Ampliació de matemàtiques – Examen MQ – 5 d'abril de 2019

Durada: <u>2 hores</u>

Entregueu els exercicis en fulls separats. Poseu el NOM en MAJÚSCULES en tots els fulls
No es permet l'ús de calculadores ni apunts de cap tipus.
És necessari justificar totes les respostes.

`Problema 1 [2 punts]:` Sigui D la regió del pla donada per: $y + x \geq 2$ i $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Considereu la integral

$$I = \int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx\, dy.$$

a) (1,25 punts) Dibuixeu la regió D i trobeu els límits de la integral I en coordenades polars.

b) (0,75 punts) Calculeu I.

`Problema 2 [3 punts]:` Verifiqueu el Teorema de Stokes pel camp vectorial següent: $F(x,y,z) = (z-y, x-z, y-x)$, i per la superfície S formada per la unió de

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 8\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-8)^2 = 4,\ z \geq 8\}\ .$$

`Problema 3 [3,5 punts]:` Sigui W el sòlid delimitat per $x^2+y^2-2x=0$, $z=0$ i $y+z=4$, i sigui S la seva frontera, que podem descomposar en S_0, la tapa inferior o base, S_1, la tapa superior, i S_ℓ la paret lateral. Considerem també el camp $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

a) (1,5 punts) Calculeu el volum del sòlid W.

b) (0,5 punts) Sense calcular cap integral, deduïu quant val el flux del camp F a través de S.

c) (1 punt) Calculeu el flux de F a través de S_0 i el flux de F a través de S_1, orientades les dues tapes amb la normal cap a fora del sòlid.

d) (0,5 punts) Deduïu, sense calcular cap integral, quin és el flux de F a través de S_ℓ.

`Problema 4 [1,5 punts]:` Sigui $H(x,y,z) = (2xyz + z, x^2z + e^y, x^2y + x)$.

a) (0,5 punts) Calculeu el rotacional de H. És H conservatiu?

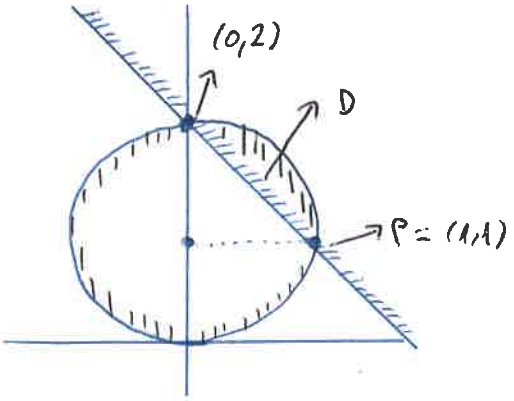
b) (1 punt) Trobeu un potencial de H.

1) D regió donada per $y+x \geq 2$, $x^2+(y-1)^2 \leq 1$.

$$I = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

a) Dibuixeu D i doneu els límits de D en la integral (en polars)

D s'obté d'intersecar un disc amb un semiplà:



• El punt p s'obté de tallar el cercle amb la recta:

$$x^2+(y-1)^2=1 \ \cap \ x+y=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(2-x-1)^2=1 \Rightarrow x^2+(x-1)^2=1 \begin{cases} x=0 \to y=2 \\ x=1 \to y=1 \end{cases}$$

• Per tant, en una parametrització a polars tindrem que l'angle varia entre $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{2}$. Per al radi cal donar les equacions en polars:

$$\begin{array}{l} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=1 \longrightarrow r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha - 2r\sin\alpha + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow \boxed{r = 2\sin\alpha} \\ x+y = 2 \Rightarrow r\cos\alpha + r\sin\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{2}{\sin\alpha+\cos\alpha}} \end{array} \right.$$

Per tant, $\frac{2}{\sin\alpha+\cos\alpha} \leq r \leq 2\sin\alpha$.

b) Calculem la integral:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\sin\alpha+\cos\alpha}}^{2\sin\alpha} \frac{\cancel{r}(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cancel{r^2}} \cancel{r}\,dr\,d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\alpha+\sin\alpha) \int_{\frac{2}{\cos\alpha+\sin\alpha}}^{2\sin\alpha} 1\,dr\,d\alpha$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\alpha+\sin\alpha)\left[2\sin\alpha - \frac{2}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right] d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 2\,d\alpha$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\underbrace{(\sin^2\alpha-1)}_{-\cos^2\alpha}\,d\alpha = \sin^2\alpha \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\,d\alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \cancel{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2a)}{\cancel{2}}\, d\alpha = \frac{1}{2} - \left[\alpha + \frac{\sin(2a)}{2}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{\pi}{4} + 0 - \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}}_{1}\right] = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Verifiqueu el Teorema de Stokes pel camp vectorial $\vec{F} = (z-y, x-z, y-x)$ i la superfície S formada per la unió de

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, 0 \leq z \leq 8\} \\ S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-8)^2 = 4, z \geq 8\} \ . \end{aligned}$$

Sol: El Teorema de Stokes diu que si $\vec{F}$ és $\mathcal{C}^1$ i C és una corba tancada corresponent a la frontera de S orientada en la direcció induïda per l'orientació de S, aleshores

$$\oint_C \vec{F} d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) d\vec{S} \ .$$

Hem de comprovar que les dues integrals donen el mateix. Podem triar la orientació de S que vulguem, mentres siguem consistents a l'hora d'orientar C. En aquest cas, orientarem S amb la normal apuntant cap a fora.

