Funcions elementals

- Lineal, afí i quadràtica
- Exponencial i Logaritme
- Valor absolut
- Trigonomètriques

PREVI: Lineal, afí i quadràtica

Funció lineal: $y = mx$

Funció afí: $y = mx + n$

Funció quadràtica:

- $y = a x^2 + b x + c$

Funció Exponencial (a>0)

Exponencial

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 3^2 = 3 \cdot 3$

$3^{1/2} = \sqrt{3}, \quad 5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$

$a > 0 \Rightarrow a^x$ es calcula aproximant x per trencats

Exemple: $1,345 = \dfrac{1345}{1000} \Rightarrow a^{1,345} = \sqrt[1000]{a^{1345}}$

Gràfica

$f(x) = a^x$

Dom $f = (-\infty, \infty)$; Im $f = (0, \infty)$

Funció Logaritme (a>0)

Logaritme

$a^x = y \Rightarrow \log_a y = x$ (inversa de l'exponencial)

$\log_2 16$ És l'exponent que li hem de posar a 2 per obtenir 16

$\log_2 16 = 4$

$\log_3 9$ És l'exponent que li hem de posar a 3 per obtenir 9

Gràfica

$$f(x) = log_a x$$

Dom $f = (0, \infty)$; Im $f = (-\infty, \infty)$

a=10: logaritme decimal $\log x$

a=e: logaritme neperià $\ln x$ o bé, L x

Propietats: exponencial vs logaritme

$\boxed{a > 1}$

$a^x < 1$ si $x < 0$ $\qquad$ $\log_a x < 0$ si $0 < x < 1$

$a^x > 1$ si $x > 0$ $\qquad$ $\log_a x > 0$ si $1 < x$

$\boxed{a < 1}$

$a^x > 1$ si $x < 0$ $\qquad$ $\log_a x < 0$ si $x > 1$

$a^x < 1$ si $x > 0$ $\qquad$ $\log_a x > 0$ si $1 < x$

Propietats: exponencial vs logaritme

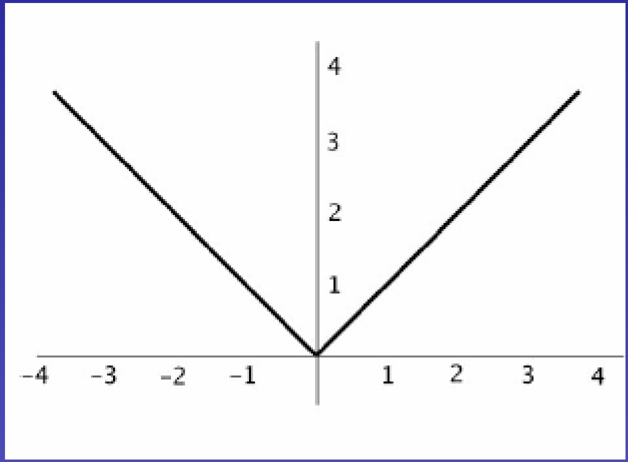
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\log_a uv = \log_a u + \log_a v$
$a^{-y} = 1/a^y$	$\log_a 1/v = -\log_a v$
$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$	$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$\log_a x = \log_b x / \log_b a$
$a^{\log_a x} = x$	$\log_a a^x = x$
$a^x > 0 \, \forall x$	$\log_a x$ no $\exists$ si $x \leq 0$

