Ampliació de Matemàtiques. Enginyeria en Sistemes Aeroespacials i Doble Titulació (EETAC).

Examen de Final de Quadrimestre. 10 de gener de 2020

Cal raonar i desenvolupar adequadament les respostes. La publicació de notes es farà a ATENEA el dia 16 de gener i les revisions tindran lloc el dia 21 de gener a les 9:15 hores al despatx 012 Edifici C3.

1. Sigui $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$

   a) **(0.75 punts)** Justifiqueu que la transformada de Fourier de f és $F(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$.

   b) **(0.75 punts)** Trobeu $(f * p_1)(1)$.

   c) **(0.5 punts)** Trobeu la transformada de Fourier de $(f * p_1)(t)$.

2. Considereu la funció $g(t) = |\sin t|$, per $t \in \mathbb{R}$.

   a) **(1 punt)** Feu un esquema de la seva gràfica a l'interval $[-2\pi, 2\pi]$. Quin és el període natural de g?

   b) **(1 punt)** Sabent que la sèrie de Fourier de $g(t)$ és

   $$S(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1},$$

   trobeu el valor de $S(-\frac{\pi}{2})$.

   c) **(0.5 punts)** Trobeu el desenvolupament en sèrie de cosinus de $g(t)$ per $t \in [0, \pi)$.

   d) **(0.5 punts)** Quin és el coeficient c_0 de la sèrie de Fourier complexa associada a g?

3. **(1.5 punts)** Tenint en compte que

   $$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
   $$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow -\pi j[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)],$$

   calculeu les transformades de Fourier de:

   a) $\cos(t)\cos(2t)$ *b*) $\sin(t)\cos(2t)$ *c*) $\cos^2(t)$

4. Sigui $f(t) = p_2(t) + 2p_1(t-3)$,

   a) **(0.5 punts)** Dibuixeu la gràfica de f.

   b) **(1 punt)** Calculeu $F(\omega)$, la transformada de Fourier f.

   c) **(1 punt)** Sense fer servir l'apartat anterior, raoneu quins són els valors de

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \ \text{ i } \ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega.$$

   d) **(1 punt)** Feu la gràfica de $f(t) * (\delta(t) + \delta(t-2))$.

AMPLIACIÓ DE MATEMÀTIQUES. 10/1/2020

Resolució EXAMEN FINAL DE QUADRIMESTRE.

1) $f(t) = e^{-|t|}$

a) $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-jtw}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+jw)}\, dt$

$+ \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-jw)}\, dt = -\left[\frac{e^{-(1+jw)t}}{1+jw}\right]_0^{+\infty} +$

$+ \left[\frac{e^{(1-jw)t}}{1-jw}\right]_{-\infty}^{0} = \Big[\frac{1}{1+jw} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-t}\cdot e^{-jwt}}_{=0} +$

$+ \frac{1}{1-jw} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{t}\cdot e^{-jwt}}_{=0}\Big] = \frac{2}{1-(jw)^2}$

$= \frac{2}{1+w^2}.$

$-1 \le 1-t \le 1 \iff 0 \le t \le 2$

$1 = p_1(1-t) \ne 0$

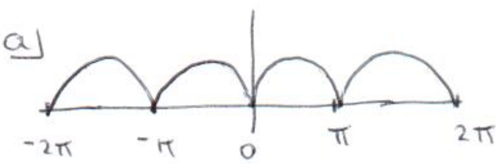
b) $(f * p_1)(1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, p_1(1-t)\, dt \overset{\swarrow}{=} \int_{0}^{2} e^{-|t|}\, dt$

$= \int_0^2 e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^2 = \boxed{1-e^{-2}}$

c) $(f * p_1)(t) \longleftrightarrow F(w)\cdot P_1(w) = \frac{2}{1+w^2}\cdot \frac{2\sin w}{w}$

$= \frac{4\sin w}{w(1+w^2)};$

2) **a)**



la funció $g(t) = |\sin t|$ té període natural $T = \pi$.

b) $g(t)$ té $SFT(f)(t) = S(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

