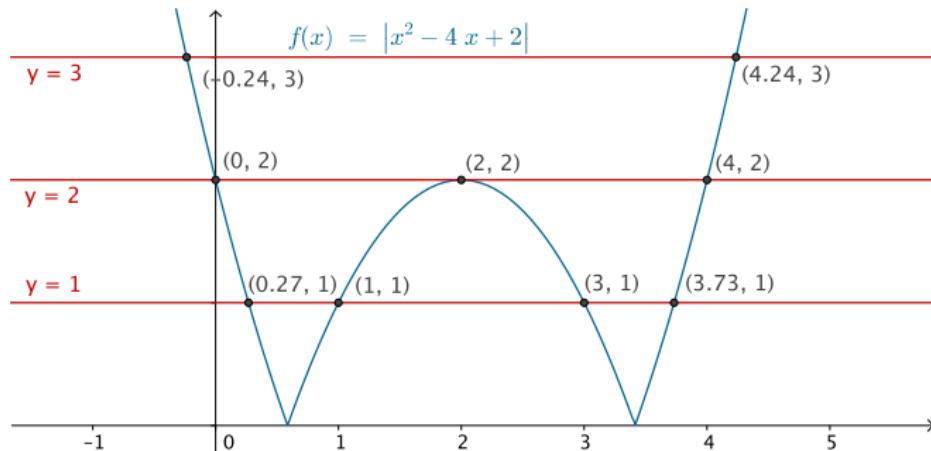
Exemples de resolució d'equacions amb valor absolut (III)

- L'equació $|x^2 - 4x + 2| = 1$ es resol:

$$|x^2 - 4x + 2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \\ \text{o bé} \\ x^2 - 4x + 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3 \end{cases}$$

- Les solucions de $|x^2 - 4x + 2| = 2$ són $x = 0, x = 2, x = 4$.
- Les solucions de $|x^2 - 4x + 2| = 3$ són $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

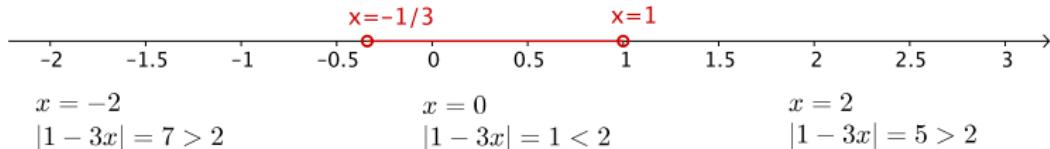


Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (I)

- ▶ Les solucions d'una inequació són un interval o una unió d'intervals.
- ▶ Els extrems dels intervals estan determinats per les solucions de l'equació associada.

Exemple. Resoldre $|1 - 3x| < 2$.

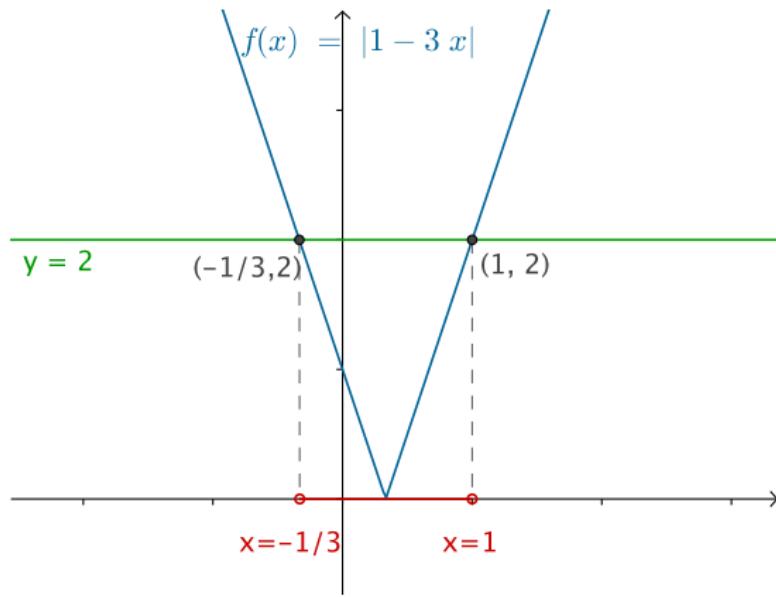
- ▶ Equació associada: $|1 - 3x| = 2$.
- ▶ Hem vist que $|1 - 3x| = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ o bé $x = 1$.
- ▶ Hem d'estudiar en quin(s) dels intervals $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, 1)$ i $(1, +\infty)$, es compleix la desigualtat.