Gràfica

Funció valor absolut

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Exemples

Gràfica 1. V.absolut de f.afí

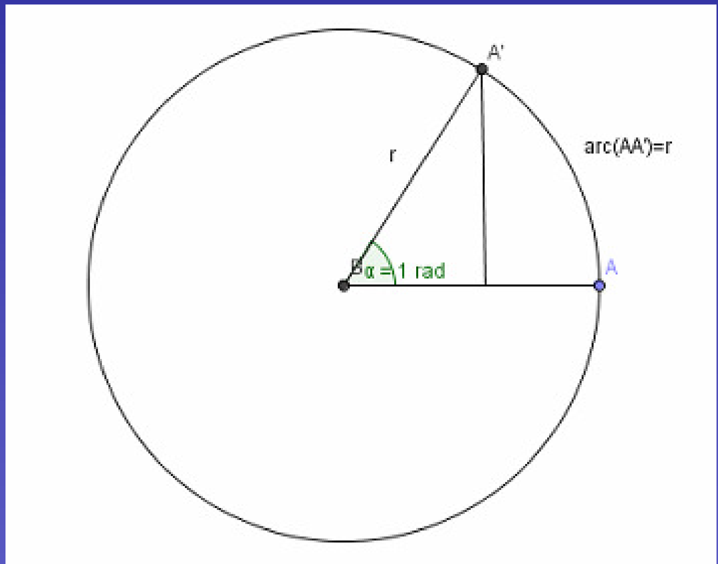
Gràfica 2. V.absolut de f.quadràtica

Propietats

$$|x| = |-x|$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$|x| = c \Rightarrow x = \pm c$$
$$|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$$
$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c \text{ i } |x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Radiant. Equivalència en graus (sexagesimals)

L'angle, l'arc del qual mesura el mateix que el radi



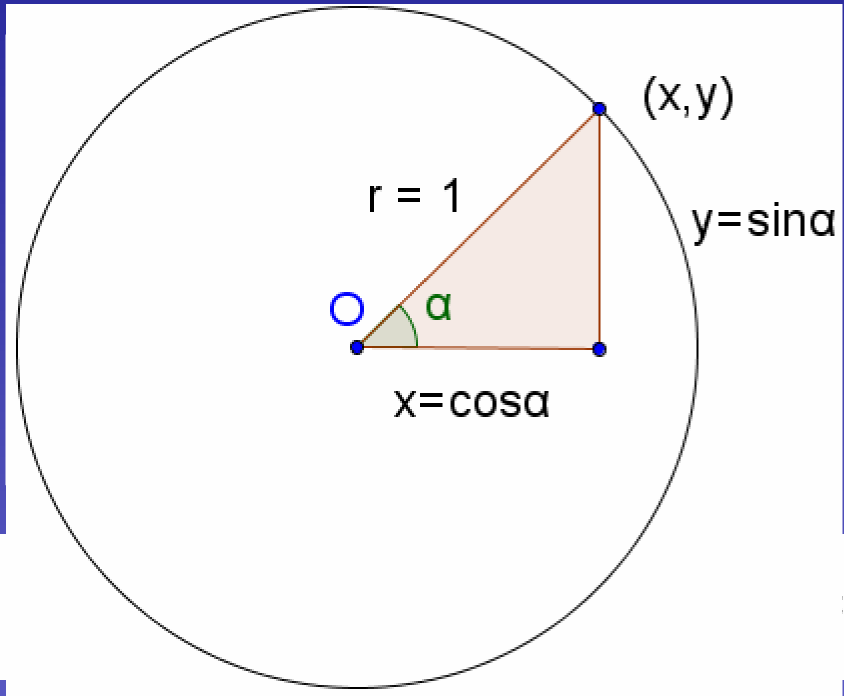
$$1\text{volta} = 360^o = 2\pi\text{rad}$$

$$360^o = 2\pi, \quad 90^o = \frac{\pi}{2}, \quad 60^o = \frac{\pi}{3}$$

$$180^o = \pi, \quad 45^o = \frac{\pi}{4}, \quad 30^o = \frac{\pi}{6}$$

Aproximadament: 1rad = 57.29^o

Raons trigonomètriques



$$\frac{b}{c}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Altres raons trigonomètriques

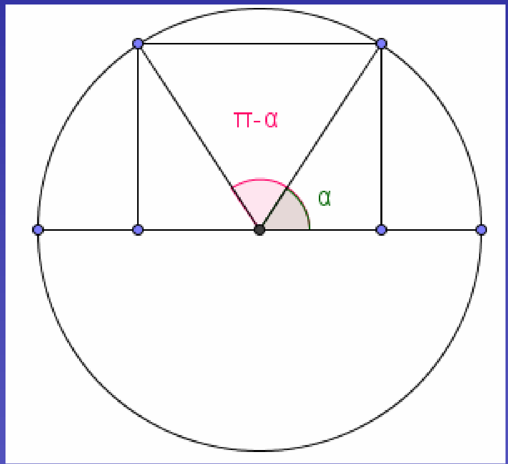
$$\text{cosec }\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

