2 Integrals de línia

1. Trobeu l'equació cartesiana de les següents corbes parametritzades. Representeu les corbes i determineu-ne l'orientació.
   (a) $\gamma(t) = (t-1, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\gamma(t) = (t-1, t(t+4))$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.
   (d) $\gamma(t) = (-a\cosh t, b\sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

2. Calculeu la longitud de les corbes següents:
   (a) Circumferència $\gamma(\theta) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.
   (b) Corba $\gamma(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t)$, des de $t = 0$ fins a $t = 4$.
   (c) Corba $x(t) = \ln\sqrt{1+t^2}$, $y(t) = \arctan t$, des de $t = 0$ fins a $t = 1$.
   (d) Corba $\gamma(t) = (t^2/2,\ (6t+9)^{3/2}/9)$, $t \in [0, 4]$.
   (e) Corba $y = \ln\cos x$, des de $x = \pi/6$ fins a $x = \pi/4$.
   (f) $8y^3 = 27x^2$, des de $x = 0$ fins a $x = 1$.
   (g) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, des de $x = 1$ fins a $x = e$. **Indicació:** Expresseu $1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2$ com un quadrat.

3. Calculeu la integral de línia del camp $f(x, y) = xy^2$ al llarg de les circumferències d'equacions $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + 6x + y^2 = 0$.

4. (a) Calculeu la integral de línia del camp escalar $f(x, y) = 2xy$ al llarg del primer quadrant de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, des del punt $(3, 0)$ fins al $(0, 2)$.
   (b) Calculeu la integral de $f(x, y, z) = xyz$ al llarg de la corba $\{x^2 - y^2 = 9,\ z = 6\}$, entre els punts $(5, -4, 6)$ i $(5, 4, 6)$.

5. Una tanca circular, centrada a l'origen i de radi 1, té alçada $h(x, y) = |x| + |y|$. Calculeu-ne l'àrea.

6. Calculeu la massa d'un filferro de densitat lineal $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}xy + y - z$, definit per les equacions $\{y = x,\ z = \frac{x^2}{\sqrt{2}}\}$, des del punt $(0, 0, 0)$ fins al punt $(1, 1, \sqrt{2}/2)$.

7. Calculeu la càrrega total que té un filferro que segueix la corba $y = x^2$ des del punt $(0, 0)$ al punt $(2, 4)$, si la densitat de càrrega en cada punt ve donada per $f(x, y) = x$.

8. Calculeu les integrals de línia del camp vectorial donat sobre les corbes indicades.
   (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ al llarg de la paràbola $y = x^2$ des del punt $(-2, 4)$ fins al punt $(1, 1)$.
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ sobre el segment de recta des del punt $(0, 0, 0)$ fins al punt $(1, 2, 4)$.

9. Donat el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$, calculeu la integral de línia de $\mathbf{F}$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = a^2$ recorreguda en sentit positiu.

10. Calculeu la integral de línia del camp $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$ sobre el quart d'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ des del punt $(a, 0)$ fins al punt $(0, b)$, en el primer quadrant.

11. Calculeu el treball realitzat per una força proporcional al vector dirigit cap a l'origen, sobre les corbes següents:
    (a) El·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, al primer quadrant, des del punt $(a, 0)$ fins al punt $(0, b)$.

(b) Hipèrbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, entre els punts $(-4, 0)$ i $(-5, -3/2)$.

(c) Quart d'el·lipse $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$, del punt $(0, 0)$ al punt $(-2, -1)$.

12. Calculeu la integral $\displaystyle\int yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ al llarg de l'hèlix definida per $\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ kt)$, entre els punts $(a, 0, 0)$ i $(a, 0, 2k\pi)$.

13. Calculeu $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y)\,dx + (y - x)\,dy$ al llarg de les corbes següents:

    (a) La paràbola $y^2 = x$.

    (b) Una recta.

    (c) Els segments des de $(1, 1)$ a $(1, 2)$ i des de $(1, 2)$ a $(4, 2)$.

    (d) La corba definida per $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.

14. Utilitzeu el Teorema fonamental del càlcul per a integrals de línia per calcular:

    (a) $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy$, on C és l'arc de circumferència, al primer quadrant, que va de $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

    (b) $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, on C és el segment que uneix els punts $(1, 1, 1)$ i $(2, 2, 2)$.

