

Anàlisi de Fourier

J. Luis A. Yebra, 2004

Traducció: Cristina Dalfó

Revisió setembre 2011: Cristina Dalfó, Margarida Espona

Revisió juliol 2013: Cristina Dalfó

Índex

1	Introducció: funcions periòdiques	3
2	Sèries numèriques	4
2.1	Successions	4
2.2	Límit d'una successió	5
2.3	Sèries. Convergència	7
2.4	Sèries de termes positius	9
2.5	Sèries alternades	12
3	Desenvolupament en sèrie de Fourier trigonomètrica	14
3.1	Coeficients de Fourier	14
3.2	Canvi de període	16
4	Desenvolupaments en sèrie de sinus i en sèrie de cosinus	18
4.1	Funcions parelles i senars	18
4.2	Desenvolupaments en sèrie de funcions parelles i senars . .	19
4.3	Descomposició parella + senar	20
4.4	Desenvolupaments en sèrie sinus i en sèrie cosinus	23
5	Convergència de la sèrie de Fourier	24
5.1	Convergència puntual	24
5.2	Fenomen de Gibbs	26
5.3	Aproximació en mitjana quadràtica	26
5.4	Desigualtat de Bessel i igualtat de Parseval	28

6	Sèrie complexa de Fourier	29
7	Espectre d'una funció	32
8	De la sèrie de Fourier a la transformada de Fourier	33
9	La transformada de Fourier	35
10	Propietats de la transformada de Fourier	37
10.1	Propietats bàsiques	37
10.2	Transformada de funcions reals	41
10.3	Transformacions sinus i cosinus	43
10.4	Identitat de Parseval	44
11	El producte de convolució	45
12	Funcions generalitzades	47
12.1	La funció generalitzada δ	47
12.2	Transformació de funcions periòdiques	49
12.3	Transformada d'un tren de deltes	50
12.4	Transformada de $u(t)$	51
13	Les quatre transformacions de Fourier	53
14	La transformada discreta de Fourier	54

1 Introducció: funcions periòdiques

L'anàlisi de Fourier estudia la descomposició de funcions en les funcions periòdiques més elementals que són les sinusoidals. Això té sentit per a funcions periòdiques o per a funcions definides en un interval mitjançant el desenvolupament en Sèrie de Fourier, però també pot interpretar-se així per a funcions no periòdiques definides a tot \mathbb{R} , mitjançant la Transformada de Fourier.

El concepte de *periodicitat* està associat a la repetició regular, és a dir, a la repetició amb una cadència fixa. Per exemple, si ens fixem en el darrer dígit de les potències successives de 3, trobarem la seqüència

3 9 7 1 3 9 7 1 3 9 7 1 3 9 7 1 3 ...

en la qual es repeteix indefinidament el bloc 3 9 7 1. Alternativament, aquesta periodicitat es manifesta en el fet que el dígit que ocupa un lloc qualsevol, k , coincideix amb els que ocupen els llocs $k+4$, $k+8$, etc. Moltes tessellacions també manifesten un comportament periòdic, on un bloc (o rajola) es repeteix contínuament. El mateix passa amb el bloc “dilluns, dimarts, ..., diumenge” del nostre calendari, que es va repetint indefinidament, de manera que si un dia és dimarts també ho serà després de 7 o 14 dies. Concretament la definició per a funcions de variable real que són les úniques que estudiarem aquí.

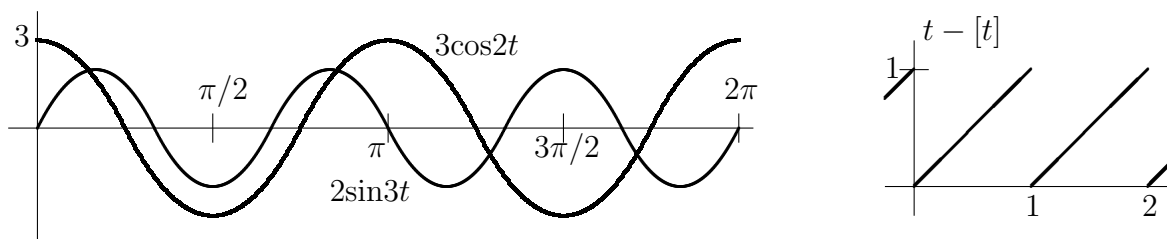
Definició 1 Una funció f definida en \mathbb{R} és **periòdica** amb **període** T si es verifica $f(t+T) = f(t)$ per a qualsevol $t \in \mathbb{R}$.

Si f és periòdica amb període T , també ho és amb períodes $2T$, $3T$ i en general nT per a qualsevol enter n . Al menor de tots els períodes (positius) se l'anomena *període fonamental*, però és habitual anomenar-lo simplement com el període de la funció. Una funció periòdica amb període fonamental T queda definida pels seus valors en qualsevol interval de longitud T , i també es denomina període a aquest interval.

Exemple 1.1. Les següents funcions són periòdiques amb el període fonamental indicat:

- (A) $\sin t$, $T = 2\pi$; (B) $3\cos 2t$, $T = \pi$; (C) $2\sin 3t$, $T = 2\pi/3$;
 (D) $\cos \pi t$, $T = 2$; (E) $\tan t$, $T = \pi$; (F) $t - [t]$, $T = 1$.

En la darrera, $[t]$ és la part entera de t , és a dir, el nombre enter més gran que sigui menor o igual que t . Per exemple, $[\pi] = 3$ i $\pi - [\pi] = 0,141592\dots$. Com que $[t+1] = [t] + 1$, tenim $(t+1) - [t+1] = t - [t]$ i la funció $f(t) = t - [t]$ és periòdica amb període 1.



Funcions periòdiques

La suma de funcions periòdiques amb el mateix període també és una funció periòdica amb aquest període, perquè

$$(f + g)(t + T) = f(t + T) + g(t + T) = f(t) + g(t) = (f + g)(t).$$

La suma de funcions periòdiques amb períodes diferents no és necessàriament una funció periòdica. Només ho és quan el quocient entre els períodes és un nombre racional. Així, $\sin 3t + \cos(t/2)$ és una funció periòdica (amb període fonamental 4π), mentre que $\sin t + \cos \pi t$ no és cap funció periòdica.

Particularitzem per al cas $T = 2\pi$. Com que les funcions $\cos t$ i $\sin t$ tenen període (fonamental) 2π , les funcions $\cos nt$ i $\sin nt$ tenen període fonamental $2\pi/n$ per a qualsevol nombre enter n i, aleshores, també tenen període 2π . Per tant, el conjunt de funcions $\{\cos nt, \sin nt : n \in \mathbb{N}\}$ està compost per funcions periòdiques amb període 2π . Afegint la funció constant $f(t) \equiv 1$, que admet qualsevol període, obtenim un conjunt bàsic de funcions periòdiques amb període 2π . Podem crear-ne d'altres sumant-les entre elles o, amb més generalitat, formant combinacions lineals:

$$\frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + \sum_{n=1}^N b_n \sin nt$$

amb coeficients arbitraris (la justificació de designar $a_0/2$ al primer coeficient es veurà posteriorment).

Així obtenim un conjunt considerable de funcions, però no és possible obtenir *qualsevol* funció periòdica amb període 2π . Només cal que observem que, en tractar-se de combinacions lineals de funcions contínues, d'aquesta forma només podem obtenir funcions contínues. Tanmateix, no estem gaire lluny de l'afirmació fonamental de Fourier que, formulada de manera encara imprecisa, va ser: “*Si que és possible quan $N \rightarrow \infty$* ”. És a dir, “qualsevol” funció periòdica de període 2π admet un *desenvolupament en sèrie* de la forma

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

amb coeficients a_n, b_n adequats.

A la secció 3 i les següents estudiarem aquest tema, després de revisar prèviament els conceptes de convergència de successions i de suma de sèries numèriques.

2 Sèries numèriques

2.1 Successions

Una **successió** real és un conjunt infinit de nombres reals ordenats seqüencialment: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$. Exemples de successions són:

- (A) $1, -7, 11, 4, -2, \sqrt{3}, 4/5, \dots$
- (B) $1, -4, 9, -16, 25, \dots, (-1)^{n-1} n^2, \dots$
- (C) $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & 3, 1, \quad 3, 14, \quad 3, 141, \quad 3, 1415, \quad 3, 14159, \quad 3, 141592, \dots \\ \text{(E)} & 2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23, \quad 29, \quad 31, \dots \end{array}$$

A la successió (A) no sembla haver cap regla fixa que permeti generar els termes de la successió. En canvi, la successió (B) està formada pels quadrats dels nombres naturals, alternant els signes positiu i negatiu, cosa que podem expressar escrivint que el terme que ocupa el lloc n -èsim és $a_n = (-1)^{n-1}n^2$. Aquest terme s'anomena *terme general*, i a partir de la seva expressió és possible obtenir qualsevol terme de la successió donant a n el corresponent valor. Així, el setè terme és $a_7 = (-1)^6 7^2 = 49$. Anàlogament, el terme general de la successió (C) és $a_n = 1/n$. També sembla haver una regla fixa per obtenir els termes de la successió (D): el terme n -èsim és l'arrodoniment per defecte de π amb n xifres decimals i el podem expressar en la forma $a_n = [10^n \pi]/10^n$. Finalment, la darrera successió pot ser la successió de nombres primers, una successió que està perfectament definida, però per a la qual no existeix cap expressió que permeti determinar el terme general a_n .

Les notacions més usuals són $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ (per indicar que el conjunt de termes a_n s'obté quan n recorre successivament els nombres naturals), l'expressió més curta $\{a_n\}$, o fins i tot simplement a_n . Per exemple, podem designar la successió (C) de qualsevol de les formes $\{a_n = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{a_n = 1/n\}$, $\{1/n\}$, i $a_n = 1/n$.

De vegades, la forma de generar una successió s'expressa més còmodament mitjançant una *relació de recurrència*, la qual permet calcular cada terme a partir dels anteriors. Per exemple, la coneguda *successió de Fibonacci* es genera a partir de $a_1 = 1$ i $a_2 = 1$ mitjançant la relació de recurrència $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, amb la qual obtenim la successió

$$\text{(F)} \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \dots$$

Podem veure una *progressió aritmètica* com una successió definida per la relació de recurrència $a_n = a_{n-1} + r$, i una *progressió geomètrica* com una successió definida per la relació de recurrència $a_n = r a_{n-1}$. En tots dos casos només cal fixar el primer terme, a_1 , i la raó de la progressió, r , per concretar tota la successió.

Diem que una successió és *monòtona creixent* quan $a_{n-1} \leq a_n$ i que és *monòtona decreixent* quan $a_{n-1} \geq a_n$ (encara que els termes de monòtona no decreixent i monòtona no creixent, respectivament, serien més precisos). Les successions (D), (E) i (F) són monòtones creixents, mentre que la successió (C) és monòtona decreixent.

Una successió està *afitada* quan existeixen dues constants, anomenades *cotes*, N , M tals que $N \leq a_n \leq M$ o, igualment, quan existeix una cota K tal que $|a_n| \leq K$. Quan es verifica només una de les desigualtats es diu que la successió està *afitada superiorment* ($a_n \leq M$) o *inferiorment* ($N \leq a_n$). De les successions anteriors, les successions (E) i (F) estan acotades inferiorment (per exemple, per la cota $N = 0$), les successions (C) i (D) estan acotades superiorment i inferiorment (aleshores, simplement que estan acotades), i la successió (B) no està afitada ni superiorment ni inferiorment.

2.2 Límit d'una successió

Els termes de la successió (C) són cada vegada més petits, mentre que els de la successió (D) es van acostant cada vegada més a π . De les altres successions no podem dir res semblant. Recollim aquesta propietat en la definició següent.

Definició 2 Una successió $\{a_n\}$ és **convergent cap al límit** a si per a qualsevol nombre positiu ϵ , existeix un nombre enter N tal que es verifica $|a_n - a| < \epsilon$ sempre que $n > N$. També direm que a_n tendeix cap a a quan $n \rightarrow \infty$ i ho expressem així

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{o bé} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a. \quad (2)$$

Aleshores, les successions (C) i (D) són convergents; la primera té límit $a = 0$, mentre que la segona té límit $a = \pi$. Com a verificació, per a la successió $a_n = 1/n$, si $\epsilon = 0.01$, només cal prendre $N = 100$ (o qualsevol altre nombre més gran), perquè quan $n > N$ es verifiqui $|a_n - a| = 1/n - 0 = 1/n < \epsilon = 0.01$. Això passa per a qualsevol ϵ . Si agafem un altre valor, com per exemple $\epsilon = 0,0002$, només caldrà agafar $N = 5000$ per tal que es segueixi complint que $|a_n - a| < \epsilon$ per a $n > N$. Anàlogament, per a la successió (D) tenim $|a_n - \pi| < 10^{-n}$, de manera que quan $\epsilon = 0.01$ podem agafar $N = 1$, mentre que quan $\epsilon = 0.0002$ només cal prendre $N = 3$. Les successions (B), (E) i (F) no són convergents.

Tota successió convergent està afitada i, per tant, una successió que no estigui afitada no pot ser convergent. És el cas de les successions (B), (E) i (F), les quals no són convergents, encara que per a les dues darreres, com que els seus termes creixen indefinidament en créixer n , diem que tenen límit $+\infty$.

Per a les successions obtingudes com a suma, diferència, producte o quocient de successions convergents es demostra fàcilment que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \implies \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b, \end{cases}$$

en el cas del quocient, suposem que $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

El resultat que permet assegurar la convergència de successions i que més utilitzarem és el següent.

Teorema 1 Tota successió creixent i afitada superiorment és convergent:

$$a_n \geq a_{n-1}, \quad a_n \leq M \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leq M.$$

Anàlogament, tota successió decreixent i afitada inferiorment és convergent.

Aquest és el cas de les dues successions convergents anteriors: la successió (D) és creixent i afitada superiorment i la successió (C) és decreixent i afitada inferiorment. Un altre exemple interessant és el següent.

Exemple 2.1. Es pot demostrar que la successió

$$2, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$$

és creixent. A més, està afitada superiorment, perquè

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \binom{n}{4} \frac{1}{n^4} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + \dots \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e \end{aligned}$$

i, per tant, ha de ser convergent. De fet, el seu límit és precisament el número e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2,7182818284 \dots \quad (3)$$

2.3 Sèries. Convergència

La noció de sèrie apareix en intentar fer sumes infinites. Per exemple, podem intentar sumar tots els termes de la progressió geomètrica infinita amb primer terme $a_1 = 1/2$ i raó $r = 1/2$:

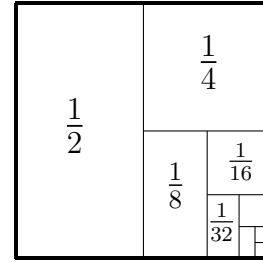
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

En sumar els N primers termes, utilitzant la fórmula de la suma dels termes d'una progressió geomètrica

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \frac{a_N r - a_1}{r - 1},$$

obtenim

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N, \end{aligned}$$



d'on podem intuir, amb l'ajuda de la interpretació gràfica de la figura, que la suma dels infinits termes de la progressió és 1, perquè aquest és el límit de les sumes $\{S_N\}$ quan $N \rightarrow \infty$. En general, tenim la definició següent.

Definició 3 A partir d'una successió $\{a_n\}$ definim una **sèrie** com la suma infinita dels termes d'una successió:

$$\sum_{n \geq 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (4)$$

Considerem a continuació la successió de **sumes parcials**

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n. \quad (5)$$

Quan aquesta successió té límit S , associem aquest límit a la **suma** de la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S. \quad (6)$$

Aleshores, diem que la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ és **convergent** amb suma S , mentre que quan la successió de sumes parcials no convergeix diem que la sèrie és **divergent**.

Ara podem dir que la sèrie $\sum_{n \geq 1} 1/2^n$ és convergent amb suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$. Amb més generalitat, tenim l'exemple següent.

Exemple 2.2. La sèrie geomètrica, $\sum_{n \geq 0} ar^n$, és convergent quan $|r| < 1$, perquè a partir de

$$S_N = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{N-1} = \frac{ar^{N-1}r - a}{r - 1} = \frac{a}{1 - r} + \frac{a}{r - 1}r^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - r}$$

obtenim

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r} \quad (|r| < 1).} \quad (7)$$

Tanmateix, quan $|r| \geq 1$ la sèrie geomètrica és divergent. Per exemple, les sèries $\sum_{n \geq 1} 3^n$ i

$\sum_{n \geq 1} (-2)^n$ són divergents i no és possible associar-les a cap suma.

Exemple 2.3. La sèrie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

és convergent amb suma 1, perquè a partir de $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$ obtenim

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

A més de determinar la suma de sèries convergents, volem veure si una determinada sèrie és convergent o divergent. Parlem aleshores de decidir el *caràcter* de la sèrie. El resultat següent ens dóna una primera condició necessària per tal que una sèrie pugui ser convergent.

