1. Introducció: Tècniques de comptar

En moltes experiències, el càlcul d'una probabilitat va lligat a la quantitat de possibilitats diferents que té un cert aspecte de l'experiència. Per exemple, sabem que en llançar un dau perfecte la probabilitat que surti un 2 és $\frac{1}{6}$ ja que hi ha 6 possibles resultats. Però aquest és un cas molt senzill i de vegades aquest recompte de resultats no és tan simple. Per exemple, si ens preguntem de quantes maneres podem anar caminant a un cinema que es troba a 10 cruïlles de casa nostra, haurem d'especificar si volem anar pel camí més curt o no, i si volem passar per un cert punt del recorregut, etc. Aquest primer capítol el dediquem a explicar les tècniques de comptar més bàsiques. A partir d'exemples, anirem introduint els conceptes.

Exemple 1.1 *Comencem pensant en un conjunt de 10 elements:* $A = \{a_1, \cdots a_{10}\}$. *Considerem* 4 *elements d'aquest conjunt:* mostra de mida 4. *Escrivim* 5 *mostres d'exemple que anomenem:* $m1$, $m2$, $m3$, $m4$ *i* $m5$.

$$m1 = a_1a_1a_2a_3 \quad m2 = a_1a_1a_3a_2 \quad m3 = a_1a_{10}a_3a_2 \quad m4 = a_1a_{10}a_2a_3 \quad m5 = a_1a_9a_6a_5$$

Ens fixem en alguns aspectes. Hi ha mostres que tenen elements repetits com $m1$ i $m2$. Hi ha mostres en què l'única diferència que tenen entre elles és l'ordre dels elements, com $m3$ i $m4$. A l'hora de comptar el nombre de mostres que podem fer haurem de tenir en compte aquests aspectes.

A continuació veurem els tipus de mostres de m elements que es poden formar en un conjunt de n elements $A = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$.

- **Definició 1.1** *Mostra de mida m, ordenada i sense repetició (o reemplaçament).*

  Per formar la mostra no podem repetir els elements del conjunt A i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de forma diferent, les considerem diferents. A l'exemple 1.1, $m3$, $m4$ i $m5$ són mostres d'aquest tipus.

- **Definició 1.2** *Mostra de mida* m*, ordenada i amb repetició (o reemplaçament).*

  Per formar la mostra podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de forma diferent, les considerem diferents. A l'exemple 1.1 totes les mostres són d'aquest tipus.

- **Definició 1.3** *Mostra de mida* m*, no ordenada i sense repetició (o reemplaçament).*

Noteu!

Els mots ***repetició*** *i* ***reemplaçament*** *s'utilitzen indistintament. El mot repetició ens diu que hi pot haver elements repetits dins d'una mateixa mostra. També s'utilitza el mot reemplaçament perquè aquest fet de vegades va lligat a la manera que s'ha realitzat l'experiència. Per exemple, si en una experiència hem de treure dues cartes d'una baralla i després de treure la primera carta anotem el resultat i la tornem a deixar a la baralla (remplaçament), a la segona extracció podem obtenir la mateixa carta que abans.*

Per formar la mostra no podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de forma diferent, les considerem la mateixa. A l'exemple 1.1, $m3$ i $m4$ són la mateixa mostra.

- **Definició 1.4** *Mostra de mida m, no ordenada i amb repetició (o reemplaçament).*

  Per formar la mostra podem repetir els elements del conjunt A, i si tenim dues mostres que tenen els mateixos elements però ordenats de forma diferent, les considerem la mateixa. A l'exemple 1.1, $m1$ i $m2$ representen la mateixa mostra i $m3$ és la mateixa mostra que $m4$.

Veiem quantes mostres podem formar de cada un dels tipus anteriors.

1.1. Mostres ordenades amb repetició.Variacions amb repetició

Si ens fixem en l'exemple 1.1, podem pensar que per formar una mostra d'aquest tipus hem d'omplir $m = 4$ posicions. A la primera posició podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A, tenim 10 possibilitats. Un cop hem omplert la primera posició, a la segona posició també podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A i per cada una d'aquestes possibilitats en tenim 10 de diferents de la primera posició. Seguint aquest raonament, veiem que podem formar $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ mostres. Anomenem variacions amb repetició de 10 elements agafats de 4 en 4, $VR_{10,4} = 10^4$.

En general, si partim d'un conjunt $A = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ amb n elements, el nombre de mostres de mida m ordenades i amb repetició que es poden formar és

$$VR_{n,m} = n^m.$$

Exemple 1.2 *Quantes paraules de mida 3 es poden formar amb els elements del conjunt $\{0, 1\}$?*

En un conjunt de 2 elements, hem de trobar les mostres de mida 3 ordenades i amb repetició, $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.