- ▶ La solució de la inequació és: $(-\frac{1}{3}, 1)$.

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (II)

Gràficament



$$|1 - 3x| < 2$$

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (III)

Exemple. Resoldre $|x^2 - 4x + 2| \geq 2$.

- ▶ Equació associada: $|x^2 - 4x + 2| = 2$.
- ▶ Hem vist que $|x^2 - 4x + 2| = 2 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$ o bé $x = 4$.
- ▶ Hem d'estudiar en quin(s) dels intervals $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ i $(4, +\infty)$, es compleix la desigualtat. A més, els punts $x = 0$, $x = 2$ i $x = 4$ són solució.



$$x = -1$$

$$|x^2 - 4x + 2| = 7 > 2$$

$$x = 1$$

$$|x^2 - 4x + 2| = 1 < 2$$

$$x = 3$$

$$|x^2 - 4x + 2| = 1 < 2$$

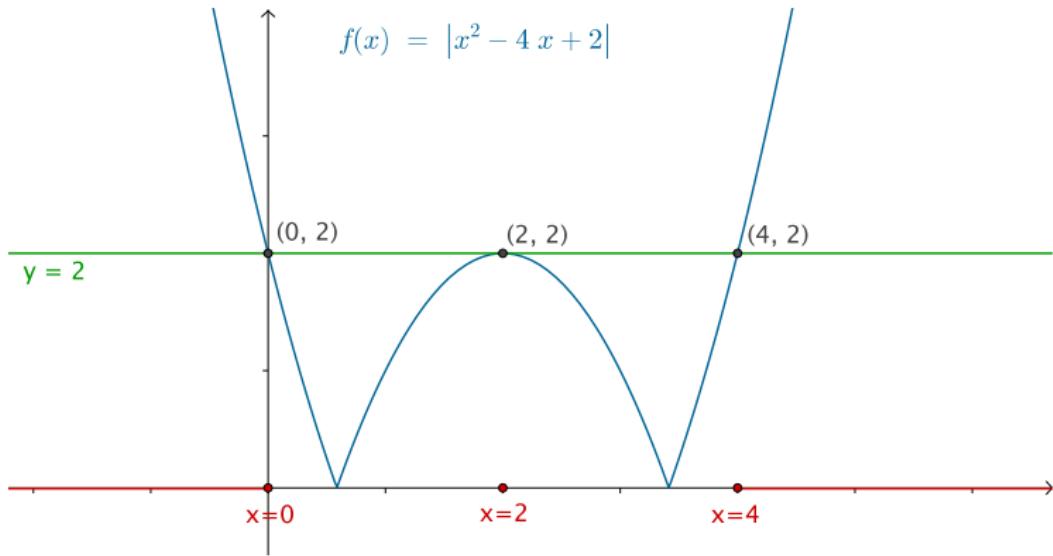
$$x = 5$$

$$|x^2 - 4x + 2| = 7 > 2$$

- ▶ La solució de la inequació és: $(-\infty, 0] \cup \{2\} \cup [4, +\infty)$

Exemples de resolució d'inequacions amb valor absolut (IV)

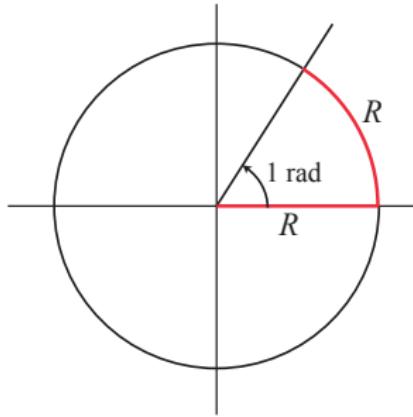
Gràficament



$$|x^2 - 4x + 2| \geq 2$$

Mesura d'angles: radians

- ▶ Diem que l'angle que abasta un arc de circumferència igual al seu radi mesura **1 radient**.
- ▶ Gràficament:

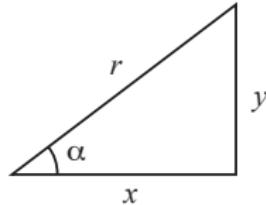


- ▶ Equivalència graus-radians:

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \approx 57.295779^\circ$$

Raons trigonomètriques: angles aguts

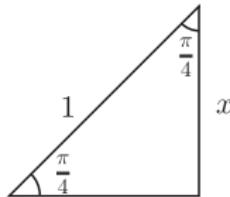
- Relació entre costats d'un triangle rectangle: sinus, cosinus, tangent.