Teorema 2 Si la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ és convergent, aleshores $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostració: En efecte, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

□

El recíproc d'aquest criteri no és cert, però aquest resultat és especialment útil en negatiu: si no existeix $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ o existeix però és $\neq 0$, la sèrie no pot ser convergent:

Criteri 0

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ és divergent.}} \quad (8)$$

Exemple 2.4. Les sèries

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n + \dots$$

i

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

són divergents. Per a la primera, $S_N = -1$ quan N és senar, mentre que $S_N = 0$ quan N és parell, per tant no pot ser convergent. Això també es pot deduir del fet que és una sèrie geomètrica amb raó $r = -1$, o com a conseqüència del criteri anterior, perquè la successió $(-1)^n$ no té límit. El mateix passa amb la segona, perquè $\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1) = 1 \neq 0$.

Observació: Observem que el criteri no permet arribar a cap conclusió quan es verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. En aquest cas, la sèrie pot ser convergent, com la sèrie geomètrica amb raó r quan $|r| < 1$, però també pot ser divergent, com la sèrie *harmònica*:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (9)$$

com veurem a continuació.

En els apartats següents veurem alguns criteris addicionals, els qual ens permetran decidir el caràcter de les sèries, primer per a sèries de termes positius i després per a sèries de termes qualssevol, en particular per a les anomenades sèries alternades. Posteriorment, a la secció 5, obtindrem les sumes d'algunes sèries a partir dels resultats de convergència de les sèries de Fourier.

2.4 Sèries de termes positius

Hi ha diversos criteris que ajuden a decidir el caràcter de les sèries de termes positius, $a_n \geq 0$. En veurem quatre dels més utilitzats. Els dos primers són criteris de comparació, per tant cal disposar d'una altra sèrie el caràcter de la qual sigui conegut. El tercer criteri evita aquest inconvenient. Finalment, el criteri integral és molt útil quan els anteriors no permeten decidir el caràcter d'una sèrie. Observem prèviament que, com que la successió de sumes parcials d'una sèrie de termes positius és creixent, si està afitada superiorment ha de ser convergent, d'acord amb el teorema 1.

Criteri 1 (*1r criteri de comparació*) Siguin $\sum_{n \geq 1} a_n$ i $\sum_{n \geq 1} b_n$ dues sèries de termes positius tals que per a tot n (o per a tot n prou gran)

$$\boxed{0 \leq a_n \leq b_n.} \quad (10)$$

Aleshores,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} b_n \text{ és convergent} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ és convergent.}} \quad (11)$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} a_n \text{ és divergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \geq 1} b_n \text{ és divergent.}} \quad (12)$$

El resultat és conseqüència del fet que per a les sumes parcials de les dues successions tenim $0 \leq \sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$. Observem que el criteri no afirma res quan la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ és convergent ni quan la sèrie $\sum_{n \geq 1} b_n$ és divergent.

Exemple 2.5. Comprovem que la sèrie *harmònica* $\sum_{n \geq 1} 1/n$ és divergent. Les dues sèries

$$\sum_{n \geq 1} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots,$$

$$\sum_{n \geq 1} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots,$$

on $a_n = 1/2^k$ quan $2^{k-1} < n \leq 2^k$, verifiquen la condició del criteri: $0 \leq a_n = 1/2^k \leq 1/n \leq b_n$. Si, en la darrera sèrie, agrupem els termes iguals com hem indicat, la suma dels quals sempre és $1/2$, obtenim les sumes parcials

$$\sum_{n=1}^{N=2^k} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + k \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Per tant, la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ és divergent i, aleshores, la sèrie $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ també és divergent.

Criteri 2 (*2n criteri de comparació*) Siguin $\sum_{n \geq 1} a_n$ i $\sum_{n \geq 1} b_n$ dues sèries de termes positius: $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. Si

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad 0 < K < \infty.} \quad (13)$$

Aleshores, les dues sèries tenen el mateix caràcter.

En altres paraules, quan $0 < K < \infty$, si una sèrie és convergent l'altra també ho és, i quan una sèrie és divergent l'altra també. Observem que el criteri no permet arribar a cap conclusió quan no existeix el límit de a_n/b_n o quan aquest val 0 o ∞ .

Exemple 2.6. La sèrie

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{4n^2 + 5}$$

és divergent, perquè si comparem amb la sèrie harmònica $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} 1/n$ tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

Criteri 3 (del quocient) Sigui $\sum_{n \geq 1} a_n$ una sèrie de termes estrictament positius $a_n > 0$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \begin{cases} < 1 & \implies \text{la sèrie és convergent,} \\ > 1 & \implies \text{la sèrie és divergent.} \end{cases} \quad (14)$$

De nou, no podem afirmar res quan el límit no existeix o quan $r = 1$. Ometem la demostració, que es basa en el fet que, per a n gran, la successió a_n es comporta aproximadament com una progressió geomètrica de raó r , la qual només és convergent quan $|r| < 1$.

Exemple 2.7. La sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} n!/n^n$ és convergent, perquè

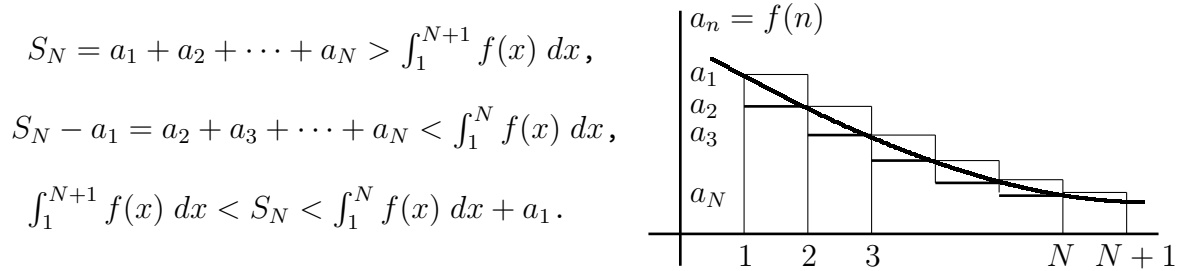
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n!}{n^n} : \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1.$$

Per acabar, vegem el criteri integral:

Criteri 4 (integral) Sigui $\sum_{n \geq 1} a_n$ una sèrie de termes positius i decreixent per a la qual $a_n = f(n)$ pot obtenir-se a partir d'una funció $f(x)$ contínua, decreixent i positiva, definida per a $1 \leq x < \infty$. Aleshores,

$$\exists \int_1^\infty f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx \iff \sum_{n \geq 1} f(n) \text{ convergeix.} \quad (15)$$

El criteri es basa en el fet que les sumes parcials de la sèrie permeten aproximar superiorment i inferiorment el valor de la integral com mostrem a la figura següent.



Per això, si existeix la integral impròpia $\int_1^\infty f(x) dx$, aleshores la sèrie és convergent i viceversa.

Exemple 2.8. S'anomenen p -sèries les sèries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

on $p > 0$ és un paràmetre. Per exemple, per a $p = 3$ i per a $p = 1/2$ tenim les sèries següents:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

Per a $p \neq 1$, utilitzant el criteri integral amb $f(x) = 1/x^p$ obtenim

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^N = \frac{N^{1-p} - 1}{1-p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 1/(p-1) & \text{si } p > 1, \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Per tant, les p -sèries són convergents quan $p > 1$ i divergents quan $p < 1$. Per a $p = 1$, es tracta de la sèrie harmònica, que ja hem vist que és divergent, encara que també es pot obtenir amb aquest criteri:

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^N = \ln N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Les p -sèries són molt útils com a successions de referència en els criteris de comparació.

2.5 Sèries alternades

Ara estudiarem sèries qualssevol, és a dir, sèries de termes a_n positius o negatius.

Donada una sèrie de termes positius i negatius, podem considerar la sèrie de termes en valor absolut, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, el caràcter de la qual podem estudiar mitjançant els criteris de l'apartat anterior. Quan aquesta sèrie convergeix diem que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és *absolutament convergent*. Es pot demostrar que *tota sèrie absolutament convergent és convergent*:

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \text{ convergeix} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ convergeix.} \quad (16)$$

Naturalment, pot passar que la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ sigui convergent sense que ho sigui la sèrie $\sum_{n \geq 1} |a_n|$. Aleshores diem que la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ és *condicionalment convergent* (perquè podem modificar la seva suma alterant l'ordre de sumació dels termes, cosa que no pot passar mai en les sèries absolutament convergents).

Entre aquestes sèries, les més interessants són les que tenen alternativament un terme positiu i un de negatiu, les quals són anomenades *sèries alternades*. Es caracteritzen per complir que $a_{n-1} a_n < 0$. És habitual expressar el seu terme general en la forma $a_n = (-1)^n \alpha_n$, o bé $a_n = (-1)^{n-1} \alpha_n$, on $\alpha_n = |a_n| > 0$. Per exemple, la sèrie

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \dots$$

és una sèrie alternada. Tenim el resultat següent per a les sèries alternades.

Criteri 5 (de Leibnitz) Una sèrie alternada $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \alpha_n$ que compleix que:

(i) la successió de termes en valor absolut és decreixent: $\alpha_{n-1} \geq \alpha_n$,

(ii) el terme general tendeix cap a 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,

és convergent.

Demostració: Suposem que $a_1 = \alpha_1 > 0$ (el raonament és anàleg si $a_1 < 0$). Com que la successió α_n és decreixent, les diferències $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ són sempre positives. Si agrupem les sumes parcials parelles, S_{2m} , i les senars, S_{2m+1} , en la forma

$$S_{2m} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2m-1} - \alpha_{2m}),$$

$$S_{2m+1} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_4 - \alpha_5) - \cdots - (\alpha_{2m} - \alpha_{2m+1}),$$

observem que la successió de sumes parcials parelles és creixent, mentre que la de sumes parcials senars és decreixent. A més, $S_{2m} > 0$, $S_{2m+1} < a_1$ i $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} > 0$, de manera que

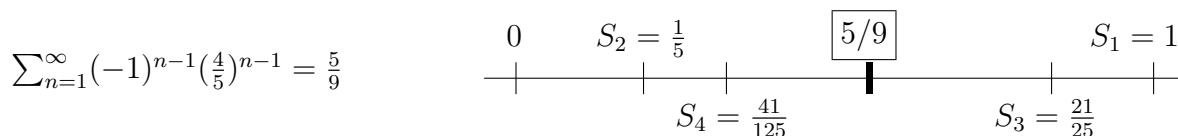
$$0 < S_{2m} < S_{2m+1} < a_1.$$

Aleshores, pel teorema 1 totes dues successions convergeixen. A més, com que $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S_{n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, les dues han de tenir el mateix límit, és a dir, la successió S_n ha de ser convergent. \square

Exemple 2.9. A l'esquema que hi ha a continuació il·lustrem la demostració anterior amb el comportament de les sumes parcials de la sèrie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{5}{9},$$

la qual compleix les dues condicions del criteri de Leibnitz i, per tant, és convergent. Hem obtingut la seva suma tenint en compte que és una sèrie geomètrica de raó $r = -4/5$.



Exemple 2.10. La sèrie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

compleix les dues condicions del criteri de Leibnitz i, per tant, és convergent.

En aquest cas, la sèrie de termes en valor absolut és la sèrie harmònica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, la qual és divergent. Per tant, la sèrie alternada és condicionalment convergent.

3 Desenvolupament en sèrie de Fourier trigonomètrica

D'acord amb el que hem indicat a la secció 1, el desenvolupament en **sèrie trigonomètrica de Fourier** d'una funció f periòdica, amb període $T = 2\pi$, ve donat per

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1)$$

on utilitzem el símbol \simeq per indicar que f “té representació” donada per la sèrie trigonomètrica. De moment, podem veure-ho com una igualtat. A la secció 5 precisarem fins a quin punt ho és.

3.1 Coeficients de Fourier

Òbviament, els coeficients a_n i b_n del desenvolupament (1) han de dependre de la funció f . Concretament, tenim el teorema següent.

Teorema 3 *Els coeficients de Fourier de la funció f en el desenvolupament en sèrie trigonomètrica (1) vénen donats per*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n \geq 1.$$

Demostració. En primer lloc, observem que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = \frac{1}{n} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = \frac{1}{n} (-\cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

A partir d'aquí, tenim que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m-n)t + \sin(m+n)t) dt = 0, & \forall n, m, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + \cos(m+n)t) dt = 0, & \forall n \neq m, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t) dt = 0, & \forall n \neq m. \end{aligned}$$

Per a $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mt) dt = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mt dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 mt) dt = \pi.$$

Si utilitzem aquestes expressions, és fàcil obtenir les fórmules dels coeficients de Fourier. Si integrem els dos membres del desenvolupament en sèrie de Fourier (1), sabent que podem intercanviar l'ordre d'integració amb el sumatori, obtenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt \right) = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi,$$

d'on trobem el valor d' a_0 . Si ara multipliquem (1) per $\cos mt$ i integrem, tenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos mt \, dt = a_m \pi,$$

perquè en el sumatori només el terme obtingut per a $n = m$ és $\neq 0$. Anàlogament, si multipliquem (1) per $\sin mt$ i integrem, obtenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin mt \, dt = b_m \pi. \quad \square$$

La designació $a_0/2$ per al terme constant de la sèrie de Fourier permet agrupar les expressions d' a_0 i a_n i expressar les fórmules dels coeficients de Fourier en la forma següent:

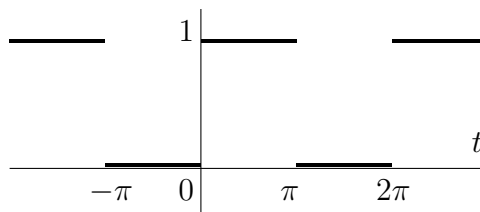
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n \geq 0, \quad (17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \geq 1, \quad (18)$$

encara que, en les aplicacions, l'expressió obtinguda per a a_n no sol ser vàlida per a $n = 0$. Aleshores, el coeficient a_0 s'ha de calcular a part. L'interval d'integració ha de ser un període i és habitual escollir l'interval $(-\pi, \pi)$, però pot ser qualsevol altre com, per exemple, $(0, 2\pi)$ o $(-\pi/2, 3\pi/2)$. A més, observem que $a_0/2$ és el *valor mitjà* de la funció f en cada període.

Exemple 3.1. Donada la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$



estesa periòdicament amb període 2π , tenim

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \, dt + \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right) \stackrel{(n \neq 0)}{=} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nt}{n} \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Com que el càlcul no és vàlid per a $n = 0$, el coeficient a_0 s'ha de calcular a part:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dt = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

Per als coeficients b_n , trobem

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{-\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} [-(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \\ 2/n\pi & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases} \end{aligned}$$

En el sumatori del desenvolupament en sèrie de Fourier es recorren els nombres naturals senars quan, en fer $n = 2k - 1$, amb $k \geq 1$. (També es pot posar $n = 2k + 1$, amb $k \geq 0$.) Per tant, obtenim

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t.$$

Exemple 3.2. Donada la funció

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq \pi, \\ \pi & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

estesa amb període 2π . Tenim:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} t dt + \int_{\pi}^{2\pi} \pi dt \right) \\ &= \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} t \cos nt dt + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cos nt dt \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ és senar,} \end{cases} \end{aligned}$$

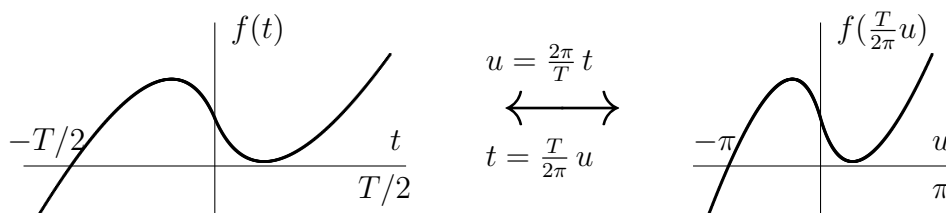
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} t \sin nt dt + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \sin nt dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \pi \frac{-1 + (-1)^n}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Per tant, obtenim el desenvolupament en sèrie de Fourier següent:

$$f(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)t - \frac{\sin kt}{k} \right).$$

3.2 Canvi de període

Sigui f una funció periòdica de període T : $f(t+T) = f(t)$ per a tot t . Com mostrem a la figura següent, mitjançant el canvi d'escala $t = \frac{T}{2\pi}u$, obtenim una funció $g(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$ periòdica de període 2π .



En efecte,

$$g(u + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(u + 2\pi)\right) = f(t + T) = f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) = g(u).$$

Per això, d'acord amb (1), la funció té un desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu).$$

Desfent el canvi, obtenim el desenvolupament en **sèrie trigonomètrica de Fourier** d'una funció periòdica **amb període** T :

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right), \quad (19)$$

on els **coeficients de Fourier** de la funció f ara es calculen mitjançant les fórmules

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \quad n \geq 0, \quad (20)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \quad n \geq 1, \quad (21)$$

les quals, com era d'esperar, poden deduir-se de les anteriors, (17) i (18), quan $T = 2\pi$. Recordem que l'interval d'integració ha de coincidir amb un període.