000 001 010 100 011 101 110 111

1.2. Mostres ordenades sense repetició. Variacions. Permutacions

Tornem a l'exemple 1.1. A partir del conjunt $A = \{a_1, a_2, \cdots a_{10}\}$ volem formar mostres de mida 4 que no tinguin elements repetits. Hem d'omplir $m = 4$ posicions. A la primera posició podem posar qualsevol dels 10 elements del conjunt A, tenim 10 possibilitats. Un cop hem omplert la primera posició, a la segona posició només podem posar 9 elements del conjunt A, ja que no podem repetir l'element que hem posat a la primera posició. Seguint aquets raonament veiem que podem formar $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mostres. Anomenem aquesta quantitat variacions de 10 elements agafats de 4 en 4, $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

En general, si partim del conjunt $A = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$, el nombre de mostres de mida m ($m \leq n$), ordenades i sense repetició que es poden formar és

$$V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1).$$

En el cas particular que $m = n$, $V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$, factorial de n. Aquest nombre ens dóna les maneres d'ordenar n elements. Per al cas $n = 0$ s'adopta el conveni $0! = 1$.

Exemple 1.3 *Hem de connectar 4 cables diferents a 3 endolls diferents. Quantes possibilitats tenim?*

Sigui el conjunt dels 4 cables, $A = \{a, b, c, d\}$. Una mostra la podem pensar com a acb, on la posició de la lletra indica un endoll determinat. Per exemple, si considerem la mostra acb volem indicar que el cable a és a l'endoll 1, el cable c a l'endoll 2 i el cable b a l'endoll 3. Si pensem en cab, és una mostra diferent de l'anterior, ja que ara és el cable c el que és a l'endoll 1. Hem de comptar el nombre de mostres de mida 3, ordenades i sense repetició que es poden formar en un conjunt de 4 elements. Així, $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Aquestes són totes les mostres:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

1.3. Mostres no ordenades sense repetició. Combinacions

Ens fixem en l'exemple 1.3 i el modifiquem lleugerament.

Exemple 1.4 *Hem de connectar 4 cables diferents a 3 endolls* iguals *(indistingibles). Quantes possibilitats tenim?*

Si ens fixem en les mostres que hem escrit a l'exemple 1.3, observem que en aquest nou exemple, totes les mostres que hi ha a la mateixa fila són la mateixa ja que l'unic que importa és el conjunt de tres *cables que hem triat per connectar. Per tant, hem de dividir el nombre de mostres que tenim en una fila per* $3!$. *En tenim, doncs,*

$\frac{V_{4,3}}{3!} = \frac{24}{6} = 4.$

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd$$

Anomenem combinacions de 4 elements agafats de 3 en 3: $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{V_{4,3}}{3!} = 4.$

En general, en un conjunt de n elements, el nombre de mostres de mida m ($m \leq n$), no ordenades i sense repetició és:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Tal com hem comentat, el nombre combinatori $\binom{n}{m}$ ens dóna el nombre de subconjunts de m elements que podem formar d'un conjunt que en té n.

Proposició 1.1 *Propietats*

1) $\binom{n}{0} = 1.$

Per provar-ho pensem que el nombre de subconjunts de 0 *elements, que té un conjunt de* n *elements és 1, el conjunt buit.*

2) $\binom{n}{1} = n.$

*Aquesta igualtat és evident ja que el nombre de subconjunts d'*1 *element, que té un conjunt de* n *elements és* n.

3) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$

Per fer la prova fem el següent raonament: Podem formar el mateix nombre de subconjunts de m *elements que de* $n-m$ *elements, ja que cada cop que comptem un subconjunt de* m *elements, també estem comptant un subconjunt de* $n-m$ *elements,* $n = m + (n-m)$.

4) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$

Per fer la prova pensem en un conjunt A *que té* n *elements. Si ens fixem en un element en concret,* x*, podem escriure el conjunt* A *com una unió* $A = (A - \{x\}) \cup \{x\}$*. El nombre de subconjunts de* m *elements que podem formar en* A *serà la suma dels subconjunts que no tenen* x *més la dels que sí que tenen* x*. El nombre de subconjunts amb* m *elements on no hi és* x *és* $\binom{n-1}{m}$*, agafem els* m *elements del conjunt* $A - \{x\}$

que té $n-1$ elements. Els subconjunts de m elements que tenen x els formem afegint a l'element x, $m-1$ elements del conjunt $A-\{x\}$ que té $n-1$ elements, és a dir, $\binom{n-1}{m-1}$.

1.4. Mostres no ordenades amb repetició

Exemple 1.5 *Tenim 4 boles iguals i les volem posar en 3 caixes diferents. Quantes possibilitats tenim?*

Si anomenem les caixes A, B i C, pensem la mostra $AAAA$ com el cas en què les 4 boles es troben dins la caixa A, la mostra $AABB$ com el cas en què hi ha dues boles a la caixa A i les altres dues a la caixa B. La mostra $AABB$ és la mateixa que $BABA$, ja que les boles són iguals (indistingibles), per tant només l'hem de comptar un cop. Veiem que des d'aquest punt de vista (primer model), tenim mostres de mida 4 (boles indistingibles) amb repetició i no ordenades. Ara bé, per calcular la quantitat de mostres d'aquest tipus, és millor pensar cada una d'aquestes mostres des d'un altre punt de vista. Pensem que hem d'omplir 6 espais amb 4 símbols del tipus $\bullet$ i 2 símbols del tipus $|$. La raó de que sigui així la veiem a continuació: Ens imaginem les tres caixes seguint aquest ordre, $A|B|C$, i ara, per simplificar, només cal que ens imaginem les separacions entre les caixes. Cada símbol $|$ representa una separació entre dues caixes consecutives i per tant, només necessitem 2 separacions. De les 6 posicions que tenim, en triem dues per posar les separacions i a les altres posicions posem els símbols $\bullet$. El que acabem d'explicar ho podem veure en algunes mostres

primer model	*segon model omplim 6 espais*						*posicions de les separacions*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
AAAA	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\|$	$\|$	*{5,6}*
AAAB	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\|$	$\bullet$	$\|$	*{4,6}*
AABC	$\bullet$	$\bullet$	$\|$	$\bullet$	$\|$	$\bullet$	*{3,5}*
CCCC	$\|$	$\|$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	*{1,2}*

