TEMA 2. DERIVACIÓ DE FUNCIONS D'UNA VARIABLE

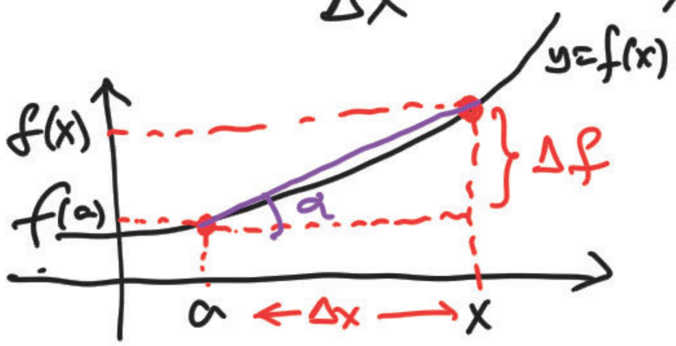
1. Concepte de derivada. Interpretació geomètrica.
2. Funció derivada. Regla de la cadena. Derivació logarítmica i implícita.
3. Límits de funcions: indeterminacions, regla de l'Hôpital, criteri de compressió
4. Aproximació de funcions: polinomi de Taylor, residu de Lagrange
5. Extrems de funcions d'una variable

1. Concepte de derivada

Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Donats $a, x \in I$, la taxa de variació mitjana de f entre a i x és:

$$TVM = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



$\tan \alpha = TVM$

* la derivada de f en $x=a$ mesura la taxa de variació instantània de f en el punt $x=a$

<u>Def</u> Sigui $f: I \to \mathbb{R}$ i $a \in I$. Diem que f és derivable en $x=a \iff \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Aquest límit s'anomena derivada de f en $x=a$ i s'escriu

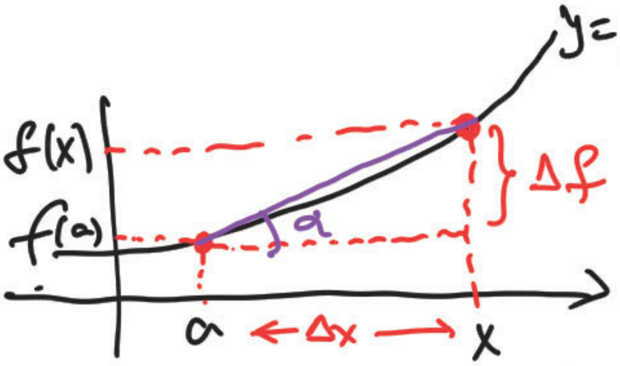
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

canvi $h = x-a$

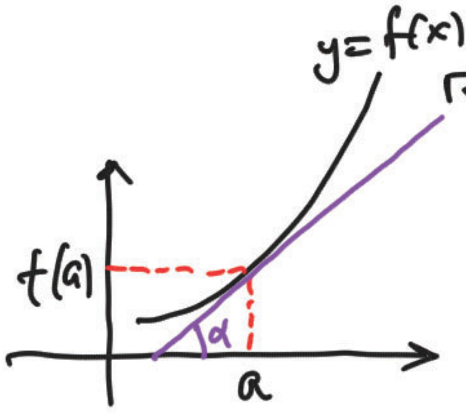
<u>Ex 1</u> $f(x)=x^2 \to f'(1)$?

<u>Ex 2</u> $f(x)=|x| \to f'(0)$?