Es defineix la *frequència fonamental* d'un senyal periòdic com $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. A la secció 7 veurem la interpretació d'aquest valor i dels seus múltiples $n\omega_0$. Les expressions anteriors es poden escriure, per tant, de la manera següent:

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos (n\omega_0 t) + b_n \sin (n\omega_0 t)), \quad (22)$$

on els **coeficients de Fourier** de la funció f s'expressen com

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt, \quad n \geq 0, \quad (23)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt, \quad n \geq 1, \quad (24)$$

Exemple 3.3. Donada la funció $f(t) = t$ a l'interval $(0, 1)$ estesa periòdicament amb període $T = 1$, obtenim

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 t dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \cos(2n\pi t) dt = 0, \quad b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \sin(2n\pi t) dt = \frac{-1}{n\pi},$$

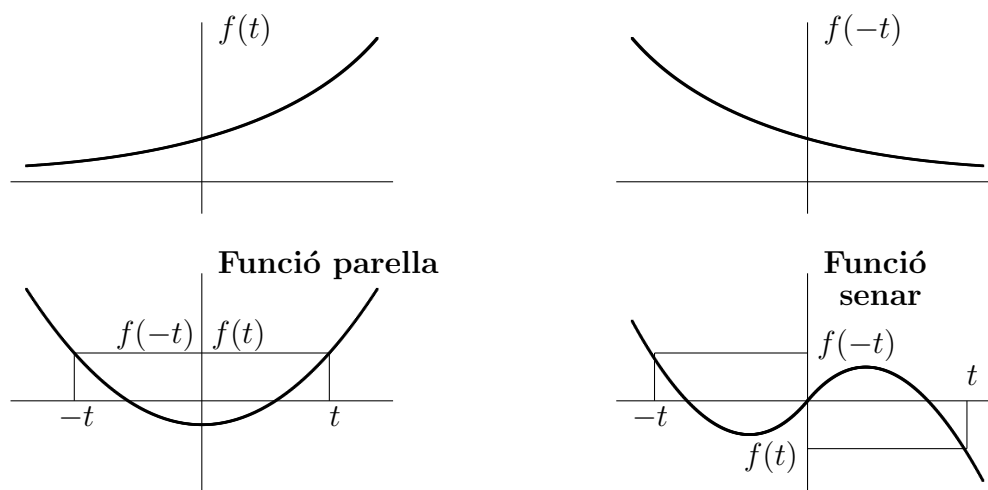
$$f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi nt).$$

4 Desenvolupaments en sèrie de sinus i en sèrie de cosinus

Els desenvolupaments en sèrie de Fourier d'una funció poden simplificar-se notablement quan la funció té alguna simetria. En aquesta secció estudiem el cas de les funcions parelles i senars.

4.1 Funcions parelles i senars

Definició 4 Una funció f definida en un interval simètric respecte de l'origen $(-a, a)$ és **parella** quan $f(-t) = f(t)$ per a qualsevol t , mentre que és **senar** quan $f(-t) = -f(t)$ per a tot t .



Per exemple, $f(t) = t^2$ i $f(t) = \cos t$ són funcions parelles, mentre que $f(t) = t^3$ i $f(t) = \sin t$ són senars. La gràfica d'una funció parella és simètrica respecte de l'eix y d'ordenades, mentre que la d'una funció senar ho és respecte de l'origen.

Observem que amb les anteriors definicions **no** s'està fent una classificació parella/senar de les funcions: una funció pot no ser ni parella ni senar, com per exemple $f(t) = e^t$ o $f(t) = 1 + t$. De fet, aquesta és la situació més freqüent: perquè una funció f pugui ser parella o senar, prèviament ha de verificar $|f(t)| = |f(-t)|$ per a cada t .

Com que el caràcter parella/senar d'una funció depèn del fet que $f(t)$ i $f(-t)$ tinguin signe igual o diferent, és natural que el *producte de funcions* segueixi la mateixa regla que el producte de signes. Per tant, tenim:

$$\text{parella} \times \text{parella} = \text{parella}, \quad \text{parella} \times \text{senar} = \text{senar}, \quad \text{senar} \times \text{senar} = \text{parella}.$$

Exemple 4.1. $f(t) = t \cos t$ és senar, perquè t és senar i $\cos t$ és parella, mentre que $g(t) = t^3 \sin t$ és parella, perquè t^3 i $\sin t$ són totes dues senars. Naturalment, també ho podem comprovar directament:

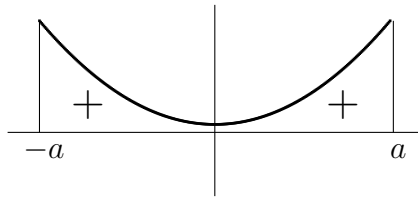
$$f(-t) = -t \cos(-t) = -t(\cos t) = -t \cos t = -f(t) \quad \implies \quad f \text{ és senar};$$

$$g(-t) = (-t)^3 \sin(-t) = -t^3(-\sin t) = t^3 \sin t = g(t) \quad \implies \quad g \text{ és parella.}$$

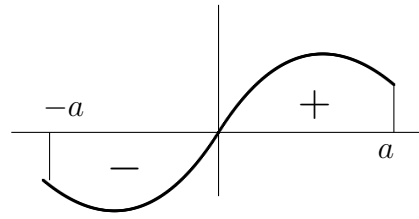
La propietat que més utilitzarem del possible caràcter parella/senar d'una funció és el valor de la seva integral definida en intervals simètrics respecte de l'origen. Concretament, tenim:

$$f_p \text{ parella} \implies \int_{-a}^a f_p(t) dt = 2 \int_0^a f_p(t) dt, \quad f_s \text{ senar} \implies \int_{-a}^a f_s(t) dt = 0, \quad (25)$$

cosa que és fàcilment comprovable a partir de la descomposició $\int_{-a}^a = \int_{-a}^0 + \int_0^a$ i verificant que $\int_{-a}^0 = \pm \int_0^a$ segons si f és parella o senar. Gràficament, aquest resultat és evident si utilitzem la interpretació de la integral a partir d'àrees (com es mostra a la figura):



Funció parella



Funció senar

4.2 Desenvolupaments en sèrie de funcions parelles i senars

La conseqüència fonamental de la propietat anterior en els desenvolupaments en sèrie de Fourier és que en el desenvolupament d'una funció parella no tenim els termes en cosinus, mentre que en el d'una funció senar no tenim els termes en sinus:

Teorema 4 *Si f és una funció periòdica amb període T . Si f és parella, el seu desenvolupament en sèrie de Fourier té la forma*

$$\boxed{f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)}, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_p(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n \geq 0, \quad (26)$$

mentre que si f és senar, el seu desenvolupament en sèrie de Fourier té la forma

$$\boxed{f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)}, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_s(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n \geq 1. \quad (27)$$

Demostració: Quan f és parella, el producte $f(t) \sin(n\omega_0 t)$ és una funció senar, mentre que el producte $f(t) \cos(n\omega_0 t)$ és una funció parella. Utilitzant (25), obtenim

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_p(t) \cos(n\omega_0 t) dt.$$

Anàlogament, quan f és senar, el producte $f(t) \sin(n\omega_0 t)$ és una funció parella, mentre que el producte $f(t) \cos(n\omega_0 t)$ és una funció senar. \square

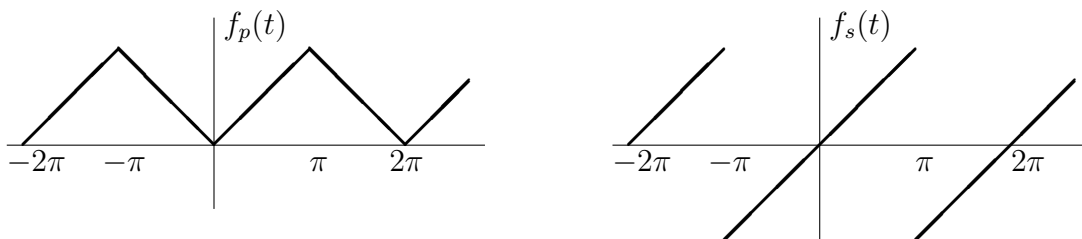
Exemple 4.2. La funció $f(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$, prolongada amb període 2π , és parella i a partir de

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ és senar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ és parella,} \end{cases}$$

obtenim el desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$



Exemple 4.3. La funció $f_s(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$, prolongada amb període 2π , és senar i a partir de

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin nt \, dt = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

obtenim el desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f_s(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

4.3 Descomposició parella + senar

Com hem dit anteriorment, una funció f no té perquè ser parella o senar. Tanmateix, *qualsevol funció f es pot descompondre com a suma d'una funció parella i una altra senar.* En efecte, la funció $f_p(t) = (f(t) + f(-t))/2$ és parella, perquè

$$f_p(-t) = \frac{f(-t) + f(t)}{2} = f_p(t),$$

i s'anomena *part parella* de la funció f ; mentre que la funció $f_s(t) = (f(t) - f(-t))/2$ és senar, perquè

$$f_s(-t) = \frac{f(-t) - f(t)}{2} = -\frac{f(t) - f(-t)}{2} = -f_s(t).$$

i s'anomena *part senar* de la funció f .

A més, la descomposició

$$\boxed{f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} = f_p(t) + f_s(t)} \quad (28)$$

és l'única descomposició possible de f com a suma d'una funció parella i una funció senar.

D'altra banda, si f és una funció periòdica amb període T , aleshores f_p i f_s també són periòdiques. Si escrivim el desenvolupament en sèrie de Fourier de f en la forma

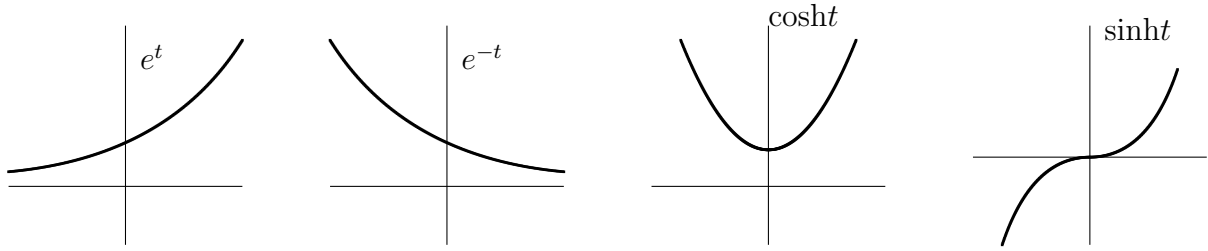
$$f(t) \simeq \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

i tenim en compte els desenvolupaments de les funcions parelles (26) i senars (27), podem identificar el primer sumand com el desenvolupament de la part parella de f i el segon sumand amb el de la seva part senar:

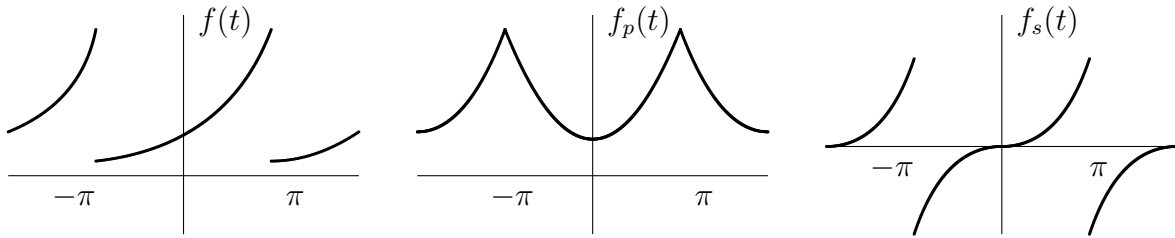
$f_p(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t),$	$f_s(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t).$
--	--

Exemple 4.4. Com il·lustrem en la figura següent, la funció e^t té la descomposició com a suma d'una funció parella i d'una funció senar que indiquem:

$$e^t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \cosh t + \sinh t.$$



La funció definida com la prolongació periòdica amb període 2π de $f(t) = e^t$ en $(-\pi, \pi]$ i les seves parts parella i senar es representen en la figura següent.



En el desenvolupament en sèrie de Fourier de f tenim:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 + n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1} n}{1 + n^2},$$

$$f(t) \simeq \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1 + n^2} \sin nt \right),$$

d'on es dedueixen immediatament els desenvolupaments de les parts parella i senar de f :

$$f_p(t) \simeq \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt \right) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt \right),$$

$$f_s(t) \simeq \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} \sin nt = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} \sin nt.$$

Exemple 4.5. Sigui f la funció definida en $(-\pi, \pi)$ per

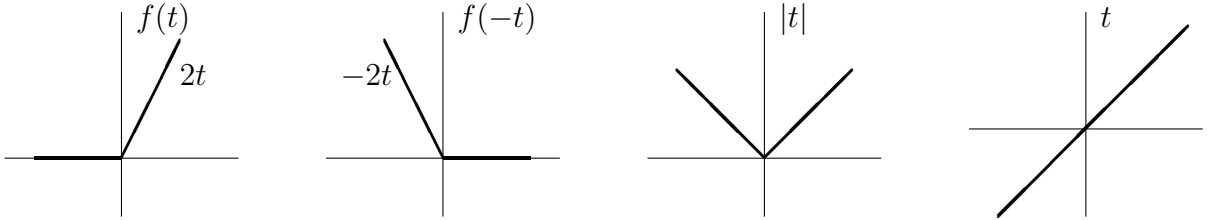
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0, \\ 2t & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Com representem a la figura següent, f té la descomposició $f(t) = |t| + t$, perquè

$$f(-t) = \begin{cases} 0 & -\pi < -t \leq 0 \\ 2(-t) & 0 < -t < \pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ -2t & -\pi < t < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t & -\pi < t < 0, \\ 0 & 0 \leq t < \pi, \end{cases}$$

$$\frac{f(t) + f(-t)}{2} = \begin{cases} (0 + (-2t))/2 & -\pi < t \leq 0 \\ (2t + 0)/2 & 0 < t < \pi \end{cases} = \begin{cases} -t & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases} = |t|,$$

$$\frac{f(t) - f(-t)}{2} = \begin{cases} (0 - (-2t))/2 & -\pi < t \leq 0 \\ (2t - 0)/2 & 0 < t < \pi \end{cases} = \begin{cases} t & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases} = t.$$



Si prolonguem la funció periòdicament amb període 2π ,

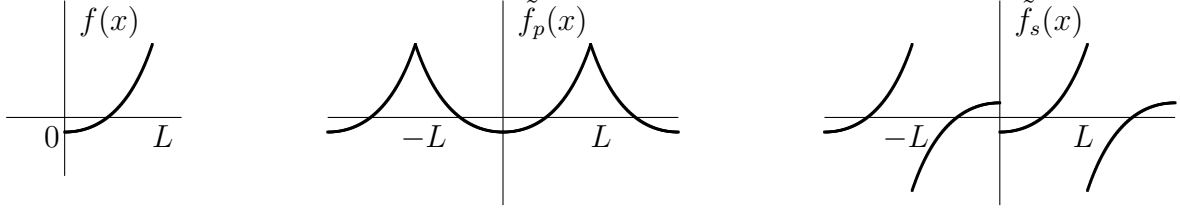
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0, \\ 2t & 0 < t \leq \pi, \end{cases} \quad f(t + 2\pi) = f(t),$$

a partir dels desenvolupaments en sèrie de cosinus de la seva part parella i en sèrie de sinus de la seva part senar (obtinguts en els exemples 4.2 i 4.3), obtenim el desenvolupament

$$f(t) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

4.4 Desenvolupaments en sèrie sinus i en sèrie cosinus

Sigui $f(x)$ una funció definida en un interval $(0, L)$. És possible obtenir desenvolupaments en sèrie de cosinus i en sèrie de sinus de f , vàlids en aquest interval, construint funcions periòdiques \tilde{f}_p parella i \tilde{f}_s senar, respectivament, que coincideixin amb f en aquest interval, com representem a la figura següent.