*Cada mostra queda caracteritzada per la posició de les dues separacions entre les 6 que podem triar. Observem que el nombre de posicions per triar és la suma (*boles + separacions*) $=4+(3-1)=6$. Donar dues posicions és el mateix que donar un subconjunt de 2 elements dins d'un conjunt de 6 elements. Per tant, el que estem comptant és el nombre de subconjunts de 2 elements que podem formar en un conjunt de 6 elements, $\binom{3-1+4}{4}=\binom{6}{2}=\binom{6}{4}=15$. El fet que $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$, reflecteix el fet que és el mateix començar triant la posició de les separacions que la posició de les boles.*

$$
\begin{array}{cccccc}
AAAA & BBBB & CCCC & AAAB & AAAC & BBBA \\
BBBC & CCCA & CCCB & AABB & AACC & BBCC \\
AABC & BBAC & CCAB & & &
\end{array}
$$

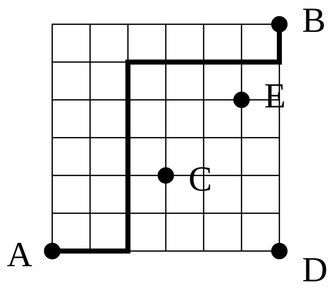
En general, en un conjunt de n elements, el nombre de mostres de mida m, no ordenades i amb repetició és:

$$CR_{n,m} = C_{n-1+m,m} = \binom{n-1+m}{m} = \binom{n-1+m}{n-1}. \tag{1}$$

En diem, combinacions amb repetició de n elements agafats de m en m.

1.5. Altres exemples

1) Es vol connectar (cablejar) els punts A i B, de manera que el camí segueixi la quadrícula que marca el dibuix. Només és permès anar a la dreta (1) i a dalt (0). Al gràfic teniu representat un dels camins possibles, que vindria descrit per la seqüència 110000011110.



a) Calculeu el nombre de camins possibles entre A i B.

Volem conèixer el nombre de mostres del tipus 110000011110, on hem de mantenir el nombre de zeros. Cada 0 ocupa una posició que és determinada per un nombre del conjunt $A = \{1, 2, \cdots, 12\}$; així doncs, a la mostra 110000011110 li fem correspondre el subconjunt de 6 elements $\{3, 4, 5, 6, 7, 12\}$. El nombre de subconjunts de 6 elements que podem formar amb els elements de A és $\binom{12}{6} = 924$.

b) Calculeu el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C.

De A a C hi ha $\binom{5}{2}$ possibilitats i de C a B $\binom{7}{4}$ possibilitats. En total hi haurà $\binom{5}{2}\binom{7}{4} = 350$.

c) Calculeu el nombre de camins possibles entre A i B que passin per C i per E.

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2} = 180.$$

2) Considereu totes les solucions de l'equació $x_1+x_2+x_3+x_4 = 50$, on x_1, x_2, x_3, x_4 prenen valors naturals.

a) Quantes n'hi ha?

$$\binom{50+4-1}{4-1} = 23426.$$

b) Quantes en què, una i només una de les incògnites sigui 0?

$$4\binom{(50-3)+3-1}{3-1} = 4704.$$

c) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors parells?

$$\binom{\frac{50}{2}+4-1}{4-1} = 3276.$$

d) Quantes hi ha, de manera que x_1, x_2, x_3, x_4 prenguin valors senars?

$$\binom{\frac{50-4}{2}+4-1}{4-1} = 2600.$$

3) Volem omplir la quadrícula següent amb 20 fitxes diferents.

	1	2	3	4	5
a					
b					
c					
d					
e					

a) De quantes maneres ho podem fer si podem posar totes les fitxes que vulguem dins d'un mateix quadre? $VR_{25,20} = 25^{20}$.

b) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa? $V_{25,20} = 25!/5!$.

c) De quantes maneres, si cada quadre només pot tenir com a màxim una fitxa i volem deixar una única fila buida? $5 \cdot V_{20,20} = 5 \cdot 20!$.

2. Espai de probabilitat

Molt sovint ens interessem per fenòmens on intervé l'atzar. Aquests fenòmens es caracteritzen perquè el resultat de les observacions varien d'una experiència a una altra.

La *probabilitat* que es realitzi un cert resultat en una experiència donada està relacionada amb la freqüència d'aquest resultat, si repetíssim *molts cops* l'experiència. Al llarg de la història s'han proposat diverses definicions matemàtiques de probabilitat (motivades principalment pels jocs d'atzar). Però no és fins a principi del segle XX que s'introdueix el model probabilístic de forma axiomàtica i així es formalitzen totes les anteriors idees.

