Ampliació de Matemàtiques
Tema 4. Teoremes integrals

Lali Barrière
Departament de Matemàtiques - UPC

Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
Enginyeria d'Aeroports
Enginyeria d'Aeronavegació
EETAC

Continguts

4.1 Gradient, divergència, rotacional i laplacià

4.2 Teorema de Stokes

4.3 Camps conservatius a $\mathbb{R}^3$

4.4 Teorema de la divergència de Gauss

4.5 Camps solenoïdals

4.1 Gradient, divergència, rotacional i laplacià

Observacions

- Utilitzem l'operador nabla: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, camp escalar.
- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$, camp vectorial.

Definicions

1. El gradient del camp escalar f és

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

   Observació: ∇f és un camp vectorial.

2. La divergència del camp vectorial $\vec{F}$ és

$$\mathrm{div}\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

   Observació: div $\vec{F}$ és un camp escalar.

3. El rotacional del camp vectorial $\vec{F}$ és

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_1, f_2, f_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Observació: rot $\vec{F}$ és un camp vectorial.

Si $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ diem que $\vec{F}$ és irrotacional.

4. Si f es un camp escalar de classe $\mathcal{C}^2$, el laplacià de f és:

$$\Delta\, f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Relacions gradient-divergència-rotacional

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ camp escalar $\mathcal{C}^2 \implies \text{rot}\ (\text{grad}\ f) = \nabla \times (\nabla\ f) = 0$
- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ camp vectorial $\mathcal{C}^2 \implies \text{div}\ (\text{rot}\ \vec{F}) = \nabla(\nabla \times f) = 0$

Interpretacions físiques

1. El gradient ens indica la direcció de màxim creixement.
2. La divergència ens indica el flux “cap a fora” per unitat de volum.
3. El rotacional ens indica la circulació per unitat d’àrea.

4.2 Teorema de Stokes

- $\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrització regular i de classe $\mathcal{C}^2$ d'una superfície S.
- D limitada per una corba simple i regular a trossos Γ.
- $C = \sigma(\Gamma)$ és la vora de la superfície S.
- $\vec{F} : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$.

Llavors:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

amb C recorreguda en el sentit induït per l'orientació a S.

Observació

Si S és una superfície tancada, no té vora, i aleshores:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

El teorema de Stokes generalitza el teorema de Green

Teorema de Green $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, C corba tancada simple i D la regió del pla interior a C. Aleshores:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Si apliquem el teorema de Stokes amb:

- Camp vectorial: $\vec{G}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$
- Superfície: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D,\ z = 0\}$

Obtenim el teorema de Green:

$$\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \nabla \times \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

4.3 Camps conservatius a $\mathbb{R}^3$

Un camp de forces és conservatiu si el treball que realitza una partícula que es mou entre dos punts no depèn del camí que segueix.

Teorema de caracterització

$\vec{F}$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ a $D \subset \mathbb{R}^3$ qualsevol. Les tres condicions següents són equivalents:

1. $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$, per a tota corba tancada C.
2. $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, on C_1 i C_2 tenen els mateixos extrems.
3. Existeix un camp escalar f, $\mathcal{C}^2$, anomenat potencial, tal que: $\vec{F} = \nabla f$.

Quan es compleix qualsevol d'aquestes tres condicions diem que $\vec{F}$ és un camp conservatiu.

Condició necessària

Si $\vec{F}$ és un camp conservatiu, aleshores: $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$

Regions simplement connexes a $\mathbb{R}^3$

Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^3$ és simplement connex si tota corba tancada de A és la vora d'una superfície S, que està tota ella també inclosa a A.

Exemples

- $\mathbb{R}^3$ menys un nombre finit de punts és simplement connex.
- $\mathbb{R}^3$ menys una recta NO és simplement connex.
- $\mathbb{R}^3$ menys un segment és simplement connex.
- $\mathbb{R}^3$ menys una esfera és simplement connex.
- $\mathbb{R}^3$ menys una bola és simplement connex.
- $\mathbb{R}^3$ menys una corba (no tancada) infinita NO és simplement connex.