En el primer cas, comencem *prolongant de forma parella* la funció f en l'interval $(-L, L)$, i després prolonguem la funció \tilde{f}_p obtinguda a tot \mathbb{R} amb període $2L$:

$$\tilde{f}_p(t) = \begin{cases} f(t) & 0 < t < L, \\ f(-t) & -L < t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f}_p(t + 2L) = \tilde{f}_p(t). \quad (29)$$

D'acord amb (26) per a $T = 2L$, per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$, tenim

$$\tilde{f}_p(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}_p(t) \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt, \quad n \geq 0.$$

En particular, per a $0 < t < L$, tenint en compte que en aquest interval $\tilde{f}_p(t) = f(t)$,

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt, \quad n \geq 0. \quad (30)$$

Anàlogament, per obtenir un desenvolupament en sèrie de sinus comencem *prolongant de forma senar* la funció f en l'interval $(-L, L)$, i després prolonguem aquesta funció \tilde{f}_s a tot \mathbb{R} amb període $2L$.

$$\tilde{f}_s(t) = \begin{cases} f(t) & 0 < t < L, \\ -f(-t) & -L < t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f}_s(t + 2L) = \tilde{f}_s(t). \quad (31)$$

D'acord amb (27) per a $T = 2L$, ara obtenim per a l'interval $(0, L)$:

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt, \quad n \geq 1. \quad (32)$$

Exemple 4.6. Desenvolupem en sèrie cosinus i en sèrie sinus en l'interval $(0, 3)$ la funció $f(t) = t^2$.

El desenvolupament en sèrie de cosinus és el desenvolupament en sèrie de Fourier de la prolongació parella de la funció f : $\tilde{f}_p(t) = t^2$ en l'interval $(-3, 3)$ i prolongada periòdicament amb període $T = 6$. Tenim que $f(t) \simeq a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \frac{\pi}{3} t)$, amb

$$a_0 = \frac{2}{6} \int_{-3}^3 t^2 dt = \frac{2}{3} \int_0^3 t^2 dt = 6, \quad a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 t^2 \cos\left(n \frac{\pi}{3} t\right) dt = \frac{36}{n^2 \pi^2} (-1)^n.$$

Per tant, en $(0, 3)$,

$$t^2 \simeq 3 + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(n \frac{\pi}{3} t\right).$$

Anàlogament, el desenvolupament en sèrie de sinus és el desenvolupament en sèrie de Fourier de la prolongació senar de la funció f : $\tilde{f}_s(t) = t^2$ en $(0, 3)$, $\tilde{f}_s(t) = -t^2$ en $(-3, 0)$, i prolongada periòdicament amb període $T = 6$. Ara obtenim el desenvolupament $f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right)$, amb

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 t^2 \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right) dt = \frac{18}{n\pi} (-1)^{n-1} - \frac{36}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n].$$

Per tant, en $(0, 3)$,

$$t^2 \simeq 18 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} (-1)^{n-1} - \frac{2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \right) \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right).$$

5 Convergència de la sèrie de Fourier

Fins ara hem desenvolupat una funció en sèrie utilitzant el símbol \simeq per expressar la possible igualtat entre la funció i el seu desenvolupament en sèrie de Fourier. Concretament, per a una funció periòdica amb període 2π hem escrit

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (1)$$

Per què? Per respondre a aquesta pregunta és necessari observar prèviament que el membre de la dreta representa la suma de la sèrie $a_0/2 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, és a dir, el límit quan $N \rightarrow \infty$ de la successió de *sumes parcials*

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (33)$$

la qual pot coincidir o no amb $f(t)$. Òbviament esperem que hi hagi coincidència, almenys sota certes hipòtesis addicionals de la funció f . A més, és necessari decidir abans el sentit de l'aproximació de la funció f mitjançant la sèrie de funcions S_N , cosa que estudiem en els apartats següents.

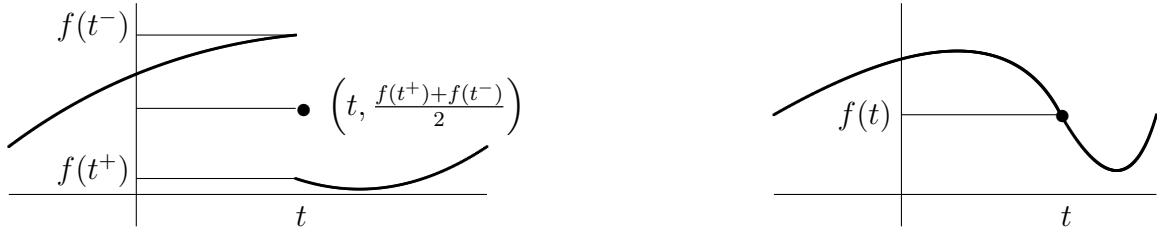
5.1 Convergència puntual

Ara estudiem el comportament per a cada t fix de la sèrie trigonomètrica. En fixar el punt t obtenim una sèrie numèrica i, per tant, podem utilitzar els resultats de la secció 2. En aquest cas, parlem de **convergència puntual** i tenim el resultat següent, la demostració del qual ometem.

Teorema 5 (de Dirichlet) Si en cada període la funció f és contínua a trossos i té un nombre finit d'extremes (màxims o mínims), la seva sèrie de Fourier convergeix en cada punt t a la semisuma dels límits laterals de f en aquest punt:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}. \quad (34)$$

En particular, la sèrie de Fourier de f convergeix a $f(t)$ en cada punt t en el qual f és contínua.



D'aquí ve l'ús del símbol \simeq entre $f(t)$ i el seu desenvolupament en sèrie de Fourier. Podrem substituir-lo per $=$ quan f compleixi les condicions de Dirichlet i, a més, sigui contínua. Així, mentre que en l'exemple 4.2 podíem escriure que la funció $f(t) = |t|$, estesa periòdicament amb període 2π , coincidia amb el seu desenvolupament en sèrie de Fourier, en l'exemple 4.3 hem mantingut el símbol \simeq per indicar que l'extensió amb període 2π de la funció $f(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$ no coincideix amb la seva sèrie de Fourier en els punts $t = (2k - 1)\pi$, en els quals la sèrie pren el valor $(f(\pi^+) + f(\pi^-))/2 = (-\pi + \pi)/2 = 0$.

El teorema anterior és molt útil per calcular la suma de diferents sèries numèriques, com mostrem en els exemples següents.

Exemple 5.1. A partir del desenvolupament en sèrie de Fourier obtingut en l'exemple 4.2 per a la funció $f(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t,$$

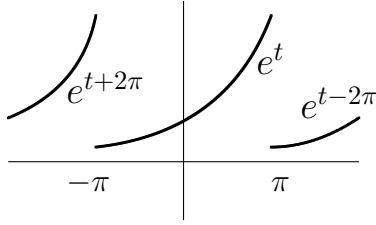
obtenim per a $t = 0$, tenint en compte que $\cos 0 = 1$,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

i, per tant,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemple 5.2. A partir del desenvolupament en sèrie de Fourier obtingut en l'exemple 4.4 per a la funció $f(t) = e^t$ en $(-\pi, \pi]$, estesa periòdicament amb període 2π ,



$$f(t) \simeq \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt) \right),$$

obtenim en el punt $t = 0$, tenint en compte que $\cos 0 = 1$ i $\sin 0 = 0$,

$$e^0 = 1 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2},$$

i en el punt de discontinuïtat $t = \pi$, amb $\cos n\pi = (-1)^n$ i $\sin n\pi = 0$,

$$\frac{e^{-\pi} + e^\pi}{2} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} \right) - \frac{1}{2}.$$

Per tenir una idea de l'aproximació global de $f(t)$ mitjançant $S_N(t)$ hem de considerar altres tipus de convergència. A l'apartat següent comentem les dificultats existents per tenir convergència uniforme. A continuació, en l'apartat 5.3, presentem l'aproximació global més interessant: la convergència en mitjana quadràtica.

5.2 Fenomen de Gibbs

Una primera possibilitat d'aproximació global de $f(t)$ és estudiar si $\max |S_N(t) - f(t)| \rightarrow 0$ quan $N \rightarrow \infty$, cosa que defineix la **convergència uniforme** de S_N a f . Es pot demostrar que hi ha convergència uniforme quan f és contínua i f' és contínua a trossos. Tanmateix, per a algunes funcions discontinües, hi ha resultats teòrics que assegurin que hi ha convergència uniforme. L'anomenat *fenomen de Gibbs* representa aquesta situació: a prop de punts de discontinuïtat t d'una funció f les sumes parcials de la sèrie de Fourier S_N desborden els valors $f(t^+)$ i $f(t^-)$ en aproximadament un 9% del salt de la funció en aquest punt, $|f(t^+) - f(t^-)|$. Això no es pot evitar augmentant el nombre N de termes sumats; així l'únic que aconseguim és desplaçar els punts concrets en els quals hi ha aquests excessos, però no reduir-los. Aquest fet s'ha de tenir en compte en el disseny de circuits sotmesos a excitacions discontinües, perquè han de poder suportar els excessos del 9%.

5.3 Aproximació en mitjana quadràtica

L'alternativa d'aproximació global més important és la convergència **en mitjana quadràtica**, en la qual estudiem el comportament quan $N \rightarrow \infty$ de l'**error quadràtic (total)** EQ o, equivalentment, de l'**error quadràtic mitjà** EQM :

$$\boxed{EQ = \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt,} \quad \boxed{EQM = \frac{1}{2\pi} EQ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt.} \quad (35)$$

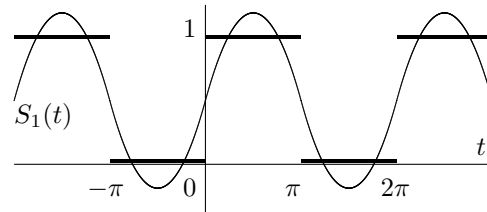
Les dues expressions proporcionen mesures de l'error comès en un període en aproximar la funció f mitjançant una suma parcial S_N de la sèrie de Fourier. Això té sentit per a les (classes de) funcions f de *quadrat integrable en* $(-\pi, \pi)$ (en el sentit de Lebesgue), cosa que en moltes aplicacions equival a tenir senyals f d'*energia finita*, per a les quals $\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt < \infty$. Les dues expressions tenen la interpretació física de mesurar l'energia de la diferència entre la funció i la seva aproximació mitjançant la suma parcial de la sèrie, és a dir, l'energia (o energia mitjana) de l'error comès en l'aproximació.

En primer lloc, destaquem una propietat fonamental: la sèrie de Fourier és la que proporciona la **millor aproximació en mitjana quadràtica**, és a dir, la que minimitza l'error quadràtic. Més concretament, es demostra que la millor aproximació en mitjana quadràtica d'una funció f mitjançant una combinació lineal com $T_N = c_0/2 + \sum_{n=1}^N (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$ s'obté amb els coeficients de Fourier: $c_0 = a_0$, $c_n = a_n$ i $d_n = b_n$, és a dir, quan $T_N = S_N$. L'exemple següent mostra aquesta propietat.

Exemple 5.3. La millor aproximació en mitjana quadràtica de la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0, \\ 1 & 0 < t \leq \pi, \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t),$$



mitjançant una combinació lineal $T_1(t) = c_0 + c_1 \cos t + d_1 \sin t$, s'aconsegueix per als valors de c_0 , c_1 , d_1 que minimitzen l'error quadràtic:

$$EQ = F(c_0, c_1, d_1) = \int_{-\pi}^{\pi} (c_0 + c_1 \cos t + d_1 \sin t - f(t))^2 dt.$$

Per això, s'ha de verificar que

$$\frac{\partial F}{\partial c_0} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(c_0 + c_1 \cos t + d_1 \sin t - f(t)) dt = 0 \quad \implies \quad c_0 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(c_0 + c_1 \cos t + d_1 \sin t - f(t)) \cos t dt = 0 \quad \implies \quad c_1 \pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial d_1} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(c_0 + c_1 \cos t + d_1 \sin t - f(t)) \sin t dt = 0 \quad \implies \quad d_1 \pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt = 0.$$

És a dir,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}, \quad c_1 = a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t dt = 0, \quad d_1 = b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi}.$$

Així obtenim que el valor òptim de $T_1(t)$ és $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t = S_1(t)$. Aleshores, l'error quadràtic val

$$\begin{aligned} EQ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t - f(t) \right)^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t \right)^2 dt + \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t \right)^2 dt = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}. \end{aligned}$$

mentre que, en qualsevol altre cas,

$$F(c_0, c_1, d_1) \geq F\left(\frac{a_0}{2}, a_1, b_1\right) = F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}.$$

Acabem aquest apartat amb el resultat fonamental per a les sèries de Fourier, la demostració del qual ometem:

Definició 5 *Diem que una successió de funcions f_n convergeix en mitjana quadràtica a f quan*

$$EQ = \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(t) - f(t))^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (36)$$

Teorema 6 *Si f és una funció de quadrat integrable, la seva sèrie de Fourier convergeix en mitjana quadràtica a f :*

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) - f(t) \right)^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.} \quad (37)$$

5.4 Desigualtat de Bessel i igualtat de Parseval

A partir del fet que l'error quadràtic és sempre ≥ 0 obtenim (després de càlculs que ometem)

$$EQ = \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} \right) - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \geq 0,$$

d'on deduïm la **desigualtat de Bessel**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt. \quad (38)$$

Per tant, la successió de sumes parcials de la sèrie $a_0^2/2 + \sum (a_n^2 + b_n^2)$ està afitada superiorment. Com que, a més, és creixent, ha de ser convergent. Una primera conseqüència d'aquesta convergència és que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$, cosa que a la vegada significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. És a dir, els coeficients de Fourier tendeixen a 0 quan $n \rightarrow \infty$. A més, a partir del fet que $EQ \rightarrow 0$ quan $N \rightarrow \infty$, obtenim per a la suma de la sèrie

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).} \quad (39)$$

Aquesta relació s'anomena **igualtat de Parseval**. Per al cas d'una funció periòdica amb període T té la forma

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).} \quad (40)$$

En moltes aplicacions, el membre de l'esquerra té la interpretació de l'*energia* o la *potència* de la funció f . La igualtat de Parseval expressa que aquesta energia també pot ser calculada a partir de les components sinusoidals de la funció. A més, la igualtat és molt útil per calcular la suma de diverses sèries numèriques.

Exemple 5.4. Per a la funció $f(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$ i prolongada amb període 2π havíem obtingut el desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

La igualtat de Parseval ens dona

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{3} \pi^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 5.5. Per a la funció $f(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$ i prolongada amb període 2π havíem obtingut el desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$

La igualtat de Parseval ens dona

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{3} \pi^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

6 Sèrie complexa de Fourier

En el desenvolupament en sèrie de Fourier en $(-\pi, \pi)$

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

podem expressar les funcions $\cos nt$ i $\sin nt$ en termes de les funcions complexes e^{jnt} i e^{-jnt} mitjançant la fórmula d'Euler:

$$\left. \begin{aligned} e^{jnt} &= \cos nt + j \sin nt \\ e^{-jnt} &= \cos nt - j \sin nt \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} \cos nt = \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2}, \\ \sin nt = \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j}. \end{cases} \quad (41)$$

Si apliquem això a l'equació (1), ens dona

$$\begin{aligned} f(t) &\simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2} + b_n \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jnt} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jnt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}. \end{aligned} \quad (42)$$

Observem que, en el darrer sumatori, la k va des de $-\infty$ a ∞ . Per a $k = n > 0$

$$c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - j\sin kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt.$$

En els **coeficients de Fourier** c_k podem incloure el cas $k = 0$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Per a $k = -n < 0$, el coeficient de e^{-jnt} és

$$\begin{aligned} c_k = c_{-n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt + j\sin nt) dt \\ &\stackrel{(n=-k)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - j\sin kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt. \end{aligned}$$

Així hem obtingut el desenvolupament en **sèrie complexa de Fourier** per a període 2π :

$$\boxed{f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}}, \quad \boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (43)$$

També podem obtenir l'expressió dels coeficients directament, com vam fer amb els coeficients de la sèrie trigonomètrica, només cal que observem que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jkt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-k)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-k)t + j\sin(m-k)t] dt = \begin{cases} 0 & m \neq k, \\ 2\pi & m = k. \end{cases}$$

De manera que, si multipliquem el desenvolupament (43) per e^{-jkt} i integrem, obtenim

$$f(t) \simeq \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmt} \implies \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jkt} dt = c_k,$$

perquè l'única integral no nul·la en el sumatori correspon a $m = k$ i val 2π .