Com que $t = -\frac{\pi}{2}$ és punt de continuïtat, el teorema de Dirichlet implica

$SFT(-\frac{\pi}{2}) = S(-\frac{\pi}{2}) = \left|\sin(-\frac{\pi}{2})\right| = |-1|$

$= 1.$

c) g és una funció parella de període π, per tant, la sèrie de Fouri[...] en cosinus coincideix amb $S(t)$.

d) El coeficient c_0 de la sèrie de Fourier de g és

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin t|\, dt = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{a_0}{2} \longrightarrow \text{de la sèrie de Fourier de } g,\ S(t).$$

3) Fent servir la propietat de modulació:

a) $$\cos t \cdot \cos(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\pi\,[\delta(\omega+1-2)+\delta(\omega-1-2)+\delta(\omega-1+2)+\delta(\omega+1+\ldots$$

$$\cos 2t \longleftrightarrow \pi\,[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)]$$

$$\Rightarrow TF[\cos t \cdot \cos(2t)](\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-1)+\delta(\omega-3)+\delta(\omega+1)+\delta(\ldots$$

b) $$\sin t \cdot \cos(2t) \longleftrightarrow -\frac{\pi j}{2}[\delta(\omega+2-1)+\delta(\omega-2-1)-\delta(\omega+2+1)\ldots \delta(\omega-2+1)\ldots$$

$$\sin t \longleftrightarrow -\pi j\,[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]$$

$$\Rightarrow TF[\sin t \cdot \sin(2t)](\omega) = -\frac{\pi j}{2}[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)-\delta(\ldots$$

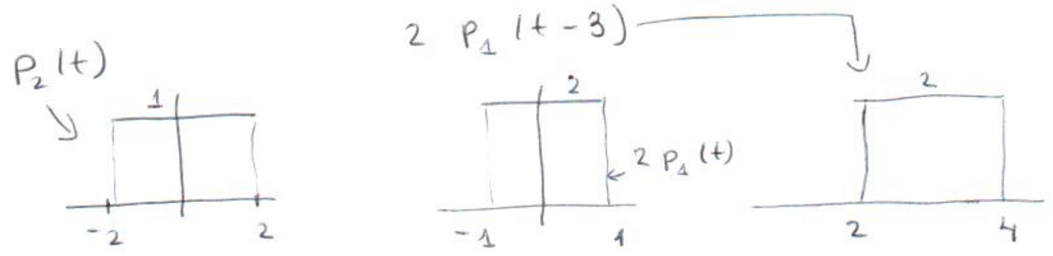
c) $$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\Rightarrow TF[\cos^2 t](\omega) = TF\left[\frac{1}{2}\right](\omega) + TF\left[\frac{\cos 2t}{2}\right](\omega)$$

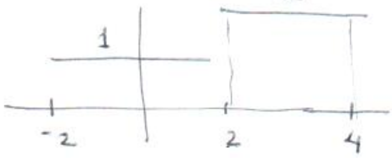
$$= \frac{1}{2}\,2\pi\,\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right)$$

$$= \pi\left[\delta(\omega) + \frac{\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)}{2}\right]$$

4) a)



gràfica de $P_2(t) + 2\,P_1(t-3)$



b) $$F(w) = P_2(w) + 2\,P_1(w)\,e^{-3jw} =$$

propietat de linealitat i traslació

$$= 2\,\frac{\sin 2w}{w} + 4\,\frac{\sin w}{w}\,e^{-3jw}$$

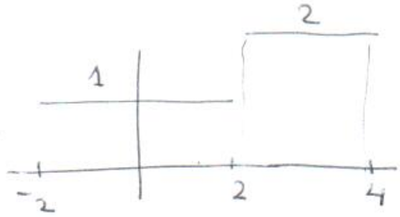
c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 = 8 = F(0)$$

àrea sota la gràfica de f.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,dw = f(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,dw = 2\pi\cdot f(0) = \boxed{2\pi.}$$

d) $$f * \big(\delta(t) + \delta(t-2)\big) = f(t) + f(t-2)$$

f(t)



$\oplus$

f(t-2)