1. **(3 punts)** Sigui $f(t) = |t-1|$, $t \in [0,2)$.

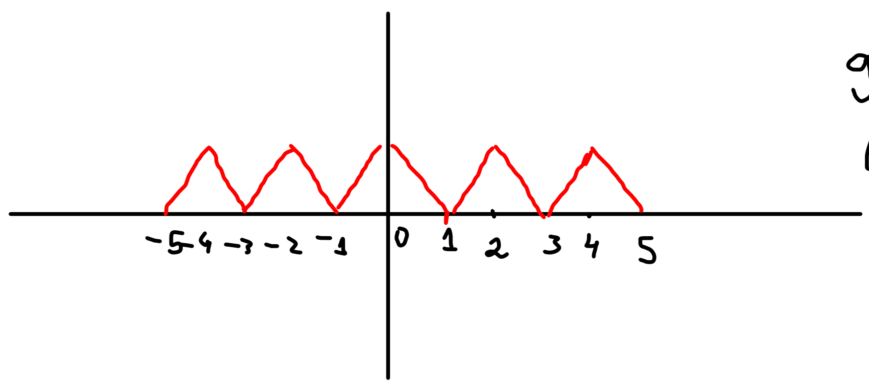
   (a) Dibuixeu les gràfiques de l'extensió periòdica de f, de l'extensió parella i l'extensió senar de $f(t)$ (també exteses periòdicament) a l'interval $[-5,5]$. Raoneu quins són els períodes de les tres funcions periódiques descrites anteriorment.

   (b) Quin valor pren **en el punt** $\mathbf{t = 0}$ la sèrie de Fourier complexa de $f(t)$? Justifiqueu la resposta.

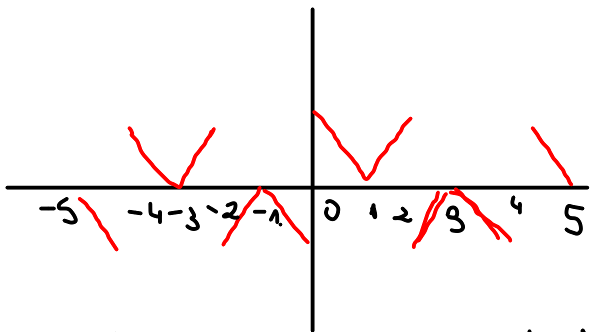
   (c) Determineu en quins punts de l'interval $[-5,5]$ la sèrie de Fourier trigonomètrica associada a l'extensió periòdica de f presenta el fenomen de Gibbs. Justifiqueu la resposta.

   (d) Considereu la suma dels 10 primers termes de la sèrie de Fourier en sinus de $f(t)$. Pot assolir aquesta suma en algun punt un valor superior a 1? Justifiqueu la resposta.

a)



gràfica de l'extensió periòdica de f, coincideix amb la seva extensió parella.
El període d'aquestes extensions periòdiques és $T = 2$.

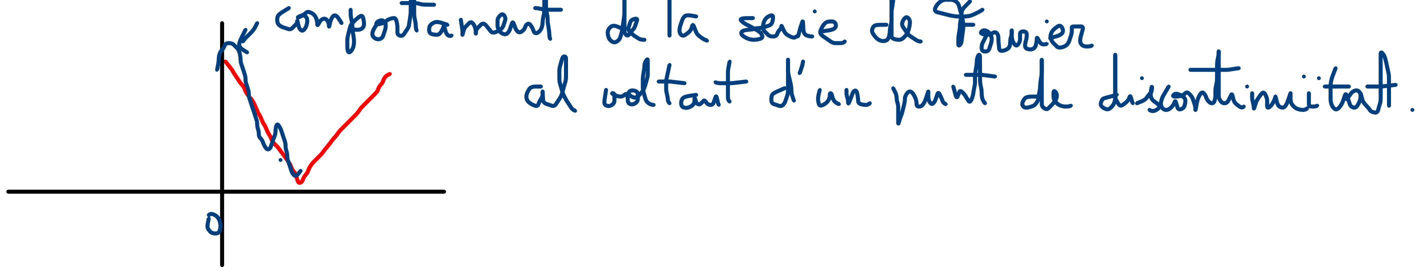


gràfica de l'extensió senar de f dibuixada a l'interval $[-5,5]$. El període d'aquesta extensió és $T = 4$.

b) El punt $t=0$ és un punt de continuïtat de l'extensió periòdica de f, per tant, el teorema de Dirichlet implica que $SFC[f](0) = f(0) = |0-1| = 1$.

c] Com que l'extensió periòdica de f és contínua en tots els punts, el fenomen de Gibbs no es dóna en cap punt.

d] La sèrie de Fourier en sinus correspon a la sèrie de Fourier de l'extensió senar. D'aquesta observem a la gràfica dibuixada a l'apartat a) que és discontínua en els punts $t=0$, $t=2$ on pren el valor 1 com un dels seus límits laterals però degut al fenomen de Gibbs present en aquests punts la suma parcial dels 10 primers termes de la sèrie de Fourier sempre prendrà un valor més gran que 1 quan estem aprop d'aquests punts (aproximadament una sobrepujada d'un 9% del valor de la diferència entre el límit per la dreta i el límit per l'esquerra.



2. **(2 punts)** Sigui $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$ i $g(t) = \begin{cases} \cos(2t) & \text{si } 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

(a) Expresseu f com una traslladada de una funció pols rectangular p_a, per cert valor a a determinar, i utilitzeu aquesta expressió per calcular la transformada de Fourier de f.