$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

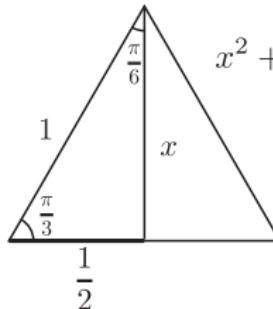
$$r = 1 \Rightarrow \sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x$$

- Raons trigonomètriques dels angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$.



$$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



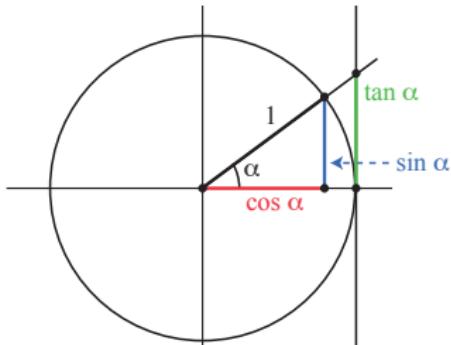
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

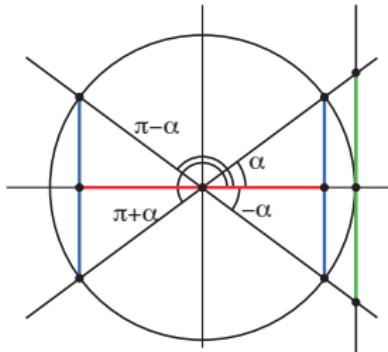
Raons trigonomètriques: angles qualssevol

- Circumferència trigonomètrica: centre $(0, 0)$, radi 1.



Angles conejuts del primer quadrant

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞



Reducció al primer quadrant

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Raons trigonomètriques: propietats

► Fórmules trigonomètriques importants

- ▶ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- ▶ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- ▶ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- ▶
$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{cases}$$
- ▶
$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

► Propietats

- ▶ $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
- ▶ $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- ▶ $-\infty \leq \tan \alpha \leq +\infty$

► Altres raons trigonomètriques: cosecant, secant i cotangent.

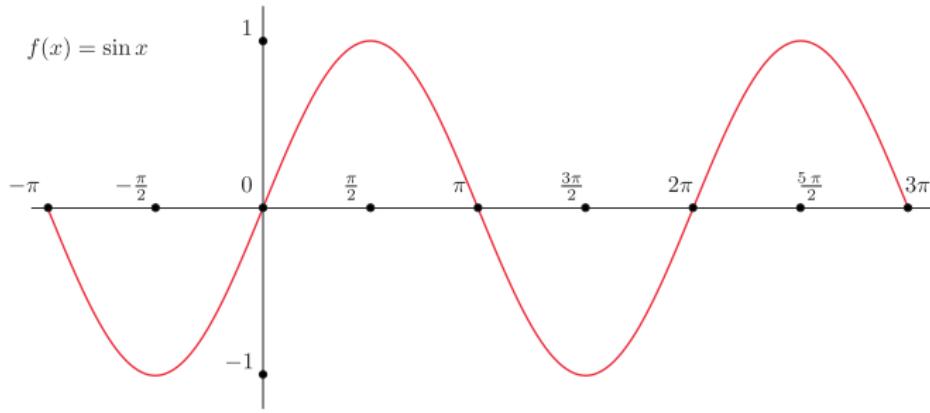
$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Funcions trigonomètriques: la funció sinus

La funció $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \sin x$ rep el nom de funció sinus.

Sigui $f(x) = \sin x$. Es compleix:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- $\text{Im } f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- $f(x)$ és 2π -periòdica.