Interpretació geomètrica



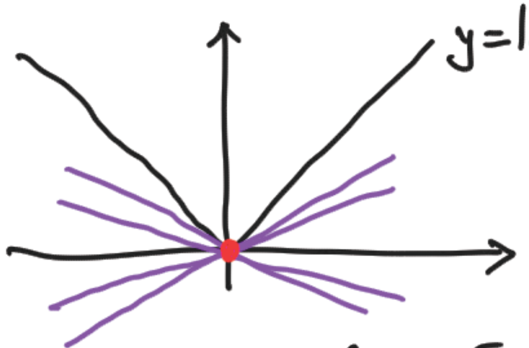
$\xrightarrow{(x\to a)}$



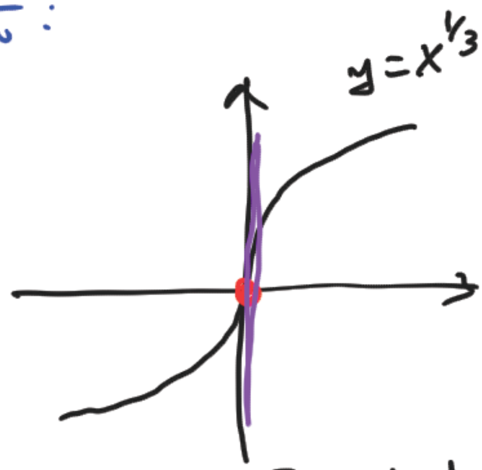
$\Rightarrow f'(a)=\tan\alpha$: derivada de f en a $\equiv$ pendent de la recta tangent a $y=f(x)$ en $x=a$

Sigui f derivable en $x=a$: recta tangent a $y=f(x)$ en $x=a$ $\to$ $r \equiv y-f(a)=f'(a)(x-a)$

Causes de no derivabilitat:



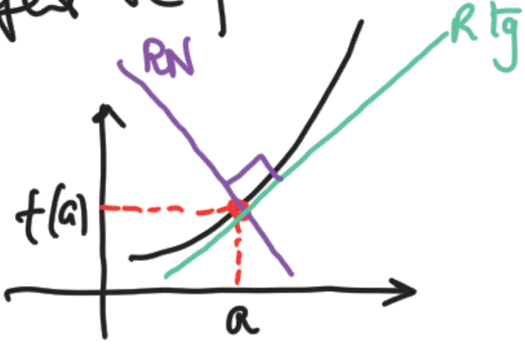
$\nexists$ recta tangent (només n'hi pot haver una)



recta tangent té pendent ∞

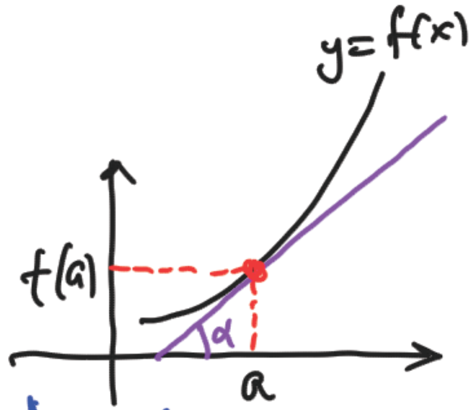
* Recta normal a $y=f(x)$ en $x=a$:

$$r \equiv y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

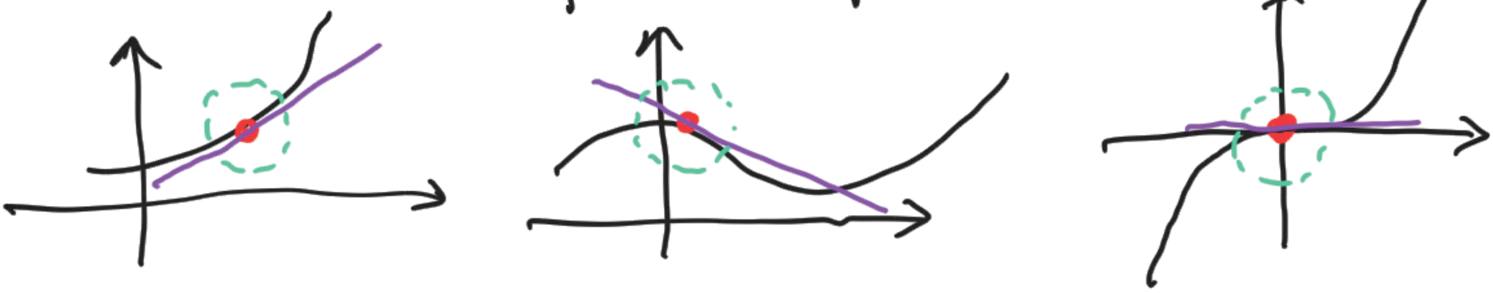


Obs

- la recta tg és la recta que "millor" aproxima la funció en $x=a$



- el concepte de tangència és local → en un entorn del punt en qüestió.