Comencem el capítol donant les eines bàsiques necessàries per poder formalitzar el concepte de probabilitat.

2.1. Experiència aleatòria i successos. Operacions bàsiques i propietats

Definició 2.1 *Suposem que en repetir una determinada experiència en les mateixes condicions podem obtenir un conjunt de resultats diferents. Diem que l'experiència és aleatòria si és impossible de predir-ne el resultat. Per exemple:*

Observació del temps que triga un aparell nou abans d'espatllar-se.

Observació del temps de durada de vida d'una persona anònima.

Observació del nombre de peticions que arriben a un servidor no sobrecarregat.

Exemple 2.1 *En llançar un dau podem obtenir un resultat qualsevol d'entre els següents* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *però no podem predir-ne quin. Es tracta d'una experiència aleatòria. El conjunt format per tots els possibles resultats,* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *s'anomena espai mostral.*

Definició 2.2 *Anomenem espai mostral,* Ω, *el conjunt de resultats possibles d'una experiència aleatòria.*

Definició 2.3 *Donat un espai mostral,* Ω, *anomenem succés (esdeveniment),* A , *qualsevol subconjunt de l'espai mostral,* $A \subset \Omega$. *Un succés es diu elemental quan té un únic element.*

Si A és un succés

diem que "passa A" quan el resultat de l'experiment és un element de A.

Exemple 2.2 *Continuant amb l'exemple 2.1, veiem alguns successos i algunes maneres de descriure'ls:*

$A = \{$ *nombre parell* $\} = \{2, 4, 6\}$, $B = \{$*nombre més gran que* $3\} = \{4, 5, 6\}$

En aquest exemple tenim 6 *successos elementals o successos que tenen un sol element:* $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ *i* $\{6\}$.

Exemple 2.3 *Rebem un missatge binari (format amb elements de* $\{0, 1\}$*), de llargada* 3 *(o de mida* 3*).*

- *L'espai mostral és* $\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$. *Com que té* 8 *elements, diem que el cardinal d'omega és* 8 *i escrivim* $\mid \Omega \mid = 8$.

- *Alguns successos:* $A = \{000, 001, 010\}$, $B = \{$*missatges amb un sol* $0\}$, $C = \{011, 101\}$, $D = \{010, 100, 011, 111\}$.

Fixeu-vos amb la notació!

$\{000, 001, 010\} = \{010, 000, 001\}$. *No importa l'ordre en què escrivim els elements d'un conjunt.*

Definició 2.4 *Donats dos conjunts* A *i* B, $A, B \subset \Omega$:

- *Complementari de* A, A^c, *és el conjunt que té per elements tots els de* Ω *que no són de* A.

- A *unió* B, $A \cup B$, *és el conjunt que té tots els elements de* A *i també els de* B.

- A *intersecció* B, $A \cap B$, *és el conjunt que té tots els elements de* A *que alhora també són de* B.

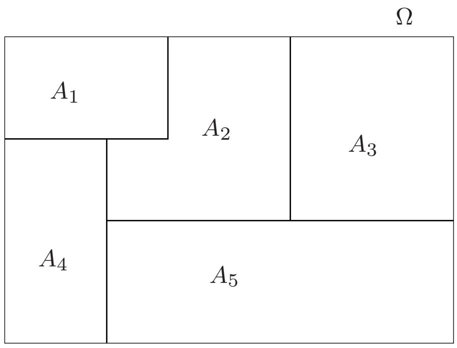
- $\varnothing$ *és el conjunt buit i* Ω *és el conjunt total.*

- *Diem que dos conjunts* A *i* B *són disjunts, quan* $A \cap B = \varnothing$, *és a dir, no tenen cap element en comú.*

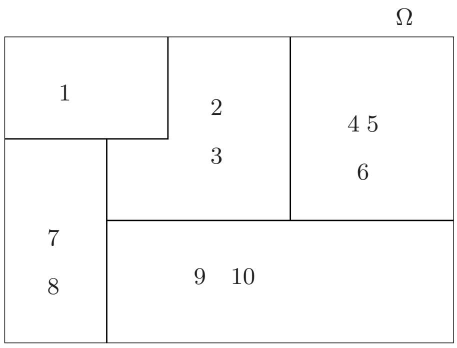
- *Diem que els conjunts* $A_1, A_2, \cdots A_n$ *formen una partició de* Ω *quan els conjunts són disjunts dos a dos, i la unió de tots ells és el conjunt total. És a dir,*

$$A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad per \quad i \neq j \quad i \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Exemple 2.4 *En aquest exemple representem una partició,* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *d'un conjunt* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, *amb* $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, $A_4 = \{7, 8\}$ *i* $A_5 = \{9, 10\}$. *La unió de tots ells és el total,* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$, *i la intersecció entre dos qualssevol és buida. Vegem dues representacions,*



Els conjunts A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 formen una partició del conjunt total Ω



Els conjunts $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8\}$ i $\{9,10\}$ formen una partició del conjunt total Ω

Vegem les anteriors definicions en termes probabilístics:

El succés contrari de A, A^c, es realitza quan no ho fa A.

El succés $A \cup B$ es realitza, si passa A, passa B o passa A i B alhora.

