5 Sèries de Fourier

0. Calculeu, si existeix, la suma de les sèries següents:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n}{2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}}$

1. Sigui $P(t)$ un polinomi i $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Useu el mètode d'integració per parts per deduir la fórmula següent:

   $$\int P(t)\, e^{-jnt}\, dt = \frac{e^{-jnt}}{n}\left[\left(\frac{P'(t)}{n} - \frac{P'''(t)}{n^3} + \cdots\right) + j\left(P(t) - \frac{P''(t)}{n^2} + \cdots\right)\right]$$

   (b) Useu l'apartat anterior per deduir:

   $$\int P(t)\, \sin(nt)\, dt = \frac{\sin(nt)}{n}\left(\frac{P'(t)}{n} - \frac{P'''(t)}{n^3} + \cdots\right) + \frac{\cos(nt)}{n}\left(-P(t) + \frac{P''(t)}{n^2} - \cdots\right)$$

   $$\int P(t)\, \cos(nt)\, dt = \frac{\sin(nt)}{n}\left(P(t) - \frac{P''(t)}{n^2} + \cdots\right) + \frac{\cos(nt)}{n}\left(\frac{P'(t)}{n} - \frac{P'''(t)}{n^3} + \cdots\right)$$

   (c) Calculeu $\displaystyle\int (t^2 + t^4)\, \sin(nt)\, dt$

   (d) Calculeu $\displaystyle\int (7t - 2t^5)\, \cos(nt)\, dt$

2. A partir de les fórmules de l'angle suma, $\left\{\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{array}\right\}$, deduïu les fórmules trigonomètriques següents:

   $\cos x\, \cos y = \dfrac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$, $\sin x\, \sin y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$,

   $\sin x\, \cos y = \dfrac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$.

3. Useu l'exercici anterior per calcular, en funció de $n \in \mathbb{N}$, les integrals següents:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \cos(nt)\, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \sin(nt)\, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \cos(nt)\, dt$

4. Dibuixeu les gràfiques de les funcions següents i calculeu-ne les corresponents sèries de Fourier:

   (a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \end{cases}$

   (b) $f(t) = |\, t\, |, \quad t \in (-1, 1]$

   (c) $f(t) = t, \quad t \in (-\pi, \pi]$

   (d) $f(t) = t^2, \quad t \in (-\pi, \pi]$

   (e) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < |t| \le 2 \end{cases}$

   (f) $f(t) = e^t \quad t \in (-\pi, \pi]$

5. Desenvolupeu en sèrie de Fourier les funcions:

   (a) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{si } -\pi \le t < 0 \end{cases}$ *(ona mig rectificada)*

   (b) $f(t) = |\sin t\,|$ *(ona rectificada)*

   (c) $f(t) = \sin t$, en sèrie de cosinus a l'interval $[0, \pi]$.

6. Deduïu, sense calcular cap integral, els coeficients de la sèrie trigonomètrica de Fourier de les funcions següents:

   (a) $f(t) = \sin(t+2)$, $t \in (-\pi, \pi]$ (b) $g(t) = \sin(2t)$, $t \in (-\pi, \pi]$ (c) $h(t) = \sin^2(t)$, $t \in (-\pi, \pi]$

7. Calculeu un polinomi de tercer grau definit a $(-\pi, \pi)$, sabent que admet el desenvolupament en sèrie de Fourier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(nt)}{n^3}$.

8. A partir del desenvolupament en sèrie de Fourier a l'interval $(-\pi, \pi)$ de la funció $f(t) = t$, deduïu:
$$t \cos t \simeq -\frac{1}{2}\sin t + 2\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n \sin(nt)}{n^2 - 1}, \qquad -\pi < t < \pi$$

9. Desenvolupeu en sèrie de sinus i en sèrie de cosinus les funcions següents i dibuixeu-ne les gràfiques:

   (a) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \end{cases}$ (b) $f(t) = 1 + t$, per a $t \in (0, 1]$.