Derivades laterals

Sigui $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ i $a \in I$

- Deriv. lateral de f en $x=a$ per la dreta:

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- Deriv. lateral de f en $x=a$ per l'esquerra

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f derivable en $x=a \iff f'(a^+) = f(a^-) = K \in \mathbb{R}$, alshores $f'(a) = K$

2. Funció derivada

Def Sigui $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, diem que f és derivable en I $\Leftrightarrow$ f és derivable en tots els punts de I

Notació $f': I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f'(x)$ f' ⇒ funció derivada de f

Ex $f(x) = x^2 \rightarrow$ Calculeu $f'(x)$ usant la definició de derivada

Obs Les TAULES DE DERIVADES de les funcions elementals s'obtenen usant la definició i propietats de la derivada per a $+, -, \cdot, \div$

Ex $f(x) = x|x|$
a) Escriure-la com una f. definida a trossos
b) Calcular $f'(x)$

Obs Sigui $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq a \\ f_2(x), & x < a \end{cases}$ contínua en $x = a$, amb $f_1(x), f_2(x)$ polinomis

Aleshores: $f'(a^+) = \lim_{x \to a} f_1'(x)$
$f'(a^-) = \lim_{x \to a} f_2'(x)$

Aquest resultat no és vàlid en general

Ex $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \nearrow f'(0) = 0 \\ \searrow \nexists \lim_{x \to 0} (x^2 \cdot \sin \frac{1}{x})' \end{matrix}$ $\Big\}$ deriv. discont.

regla de la cadena

s'usa per trobar la derivada de la funció composta:

recordem $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g\circ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \underbrace{(g\circ f)(x) = g(f(x))}_{\text{funció composta de } f \text{ i de } g}$$

Així:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ex $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x \to g\circ f$? $f\circ g$?

Obs $f\circ g \neq g\circ f$ (en general)

regla de la cadena $\longrightarrow (g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Ex $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x \to (g\circ f)'$? $(f\circ g)'$?

Derivació logarítmica

Sigui $h(x)=[f(x)]^{g(x)} \longrightarrow h'(x)$??

1. Apliquem ln a banda i banda

$$\ln h = \ln f^g \to \ln h = g \cdot \ln f$$

2. Derivem a banda i banda

$$(\ln h)' = (g \cdot \ln f)'$$

$$\frac{h'}{h} = g' \ln f + g \frac{f'}{f}$$

3. Aïllem h'

$$h'(x) = h(x)\left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]$$

4. Subst. $h(x)$ per l'expressió original

$$h'(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}\left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]$$

<u>Ex</u> $h(x) = x^x \longrightarrow h'(x)$?

Alternativa: $h = f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f} \to$

$$\to h' = \underbrace{e^{g \ln f}}_{h(x)!!}(g \ln f)' = \ldots$$

Derivació implícita

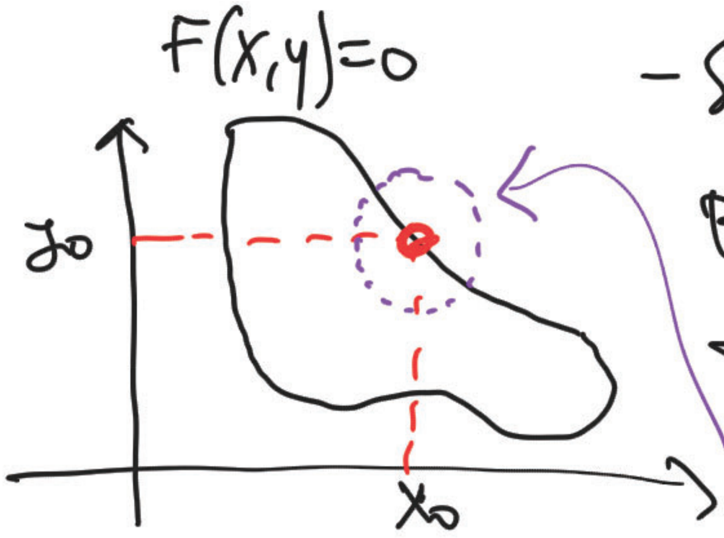
→ $y=f(x)$: corba definida explícitament

EX $y=x^2$

→ $F(x,y)=0$: corba definida implícitament

EX $x^2+y^2-1=0$

→ Motivació: càlcul de recta tangent en un punt d'una corba definida implícitament sense aïllar y