Un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^3$ és simplement connex si tota corba tancada continguda en A es pot deformar de manera contínua fins a convertir-la en un punt, sense sortir de A.

Camps conservatius en regions simplement connexes

$\vec{F}$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ a $D \subseteq \mathbb{R}^3$, amb D regió simplement connexa. Les quatre condicions següents són equivalents:

1. $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$, per a tota corba tancada simple.
2. $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, on C_1 i C_2 tenen els mateixos extrems.
3. Existeix un camp escalar f, $\mathcal{C}^2$, anomenat potencial, tal que: $\vec{F} = \nabla f$.
4. $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$.

Quan D és simplement connex i es compleix qualsevol d'aquestes quatre condicions diem que $\vec{F}$ és un camp conservatiu.

Estudi de camps conservatius

$\vec{F}$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ a $D \subseteq \mathbb{R}^3$

- $\vec{F}$ és conservatiu si és el gradient d'un camp escalar f, que es diu potencial escalar.
- Si $\vec{F}$ és conservatiu, aleshores $\nabla \times \vec{F} = 0$.
- Si $\nabla \times \vec{F} = 0$ i D és simplement connex, aleshores $\vec{F}$ és conservatiu.
- Si $\nabla \times \vec{F} = 0$ i D NO és simplement connex, aleshores $\vec{F}$ podria ser conservatiu o no ser-ho.

En un domini NO simplement connex, amb un camp $\vec{F}$ amb $\nabla \times \vec{F} = 0$:

1. Si trobem una corba tancada C, tal que $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$, sabrem que $\vec{F}$ no és conservatiu.
2. Si trobem un potencial de $\vec{F}$, sabrem que $\vec{F}$ és conservatiu.

Càlcul del potencial

El potencial escalar es pot calcular de dues maneres:

1. Resolem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= R \end{aligned}\right\}$$

2. Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ és un camp conservatiu, el potencial f es calcula:

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y Q(x, t, 0)\, dt + \int_0^z R(x, y, t)\, dt$$

4.4 Teorema de la divergència de Gauss

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$.
- W sòlid de $\mathbb{R}^3$ limitat per la superfície S.
- S orientada cap a l'exterior.

Aleshores:

$$\iiint_W \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint_W \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Càlcul del volum

Si $\vec{F} = (x, y, z)$ llavors $\nabla \cdot \vec{F} = 3$, per tant:

$$Vol(W) = \iiint_W 1\, dx\, dy\ dz = \frac{1}{3} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

4.5 Camps solenoïdals

Definició

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ és solenoïdal si existeix un camp vectorial $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$.

Diem que $\vec{G}$ és un potencial vectorial de $\vec{F}$.

Propietats

- Si $\vec{F}$ és solenoïdal, aleshores per a tota S superfície tancada

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si $\vec{F}$ és solenoïdal, aleshores $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$.
  El recíproc no sempre és cert, depèn de les propietats del domini de definició de $\vec{F}$.

  És a dir: hi ha camps que satisfan $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, que no són solenoïdals.

Conjunts estrellats

Definició

Un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^3$ és estrellat si existeix un punt $p \in A$ tal que per a qualsevol altre punt $q \in A$ el segment $\overline{pq}$ està contingut a A.

Exemples

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ és un conjunt estrellat.
2. $\mathbb{R}^3$ menys un punt NO és estrellat.

Propietat

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ és un conjunt estrellat.
- $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ a A.
- $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (en A).

Aleshores: $\vec{F}$ és un camp solenoïdal.

Camps solenoïdals en conjunts estrellats

$\vec{F}$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ a $D \subseteq \mathbb{R}^3$, amb D conjunt estrellar. Les quatre condicions següents són equivalents:

1. $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, per a tota superfície tancada.
2. $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, on S_1 i S_2 tenen com a vora la mateixa corba.
3. Existeix un camp vectorial $\vec{G}$, $\mathcal{C}^2$, anomenat potencial vecorial, tal que: $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$.
4. $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Quan D és un conjunt estrellat i es compleix qualsevol d'aquestes quatre condicions diem que $\vec{F}$ és un camp solenoïdal.