Observem que, inversament, podem obtenir el desenvolupament en sèrie trigonomètrica a partir del desenvolupament en sèrie complexa mitjançant la fórmula d'Euler:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\cos kt + j\sin kt) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((c_k + c_{-k})\cos kt + j(c_k - c_{-k})\sin kt).$$

Així les fórmules (41) permeten passar d'un desenvolupament a l'altre, i obtenim les relacions següents:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n} = 2\operatorname{Re}c_n, \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2\operatorname{Im}c_n, \quad n \geq 1}$$

Com que $c_n = (a_n - jb_n)/2$ i $c_{-n} = (a_n + jb_n)/2$, tenim que $c_{-n} = \overline{c_n}$. Per tant:

A més, el possible caràcter parella/senar de la funció f ara es tradueix en el fet següent:

$$\boxed{f \text{ parella} \implies c_k \text{ és real,}} \quad \boxed{f \text{ senar} \implies c_k \text{ és imaginari pur.}} \quad (44)$$

Com en el cas del desenvolupament en sèrie trigonomètrica, quan la funció f té període T , un canvi d'escala amb factor $2\pi/T$ permet obtenir el desenvolupament següent, on $\omega_0 = 2\pi/T$:

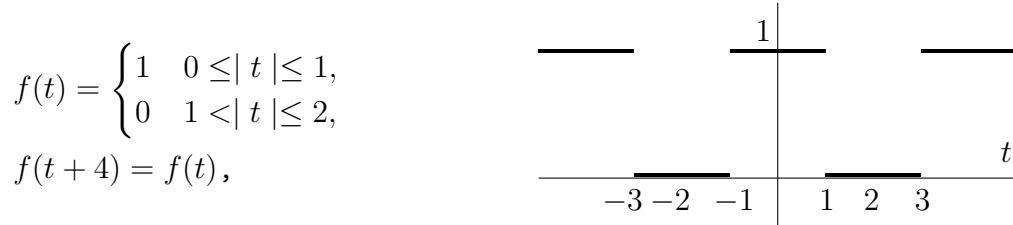
$$\boxed{f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},} \quad \boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad -\infty < k < \infty.} \quad (45)$$

Finalment, la *igualtat de Parseval* per a la sèrie complexa de Fourier és

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,} \quad (46)$$

on $|c_k|$ designa el mòdul del nombre complex c_k .

Exemple 6.1. Per a la funció periòdica amb període 4



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

$$f(t+4) = f(t),$$

tenim

$$c_k = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \stackrel{(k \neq 0)}{=} \frac{1}{-2jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Quan $k = 2m$ és parell, $\sin(k\frac{\pi}{2}) = \sin m\pi = 0$, mentre que quan $k = 2m - 1$ és senar, $\sin(k\frac{\pi}{2}) = \sin((2m - 1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1}$, aleshores resulta

$$c_{2m} = 0, \quad c_{2m-1} = \frac{1}{(2m-1)\pi} (-1)^{m-1}.$$

El càlcul anterior no és vàlid per a $k = 0$, per tant cal calcular el coeficient c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2}.$$

Així el desenvolupament en sèrie complexa de Fourier de f és

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m-1} (-1)^{m-1} e^{j(2m-1)\frac{\pi}{2}t}.$$

En aquest cas, la identitat de Parseval dóna

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2},$$

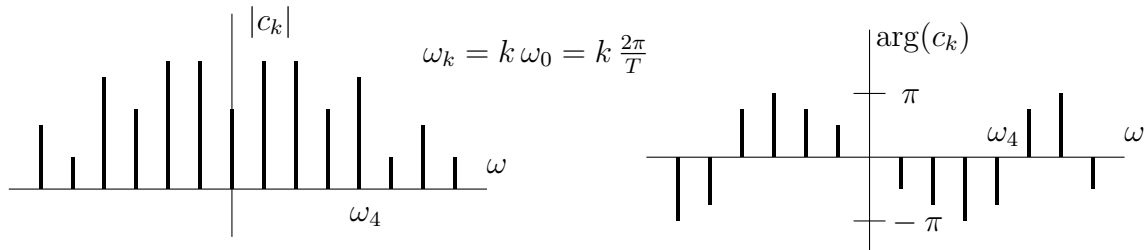
d'on obtenim (com en l'exemple 5.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

7 Espectre d'una funció

Mitjançant el desenvolupament en sèrie de Fourier (22) o (45) d'una funció periòdica de període T , obtenim una descomposició de la funció com a suma de funcions sinusoidals o d'exponencials complexes de diferents freqüències. Totes les pulsacions (en radians) $\omega_k = k \frac{2\pi}{T}$ (a les quals anomenem freqüències per abús de llenguatge) són múltiples enters de la *pulsació fonamental* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ i s'anomenen *harmònics*. En desenvolupar en sèrie de Fourier s'*analitza* la funció per determinar les components, a_k i b_k , o bé c_k , de cadascuna d'aquestes freqüències, mentre que en sumar la sèrie de Fourier es *sintetitza* la funció a partir dels seus harmònics. El conjunt de tots aquests valors (freqüències i coeficients) formen l'*espectre* de la funció f .

Per “visualitzar” l'espectre, en el cas de la sèrie de Fourier complexa (45), podem representar per separat els mòduls o *amplituds* $|c_k|$ i els arguments o *fases* $\arg(c_k)$ per a les diferents freqüències ω_k , com fem a la figura següent. Així obtenim els anomenats *espectre d'amplitud* i *espectre de fase*.



Espectre d'amplitud i espectre de fase

Observem que per a una funció f real (com hem suposat fins ara)

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad \implies \quad |c_{-k}| = |c_k|, \quad \arg(c_{-k}) = -\arg(c_k),$$

i per tant les gràfiques tenen les simetries indicades: parella per a l'espectre d'amplitud i senar per al de fase.

A partir de la sèrie de Fourier trigonomètrica podem convertir cada sumand $a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ a la forma *mòdul-fase* $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$, perquè a partir de les relacions següents:

$$a_k = A_k \cos \theta_k, \quad b_k = -A_k \sin \theta_k; \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k \geq 1, \quad A_0 = a_0/2 \quad \tan \theta_k = -\frac{b_k}{a_k};$$

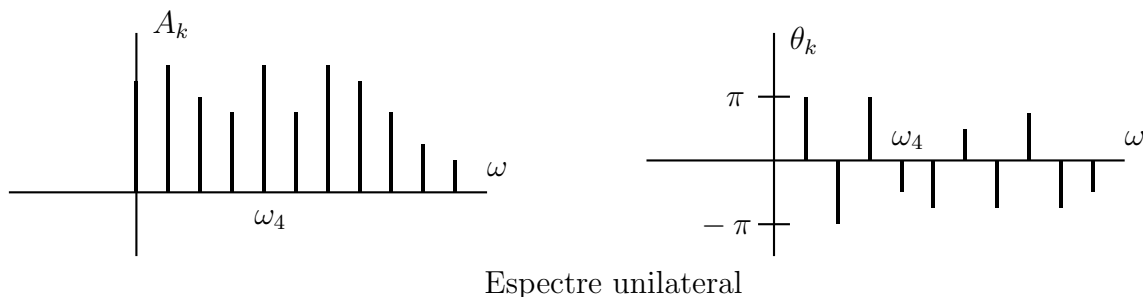
obtenim

$$A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) = A_k (\cos \omega_k t \cos \theta_k - \sin \omega_k t \sin \theta_k) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$$

i la sèrie de Fourier en la forma mòdul-fase:

$$A_0 + \sum_{k \geq 1} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k).$$

En representar els valors d' A_k i θ_k per a $k \geq 0$ obtenim l'anomenat *espectre unilateral*.



8 De la sèrie de Fourier a la transformada de Fourier

En moltes aplicacions intervenen funcions que, sense ser periòdiques, tenen uns certs “components periòdics”. Per exemple, el consum d’energia durant un llarg període de temps no és una funció periòdica, però conté oscil·lacions amb període d’un dia (consum més gran durant el dia que durant la nit), amb període d’una setmana (consum més gran en dies feiners que durant el cap de setmana) i també anuals (en general, consum més gran a l’hivern que a l’estiu). A més, hi haurà alteracions causades per diferents circumstàncies de caràcter aleatori o imprevisible. La transformada de Fourier és una eina fonamental per analitzar aquest tipus de dades i extreure’n la informació periòdica amagada.

Comencem veient que la transformada de Fourier pot obtenir-se com un cas límit de la sèrie (complexa) de Fourier per a funcions periòdiques quan el període $T \rightarrow \infty$. Enfocarem aquest tema de manera informal, és a dir, sense entrar en qüestions teòriques que queden fora de l’abast d’aquests apunts.

Sigui f una funció no periòdica definida per a $t \in \mathbb{R}$. Podem aproximar-la mitjançant una funció periòdica \tilde{f} , amb període T , que per a $-T/2 < t < T/2$ coincideix amb la funció original:

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad -T/2 < t < T/2, \quad \tilde{f}(t + T) = \tilde{f}(t).$$

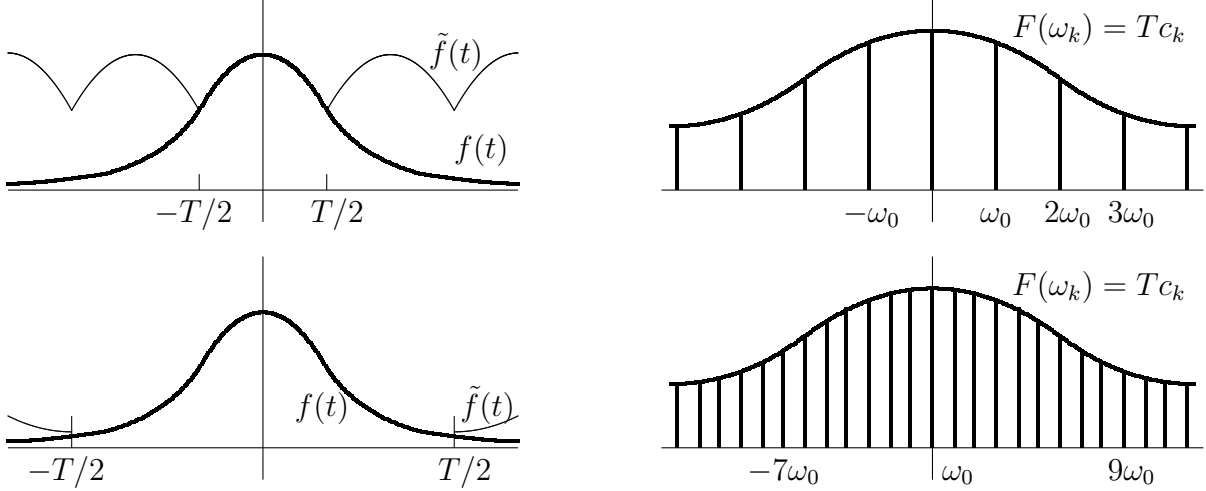
El desenvolupament en sèrie (complexa) de Fourier de \tilde{f} és

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

on $\omega_0 = 2\pi/T$. Definim una funció $F(\omega)$ que per als valors discrets $\omega_k = k\omega_0$ val $F(\omega_k) = F(k\omega_0) = Tc_k$, podem reescriure aquestes equacions en la forma

$$F(\omega_k) = Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(k\omega_0)}{T} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$



La figura anterior il·lustra aquesta aproximació per al cas d'una funció f parella. Les línies de l'espectre de la funció $\tilde{f}(t)$ estan separades per la quantitat $\omega_0 = 2\pi/T$, de manera que es van ajuntant en créixer T . En multiplicar per T els valors de l'espectre, c_k , obtenim els valors de $F(\omega)$ avaluada en punts $\omega_k = k\omega_0$, que es van aproximant en créixer T .

Ara, per a $T \rightarrow \infty$, si acceptem que $\tilde{f}(t) \rightarrow f(t)$, obtenim

$$F(\omega_k) = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \longrightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \Delta\omega \quad \longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Podem interpretar la sèrie com una suma de Riemann de la darrera integral en avaluar la funció $F(\omega) e^{j\omega t}$ de la variable contínua ω en els punts $\omega_k = k\omega_0$, els quals estan separats per la quantitat $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \omega_0 = 2\pi/T$, la qual tendeix a 0 quan $T \rightarrow \infty$. Així arribem a la transformada de Fourier que definim en la secció següent.

Observem que, com que $F(\omega)$ és en general una funció complexa, no perdem res si acceptem la possibilitat que $f(t)$ també ho sigui. Amb això guanyem en simetria, en considerar que tant f com F són funcions complexes de variable real.

9 La transformada de Fourier

Sigui f una funció complexa de variable real, més concretament, una funció definida per a $t \in \mathbb{R}$ amb valors $f(t) \in \mathbb{C}$. D'acord amb l'aproximació de la secció anterior, definim la seva **transformada de Fourier** com la funció complexa de variable real ω com:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (47)$$

A partir de $F(\omega)$ recuperem $f(t)$ mitjançant la fórmula d'**inversió** de la transformada:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}. \quad (48)$$

Observem la similitud entre les dues fórmules: només es diferencien en el signe de ωt en l'exponencial de la integral i en la presència del factor $1/2\pi$ en la fórmula d'inversió. Això es tradueix en el fet que cada propietat de la transformada en té una d'anàloga si invertim els papers del “temps” i la “freqüència”.

Segons el context, utilitzarem alguna de les notacions següents:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}, \quad f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

i direm que $F(\omega)$ és la *transformada de Fourier* de $f(t)$, que $f(t)$ és la *transformada inversa* o *antitransformada* de $F(\omega)$, o que $f(t)$ i $F(\omega)$ són una parella “funció - transformada”, respectivament.

Entre les notacions alternatives utilitzades en la literatura i en les diferents aplicacions, la més freqüent és

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\},$$

obtingudes a partir de (47) i (48) en fer $\omega = 2\pi f$, on f és la freqüència. Aquí no la utilitzarem.

Hi ha diversos marcs teòrics en els quals es pot demostrar rigorosament que la transformada de Fourier està ben definida i que la fórmula d'inversió és vàlida. El més interessant per a les aplicacions (per la seva interpretació en termes d'energia) és el de les (classes de) funcions de quadrat integrable (en el sentit de Lebesgue):

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

De moment, suposarem que estem en aquesta situació, és a dir, que $f(t)$ (i també $F(\omega)$) són funcions de quadrat integrable. A la secció 12 ampliarem aquest marc per incloure altres funcions usals.

Exemple 9.1. Considerem l'*impuls rectangular*

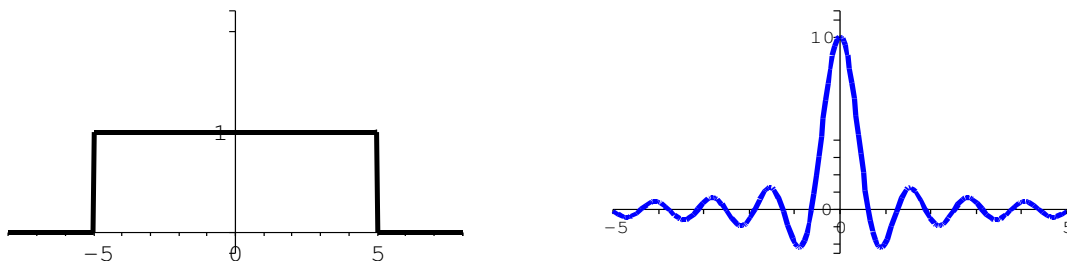
$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a, \\ 0 & |t| > a. \end{cases}$$

La seva transformada de Fourier és

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = \frac{2}{\omega} \sin \omega a.$$

Si introduïm la funció $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, podem expressar el resultat en la forma

$$p_a(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin \omega a = 2a \text{sinc} \left(\frac{\omega a}{\pi} \right). \quad (49)$$

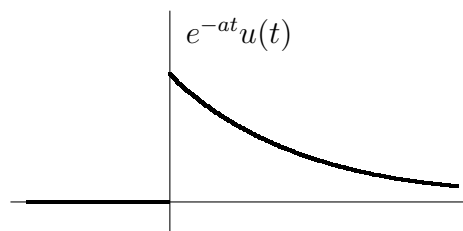


Impuls rectangular i la seva transformada

Observem que la transformada és una funció real, amb una discontinuïtat evitable en $\omega = 0$ i que s'anul·la quan $\omega a = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Exemple 9.2. Donada la funció

$$f(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (a > 0)$$



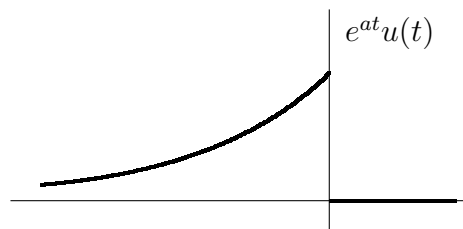
la seva transformada de Fourier és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega},$$

perquè per a $a > 0$ tenim $|e^{-(a+j\omega)t}| = |e^{-at}e^{-j\omega t}| = e^{-at} \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$.

Exemple 9.3. Anàlogament, donada la funció

$$f(t) = e^{at}u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0, \\ e^{at} & t < 0, \end{cases} \quad (a > 0)$$



la seva transformada de Fourier és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega}.$$

Cal tenir en compte que $e^{(a-j\omega)t} = e^{at} \cos \omega t - j e^{at} \sin \omega t$ i que e^{at} tendeix a 0 quant t tendeix a $-\infty$, atès que $a > 0$.