10. Calculeu la sèrie de Fourier de cosinus de la funció $f(t) = \begin{cases} \sin(2t) & \text{si} \quad t \in [0, \pi/2) \\ 0 & \text{si} \quad t \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$

    Dibuixeu la gràfica de la sèrie de Fourier obtinguda.

11. Utilitzeu el resultat dels exercicis 4(a), 4(c) i 4(d) per calcular la suma de les sèries numèriques:

    (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

12. Trobeu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ que minimitzin el valor de la integral $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} [t - (c_1 \sin t + c_2 \sin(2t) + c_3 \sin(3t))]^2 dt$.

    Calculeu l'error quadràtic comès en l'aproximació de t per $c_1 \sin t + c_2 \sin(2t) + c_3 \sin(3t)$, on c_1, c_2, c_3 són els trobats anteriorment.

13. Determineu el polinomi trigonomètric $p(t) = a + b\cos t + c \sin t$ que millor aproxima la funció $f(t) = e^t$ en mitjana quadràtica, a l'interval $(-\pi, \pi)$. Escriviu la integral que s'obté utilitzant la fórmula de l'error quadràtic (sense calcular-la).

14. Sabent que la seva sèrie de Fourier trigonomètrica de la funció 2-periòdica definida per $f(t) = \begin{cases} -1 - t & \text{si} \quad t \in (-1, 0] \\ t & \text{si} \quad t \in (0, 1] \end{cases}$ és $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2\cos((2k-1)\pi t)}{(2k-1)^2\pi} + \frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1}\right)$, calculeu la suma de les sèries numèriques següents:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

15. Desenvolupeu en sèrie de Fourier complexa:

    (a) $f(t) = \sin t, \quad -\pi < t \leq \pi$

    (b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\, t \,| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad \pi/2 < |\, t \,| < \pi \end{cases}$

    (c) $f(t) = \cos(nt), \qquad -\pi < t \leq \pi, \quad (n \in \mathbb{Z}\ ).$

    (d) $f(t) = C|\sin(t)|, \qquad -\pi < t \leq \pi, \quad C > 0.$

16. Deduïu que el desenvolupament de la funció $f(t) = \cos(\lambda t)$ $(\lambda \notin \mathbb{Z}\ )$, en sèrie de Fourier complexa a l'interval $[-\pi, \pi]$, és $\displaystyle\frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda}{\lambda^2 - k^2} e^{jkt}$. Deduïu-ne: $\displaystyle\pi\cot(\lambda\pi) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - k^2}$.

D'altres exercicis

17. (a) Trobeu el desenvolupament en sèrie de Fourier complexa de la funció periòdica amb període 2π que val $f(t) = e^t$ en l'interval $[0, 2\pi]$.
    (b) Expresseu l'anterior sèrie en forma trigonomètrica.
    (c) Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ i calculeu-ne suma.
    (d) Dibuixeu l'espectre d'amplitud de la funció $f(t)$ de l'apartat (a) per a les freqüències $0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0$. (*Observació:* $\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \simeq 85$)

18. Desenvolupeu en sèrie de Fourier la funció $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si} \quad \mid t \mid < \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad \epsilon < \mid t \mid < \pi \end{cases}$.

    Estudieu el comportament de la sèrie quan $\epsilon \to 0$.

19. Una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu T-*antiperiòdica* si existeix $T > 0$ tal que $f(t+T) = -f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
    (a) Proveu que una funció T-antiperiòdica és $2T$-periòdica.
    (b) Proveu que la sèrie de Fourier d'una funció T-antiperiòdica és de la forma:

