Ampliació de Matemàtiques QP 2020-2021. Grup 2A3

Control 2. Sèries de Fourier

---

1. **(2 punts)** Calcula la suma de la sèrie
$$\sum_{n\geq 3} 2e^{-n}$$

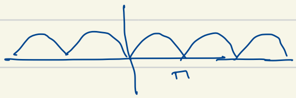
$$\sum_{n\geq 3} 2e^{-n} = \sum_{n\geq 3} 2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^3}{1-\frac{1}{e}} = \frac{2}{e^2(e-1)}$$

2. **(4 punts)** Calcula la sèrie de Fourier complexa de la funció $f(t) = e^t$, amb $t \in (-\pi, \pi]$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\cdot e^{-jkt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(1-jk)}}{1-jk}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{1-jk}\cdot(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

Sèrie: $$f(t) \simeq \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-jk}e^{jkt}$$

3. **(4 punts)**
Sabent que la sèrie de Fourier de la funció $f(t) = |\sin t|$ és
$$|\sin t| \simeq \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$
calcula les sumes:
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} \quad \text{i} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$



$T=\pi$

Contínua.

Dirichlet amb $t=0$: $$\overbrace{|\sin 0|}^{0} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}\overbrace{\cos 0}^{1}$$

$$-\frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{a_0}{2}$$

Parseval: $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}\,\frac{16}{\pi^2}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$