(b) Deduïu de l'apartat anterior (o bé per càlcul directe) quina és la transformada de Fourier de la funció g.

a) $f(t) = p_\pi(t-\pi) \xrightarrow[\text{de traslació}]{\text{propietat}} \boxed{F(\omega) = 2\,\frac{\sin \pi\omega}{\omega}\, e^{-\pi j\omega}}$

b) $g(t) = f(t)\cdot\cos(2t) = p_\pi(t-\pi)\cdot\cos(2t) \xrightarrow[\text{de modulació}]{\text{propietat}} G(\omega) = \frac{1}{2}\left[F(\omega-2) + F(\omega+2)\right] =$

$$= \left(\frac{\sin \pi(\omega-2)}{\omega-2}\, e^{-\pi j(\omega-2)} + \frac{\sin \pi(\omega+2)}{\omega+2}\, e^{-\pi j(\omega+2)}\right) =$$

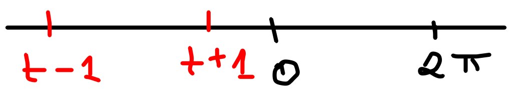
$$= \boxed{\frac{\sin \pi\omega}{\omega-2}\, e^{-\pi j\omega} + \frac{\sin \pi\omega}{\omega+2}\, e^{-\pi j\omega}}$$

3. **(2 punts)** Considereu la funció g del problema 2 anterior. Calculeu $g(t) * p_1(t)$, fent servir convolució gràfica.

$$(g * p_1)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot p_1(t-u)\, du = \int_{t-1}^{t+1} g(u)\, du$$

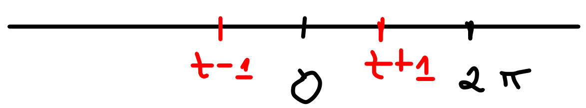
$$-1 \leq t-u \leq 1 \iff t-1 \leq u \leq t+1$$

1^{er} cas



$$t+1 \leq 0 \iff t \leq -1; \quad \boxed{(g * p_1)(t) = 0}$$

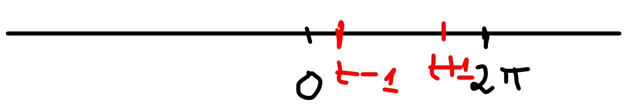
2^{on} cas



$$t-1 \leq 0 < t+1 \leq 2\pi \iff -1 \leq t \leq 1$$

$$(g * p_1)(t) = \int_0^{t+1} \cos 2u\, du = \frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{t+1} = \boxed{\frac{\sin 2(t+1)}{2}}$$

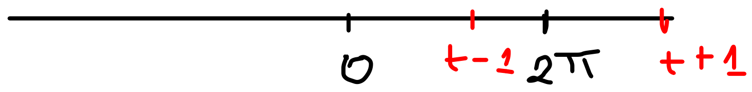
3^{er} cas



$$0 < t-1 < t+1 < 2\pi \iff 1 \leq t \leq 2\pi - 1$$

$$(g * p_1)(t) = \int_{t-1}^{t+1} \cos 2u\, du = \boxed{\frac{\sin 2(t+1) - \sin 2(t-1)}{2}}$$

4^{art} cas

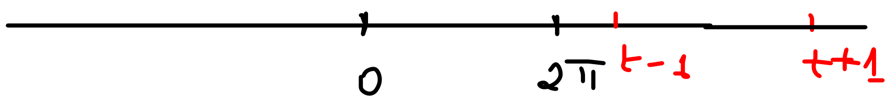


$$t-1 < 2\pi < t+1 \iff 2\pi-1 \le t \le 2\pi+1$$

$$\int_{t-1}^{2\pi} \cos 2u \, du = \frac{\sin 2u}{2}\Big]_{t-1}^{2\pi} = \frac{\sin 4\pi - \sin 2(t-1)}{2}$$

$$= \boxed{-\frac{\sin 2(t-1)}{2}}$$

5^{è} cas



$2\pi \le t-1 \Rightarrow t \ge 2\pi+1$. $\boxed{(g * p_1)(t) = 0.}$

4. **(3 punts)** Sabent que $f(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{t}$ té per transformada de Fourier $F(\omega) = \pi p_\pi(\omega)$, deduïu raonadament els valors de:

   (a) La transformada de Fourier de $\dfrac{\sin(\pi t)}{t-2}$.

   (b) La transformada inversa (antitransformada) de Fourier de $p_\pi(\omega)e^{j\omega}$.

   (c) La transformada inversa (antitransformada) de Fourier de la funció $\omega p_\pi(\omega)$.

   (d) El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt$.

   (e) El valor de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{t^2}\, dt$.

a) $\dfrac{\sin \pi t}{t-2} = \dfrac{\sin(\pi(t-2))}{t-2} \longleftrightarrow \pi p_\pi(\omega)\, e^{-j\omega 2}$

↳ propietat de traslació $t_0 = 2$

b) $TIF\left[p_\pi(w)\, e^{jw} \right] = \boxed{\dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin \pi(t+1)}{t+1}}$

$\Downarrow$ propietat de translació $t_0 = -1$

c) $TIF\left[w\, p_\pi(w) \right] = \dfrac{1}{j\pi} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\sin \pi t}{t} \right] = \boxed{\dfrac{1}{j\pi} \dfrac{\pi \cos(\pi t)\, t - \sin(\pi t)}{t^2}}$

$TF[f'(t)](w) = jw\, F(w)$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} F(0) = \frac{1}{2} \pi\, p_\pi(0) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

funció parella

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{t^2}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(w)\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\, dw = \frac{1}{2\pi} \pi^2 (2\pi) = \boxed{\pi^2}$

identitat de Parseval