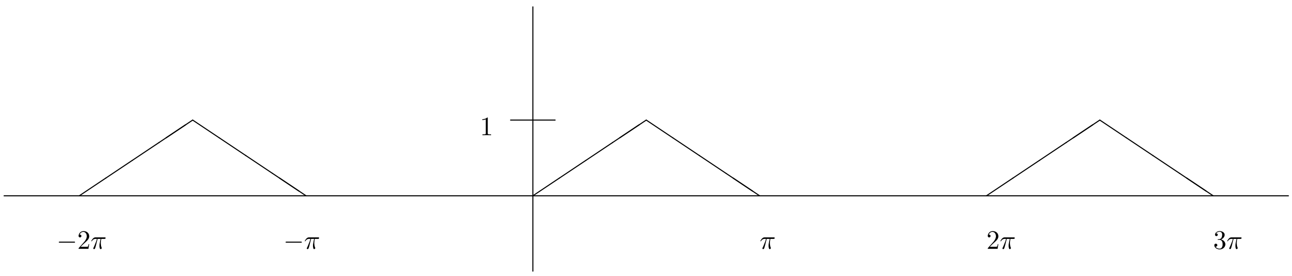
    $$\sum_{r\geq 1} \left\{ a_{2r-1} \cos \frac{(2r-1)\pi t}{T} + b_{2r-1} \sin \frac{(2r-1)\pi t}{T} \right\}$$

    (c) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $\begin{cases} f(t) = t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ f(t+1) = -f(t) \end{cases}$

20. (a) Proveu que si una funció $f : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfà $\left\{ \begin{array}{lll} f(t) = f(\pi - t) & \text{si} & t > 0 \\ f(t) = f(-\pi - t) & \text{si} & t < 0 \end{array} \right\}$, aleshores el seu desenvolupament en sèrie de Fourier trigonomètrica és de la forma

    $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k\geq 1} a_{2k} \cos(2kt) + \sum_{k\geq 1} b_{2k-1} \sin((2k-1)t)$$

    (b) Useu l'apartat (a) per trobar la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'ona periòdica donada per la figura:



Solucions

0. (a) $\dfrac{5}{6}$ (b) $\dfrac{1}{2(e-1)}$ (d) $\dfrac{-1}{12}$ (e) $\dfrac{1}{5}$

1. (c) $\dfrac{2\sin(nt)}{n^2}\left(t + 2t^3 - \dfrac{12t}{n^2}\right) + \dfrac{\cos(nt)}{n}\left(-t^2 - t^4 + \dfrac{2+12t^2}{n^2} - \dfrac{24}{n^4}\right)$

(d) $\dfrac{\sin(nt)}{n}\left(7t-2t^5+\dfrac{40t^3}{n^2}-\dfrac{240t}{n^4}\right)+\dfrac{\cos(nt)}{n^2}\left(7-10t^4+\dfrac{120t^2}{n^2}-\dfrac{240}{n^4}\right)$

3. (a) $\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ senar} \\ \dfrac{-2}{n^2-1} & \text{si } n \text{ parell}\end{cases}$ (b) $\begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \pi/2 & \text{si } n = 1\end{cases}$ (c) $\begin{cases} \pi/4 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \text{ senar} \geq 3 \\ \dfrac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} & \text{si } n=2k \text{ parell}\end{cases}$

4. (a) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin((2n-1)\pi t)}{2n-1}$ (d) $\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{\cos(nt)}{n^2}$

(b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2}$ (e) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2}t\right)$

(c) $-2\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$ (f) $\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\left(1+2\displaystyle\sum_{k\geq 1}\dfrac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos(kt)-k\sin(kt))\right)$

5. (a) $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$ (b) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

(c) En prendre l'extensió periòdica parella obtenim la mateixa funció que en l'apartat anterior, per tant el desenvolupament en cosinus és el que hem obtingut en l'apartat b).

6. (a) $a_1=\sin 2$, $b_1=\cos 2$ i la resta són nuls.
(b) $b_2=1$ i la resta són nuls.
(c) $a_0=1$, $a_2=-1/2$ i la resta són nuls.