- Suposem que $F(x,y)=0$ permet definir una funció $y=y(x)$ en un entorn de (x_0,y_0)

- Problema: càlcul de $y'(x_0)$ sense tenir $y(x)$

- Solució: derivem $F(x,y)=0$ respecte de x considerant $y=y(x)$

Ex Trobar la recta tangent a la corba
$\mathcal{C} := \{(x,y)\in\mathbb{R}; (x-1)^2+(y+1)^2=2\}$ en $P(2,0)$

$* \ P(2,0)\in\mathcal{C} \rightarrow (2-1)^2+(0+1)^2=2$
$2=2$ ✓

$* \ \left((x-1)^2+(y+1)^2\right)' = (2)'$

$2(x-1)+2(y+1)y'=0$

$y' = \dfrac{1-x}{1+y} \rightarrow y'(2,0) = \dfrac{1-2}{1+0} = -1$

$* \ r \equiv \ y-0=(-1)(x-2) \longrightarrow y=2-x$

3. Indeterminacions. Regla de l'Hôpital

Siguin f, g derivables en $x=a$ i tals que

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

Aleshores: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Obs El resultat funciona també per a $a=\infty$ i $L=\infty$

Ex (11a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Indeterminacions $0\cdot\infty$

Es transformen a $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Ex (11c) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = (-\infty)\cdot e^{-\infty} = -\infty\cdot 0$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}} = -\frac{\infty}{\infty} \to$

$\to$ L'Hôpital!!

Criteri de compressió

Veiem-lo amb un exemple

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\nexists}{\infty}$??

Sabem que $-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$

$x\to+\infty$: $-\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

4. Aproximació de funcions: polinomi de Taylor

Def Siguin f, g tals que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

Diem que f és d'ordre més petit que g en $x=a$

$\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Aleshores escrivim $f = o(g)$ en $x=a$

Obs $f = o(g)$ en $x=a \Rightarrow f(x) << g(x)$ al voltant de $x=a$

Ex $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 \Rightarrow f = o(g)$ en $x=0$

Sigui $y = f(x)$ la gràfica d'una f. derivable en $x=a$, i notem $y = P_1(x)$ la seva recta tangent en $x=a \Rightarrow P_1(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Aleshores:

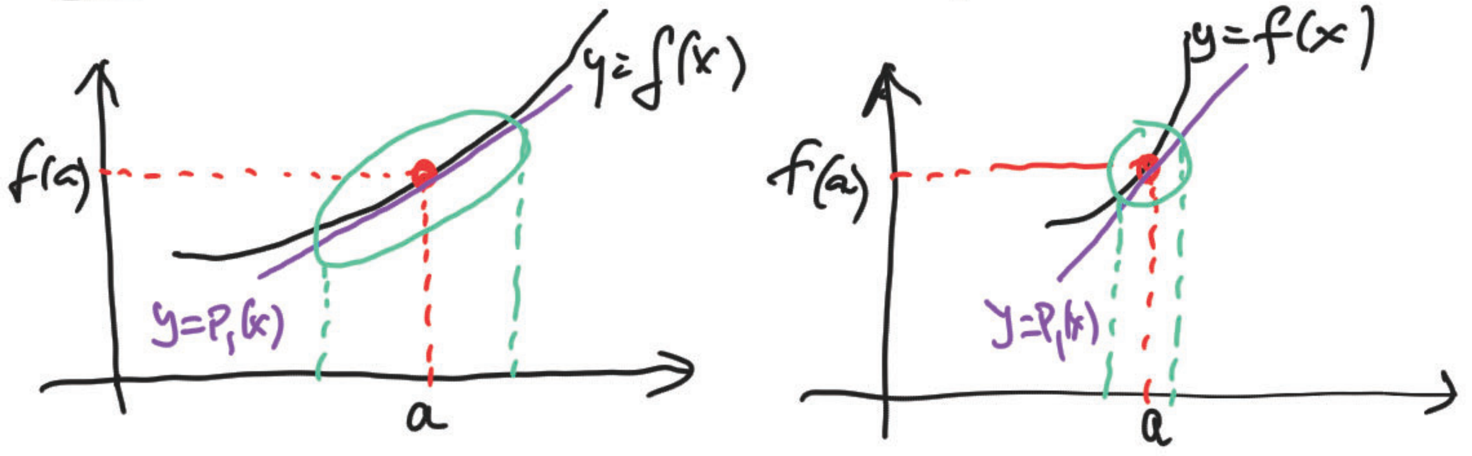
$$\frac{f(x) - P_1(x)}{x-a} = \frac{f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) - f'(a) = 0$$

