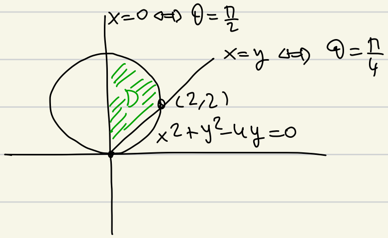
Ampliació de Matemàtiques – 2A3

Solució del primer control

1. **(3 punts)** Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-4y \le 0, 0 \le x \le y\}$ i la funció $f(x,y) = xy^2$. Escriu la integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en coordenades cartesianes i en coordenades polars. **NO** cal calcular la integral.



Cartesianes:

$0 \le x \le 2$

$x \le y \le 2+\sqrt{4-x^2}$

$x^2+y^2-4y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{4-x^2}$

Polars:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 4\sin\theta \end{array}\right\}$$

$f(x,y) = xy^2 = r^3 \cos\theta \sin^2\theta$

$|J| = r$

$x^2+y^2-4y=0 \Leftrightarrow r^2 - 4r\sin\theta = 0 \Rightarrow r = 4\sin\theta$

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^2 \int_x^{2+\sqrt{4-x^2}} xy^2\,dy\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\sin\theta} r^4 \cos\theta \sin^2\theta\,d\theta$$

2. **(3 punts)** Calcula la integral de la funció $f(x,y,z) = z$ sobre el recinte del primer octant delimitat per $x^2+y^2+z^2 \le 4$ i per $4z \ge 4 - x^2 - y^2$.

Intersecció de les dues superfícies:

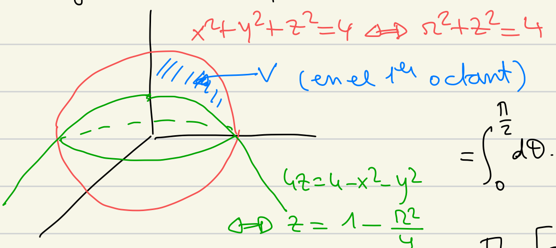
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ 4z = 4-x^2-y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 = 4z \Rightarrow z = \left\{\begin{array}{l} 4 \\ \boxed{0} \end{array}\right.$$

$z=4 \Rightarrow x^2+y^2 = -12$ NO POT SER!!

En $z=0$, tenim $x^2+y^2=4$, la intersecció de les dues superfícies.

Les dues superfícies són una esfera de centre $(0,0,0)$ i radi 2, i un paraboloide que mira avall, amb el vèrtex a: $4z = 4-r^2 \Rightarrow z = 1 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow (0,0,1)$

Ho fem en cilíndriques.



$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{1-\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} rz\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^2 \left[r\frac{z^2}{2} \right]_{1-\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^2 4r - r^3 - r\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^2 dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} + \frac{2}{3}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^3 \right]_0^2 = \frac{\pi}{4}\left(4-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}\pi$$

3. **(4 punts)** Sigui C^+ la vora del recinte del pla definit per $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ i $x \ge 0$, orientada positivament, i sigui $\vec{F}(x,y) = (x^2 + 2xy - y^3, x^3 + x^2 + y)$.

(a) Justifica si el camp $\vec{F}$ és o no conservatiu.

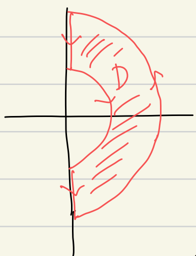
(b) Calcula la integral de $\vec{F}$ sobre C^+.

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 3y^2$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 2x$

$\neq \Rightarrow$ El camp no és conservatiu

(b)



Teorema de Gauss $\oint_{C^+} \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

Per tant:

$$\int_{C^+} \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_D 3x^2 + 3y^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3r^3\,dr\,d\theta = \pi \cdot \left[\frac{3}{4} r^4\right]_1^2 =$$

En polars

$$= \pi \cdot \left(12 - \frac{3}{4}\right)$$