El succés $A \cap B$ es realitza, si passa A i B alhora.

$\varnothing$ és el succés impossible i Ω és el succés segur.

Diem que A i B són dos successos incompatibles quan $A \cap B = \varnothing$.

Diem que $A_1, A_2, \cdots A_n$, formen un sistema complet de successos, si formen una partició.

Els anteriors conceptes els hem resumit a la taula següent:

En termes de probabilitat	**En termes de conjunts**	**Notació**
Succés segur	Conjunt total	Ω
Succés impossible	Conjunt buit	$\varnothing$
Succés contrari	Conjunt complementari	A^c, també $\overline{A}$
A i B	Intersecció	$A \cap B$
A o B	Unió	$A \cup B$
Successos incompatibles	Conjunts disjunts	$A \cap B = \varnothing$
Sistema complet de successos	Partició de Ω	$A_i \cap A_j = \varnothing$ $\cup A_i = \Omega$

Considerant els conjunts de l'exemple 2.3, podem escriure:

$$\begin{aligned}
A \text{ complementari, o complementari de } A,\ A^c &= \{000, 001, 010, 011, 101, 110\} \\
A \text{ unió } B,\ A \cup B &= \{000, 001, 010, 100\} \\
A \text{ unió } C,\ A \cup C &= \{000, 001, 010, 011, 101\} \\
A \text{ intersecció } C,\ A \cap C &= \varnothing
\end{aligned}$$

2.2. Definició axiomàtica de probabilitat. Espai finit equiprobable

El resultat d'una experiència aleatòria no es pot preveure amb certitud. La teoria de la probabilitat dóna un *pes* a cada un dels possibles resultats, és a dir, un nombre que avalua la certesa que tenim que un resultat es doni.

Definició 2.5 *A partir d'una experiència aleatòria amb l'espai mostral Ω, considerem el conjunt format per tots els subconjunts de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Una probabilitat sobre Ω és una aplicació que a cada subconjunt $A \subset \Omega$ ($A \in \mathcal{P}(\Omega)$), li assigna un nombre real, $P(A)$, que verifica:*

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) *Si* $A \cap B = \varnothing$ *aleshores* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Diem que tenim un *espai de probabilitat* quan tenim un conjunt Ω on hem definit una probabilitat.

Dels axiomes anteriors es dedueixen les següents propietats:

Proposició 2.1 *Propietats:*

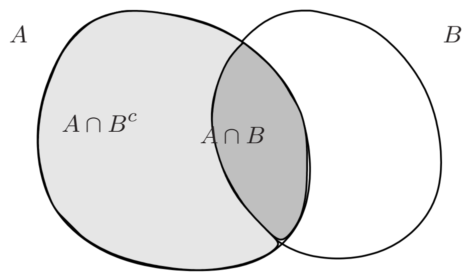
1) *La probabilitat del succés impossible és* 0.

2) *Donat un succés qualsevol* A*, es verifica* $P(A^c) = 1 - P(A)$*. Aquesta propietat és clara si pensem que* A *i* A^c *formen una partició del total,* Ω*.*

3) *Donats dos successos* A *i* B*,* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*.*

La prova de les tres primeres propietats és immediata. Fem la prova d'aquesta última propietat. Posem el conjunt A *com a unió de dos conjunts disjunts,*

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$



Representació de $A \cap B^c$ i $A \cap B$

Com que tenim una unió de dos conjunts disjunts (ho podem veure a la figura), la probabilitat és suma de probabilitats,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \tag{2}$$

De manera semblant, escrivim $A \cup B$ *com a unió de dos conjunts disjunts,*

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$$

llavors,

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B) \tag{3}$$

de les equacions 2 i 3 obtenim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*.*

Definició 2.6 *Espai finit equiprobable*

En un espai finit equiprobable que té per espai mostral $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$*, cada un dels successos elementals té la mateixa probabilitat. Així,*

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \cdots = P(\{a_n\}) = p$$

i com que s'ha de verificar que

$$P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_n\}) = np = 1$$

es té que la probabilitat de cada succés elemental és $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

Proposició 2.2 *Llei de Laplace*

En un espai equiprobable, la probabilitat d'un succés A és el quocient entre el nombre d'elements de A i el nombre d'elements de l'espai mostral. S'acostuma a dir

$$P(A) = \frac{\textit{nombre de casos favorables}}{\textit{nombre de casos possibles}}.$$

Exemple 2.5 *Considerem l'experiència de llençar una moneda tres cops seguits. L'espai mostral és* $\Omega = \{\bigcirc\bigcirc\bigcirc, \bigcirc\bigcirc+, +\bigcirc\bigcirc, \bigcirc+\bigcirc, ++\bigcirc, +\bigcirc+, \bigcirc++, +++\}$. *Si la moneda és perfecta es tracta d'un espai* equiprobable. *Siguin els següents successos:* $A = \{\textit{han sortit dues cares}\}$, $B = \{\textit{no ha sortit cap cara}\}$, $C = \{\textit{ha sortit una creu}\}$, $D = \{\textit{almenys ha sortit una creu}\}$. *Calculem algunes probabilitats. El fet que l'espai sigui equiprobable ens permet aplicar la llei de Laplace. En cada cas cal comptar el nombre d'elements que té el conjunt i dividir per* 8.