$\Rightarrow f - P_1 = o(x-a) \Rightarrow f(x) - P_1(x) << x-a$ per $x \simeq a$

Aplicació $\rightarrow$ aproximar valors de f amb P_1 per $x \simeq a$

Obs. Sobre la bondat de l'aproximació en $x \simeq a$



Ex Calcular aproximadament $\sqrt[10]{e}$ usant la recta tangent a $y=e^x$ en $a=0$ i comparar-lo amb el valor real ($\sqrt[10]{e}=1.10517\ldots$)

Obs D'entre totes les rectes que passen per $(a, f(a))$, $y=r(x)$, la única que satisfà $f-r=o(x-a)$ és $y=P_1(x)$ $\Rightarrow$ la recta tangent a $y=f(x)$ en $x=a$ és la recta que millor aproxima $y=f(x)$ en $x \simeq a$

A més, hem vist que $P_1(x)$ és un polinomi de grau 1 tal que

$$\left.\begin{aligned} P_1(a)&=f(a)\\ P_1'(a)&=f'(a)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Com podem millorar l'aproximació? $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ usant un polinomi de grau superior!

<u>EX</u> $P_2(x) = b_2(x-a)^2 + b_1(x-a) + b_0$ tal

que $\left\{ \begin{array}{l} P_2(a) = f(a) \\ P_2'(a) = f'(a) \\ P_2''(a) = f''(a) \end{array} \right\}$ i $\dfrac{f_2(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Pel cas $a=0$ tenim: $P_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ amb

$P_2(0) = b_0 = f(a)$
$P_2'(0) = b_1 = f'(a)$
$P_2''(0) = 2b_2 = f''(a) \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} f''(a)$

Així $P_2(x) = f(a) + f'(a) \cdot x + \frac{1}{2} f''(a) x^2$

<u>EX.</u> Comprovar que $\dfrac{f(x) - P_2(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

És a dir, que $f - P_2 << O(x^2)$

* <u>Polinomi de Taylor</u>

Donada una funció f, busquem un polinomi de grau n, P_n, tal que
$f(a) = P_n(a),\ f'(a) = P_n'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$
i també que $f - P_n << O((x-a)^n)$

Def Diem que $f: I \to \mathbb{R}$, amb I interval obert, és de classe $\mathcal{C}^n$ si f és derivable n vegades en I, i aquestes n derivades són contínues en I. Aleshores escrivim $f \in \mathcal{C}^n(I)$

Def Donada $f \in \mathcal{C}^n(I)$ i $a \in I$, el polinomi de Taylor d'ordre n de f en a és:

$$PT(f,a,n) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \qquad (\text{conveni: } 0! = 1)$$

Obs Quan a, n estiguin clars escriurem $P_n(x)$ en lloc de $PT(f,a,n)$

Propietat $P_n(x)$ és l'únic polinomi de grau n tal que

(1) $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $\forall k = 0, 1, \dots, n$

(2) $f(x) - P_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, i.e. $\dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Ex $f(x) = e^x$, $a = 0$

i) calcular $P_n(x)$

ii) Usar $P_2(x)$ per aproximar $\sqrt[10]{e}$

* Residu de Lagrange

Interessa trobar una estimació més precisa de l'error comès en aproximar f amb P_n en $x=a$ ja que de moment només sabem que