7. $P(t)=\dfrac{1}{12}t^3-\dfrac{\pi^2}{12}t$

9. (a) Sèrie de cosinus: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2}$, sèrie de sinus: $\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\dfrac{(2k-1)\pi t}{2}$

(b) Sèrie de cosinus: $\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2}$, sèrie de sinus: $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1+2(-1)^{n+1}}{n}\sin(\pi nt)$

10. $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m\geq 1}\dfrac{1}{4m^2-1}\cos(4mt)-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\dfrac{1}{(2k-1)^2-4}\cos((2k-1)t)$

11. (a) $-\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ (c) $\dfrac{\pi^2}{6}$ (d) $\dfrac{\pi^4}{90}$ (e) $\dfrac{\pi^2}{12}$

12. $c_1=2$, $c_2=-1$, $c_3=\dfrac{2}{3}$, error $=\dfrac{2\pi^3}{3}-\dfrac{49\pi}{9}$

13. $a=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}$, $b=\dfrac{-\sinh\pi}{\pi}$, $c=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}$

14. (a) $-\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ (c) $\dfrac{\pi^4}{96}$

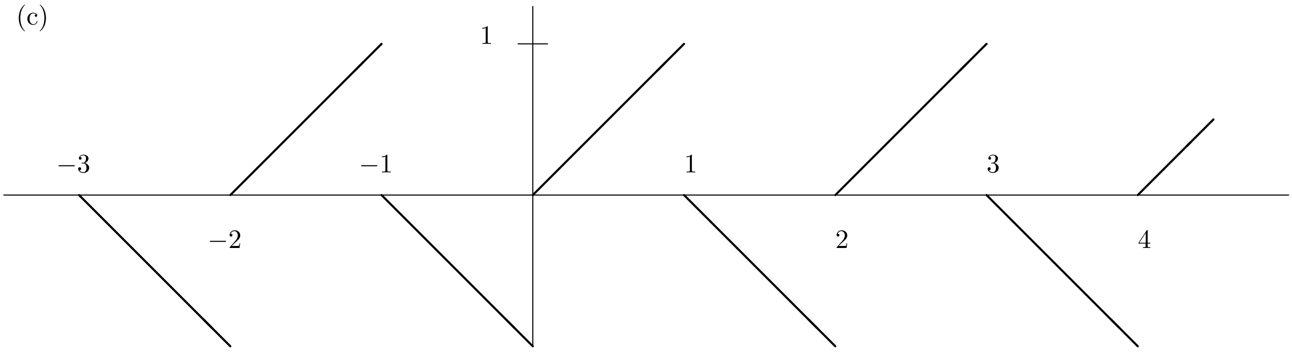
15. (a) $-\dfrac{1}{2}je^{jt}+\dfrac{1}{2}je^{-jt}$ (c) $\dfrac{1}{2}e^{jnt}+\dfrac{1}{2}e^{-jnt}$

(b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}e^{j(2n-1)t}$ (d) $\dfrac{-2C}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{j2nt}}{4n^2-1}$

17. (a) $\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1+jn}{n^2+1}\,e^{jnt}$ (b) $\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)-n\sin(nt)}{n^2+1}\right)$ (c) $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}-\dfrac{1}{2}$

18. $\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\epsilon)}{n\epsilon}\cos(nt)\right)$. Quan ϵ tendeix a zero s'obté: $\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nt)\right)$

19. (a) $f(t+2T)=f(t+T+T)=-f(t+T)=f(t)$.
    (b) Verifiqueu que $a_{2k}=0$ i $b_{2k}=0$, utilitzant $\int_{-T}^{T}=\int_{-T}^{0}+\int_{0}^{T}$.
    (c)



$$f(t)\simeq\frac{2}{\pi}\sum_{k\geq1}\frac{-2\cos((2k-1)\pi t)}{(2k-1)^2\pi}+\frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1}$$

20. (a) Verifiqueu que $a_{2k-1}=0$ i $b_{2k}=0$, utilitzant $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{-\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}$.
    (b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos(2kt)+\frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin((2k-1)t)$