Noteu que C és la circumferència amb centre a l'origen, radi 2 i continguda al pla $\{z=0\}$, i que està orientat positivament. Una possible parametrització de C amb l'orientació correcte és

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \quad \text{amb } t \in [0, 2\pi] \ .$$

Com que $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$, tenim

$$\oint_C \vec{F} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 2\cos t, 2\sin t - 2\cos t)(-2\sin t, 2\cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 4 \ dt = 8\pi \ .$$

Ara fem la integral de superfície. Primer calculem el rotacional del camp

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (2,2,2) \ .$$

Per calcular la integral de superfície l'hem de dividir en dues parts. Per S_1 tenim la parametrització:

$$\phi_1(t,z) = (2\cos t, 2\sin t, z) \quad \text{amb } t \in [0,2\pi], z \in [0,8] \ .$$

Calculem els vectors tangents i el normal:

$$\begin{aligned} \vec{T}_t &= (-2\sin t, 2\cos t, 0) \\ \vec{T}_z &= (0,0,1) \\ \vec{T}_t \times \vec{T}_z &= (2\cos t, 2\sin t, 0) \ . \end{aligned}$$

La integral queda

$$\int_{S_1} \mathrm{rot}(\vec{F}) d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^8 (2,2,2)(2\cos t, 2\sin t, 0) dz\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^8 4(\cos t + \sin t) dz\, dt = 0$$

Per S_2 tenim la parametrització:

$$\phi_2(\theta,\varphi) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 8+2\cos\varphi) \quad \text{amb } \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi/2] \ .$$

Calculem els vectors tangents i el normal:

$$\begin{aligned}
\vec{T}_\theta &= (-2\sin\varphi\sin\theta, 2\sin\varphi\cos\theta, 0)\\
\vec{T}_\varphi &= (2\cos\varphi\cos\theta, 2\cos\varphi\sin\theta, -2\sin\varphi)\\
\vec{T}_\theta\times\vec{T}_\varphi &= (-4\sin^2\varphi\cos\theta, -4\sin^2\varphi\sin\theta, -4\sin\varphi\cos\varphi)\ .
\end{aligned}$$

Noteu que la parametrització orienta S_2 de forma incorrecte, i per tant hem de prendre el vector normal

$$(4\sin^2\varphi\cos\theta, 4\sin^2\varphi\sin\theta, 4\sin\varphi\cos\varphi)$$

La integral queda

$$\begin{aligned}
\int_{S_2}\mathrm{rot}(\vec{F})d\vec{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(2,2,2)(4\sin^2\varphi\cos\theta, 4\sin^2\varphi\sin\theta, 4\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi\, d\theta\\
&= 8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi(\cos\theta+\sin\theta)+\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\, d\theta\\
&= 8\pi\ .
\end{aligned}$$

Per tant

$$\int_S\mathrm{rot}(\vec{F})d\vec{S} = \int_{S_1}\mathrm{rot}(\vec{F})d\vec{S}+\int_{S_2}\mathrm{rot}(\vec{F})d\vec{S} = 8\pi\ ,$$

i el Teorema de Stokes es compleix en aquest cas.

Sol alternativa per S_2 (cilíndriques): Per S_2 també tenim la parametrització:

$$\hat{\phi}_2(r,\theta) = (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 8+2\sqrt{1-r^2})\quad \text{amb } r\in[0,1] \text{ i } \theta\in[0,2\pi]\ .$$

Calculem els vectors tangents i el normal:

$$\begin{aligned}
\vec{T}_r &= \left(2\cos\theta, 2\sin\theta, -\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}\right)\\
\vec{T}_\theta &= (-2r\sin\theta, 2r\cos\theta, 0)\\
\vec{T}_r\times\vec{T}_\theta &= \left(\frac{4r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{4r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, 4r\right)\ .
\end{aligned}$$

Noteu que la parametrització orienta S_2 de forma correcte. La integral queda

$$\int_{S_2}\mathrm{rot}(\vec{F})d\vec{S} = 8\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}(\cos\theta+\sin\theta)+r\ d\theta\, dr = 16\pi\int_0^1 r\ dr = 8\pi\ .$$

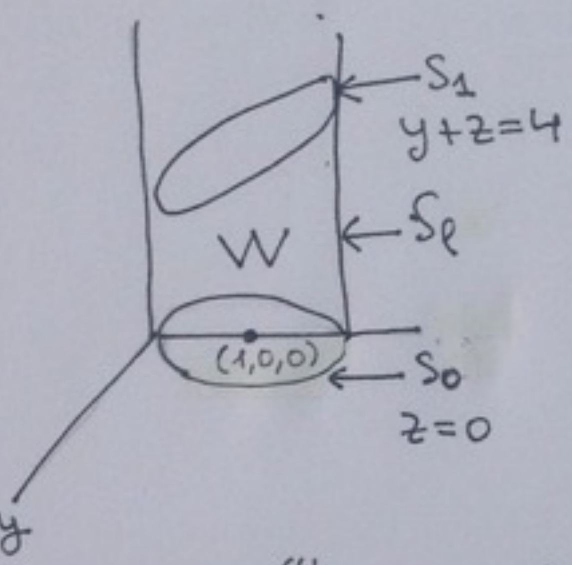
Problema 3

W sòlid limitat per $x^2+y^2-2x=0$, $z=0$, $y+z=4$.