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) << (x-a)^n$$

Teorema Sigui $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, amb $a \in I$. Aleshores $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $c \in (a,x)$ ó (x,a)

obs No sabem quan val c. $\Rightarrow$ caldrà fitar $|R_n(x)|$

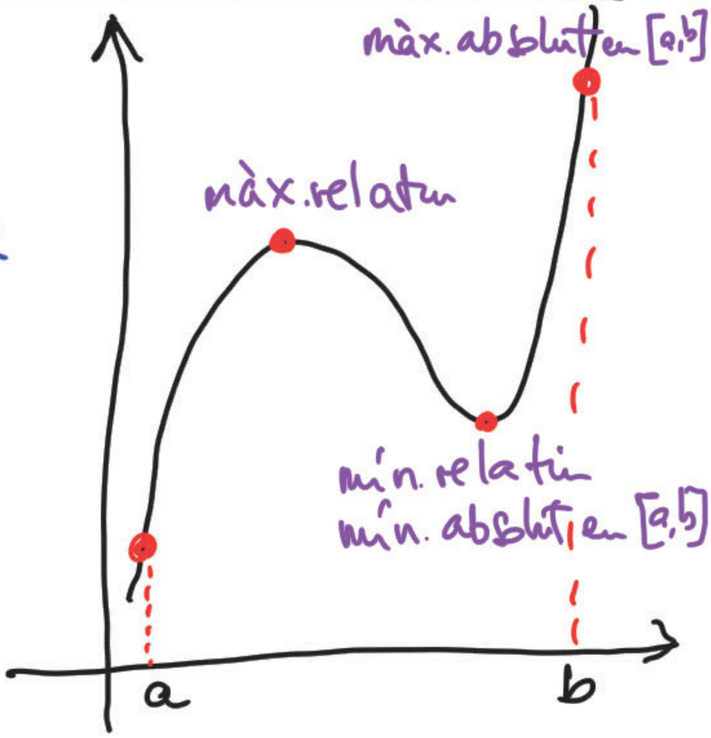
Ex $f(x) = e^x$, $a=0$

1) Calcular $R_n(x)$
2) Donar una fita per a $|R_n(0.1)|$
3) Estimar $R_1(0.1)$ i $R_2(0.1)$ i comparar amb els errors reals

Conclusió L'aproximació de funcions via polinomis de Taylor permet avaluar-les usant les 4 operacions bàsiques amb control de la precisió

5. Extrems de funcions d'una variable

- Extrems absoluts → valors màxims/mínims assolits en un interval determinat
- Extrems relatius → valors màxims/mínims assolits localment, en relació amb els punts del voltant



Def. Sigui $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$:

1) f té un màxim absolut en $x_0 \iff f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$
2) f té un mínim absolut en $x_0 \iff f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$

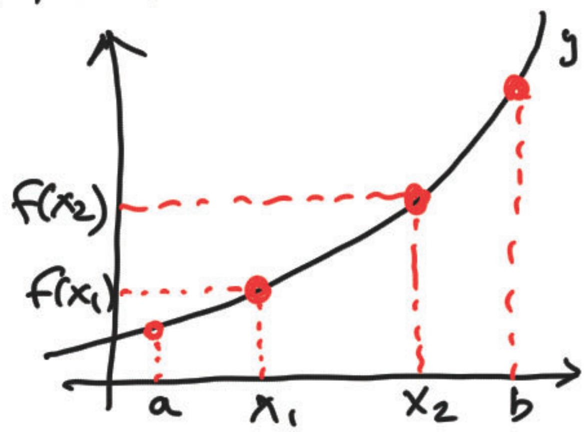
Def. Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I interval obert, i $x_0 \in I$

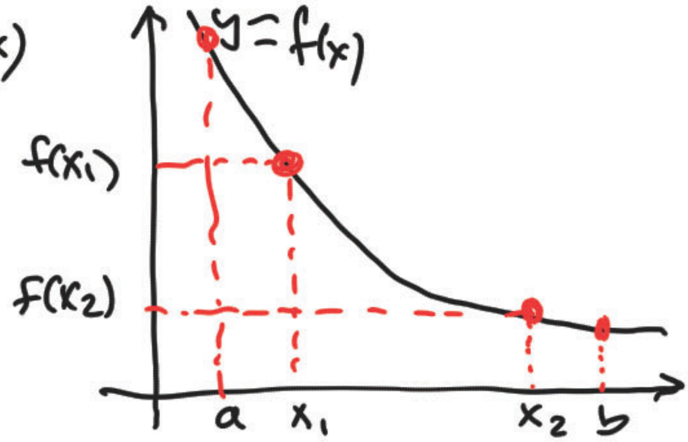
1) f té un màxim relatiu (o local) en $x_0 \iff \exists\, \varepsilon > 0$ tal que
$\iff f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
2) f té un mínim relatiu (o local) en $x_0 \iff \exists\, \varepsilon > 0$ tal que
$\iff f(x_0) \leq f(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Creixement i decreixement