10 Propietats de la transformada de Fourier

10.1 Propietats bàsiques

El quadre següent conté les principals propietats de la transformada de Fourier.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

1. Linealitat

$$af(t) + bg(t) \longleftrightarrow aF(\omega) + bG(\omega)$$

2. Derivació (si $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$)

a) En temps $f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega) \quad f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

b) En freqüència $-jtf(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) \quad (-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$

3. Integració (si $\omega \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^t f(s) ds \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

4. Translació

a) En temps $f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$

b) En freqüència $f(t) e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

5. Modulació

$$f(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$$

6. Canvi d'escala (si $a \neq 0$)

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Conseqüència per a $a = -1$: $f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$

7. Conjugació

$$\overline{f(t)} \longleftrightarrow \overline{F(-\omega)}$$

8. Dualitat

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

La demostració de totes aquestes propietats és senzilla. A continuació, en demostrem només algunes.

- Derivació en temps (si $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$): Integrant per parts, tenim

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Com que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$, obtenim

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega).$$

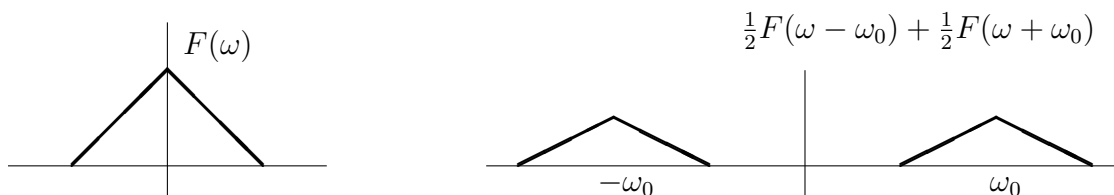
- Translació en freqüència: A partir de la definició de $\mathcal{F}\{f(t)\}$, trobem

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0).$$

- Modulació: A partir de la propietat de translació en freqüència, obtenim

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\}) = \frac{1}{2}(F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)).$$

La figura següent il·lustra aquesta propietat.

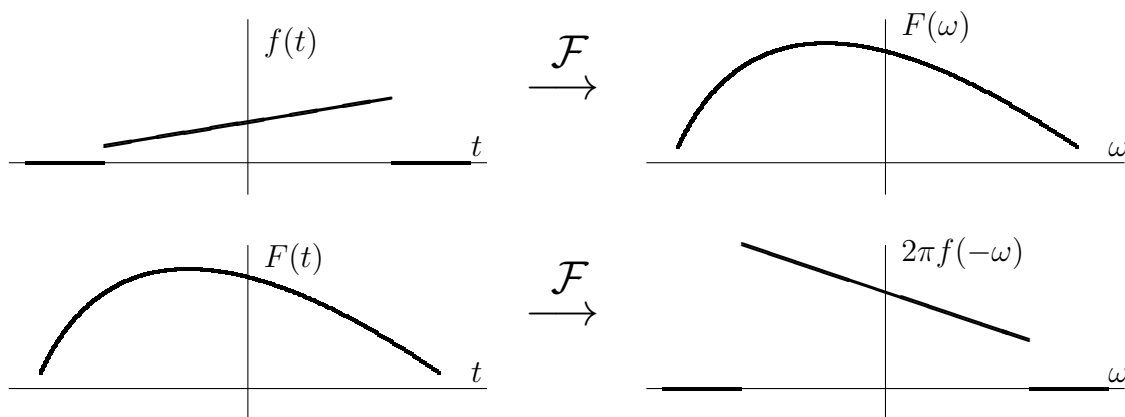


- Dualitat:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{jt(-\omega)} dt \right) = 2\pi f(-\omega),$$

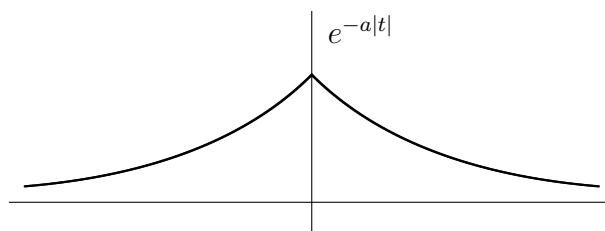
on hem utilitzat la fórmula d'inversió (48) amb els papers de t i ω intercanviats.

Observem que la propietat de dualitat també és conseqüència de la similitud entre les fórmules de transformada i inversió. La figura següent mostra aquesta propietat.



Exemple 10.1. Donada la funció

$$f(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0, \\ e^{at} & t < 0, \end{cases} \quad (a > 0)$$

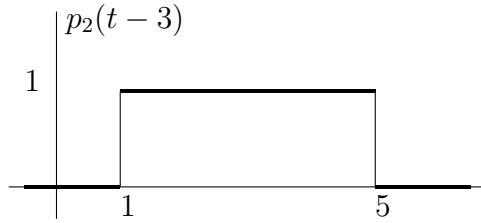


la qual es pot veure com la suma $e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ de les funcions dels exemples 9.2 i 9.3, per la propietat de linealitat, obtenim:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} + \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Observem, a més, que podem deduir $\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}$ a partir de $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}$ mitjançant la propietat $f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$.

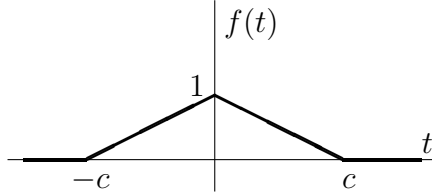
Exemple 10.2. Considerem l'impuls rectangular

$$f(t) = p_2(t-3) = \begin{cases} 0 & t < 1, \\ 1 & 1 < t < 5, \\ 0 & t > 5. \end{cases}$$


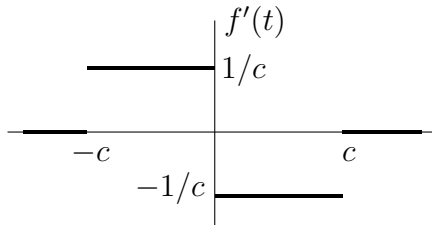
Utilitzant la propietat de translació a partir de $p_2(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$, obtenim

$$\mathcal{F}\{p_2(t-3)\} = e^{-j3\omega} \mathcal{F}\{p_2(t)\} = e^{-j3\omega} \frac{2}{\omega} \sin 2\omega = \frac{1}{j\omega} e^{-j3\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) = \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - e^{-j5\omega}).$$

Exemple 10.3. Considerem l'impuls triangular

$$f(t) = q_c(t) = \begin{cases} 0 & t < -c, \\ 1 + t/c & -c < t < 0, \\ 1 - t/c & 0 < t < c, \\ 0 & t > c. \end{cases}$$


Podem calcular la seva transformada directament, però també la podem obtenir utilitzant les tres primeres propietats. Comencem calculant la funció derivada, la qual és una funció més senzilla:

$$f'(t) = q'_c(t) = \begin{cases} 0 & t < -c, \\ 1/c & -c < t < 0, \\ -1/c & 0 < t < c, \\ 0 & t > c, \end{cases}$$


la qual es pot reescriure com

$$f'(t) = \frac{1}{c} p_{c/2}(t + c/2) - \frac{1}{c} p_{c/2}(t - c/2).$$

Per la propietat de derivació $\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$, utilitzant les propietats de linealitat i translació per transformar els termes de la dreta, obtenim:

$$\begin{aligned} j\omega F(\omega) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{c}p_{c/2}\left(t + \frac{c}{2}\right) - \frac{1}{c}p_{c/2}\left(t - \frac{c}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{c}\mathcal{F}\left\{p_{c/2}\left(t + \frac{c}{2}\right)\right\} - \frac{1}{c}\mathcal{F}\left\{p_{c/2}\left(t - \frac{c}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{c}e^{j\omega c/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega c}{2} - \frac{1}{c}e^{-j\omega c/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega c}{2} = \frac{4j}{\omega c} \sin^2 \left(\frac{\omega c}{2}\right). \end{aligned}$$

Per tant, obtenim $F(\omega)$ dividint per $j\omega$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{q_c(t)\} = \frac{4}{\omega^2 c} \sin^2 \left(\frac{\omega c}{2}\right) = c \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega c}{2\pi}\right). \quad (50)$$

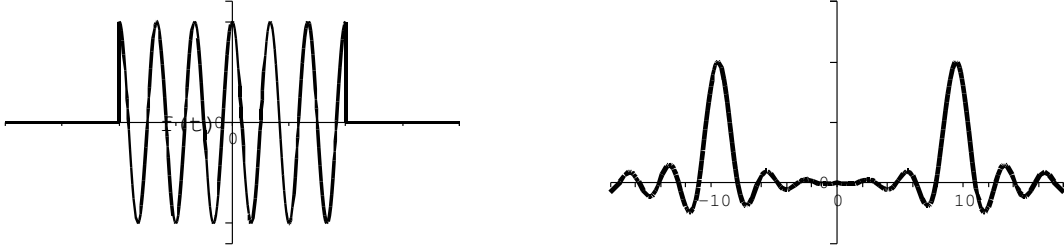
Exemple 10.4. Considerem la funció

$$f(t) = p_2(t) \cos 3\pi t = \begin{cases} \cos 3\pi t & |t| < 2, \\ 0 & |t| > 2. \end{cases}$$

Com que $p_2(t) \leftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$, per la propietat de modulació obtenim

$$\mathcal{F}\{p_2(t) \cos 3\pi t\} = \frac{1}{\omega - 3\pi} \sin 2(\omega - 3\pi) + \frac{1}{\omega + 3\pi} \sin 2(\omega + 3\pi) \quad (51)$$

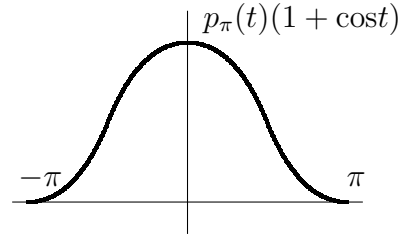
$$= \left(\frac{1}{\omega - 3\pi} + \frac{1}{\omega + 3\pi} \right) \sin 2\omega = \frac{2\omega}{\omega^2 - 9\pi^2} \sin 2\omega. \quad (52)$$



La funció $p_2(t) \cos 3\pi t$ i la seva transformada

Exemple 10.5. Considerem la funció

$$f(t) = p_\pi(t)(1 + \cos t) = \begin{cases} 1 + \cos t & |t| < \pi, \\ 0 & |t| > \pi. \end{cases}$$



Per la propietat de linealitat,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{p_\pi(t)(1 + \cos t)\} = \mathcal{F}\{p_\pi(t)\} + \mathcal{F}\{p_\pi(t) \cos t\}.$$

Ja sabem que

$$\mathcal{F}\{p_\pi(t)\} = \frac{2}{\omega} \sin \omega \pi.$$

Per a l'altre terme, amb la propietat de modulació, obtenim

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_\pi(t) \cos t\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega - 1} \sin(\omega - 1)\pi + \frac{2}{\omega + 1} \sin(\omega + 1)\pi \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega + 1} \right) \sin \omega \pi = \frac{-2\omega}{\omega^2 - 1} \sin \omega \pi, \end{aligned}$$

perquè $\sin(\omega \pm 1)\pi = -\sin \omega \pi$. Per tant,

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{p_\pi(t)(1 + \cos t)\} = \left(\frac{2}{\omega} - \frac{2\omega}{\omega^2 - 1} \right) \sin \omega \pi = \frac{2}{\omega(1 - \omega^2)} \sin \omega \pi = \frac{2\pi}{(1 - \omega^2)} \operatorname{sinc} \omega.$$

Exemple 10.6. Per determinar la transformada de Fourier de la funció $f(t) = \frac{1}{t} \operatorname{sinc} t$ utilitzem la propietat de dualitat a la parella $p_1(t)$ i la seva transformada:

$$p_1(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin \omega$$

$$\omega \rightarrow t \quad \times \quad t \rightarrow -\omega$$

$$\frac{2}{t} \operatorname{sinc} t \longleftrightarrow 2\pi p_1(-\omega) = 2\pi p_1(\omega),$$

perquè $p_a(t)$ és una funció parella. Així,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t} \operatorname{sinc} t \right\} = \pi p_1(\omega).$$

10.2 Transformada de funcions reals

En general, la funció f és una funció complexa de variable real. La seva transformada de Fourier, també complexa, la podem escriure en la forma:

$$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega), \tag{53}$$

on $R(\omega)$ és la part real de $F(\omega)$ i $I(\omega)$, la seva part imaginària. En el cas particular (i important), que f sigui una funció *real*, és a dir, que $f(t)$ sigui real per a tot t , utilitzant la propietat de conjugació, obtenim

$$\begin{aligned} f(t) \text{ real} &\Leftrightarrow f(t) = \overline{f(t)} \Leftrightarrow F(\omega) = \overline{F(-\omega)} \\ &\Leftrightarrow R(\omega) + jI(\omega) = R(-\omega) - jI(-\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} R(\omega) = R(-\omega), \\ I(\omega) = -I(-\omega). \end{cases} \end{aligned}$$

En altres paraules,

Quan f és una funció **real**, la part real de la seva transformada de Fourier és una funció **parella**, mentre que la seva part imaginària és una funció **senar**.

Podem comprovar que això passa en tots els exemples anteriors, perquè sempre hem tractat amb funcions reals. Així, en l'exemple 9.2, obteníem (per a $a > 0$) la parella

$$f(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} - j\frac{\omega}{\omega^2 + a^2}.$$

Per tant,

$$R(\omega) = \frac{a}{\omega^2 + a^2}, \quad I(\omega) = -\frac{\omega}{\omega^2 + a^2}.$$

Considerem ara els casos en els quals, a més de ser real, f és una funció parella o senar. Quan f és parella:

$$f(t) \text{ parella} \Leftrightarrow f(t) = f(-t) \Leftrightarrow F(\omega) = F(-\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} R(\omega) = R(-\omega), \\ I(\omega) = I(-\omega), \end{cases}$$

però si f és real, cal que a més $I(\omega) = -I(-\omega)$, és a dir, $I(\omega)$ ha de ser a la vegada una funció parella i senar. Això només és possible si $I(\omega) = 0$ i, aleshores, $F(\omega) = R(\omega)$:

*Quan f és una funció **real i parella**, la seva transformada de Fourier és una funció **real i parella** i recíprocament.*

Anàlogament, quan f és senar,

$$f(t) \text{ senar} \Leftrightarrow f(t) = -f(-t) \Leftrightarrow F(\omega) = -F(-\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} R(\omega) = -R(-\omega), \\ I(\omega) = -I(-\omega), \end{cases}$$

i si f és real, cal que a més $R(\omega) = R(-\omega)$. Ara, $R(\omega) = 0$ i $F(\omega) = jI(\omega)$:

*Quan f és una funció **real i senar**, la seva transformada de Fourier és una funció **imaginària pura i senar** i recíprocament.*

Com ja havíem vist en la secció 4.3, qualsevol funció té una única descomposició com a suma d'una funció parella i una altra de senar. D'acord amb el que hem dit, la part parella ha de tenir una transformada real (i parella), mentre que la part senar ha de tenir una transformada imaginària pura (i senar). Per tant, tenim

$$\begin{aligned} f(t) &= f_p(t) + f_s(t) \\ \mathcal{F} \downarrow \quad \quad \mathcal{F} \downarrow \quad \quad \mathcal{F} \downarrow & \\ F(\omega) &= R(\omega) + jI(\omega) \end{aligned} \tag{54}$$

és a dir, la part real de $F(\omega)$ és la transformada de la part parella de f i la part imaginària de $F(\omega)$ multiplicada per j és la transformada de la part senar de f .