15. Calculeu la integral $\displaystyle\int (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy$ sobre les corbes següents, i comproveu que es compleix el teorema de Green.

    (a) El triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(3, 0)$ i $(3, 2)$.

    (b) La circumferència de radi 4 centrada a l'origen.

16. Comproveu que es compleix el Teorema de Green sobre el quadrat de vèrtexs $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ i $(0, 2)$ amb el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy^3, y^2 - 2xy)$.

17. Utilitzeu el teorema de Green per tal de calcular:

    (a) L'àrea del quadrilàter determinat pels punts $(0, 0)$, $(5, 1)$, $(4, 5)$ i $(0, 3)$.

    (b) La integral de línia del camp $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ al llarg de la cardioide d'equació $r = 1 + \cos\theta$, recorreguda en sentit antihorari.

    (c) La integral de línia del camp $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y - y, e^x \cos y - 1)$ al llarg de la corba $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = x,\ \ y \geq 0\}$, recorreguda en sentit antihorari.

18. Sigui C la corba tancada descrita pel parell de gràfiques $\left\{\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = 2\sin x \end{array}\right.$, amb $x \in [0, \pi]$, orientada en sentit positiu. Calculeu la integral $\displaystyle\int_C (1 + y^2)\,dx + y\,dy$ directament i utilitzant el Teorema de Green.

19. Sigui C la corba tancada i orientada positivament descrita de la manera següent: el segment $y = 0$ entre $x = 1$ i $x = 2$, l'arc $y = \sqrt{4 - x^2}$ en el primer quadrant, el segment $x = 0$ entre $y = 2$ i $y = 1$, l'arc $y = \sqrt{1 - x^2}$ en el primer quadrant.

    Calculeu la integral $\displaystyle\int_C \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$ directament i utilitzant el Teorema de Green.

20. Demostreu que les integrals següents són independents del camí i calculeu-les.

    (a) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$

(b) $\int_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, amb $\mathbf{f} = (e^{y^2}\cos x, 2ye^{y^2}\sin x)$, i $C = \{(x,y) \mid y = \sin x\}$ des de $(0,0)$ fins a $(\pi, 0)$.

(c) $\int_C \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on C és el quart d'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situat en el primer quadrant, i orientat des de $(a,0)$ fins a $(0,b)$.

21. Considereu el camp $\mathbf{F}(x,y) = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$. És conservatiu? Trobeu la integral de $\mathbf{F}$ des del punt $(0,0)$ al punt $(2,1)$ al llarg de la corba $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

22. Comproveu si els camps següents són conservatius a $\mathbb{R}^2$:

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y, x^3+1)$ (b) $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, x^3y)$ (c) $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

(d) $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

23. Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba tancada que limita una regió R simplement connexa i $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Com ha de ser $\mathbf{F}$ per tal que $\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ sigui l'àrea de R? Comproveu que $\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$ ho satisfà.

(b) Apliqueu-ho per calcular l'àrea tancada per l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solucions

1. (a) $y=(x+1)^3$ (b) $y = x^2+6x+5$ (c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $x<0$.
2. (a) $2\pi a$ unitats. (b) $\sqrt{2}(e^4-1)$ unitats. (c) $\ln(1+\sqrt{2})$ unitats. (d) 20 unitats. (e) $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$ unitats. (f) $2^{3/2}-1$ unitats. (g) $(2e^2-1)/4$ unitats.
3. 0 i -81π
4. (a) 76/5 (b) 0
5. 8
6. $(4-\sqrt{2})/3$ unitats de massa.
7. $(17^{3/2}-1)/12$ unitats de càrrega.
8. (a) $-369/10$ (b) 23/6
9. 0
10. $\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+a^2}$
11. (a) $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$,amb $k>0$ (b) $-\frac{45k}{8}$,amb $k>0$ (c) $-\frac{5k}{2}$,amb $k>0$
12. 0
13. (a) 34/3 (b) 11 (c) 14 (d) 32/3
14. (a) 0 (b) 9
15. (a) 12 (b) 64π
16. 8
17. (a) 33/2 (b) 3π (c) $\frac{\pi}{8}$
18. $-3\pi/2$
19. $2\ln 2$
20. (a) 5 (b) 0 (c) $b-a$
21. 60
22. (a) Sí (b) No (c) No (d) Sí
23. (a) Cal que $\mathbf{F}=(P,Q)$ satisfaci $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ (c) πab