Def. Sigui $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

1) f és creixent en $(a,b) \iff x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a,b)$
2) f és decreixent en $(a,b) \iff x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a,b)$





Obs. f té un màxim relatiu en $x_0 \iff f$ passa de creixent a decreixent en x_0

f té un mínim relatiu en $x_0 \iff f$ passa de decreixent a creixent en x_0

$\Rightarrow$ l'estudi del creixement/decreixement permet determinar els extrems relatius d'una funció

* Creixement/decreixement i primera derivada

Prop. Sigui $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable

1) f és creixent en $(a,b) \iff f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b)$
1) f és decreixent en $(a,b) \iff f'(x) \leq 0, \ \forall x \in (a,b)$

* Intervals de creixement i decreixement d'una f. derivable

Són aquells en els quals f' no canvia de signe

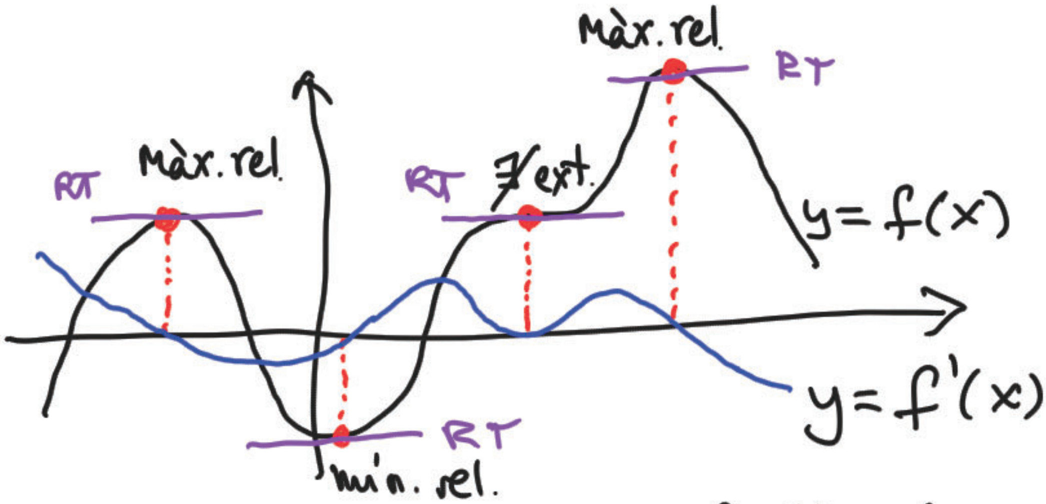
Extrems dels intervals de C/D:

1. Punts de discontinuïtat de f
2. Punts de Dom f on $\nexists f'$ (f' no derivable)
3. Punts de Dom f on $f'=0$

Def: Diem que $x_0 \in \text{Dom } f$ és un punt crític de f
$\Leftrightarrow f'(x_0)=0$ ó $\nexists f'(x_0)$

Prop. Si f té extrem relatiu en $x_0 \Rightarrow x_0$ punt crític.
Si, a més, f derivable en $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

* A l'invers no funciona: $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow f$ té extrem relat. a x_0

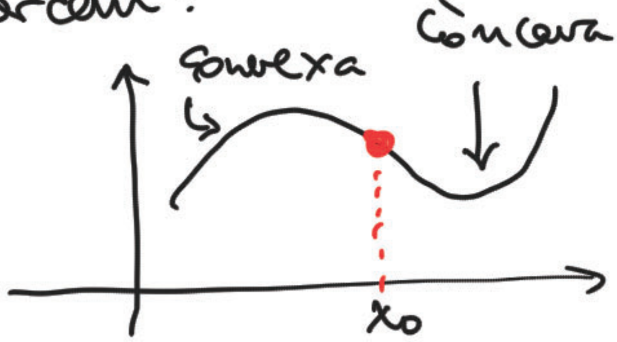


Ex Estudiar els extrems relatius de:

1) (2.34a) $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$
2) (2.34d) $f(x)=x^3-x+2|x-1|+1$

* Concavitat, convexitat i extrems relatius

Recordem:



<u>Def</u> $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ és un punt d'inflexió de f $\Longleftrightarrow$ la gràfica de f passa de convexa a còncava o viceversa en x_0

<u>Prop.</u> Sigui $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ dues vegades derivable en $x_0\in(a,b)$

1) Si x_0 punt d'inflexió de f $\Rightarrow f''(x_0)=0$
2) Si $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ f té un màxim relatiu en x_0
3) Si $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ f té un mínim relatiu en x_0

<u>Obs</u> $f''(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$ punt d'inflexió!!