Probabilitat que surtin dues cares, $P(A) = \frac{3}{8}$.
Probabilitat que no surti cap cara, $P(B) = \frac{1}{8}$.
Probabilitat que surti una creu, $P(C) = \frac{3}{8}$.
Probabilitat que almenys surti una creu, $P(A \cup D) = P(D) = \frac{7}{8}$.
Probabilitat que surtin dues cares i alhora cap cara (és impossible), $P(A \cap B) = 0$.
Probabilitat que surtin dues cares o bé almenys una creu, $P(A \cup D) = P(A) = \frac{3}{8}$.
Probabilitat que surtin dues cares o cap cara, $P(A \cup B) = \frac{4}{8}$.
Probabilitat que no surti cap cara i almenys una creu, $P(B \cap D) = P(B) = \frac{1}{8}$.

2.3. Probabilitat condicionada. Successos independents

Parlem de probabilitat condicionada quan ja s'ha realitzat l'experiència i ens donen una pista sobre el resultat obtingut. Vegem un exemple.

Exemple 2.6 *Considerem el mateix espai de probabilitat que a l'exemple 2.5. Es realitza l'experiència i ens donen la pista que almenys ha sortit una creu. Quina és la probabilitat que hagin sortit dues cares?*

És clar que ara l'espai total ha quedat reduït al conjunt

$$\{\bigcirc\bigcirc+, +\bigcirc\bigcirc, \bigcirc+\bigcirc, ++\bigcirc, +\bigcirc+, \bigcirc++, +++\}$$

Per tant, ara, la probabilitat que hagin sortit dues cares és $\frac{3}{7}$.

Ho escrivim com a $P(A/D) = \frac{3}{7}$ *i diem probabilitat de A condicionada a D.*

A continuació en donem la definició.

Definició 2.7 *Donats dos conjunts $A, B \subset \Omega$, amb $P(B) \neq 0$, definim la probabilitat del conjunt A condicionada a B com a:*

Hem reduït l'espai mostral.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4}$$

Es tracta de trobar una probabilitat, sabent *que s'ha realitzat B.*

Exemple 2.7 *Considerem el mateix espai de probabilitat que a l'exemple 2.5 i calculem algunes probabilitats condicionades.*

- *Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que hagin sortit dues cares. És a dir, $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$. Ja ho havíem trobat a l'exemple anterior.*

- *Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que hagi sortit exactament una creu. És a dir, $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$*

- *Sabent que ha sortit almenys una creu, probabilitat que no hagi sortit cap cara. És a dir, $P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$*

- *Sabent que ha sortit una creu, probabilitat que hagin sortit dues cares. De fet, els successos A i C són el mateix. Per tant, $P(A/C) = 1$.*

- *Sabent que no ha sortit cap cara, probabilitat que hagin sortit dues cares. És a dir, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$*

Definició 2.8 *Sigui $A, B \subset \Omega$. El succés A és independent del succés B, quan la probabilitat de A no es modifica en conèixer alguna informació de la realització de B. És a dir,*

$$P(A/B) = P(A). \tag{5}$$

Volem veure que si A és independent del succés B llavors el succés B també és independent de A. De l'equació (4) tenim

$$P(A)P(B/A) = P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

i si tenim en compte (5) i subsituïm l'últim terme de la igualtat,

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P(A) \tag{6}$$

ara simpliquem $P(A) \neq 0$ i ens queda

$$P(B/A) = P(B) \tag{7}$$

Per tant, si A és independent de B, B també és independent de A i es verifica

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A)P(B) \tag{8}$$

i, per tant, si A i B són independents es verifica

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{9}$$

Vegem un exemple numèric.

Exemple 2.8 *Siguin A i B dos successos de Ω i sabem que $P(A \cup B) = 0.52$, $P(A \cap B) = 0.08$ i $P(A) = 0.4$. Veurem que A i B són independents.*

Per a això veiem si es verifica la igualtat $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aplicant la propietat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tenim

$$0.52 = 0.4 + P(B) - 0.08 \implies P(B) = 0.2 \implies P(A)P(B) = 0.4\ 0.2 = 0.08 = P(A \cap B).$$

2.4. Teorema de la probabilitat total. Teorema de Bayes

Exemple 2.9 *Un aparell electrònic ha de treballar dins del rang de temperatures $[10^oC, 40^oC]$. S'ha observat que quan la temperatura es troba a l'interval $T_1 = [10^oC, 20^oC]$ té un comportament òptim el 75% de les vegades, quan treballa a temperatures de l'interval $T_2 = (20^oC, 30^oC]$ un 55% de les vegades, i quan treballa a temperatures dins el rang $T_3 = (30^oC, 40^oC]$ un 45% de les vegades. També coneixem la freqüència de cada un d'aquests rangs de temperatura. El 25% de les vegades la temperatura és dins T_1, el 60% dins T_2 i el 15% dins T_3. Ens preguntem quina és la probabilitat que, en un moment donat a una temperatura qualsevol dins el rang $[10^oC, 40^oC]$, l'aparell tingui un comportament òptim.*