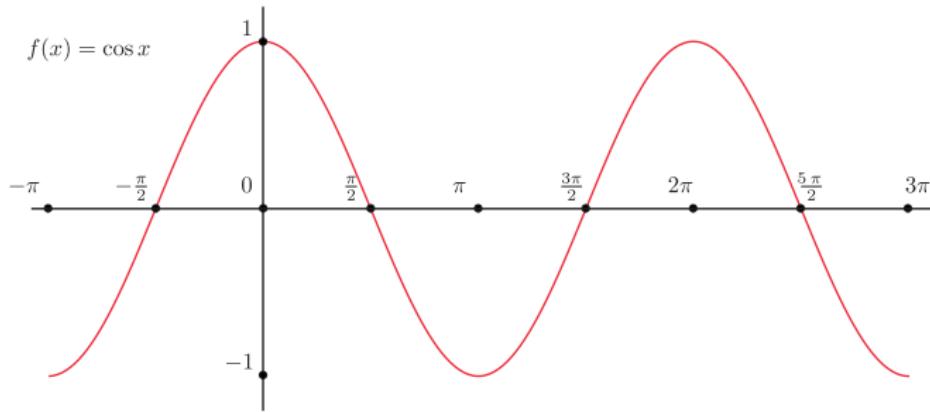


Funcions trigonomètriques: la funció cosinus

La funció $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$ rep el nom de funció sinus.

Sigui $f(x) = \cos x$. Es compleix:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- $\text{Im } f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- $f(x)$ és 2π -periòdica.

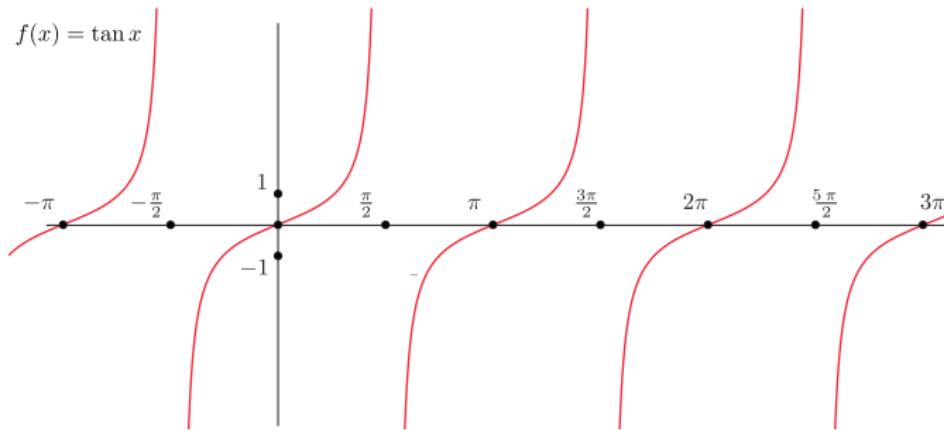


Funcions trigonomètriques: la funció tangent

La funció $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$ rep el nom de **funció tangent**.

Sigui $f(x) = \tan x$. Es compleix:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $\text{Im } f = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ té un conjunt infinit de discontinuitats.
- $f(x)$ és π -periòdica.



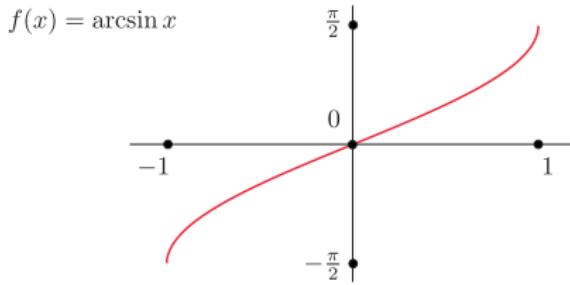
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc sinus

La funció $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ inversa de la funció sinus, rep el nom de funció arc sinus i es denota per $f(x) = \arcsin x$.

Observació. Donat $a \in [-1, 1]$, es defineix l'arc sinus d' a com l'angle $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin \alpha = a$.

Sigui $f(x) = \arcsin x$. Es compleix:

- $\text{Dom } f = [-1, 1]$.
- $\text{Im } f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



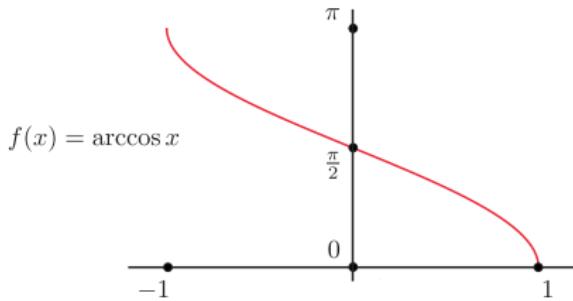
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc cosinus

La funció $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ inversa de la funció cosinus, rep el nom de **funció arc cosinus** i es denota per $f(x) = \arccos x$.

Observació. Donat $a \in [-1, 1]$, es defineix l'**arc cosinus d' a** com l'angle $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = a$.