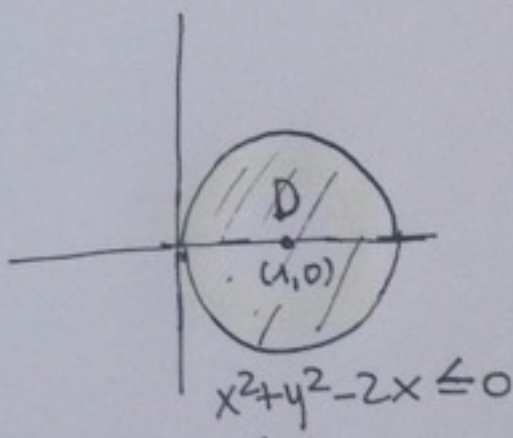
S frontera de W, $S=S_0\cup S_1\cup S_\ell$ amb S_0 = base, S_1 = tapa superior, S_ℓ = paret lateral.

$F(x,y,z)=(x,y,z)$

(a) Calcular el volum de W.



Projecció sobre $z=0$



$$\mathrm{Vol}(W)=\iiint_W 1\cdot dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{4-r\sin\theta} r\cdot dz\,dr\,d\theta =$$

CILÍNDRIQUES

$x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow r=2\cos\theta$

$y+z=4 \Leftrightarrow z=4-r\sin\theta$

límits de D: $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$0\leq r\leq 2\cos\theta$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\Big[rz\Big]_0^{4-r\sin\theta} dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}(4r-r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[2r^2-\frac{r^3}{3}\sin\theta\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(8\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta\sin\theta\Big)d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(4-4\cos2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta\sin\theta\Big)d\theta=\Big[4\theta-2\sin2\theta+\frac{2}{3}\cos^4\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi\ u^3$$

(b) Sense calcular cap integral, deduir quant val el flux de F a través de S.

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} = \iiint_W \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_W 3\,dx\,dy\,dz = 3\,\mathrm{Vol}(W) = 12\pi$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = 1+1+1 = 3$$

(c) Calculeu el flux de F a través de S_0 i el flux de F a través de S_1, orientades les dues tapes amb la normal cap a fora del sòlid.

S_0: $\sigma_0(x,y) = (x,y,0)$ D: $x^2+y^2-2x \leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} T_x = (1,0,0) \\ T_y = (0,1,0) \end{array}\right\} T_x \times T_y = (0,0,1) \Rightarrow \text{ORIENTACIÓ: } (0,0,-1)$$

$F(\sigma_0(x,y)) = (x,y,0) \Rightarrow$

$$\iint_{S_0} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy = \iint_D 0\,dx\,dy = 0$$

S_1: $\sigma_1(x,y) = (x,y,4-y)$ D: $x^2+y^2-2x \leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} T_x = (1,0,0) \\ T_y = (0,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow T_x \times T_y = (0,1,1) \quad \text{(ben orientat)}$$

$F(\sigma_1(x,y)) = (x,y,4-y)$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D (x,y,4-y)(0,1,1)\,dx\,dy = \iint_D 4\,dx\,dy =$$

$$= 4\cdot \mathrm{Area}(D) = 4\pi$$

(d) Deduïu sense calcular cap integral quin és el flux de F a través de S_e.

$$\iint_{S_e} \vec{F}\,d\vec{S} = \iiint_W \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz - \iint_{S_0} \vec{F}\,d\vec{S} - \iint_{S_1} \vec{F}\,d\vec{S} = 12\pi - 4\pi = 8\pi$$

④ $H = (2xyz + z,\ x^2z + e^y,\ x^2y + x)$

a) Calculeu el rotacional de H. És conservatiu?

El seu rotacional és:

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz+z & x^2z+e^y & x^2y+x \end{vmatrix} = (2xz - 2xz, -2xy - 1 + 2xy + 1, 2xz - 2xz) = (0,0,0)$$

Com H és definida en tot $\mathbb{R}^3$, que és simplement connex, sabem que la condició del rotacional determina que H és conservatiu.

b) Potencial de H: Si $H = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, aleshores.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + z \longrightarrow f = x^2yz + xz + g_1(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + e^y \longrightarrow f = x^2yz + e^y + g_2(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + x \longrightarrow f = x^2yz + xz + g_3(x,y)$$

$\Rightarrow$ Podem triar

$g_1 = e^y$

$g_2 = xz$

$g_3 = e^y$

I, per tant, f el podem triar $x^2yz + xz + e^y$.