T_1, T_2 i T_3 formen una partició del conjunt de temperatures possible $[10^oC, 40^oC]$ perquè $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = [10^oC, 40^oC]$ i $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \cap T_3 = \varnothing$ i $T_2 \cap T_3 = \varnothing$. Si anomenem el succés O={Funcionament òptim }, podem escriure

$$O = (O \cap T_1) \cup (O \cap T_2) \cup (O \cap T_3)$$

i com que aquests conjunts són disjunts,

$$P(O) = P(O \cap T_1) + P(O \cap T_2) + P(O \cap T_3).$$

Però no coneixem el valor numèric de les probabilitats d'aquestes interseccions. De l'enunciat sabem que $P(O/T_1) = 0.75$, $P(O/T_2) = 0.55$, *i* $P(O/T_3) = 0.45$. *També coneixem* $P(T_1) = 0.25$, $P(T_2) = 0.60$ *i* $P(T_3) = 0.15$. *Podem deduir el valor d'aquestes probabilitats*

$$\begin{aligned} P(O \cap T_1) &= P(O/T_1)P(T_1) = 0.1875 \\ P(O \cap T_2) &= P(O/T_2)P(T_2) = 0.33 \\ P(O \cap T_3) &= P(O/T_3)P(T_3) = 0.0675 \end{aligned}$$

Així $P(O) = 0.1875 + 0.33 + 0.0675 = 0.585$.

En aquest exemple hem aplicat el teorema de la probabilitat total que enunciem a continuació:

Teorema 2.1 *Si* $A_1, A_2, \cdots A_n$ *és un sistema complet de successos de* Ω *i* $B \subset \Omega$, *podem escriure el succés* B *com a unió de parts disjuntes dos a dos*

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$

Com que les parts són disjuntes, la probabilitat la trobem sumant les probabilitats

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

i tenint en compte 4, obtenim el teorema de la probabilitat total

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \cdots + P(B/A_n)P(A_n).$$

Exemple 2.10 *Considerem el mateix enunciat que a l'exemple 2.9 i ens fem la següent pregunta: Sabent que el funcionament de l'aparell ha estat òptim, quina és la probabilitat que ens trobem en un rang de temperatures corresponent a* T_1*?*

És clar que el que ens demanen és $P(T_1/O)$, que és precisament el contrari de les dades que ens donen, ja que el que coneixem és $P(O/T_1)$, $P(O/T_2)$ i $P(O/T_3)$.

Com coneixem la relació, $P(T_1/O) = \dfrac{P(T_1 \cap O)}{P(O)}$, i els valors numèrics ja els hem obtingut a l'exemple anterior, tenim que $P(T_1/O) = \dfrac{0.1875}{0.585} = 0.3205$.

Acabem d'aplicar el que s'anomena teorema de Bayes. Vegem-ho de forma general.

Teorema 2.2 Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, \cdots A_n$ és un sistema complet de successos de Ω i $B \subset \Omega$,

$$P(B \cap A_i) = P(B/A_i)P(A_i) = P(A_i/B)P(B)$$

i obtenim la fórmula de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \cdots + P(B/A_n)P(A_n)}.$$

Exemple 2.11 *Hi ha tres empreses, A, B i C, que fabriquen la mateixa peça d'avió en les proporcions següents, respecte del total de peces fabricades:* 40%, 25% *i* 35%. *El* 10% *de peces que fabrica l'empresa A són defectuoses, mentre que aquest percentatge és de* 5% *per a l'empresa B ,i d'*1% *per a A. Dins de la producció total de les tres empreses, es tria una peça a l'atzar i s'observa que és defectuosa. Calculem la probabilitat que hagi estat fabricada per l'empresa A.*

Definim els següents successos:

$$D = \{\text{la peça és defectuosa}\}$$
$$A = \{\text{la peça ha estat fabricada per } A\}$$
$$B = \{\text{la peça ha estat fabricada per } B\}$$
$$C = \{\text{la peça ha estat fabricada per } C\}$$

A, B i C formen una partició, i coneixem $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$ i $P(C) = 0.35$. L'enunciat també ens dóna les dades sobre la probabilitat que la peça sigui defectuosa segons on ha estat fabricada: $P(D/A) = 0.1$, $P(D/B) = 0.05$ i $P(D/C) = 0.01$.

Segons el teorema de la probabilitat total,

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C)P(C) = 0.056$$

Amb el teorema de Bayes obtenim el que ens demanen,

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.4\ 0.1}{0.056} = 0.714$$

2.5. Diagrames d'arbre

A l'hora d'aplicar els teoremes de la probabilitat total i Bayes, ens podem ajudar amb el que anomenem diagrames d'arbre. Vegem a la següent figura la manera de representar l'experiència de l'exemple 2.11.