<u>Ex</u> $f(x)=x^3$, $g(x)=x^5$: $f''(0)=g''(0)=0$

* Criteri de la derivada n-èsima

Sigui $f:I\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^n(I)$ i $x_0\in I$ tal que

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

(a) Si n parell $\Rightarrow$ f té un extrem relatiu a x_0:

$f^{(n)}(x_0)>0 \to$ mínim relatiu

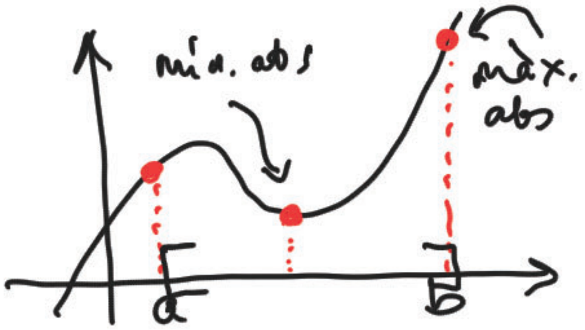
$f^{(n)}(x_0)<0 \to$ màxim relatiu

(b) Si n senar $\Rightarrow$ f té un punt d'inflexió a x_0

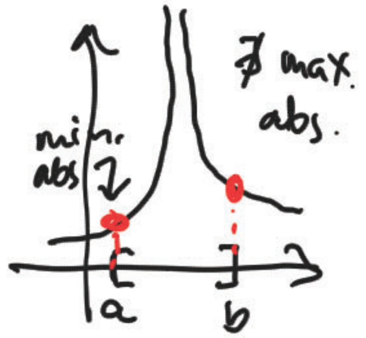
Extrems absoluts

Per a f contínua en un intèrval $I \subseteq \mathbb{R}$, el procediment de càlcul depèn de si I obert o tancat

<u>Teorema (Weierstrass)</u> Sigui $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua $\Longrightarrow$ f té extrems absoluts en $[a,b]$



<u>Obs</u> Per a f discontínua no funciona



Procediment per a f contínua en I tancat

1) Justifiquem que I és tancat ($I=[a,b]$) i f contínua en I
2) Determinem els candidats
   - punts crítics de f en $[a,b]$
   - extrems de l'interval, $x=a$, $x=b$
3) Avaluem f en els candidats i decidim

<u>Ex</u> Estudiar els extrems absoluts de f en I per a:

1) (2.17b) $f(x)=\sqrt{25-x^4}$, $I=[-2,2]$
2) (2.17c) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$, $I=[-2,3]$

Procediment per a f contínua en I no tancat

1) Justifiquem que I és no tancat i f contínua en I
2) Determinem els candidats
   - punts crítics de f en I
   - extrem "tancat" de I, si és el cas
3) Decidim a partir de
   - avaluació de f en els candidats
   - avaluació de $\lim_{x \to x_i} f(x)$, on $x_i \equiv$ extrems "oberts" de I

Ex Trobar els extrems absoluts de $f = \frac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$

* Altres casos (f discontínua..) → cal estudiar-ho cas a cas

Problemes d'optimització

- Cal determinar la millor solució possible segons un cert criteri
- Idea: reduir-los a problemes de càlcul d'extrems absoluts en un determinat interval
- Procediment
  1. Definir les variables del problema i trobar una relació entre elles si n'hi ha més d'una
  2. Trobar la "funció cost" a optimitzar (f. d'una variable!)
  3. Determinar l'interval on cal resoldre el problema
  4. Trobar l'ext. absolut requerit de la funció cost en l'interval de treball
  5. Determinar la solució del problema

Ex (2.18) recta que passa per (3,4) i talla le Q en un triangle d'àrea mínima