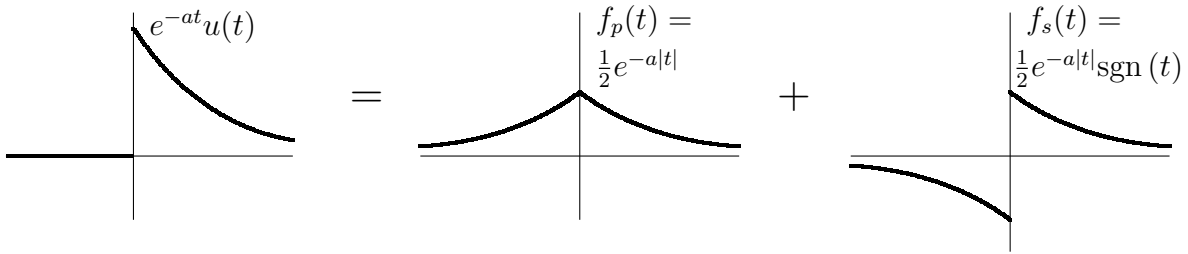
Exemple 10.7. La funció $f(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$, té la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} + j \frac{-\omega}{\omega^2 + a^2}.$$

Respecte de la seva descomposició parella + senar $f(t) = f_p(t) + f_s(t)$, tenim

$$f_p(t) = \frac{e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} e^{-a|t|},$$

$$f_s(t) = \frac{e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} e^{-a|t|} \text{sgn}(t),$$



com il·lustrem a la figura anterior, on sgn és l'anomenada *funció signe*:

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ -1 & t < 0. \end{cases} \quad (55)$$

D'acord amb (54), per a les parts parella i senar de f , tenim

$$f_p(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{a}{\omega^2 + a^2}, \quad (56)$$

$$f_s(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \quad \longleftrightarrow \quad j \frac{-\omega}{\omega^2 + a^2}. \quad (57)$$

10.3 Transformacions sinus i cosinus

La descomposició $f(t) = f_p(t) + f_s(t)$ i el comportament de les funcions parelles i senars en integrar en intervals simètrics respecte de l'origen permeten expressar la transformada de Fourier en la forma

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_p(t) + f_s(t)) e^{-j\omega t} dt \quad (58)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f_p(t) + f_s(t)) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \quad (59)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) \sin \omega t dt \quad (60)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt - 2j \int_0^{\infty} f_s(t) \sin \omega t dt. \quad (61)$$

Notem que a (57) les integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \sin \omega t dt$ i $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) \cos \omega t dt$ són 0, perquè els integrands són funcions senars. Això porta a definir les *transformades cosinus i sinus* d'una funció real f mitjançant

$$\boxed{\mathcal{F}_C\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad \mathcal{F}_S\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt,} \quad (62)$$

respectivament, cosa que permet calcular la transformada de Fourier d'una funció real fent integrals reals. En efecte, el càlcul (58) permet afirmar que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_C\{f_p(t)\} - 2j\mathcal{F}_S\{f_s(t)\}. \quad (63)$$

En particular, quan f és parella o senar,

$$\boxed{f \text{ parella} \implies \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_C\{f(t)\} \quad \text{i} \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_C(\omega) \cos \omega t d\omega.} \quad (64)$$

$$\boxed{f \text{ senar} \implies \mathcal{F}\{f(t)\} = -2j\mathcal{F}_S\{f(t)\} \quad \text{i} \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_S(\omega) \sin \omega t d\omega.} \quad (65)$$

Exemple 10.8. Donada la funció parella $f(t) = e^{-a|t|}$, tenim

$$\mathcal{F}_C\{e^{-a|t|}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{a}{\omega^2 + a^2}, \quad \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = 2\mathcal{F}_C\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2},$$

mentre que per a la funció senar $f(t) = e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)$:

$$\mathcal{F}_S\{e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\omega^2 + a^2},$$

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)\} = -2j\mathcal{F}_S\{e^{-a|t|}\} = -\frac{2j\omega}{\omega^2 + a^2}.$$

10.4 Identitat de Parseval

Com en el cas de la sèrie de Fourier, ara també existeix una relació directa entre l'“energia” de $f(t)$ i la de la seva transformada $F(\omega)$, la qual es coneix com a *relació, identitat o teorema de Parseval*:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.} \quad (66)$$

Podem justificar-la com en la secció 8: a partir de la identitat de Parseval per a la sèrie de Fourier de $\tilde{f}(t)$ (la funció periòdica amb període T que coincideix amb $f(t)$ per a $-T/2 < t < T/2$), obtenim

$$\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{f}(t)|^2 dt = T \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = T \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega_k)|^2}{T^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_k)|^2 \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_k)|^2 \Delta\omega,$$

la qual, per a $T \rightarrow \infty$, dóna (66).

Exemple 10.9. Comprovem la relació per a la parella $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}$, $a > 0$. Tenim

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at} u(t)|^2 dt = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = 2\pi \frac{1}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{j\omega + a} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{a} \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a}.$$

Exemple 10.10. Calculem $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin^2 x dx$.

La identitat de Parseval per al parell $p_1(t) \leftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin \omega$ ens dona

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_1(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 dt = 2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2}{\omega} \sin \omega \right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega d\omega,$$

per tant, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega d\omega = \pi$. Com que $\frac{1}{x^2} \sin^2 x$ és una funció parella, obtenim

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

11 El producte de convolució

Ara introduïm una operació entre funcions, que ens serà molt útil per les propietats que té en relació amb la transformada de Fourier.

Definició 6 Definim el **producte de convolució** de dues funcions f i g com la funció

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds. \quad (67)$$

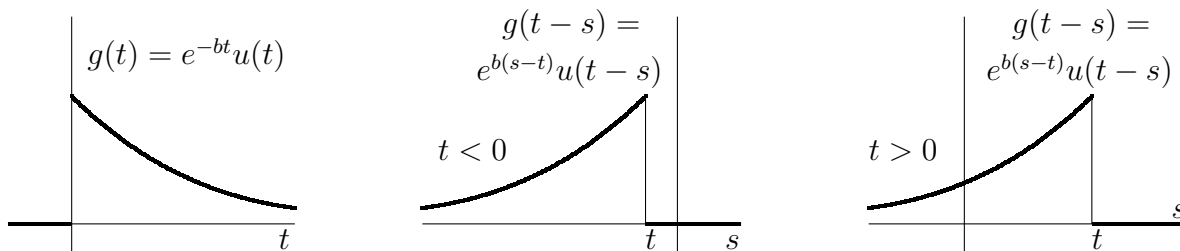
Exemple 11.1. Per calcular el producte de convolució de les funcions

$$f(t) = e^{-at} u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad g(t) = e^{-bt} u(t) = \begin{cases} e^{-bt} & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad a, b > 0,$$

primer cal que observem que, mentre que no existeix cap dificultat per obtenir la funció $f(s)$, per a la funció $g(t-s)$ (com a funció de la variable s per a diferents valors del paràmetre t), tenim

$$g(t-s) = e^{-b(t-s)} u(t-s) = \begin{cases} e^{b(s-t)} & s < t, \\ 0 & s > t, \end{cases}$$

com mostrem a la figura següent.



Així, $(f * g)(t) = 0$ per a $t < 0$, perquè qualsevol que sigui s , o bé $f(s) = 0$, o bé $g(t - s) = 0$. Quan $t > 0$, el producte $f(s)g(t - s)$ només és $\neq 0$ per a $0 < s < t$, cosa que ens dóna

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t - s) ds = \int_0^t e^{-as}e^{b(s-t)} ds \\ &= e^{-bt} \int_0^t e^{-as}e^{bs} ds = e^{-bt} \frac{e^{(b-a)s}}{b-a} \Big|_0^t = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\end{aligned}$$

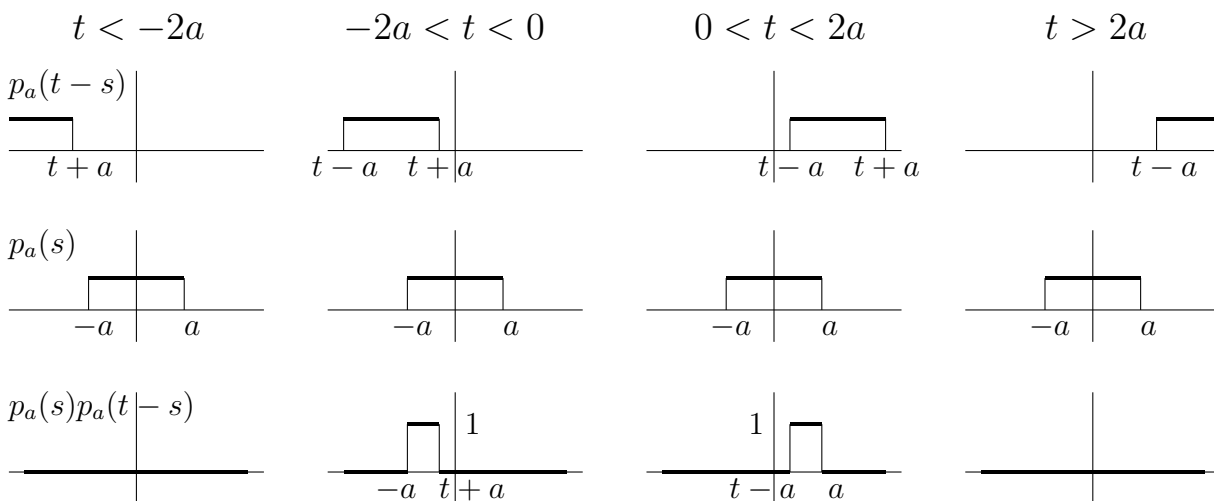
si $a \neq b$. Per tant,

$$(f * g)(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} u(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

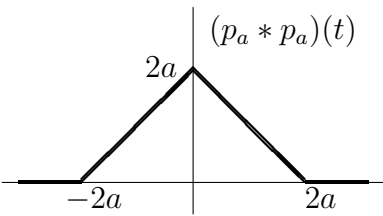
Exercici. Comproveu que, per a $a = b$, obtenim $(f * g)(t) = te^{-at}u(t)$.

Com que el producte de convolució és una integral en la variable s que s'ha de calcular per a tots els valors de $t \in \mathbb{R}$, en moltes aplicacions es pot fer gràficament. Per això, interpretem que a mesura que t recorre la recta real en sentit positiu, $-\infty < t < \infty$, la gràfica de la funció $g(t - s)$ va avançant i que, per a cada posició concreta (que correspon a cada valor concret de t), calculem la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t - s) ds$. Podem interpretar així l'exemple anterior, quan primer obteníem el producte per a $t < 0$ i, posteriorment, per a $t > 0$. Aquest procediment, anomenat *convolució gràfica*, és especialment còmode quan alguna de les funcions només pren valors constants, de manera que el càlcul d'integrals es redueix a un càlcul senzill d'àrees, com mostrem en l'exemple següent.

Exemple 11.2. Per calcular $(p_a * p_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(s)p_a(t - s) ds$, cal que considerem essencialment les quatre situacions de la figura segons els diferents valors de t . (Notem que el punt mig del pols traslladat $p_a(t - s)$ és t .)



Avaluant les àrees “sota” aquesta última funció, obtenim

$$(p_a * p_a)(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t + 2a & -2a < t < 0 \\ 2a - t & 0 < t < 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases} = 2aq_{2a}(t).$$


El resultat següent justifica la introducció del producte de convolució en el context de la transformada de Fourier.

Teorema 7 (de convolució). Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ i $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, tenim

$$\text{Convolució en temps:} \quad \boxed{f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega)G(\omega).} \quad (68)$$

$$\text{Convolució en freqüència:} \quad \boxed{f(t)g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega).} \quad (69)$$

Exemple 11.3. Amb el teorema de convolució i l'exemple 10.3, el resultat de l'exemple anterior és immediat:

$$\mathcal{F}\{p_a(t) * p_a(t)\} = \mathcal{F}\{p_a(t)\}\mathcal{F}\{p_a(t)\} = \left(\frac{2}{\omega}\sin\omega a\right)^2 = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\omega a = \mathcal{F}\{2aq_{2a}(t)\}.$$

Exemple 11.4. Comprovem que per a $g(t) = e^{-at}u(t)$ tenim $(g * g)(t) = te^{-at}u(t)$. En efecte, les dues funcions tenen la mateixa transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{(g * g)(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{j\omega + a} \frac{1}{j\omega + a} = \frac{1}{(j\omega + a)^2}.$$

$$\mathcal{F}\{te^{-at}u(t)\} = j\mathcal{F}\{-jte^{-at}u(t)\} = j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega + a}\right) = \frac{1}{(j\omega + a)^2}.$$

Entre les propietats del producte de convolució, en destaquem les següents:

- (i) $f * g = g * f$,
- (ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$,
- (iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Per demostrar aquestes propietats només cal comprovar que la transformada de Fourier dels dos costats de cada igualtat coincideixen, cosa que és immediata utilitzant el teorema de convolució. Per exemple, per a la primera, tenim $\mathcal{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega) = G(\omega)F(\omega) = \mathcal{F}\{g * f\}$.

12 Funcions generalitzades

12.1 La funció generalitzada δ

Ja coneixem la funció generalitzada δ que apareix, per exemple, en calcular derivades de funcions amb discontinuïtats de salt. Així, $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$. Definim la funció generalitzada

δ mitjançant

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0) g(t) dt = \begin{cases} g(t_0) & t_0 \in (\alpha, \beta), \\ 0 & t_0 \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

per a qualsevol funció $g(t)$ contínua en t_0 . Amb això n'hi ha prou per obtenir la seva transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - t_0) dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (70)$$

En particular, per a $t_0 = 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1.} \quad (71)$$

Inversament, la propietat de translació en temps permet recuperar la transformada de $\delta(t - t_0)$ a partir de la de $\delta(t)$:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-j\omega t_0}. \quad (70)$$

Podem comprovar fàcilment les següents *propietats de la funció generalitzada* δ a partir de la seva definició o mitjançant la seva transformada de Fourier:

- (i) $\delta(t) = \delta(-t)$,
- (ii) $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$,
- (iii) $f(t) * \delta(t) = f(t)$,
- (iv) $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$.

Només comprovem la segona i la quarta (la tercera és el cas particular $t_0 = 0$ de la quarta). Per a la segona, si f i g són contínues en el punt $t_0 \in (\alpha, \beta)$,

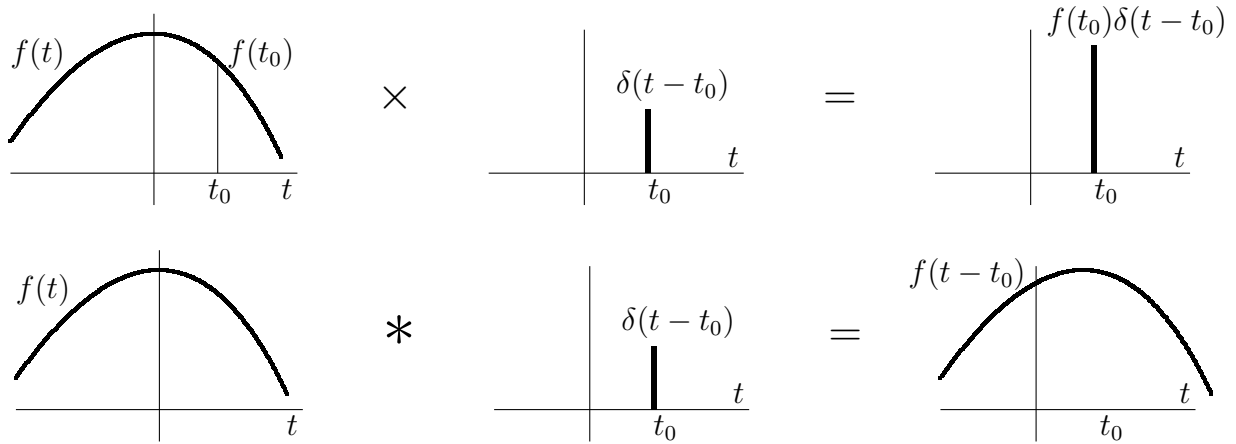
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t - t_0)g(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0)(f(t)g(t)) dt = f(t_0)g(t_0),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t_0)\delta(t - t_0)g(t) dt = f(t_0) \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0)g(t) dt = f(t_0)g(t_0).$$

En els dos casos la integral s'anul·la si $t_0 \notin [\alpha, \beta]$, per tant $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$. Per a la quarta, només cal transformar els dos costats de la igualtat, utilitzant el teorema de convolució, per obtenir

$$\mathcal{F}\{f(t) * \delta(t - t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0} = \mathcal{F}\{f(t - t_0)\}.$$

Convé distingir bé aquestes dues propietats: en la propietat (ii) fem el producte usual entre una funció f i la funció generalitzada $\delta(t - t_0)$. El resultat és aquesta mateixa $\delta(t - t_0)$ multiplicada pel valor $f(t_0)$ de la funció f en el punt $t = t_0$. En la propietat (iv) fem el producte de convolució de la funció i la funció generalitzada i el resultat és la funció f traslladada la quantitat t_0 . A la figura següent mostrem aquesta situació.



Exemple 12.1. Per comprovar que

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) = -ae^{-at}u(t) + \delta(t),$$

podem fer el càlcul

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) = \left(\frac{d}{dt}e^{-at}\right)u(t) + e^{-at}\frac{d}{dt}u(t) = -ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t) = -ae^{-at}u(t) + \delta(t),$$

on hem utilitzat la propietat (ii): $e^{-at}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$. Alternativament, també podem comprovar que els dos costats de la igualtat tenen la mateixa transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t))\right\} = j\omega \frac{1}{j\omega + a}, \quad \mathcal{F}\{-ae^{-at}u(t) + \delta(t)\} = -a \frac{1}{j\omega + a} + 1 = \frac{j\omega}{j\omega + a}.$$

Exemple 12.2. Per la propietat (iv), $p_2(t) * \delta(t - 3) = p_2(t - 3)$. Utilitzant el teorema de convolució, la seva transformada és

$$\mathcal{F}\{p_2(t - 3)\} = \mathcal{F}\{p_2(t) * \delta(t - 3)\} = \frac{2}{\omega} \sin 2\omega e^{-j3\omega} = \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - e^{-j5\omega}),$$

com havíem obtingut en l'exemple 10.2, on aleshores havíem utilitzat la propietat de translació.