Exemple 2.12 *Diagrama d'arbre.*

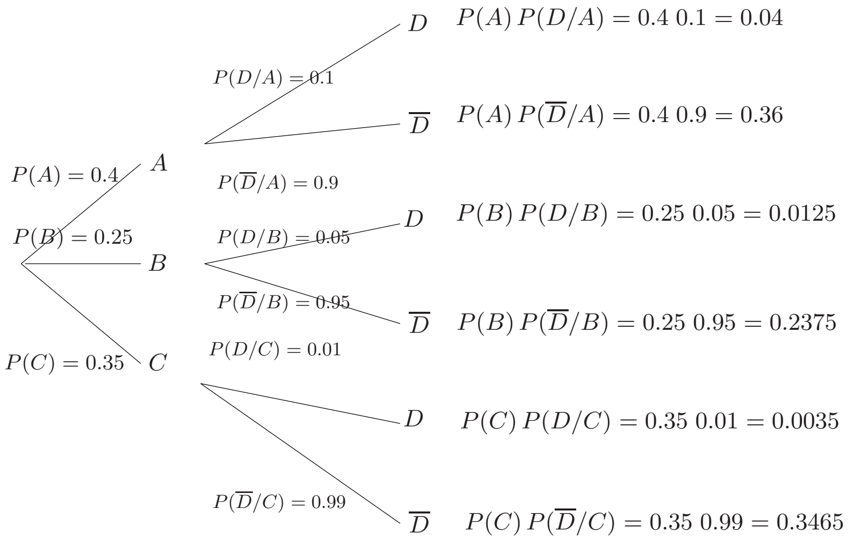


Diagrama d'arbre

Algunes consideracions sobre aquests diagrames:

- *Ens imaginem, temporalment, l'experiència, d'esquerra a dreta.*
- *Cada un dels camins, des de l'inici fins al final, representa una possibilitat de l'experiència.*
- *A la dreta del diagrama queden representades totes les possibilitats i per tant, la suma és 1.*
- *Cada un dels segments representa un "pas"de l'experiència.*

- *La probabilitat que indiquem en cada un d'aquests segments està condicionada a la part del camí ja realitzada.*

- *La suma de les probabilitats de tots els segments que parteixen d'un mateix punt és 1.*

Exemple 2.13 *S'envia una paraula de mida* 12 *formada amb elements del conjunt* $\{0, 1\}$, *i cada un d'aquests elements és el que s'anomena* bit. *Una possible paraula podria ser* 111000111000. *Sabem que la probabilitat que un bit, independent dels altres, arribi erroni al receptor és de* 0.1. *Enviem una paraula i ens plantegem les següents questions:*

1) *Quina és la probabilitat que no arribi cap bit erroni?*

2) *Quina és la probabilitat que arribi un bit erroni?*

3) *Quina és la probabilitat que arribin dos bits erronis?*

4) *Quina és la probabilitat que arribin tres bits erronis?*

5) *Quina és la probabilitat que arribi, almenys, un bit erroni?*

6) *Quina és la probabilitat que arribi, com a mínim, un bit erroni?*

7) *Quina és la probabilitat que arribi, com a màxim, un bit erroni?*

Ens podem representar cada possibilitat com una seqüència de dotze lletres del conjunt $\{e, n\}$, *segons el bit arribi erroni o no arribi erroni. Per exemple:*

eeeeeeeeeeee	*tots els bits arriben erronis*
nneeeeeeeeee	*tots els bits arriben erronis menys els dos primers*
nennnnnnnnnn	*el segon bit arriba erroni i els altres no*
enennnnnnnnn	*el primer i tercer bit arriben erronis i els altres no*

Com que la probabilitat que un bit qualsevol arribi erroni és 0.1, *i aquesta probabilitat és independent del que els passa als altres bits, la probabilitat de cada una de les seqüències només depèn de la quantitat de* ***e*** *o* ***n***. *Ara podem respondre les anteriors preguntes.*

1) $P(nnnnnnnnnnnn) = 0.9^{12} = 0.28$.

2) *Hem de tenir en compte que el bit erroni pot ser a la primera posició, o a la segona,..., o a la dotzena posició, és a dir, ennnnnnnnnnn, nennnnnnnnnn,...,nnnnnnnnnnne. Com que la probabiltat de cada un d'aquests casos és* $0.1\ 0.9^{11}$, $P(\textit{arriba un bit erroni}) = 12\ 0.1\ 0.9^{11} = 0.375$.

3) *De la mateixa manera que hem fet abans, hem de calcular quantes paraules es poden formar amb dos bits erronis, per exemple eennnnnnnnnn, enennnnnnnnn,... El nombre de paraules d'aquest tipus és* $\binom{12}{2}$. *Així,* $P(\textit{arriben dos bits erronis}) = \binom{12}{2} 0.1^2 0.9^{10} = 0.23$.

4) *Amb un raonament semblant al cas anterior, obtenim ara* $P(\textit{arriben tres bits erronis}) = \binom{12}{3} 0.1^3 0.9^9 = 0.085$.

5) *Els casos que tenen* ***almenys*** *un bit erroni són els que tenen un bit erroni més els casos que tenen dos bits erronis, etc. És a dir, són tots els casos menys el cas on no hi ha cap bit erroni. Com que la probabilitat de tots els casos és 1, tenim* $P(\textit{arriba almenys un bit erroni}) = 1 - 0.9^{12} = 0.717$.

6) *Ens demanen el mateix que en el cas anterior, així,* $P(\textit{arriba com a mínim un bit erroni}) = 1 - 0.9^{12}$.

7) *En aquest cas només hem de comptar els casos que no tenen cap bit erroni més els casos on hi ha un bit erroni,* $P(\textit{arriba com a màxim un bit erroni}) = 0.9^{12} + \ 12\ 0.1\ 0.9^{11} = 0.65$.