Sigui $f(x) = \arcsin x$. Es compleix:

- ▶ $\text{Dom } f = [-1, 1]$.
- ▶ $\text{Im } f = [0, \pi]$.
- ▶ $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.



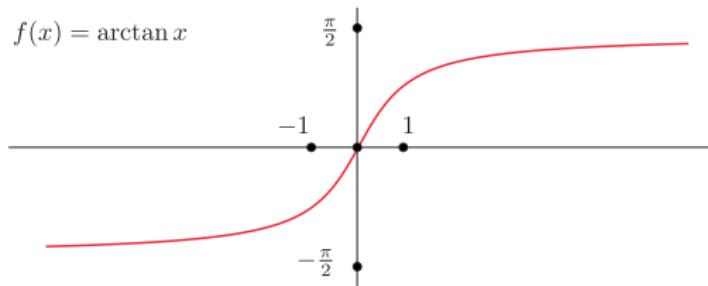
Raons trigonomètriques inverses: la funció arc tangent

La funció $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ inversa de la funció tangent, rep el nom de **funció arc tangent** i es denota per $f(x) = \arctan x$.

Observació. Donat $a \in \mathbb{R}$, l'**arc tangent d'a** és l'angle $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\tan \alpha = a$.

Sigui $f(x) = \arcsin x$. Es compleix:

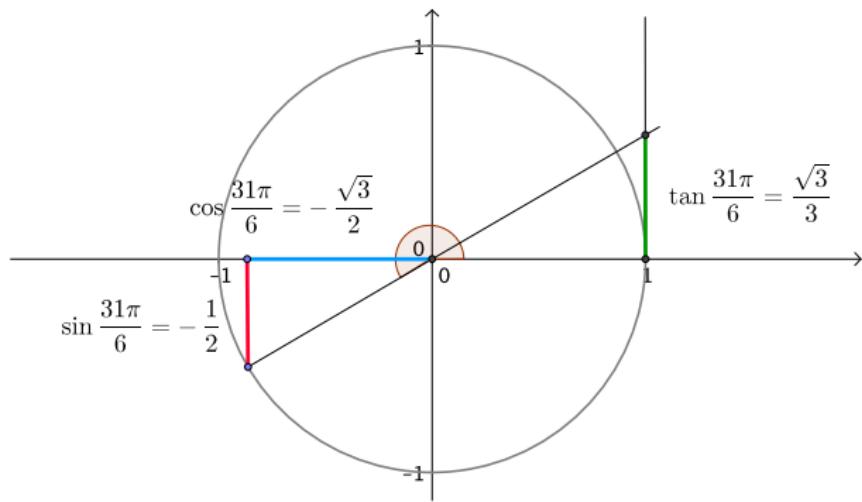
- ▶ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- ▶ $\text{Im } f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- ▶ $f(x)$ és contínua en tot el seu domini.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$



Funcions trigonomètriques: exemples (I)

Exemple. Trobar les raons trigonomètriques de l'angle $\frac{31\pi}{6}$ i representar-les gràficament.

$$\frac{31\pi}{6} = 2 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{31\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{31\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{31\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

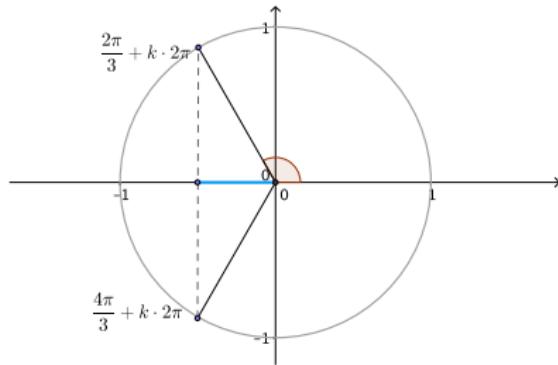


Funcions trigonomètriques: exemples (II)

Exemple. Donar totes les solucions de l'equació $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Els dos angles de la primera volta que compleixen l'equació són $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$. Per tenir totes les solucions, hem d'afegir els angles que s'obtenen al sumar 2π a les dues solucions de la primera volta:

$$x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Observació. L'equació $x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ només té una solució, $x = \frac{2\pi}{3}$.

Funcions trigonomètriques: exemples (III)

Exemple. Sigui $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donar els valors d' α i de les seves raons trigonomètriques principals, i representar-les gràficament.

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \alpha = -1.$$