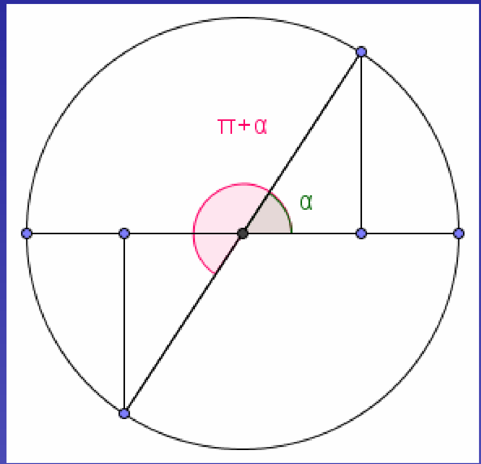
$$\text{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

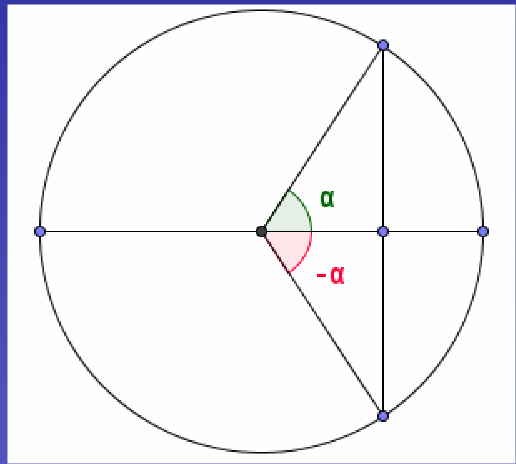
Raons trigonomètriques d'angles del 1r quadrant

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Reducció al primer quadrant



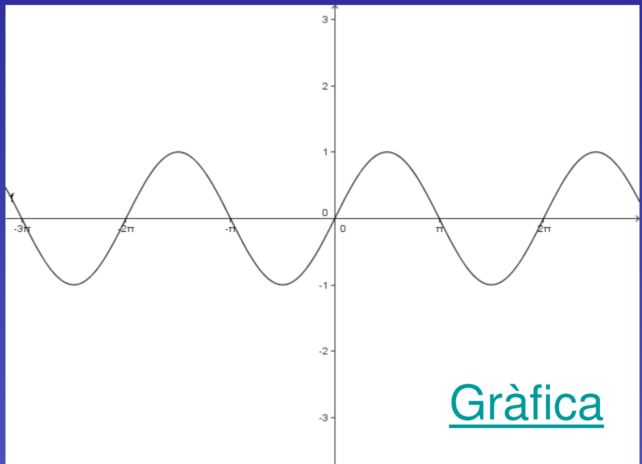




$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Funcions trigonomètriques

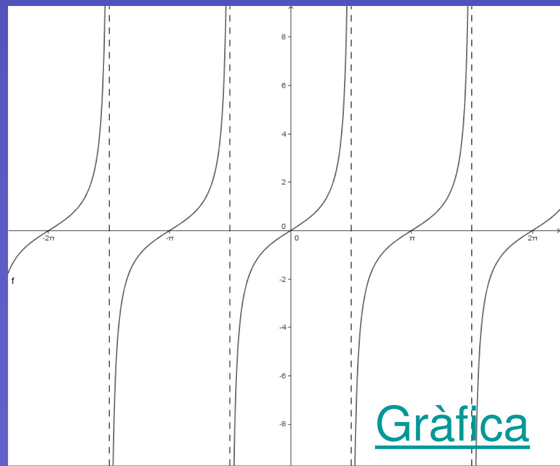
Funció sinus/cosinus



$$\text{Dom } f = \mathbb{R},\ \text{Im } f = [-1, 1]$$
$$\text{Periòdica, } (2\pi)$$
$$\text{Contínua i derivable}$$

Funció tangent

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\},\ \text{Im } f = \mathbb{R}$$
$$\text{Periòdica, } (\pi)$$
$$\text{Discon. asimptòtica en } \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\}$$



Funcions trigonomètriques inverses