12.2 Transformació de funcions periòdiques

L'ampliació de la transformada de Fourier a funcions generalitzades porta a la vegada a ampliar-la a funcions que no són de quadrat integrable, en particular, a funcions periòdiques, de manera que en un cert sentit recuperem l'essència de la sèrie de Fourier en el context de la transformada de Fourier per a funcions generalitzades.

Si comencem per la funció $f(t) \equiv 1$, veiem que no és possible calcular la seva transformada mitjançant la definició:

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt,$$

perquè no existeix aquesta integral (impròpia). Tanmateix, utilitzant la propietat de dualitat a partir del parell $\delta(t) \leftrightarrow 1$, obtenim

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (72)$$

La transformada de $e^{j\omega_0 t}$ es pot obtenir ara utilitzant la propietat de translació en freqüència:

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (73)$$

A partir d'aquesta, es dedueixen les transformades de $\cos\omega_0 t$ i $\sin\omega_0 t$ per linealitat:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)), \quad (74)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \longleftrightarrow j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)). \quad (75)$$

Exercici. Comproveu la transformada de $f(t) = \cos\omega_0 t$ a partir de la propietat de modulació.

En el context de les funcions generalitzades, la transformada de Fourier d'una funció periòdica amb període T i desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

és

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

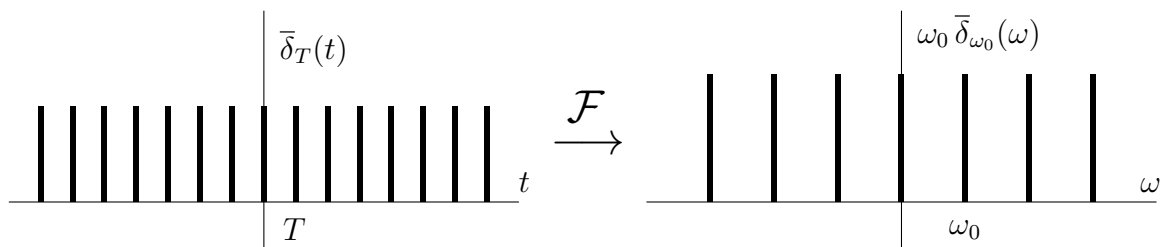
Així recuperem el desenvolupament en sèrie de Fourier dins del marc (generalitzat) de la transformada de Fourier.

12.3 Transformada d'un tren de deltes

Anomenem *tren de deltes* a la funció generalitzada

$$\bar{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (76)$$

la qual consisteix en una suma infinita de deltes equiespaiades a distància T , com il·lustrem a la figura següent.



La seva transformada de Fourier no es pot obtenir sumant les transformades de cada $\delta(t - kT)$, però sí que es pot justificar considerant el tren de deltes $\bar{\delta}_T(t)$ com l'extensió periòdica de període T de $\delta(t)$. Aleshores, amb $\omega_0 = 2\pi/T$, el seu desenvolupament en sèrie de Fourier és

$$\bar{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 k t} \quad (77)$$

perquè, utilitzant la definició (70) de la funció generalitzada $\delta(t - t_0)$ per a $t_0 = 0$, obtenim

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T}.$$

Ara només cal que utilitzem aquest resultat per a cada terme $e^{jk\omega_0 t}$ del sumatori (77), amb (73), i trobem

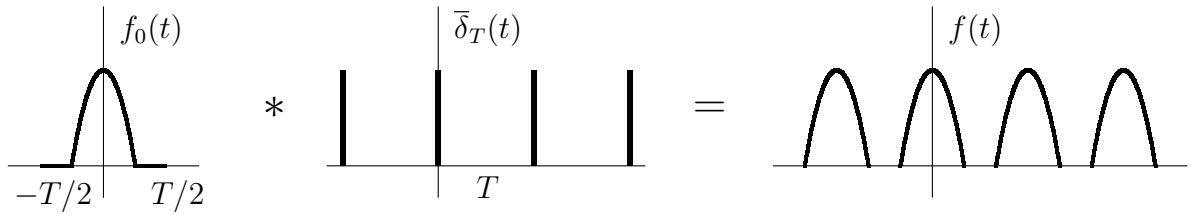
$$\mathcal{F}\{\bar{\delta}_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega). \quad (78)$$

La figura anterior també mostra aquest resultat, que podem enunciar dient que *la transformada d'un tren de deltes és un altre tren de deltes*.

Observació:

La propietat (iv) de l'apartat 12.1 la podem generalitzar ara al cas d'un tren de deltes. El que obtenim és que el producte de convolució d'una funció $f_0(t)$ definida en un interval $(-T/2, T/2)$ per un tren de deltes és una funció periòdica:

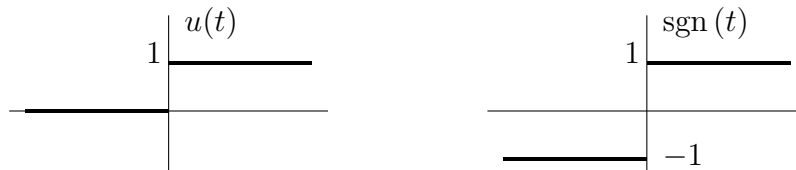
$$f_0(t) * \bar{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t - kT).$$



Observem que en cas que la separació entre les deltes fos inferior a T , es produiria un solapament en la funció periòdica (*aliasing*).

12.4 Transformada de $u(t)$

Considerem ara la funció $u(t)$ representada a la figura següent. La seva transformada de Fourier tampoc no es pot calcular directament, perquè no existeix la integral $\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt$.



Per obtenir-la, utilitzarem que $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t))$, de manera que primer obtenim la transformada de la funció signe, representada a la figura, que havíem introduït en l'exemple 10.7. A partir de $e^{-a|t|}\text{sgn}(t) \rightarrow \text{sgn}(t)$ quan $a \rightarrow 0$, obtenim, d'acord amb l'exemple esmentat,

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}.$$

Aleshores,

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} \right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (79)$$

A partir d'aquí, ara deduïm, mitjançant la propietat de translació en temps, que

$$u(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}, \quad (80)$$

on, a més, hem utilitzat la propietat (ii) de la funció generalitzada δ : $e^{-j\omega t_0}\delta(\omega) = e^0\delta(\omega) = \delta(\omega)$.

Exemple 12.3. Comprovem la transformada de $p_a(t)$ a partir de $p_a(t) = u(t + a) - u(t - a)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_a(t)\} &= \mathcal{F}\{u(t + a) - u(t - a)\} \\ &= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{j\omega a} \right) - \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega a} \right) \\ &= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = \frac{2}{\omega} \sin\omega a. \end{aligned}$$

Exemple 12.4. Per comprovar que $\frac{d}{dt}u(t - t_0) = \delta(t - t_0)$, només cal veure que les transformades dels dos costats de la igualtat coincideixen. En efecte,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}u(t - t_0)\right\} = j\omega \mathcal{F}\{u(t - t_0)\} = j\omega \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \right) = e^{-j\omega t_0} = \mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\},$$

on hem utilitzat de nou la propietat (ii) de la funció generalitzada δ : $j\omega\delta(\omega) = 0$.

El següent quadre resumeix les transformades de les funcions generalitzades.

$\delta(t)$	\longleftrightarrow	1	$u(t)$	\longleftrightarrow	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\delta(t - t_0)$	\longleftrightarrow	$e^{-j\omega t_0}$	$u(t - t_0)$	\longleftrightarrow	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}$
1	\longleftrightarrow	$2\pi\delta(\omega)$	$\cos\omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$e^{j\omega_0 t}$	\longleftrightarrow	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$\sin\omega_0 t$	\longleftrightarrow	$j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$\bar{\delta}_T(t)$	\longleftrightarrow	$\omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega)$			

13 Les quatre transformacions de Fourier

El diagrama següent mostra les quatre transformacions de Fourier, segons si les funcions f i F són periòdiques o no, i segons si les variables t i ω siguin contínues o discretes. Per a que la variable sigui contínua, s'entén que pot prendre qualsevol valor real, mentre que per a que sigui discreta, s'entén que només pot prendre valors que són múltiples enters d'una certa quantitat. Així, hem vist que per a la sèrie de Fourier d'una funció periòdica amb període T i variable $t \in \mathbb{R}$ contínua, la freqüència ω és una variable discreta que només pot prendre els valors $\omega = \omega_k = k\omega_0 = k2\pi/T$, per a $k \in \mathbb{Z}$.

$f(t)$	CONTÍNUA	t	DISCRETA
PERIÒDICA	Sèrie de Fourier	S. Discreta de Fourier	DISCRETA
f			ω
NO PERIÒDICA	Transformada de Fourier	T. Discreta en temps	CONTÍNUA
	NO PERIÒDICA	F	PERIÒDICA
			$F(\omega)$

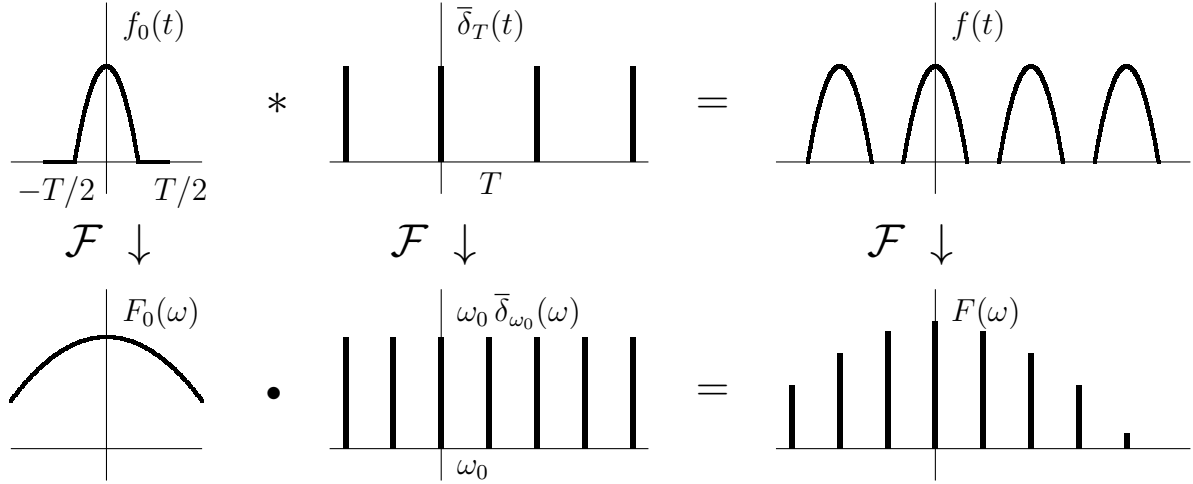
És important que observem la coincidència que hi ha entre les dues possibilitats de t i de F , per una banda, i les de ω i f , per una altra. Així, quan la variable t és contínua, la funció transformada F és no periòdica, mentre que quan t és discreta, la funció F és periòdica. Anàlogament, quan la variable ω és contínua, la funció f és no periòdica, i quan ω és discreta, f és periòdica.

Ja hem vist el desenvolupament en sèrie de Fourier i acabem d'estudiar la transformada de Fourier en la qual les dues funcions f i F són no periòdiques de variable contínua (primera columna del quadre anterior). Malgrat la seva importància en les aplicacions, no presentem la *Transformada discreta en el temps* (o Transformada de Fourier de senyals discrets) perquè, des d'un punt de vista matemàtic, és idèntica a la sèrie de Fourier intercanviant els papers del “temps” i la “freqüència”. Queda per estudiar la darrera transformada, la qual resumim a continuació.

Formalment, és possible considerar unes transformades com a cas límit d'unes altres, traspasant així les barreres entre variable discreta i contínua o entre funció periòdica i no periòdica, com hem fet amb la sèrie i la transformada de Fourier a la secció 8. També és possible incloure totes les transformades en el marc funcional generalitzat de la transformada de Fourier. Sense detallar el procediment, indiquem que en aquest darrer

cas utilitzem el resultat de la transformada d'un tren de deltes (78), juntament amb el teorema de convolució i les propietats (ii) i (iv) de la funció generalitzada δ per obtenir el desenvolupament en sèrie de Fourier d'una funció periòdica $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t - kT)$ en la forma (il·lustrada a la figura següent):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t - kT) = f_0(t) * \bar{\delta}_T(t) \longleftrightarrow F_0(\omega) \omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 F_0(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) = F(\omega).$$



Anàlogament, la transformada discreta en temps d'una funció de variable discreta $f_k = f(kT)$ s'expressa, en el context generalitzat de la transformada de Fourier, com

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \bar{\delta}_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \omega_0 F(\omega) * \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0).$$

14 La transformada discreta de Fourier

Encara que la descripció precisa de molts fenòmens cal fer-la amb variables contínues, la necessitat de computar els seus valors numèricament obliga a treballar amb un nombre finit de dades i això ens porta a utilitzar variables discretes. Així apareix la *transformada discreta de Fourier* o, simplement, *DFT*. Potser la forma més senzilla de presentar-la és com una transformada dels valors d'una seqüència o funció de variable discreta, $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ periòdica amb període N , en els d'una altra seqüència, $\{F_k : k \in \mathbb{Z}\}$, amb el mateix període N . Com a conseqüència de la periodicitat, només cal donar a n i k N valors consecutius, per exemple entre 0 i $N - 1$. Per tant, la conversió es pot realitzar mitjançant les fórmules següents:

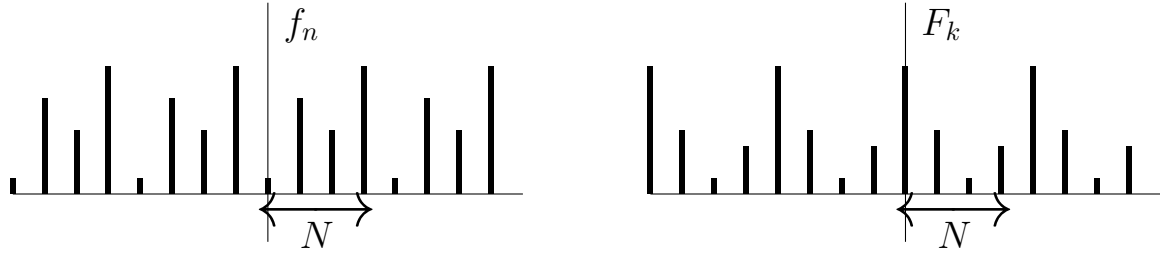
$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (81)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (82)$$

En les aplicacions, el factor $1/N$ pot aparèixer en una o altra de les dues fórmules. Per altra banda, és habitual designar l'arrel (complexa) N -èsima de la unitat, $e^{j2\pi/N}$, per w_N i escriure aleshores les fórmules (81) i (82) en la forma

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-nk}, \quad f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k w_N^{nk}, \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, N-1, \\ n = 0, 1, \dots, N-1. \end{matrix}$$

La figura següent mostra un exemple d'aquesta transformada amb període $N = 4$.



Si ens limitem a la seqüència dels N valors d'un període, podem expressar la transformada lineal (81) que permet passar dels $\{f_n : n = 0, 1, \dots, N-1\}$ als $\{F_n : n = 0, 1, \dots, N-1\}$ mitjançant una matriu quadrada $N \times N$ amb coeficients $A_{kn} = e^{-j2\pi nk/N}$. Naturalment, la transformada inversa (82) es fa mitjançant la matriu inversa que té coeficients $(A^{-1})_{nk} = \frac{1}{N} e^{j2\pi nk/N}$:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{j2\pi/N} \\ 1 & e^{-j4\pi/N} & e^{-j8\pi/N} & \dots & e^{j4\pi/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi/N} \\ 1 & e^{j4\pi/N} & e^{j8\pi/N} & \dots & e^{-j4\pi/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{j2\pi/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Exemple 14.1. Per a $N = 4$, $w_4 = e^{j2\pi/4} = e^{j\pi/2} = j$, de manera que les matrius són

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix},$$

i una parella funció-transformada estaria formada per les seqüències

$$\{1, 2, -1, 3\} \longleftrightarrow \{5, 2+j, -5, 2-j\}.$$

Exercici Comproveu que A^{-1} és la matriu inversa d' A i que la parella anterior és, efectivament, una parella funció-transformada.

L'ús massiu de la DFT en moltíssimes aplicacions és, en bona part, a causa del desenvolupament dels algorismes coneguts com a *transformada ràpida de Fourier* o *FFT*. Mentre que el càlcul de la DFT fent el producte de matrius (83) o (84) requereix N^2 multiplicacions (complexes), els algorismes de la FFT (per a $N = 2^n$) redueixen la complexitat del càlcul a aproximadament $\frac{1}{2}N \log_2 N$ multiplicacions. Per exemple, per a $N = 2^{10} = 1024$, això significa una reducció de 10^6 a $0,5 \cdot 10^4$ aproximadament, és a dir, un càlcul 200 vegades menor.