Examen MQ– Ampliació de Matemàtiques, EETAC, Primavera 2018
11 d'abril de 2018

- Cal raonar i desenvolupar adequadament les respostes.
- No es permet l'ús de dispositius mòbils, calculadores ni material.
- Indiqueu el nom i el grup en tots els fulls.

FEU ELS PROBLEMES EN FULLS SEPARATS

Temps: 120 minuts.

Problema 1 (***3 punts***)

a.- Dibuixeu i calculeu el volum del sòlid limitat per les superfícies $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = 0$ i $z = x^2 + y^2$.

b.- Calculeu directament la integral del camp $F(x, y, z) = (0, 0, x)$ sobre la corba intersecció de les superfícies $x^2 + y^2 - 2y = 0$ i $z = x^2 + y^2$, de manera que la seva projecció sobre el pla XY estigui orientada positivament.

Problema 2 (***3 punts***)

a.- Doneu una parametrització de la porció de superfície de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, que compleix $3z^2 \geq x^2 + y^2$ utilitzant les coordenades esfèriques.

b.- Calculeu el valor d'a pel qual l'àrea d'aquesta porció val 2π.

Problema 3 (***4 punts***) Sigui $F(x, y, z) = (0, x^2, z)$ un camp vectorial i S la superfície tancada que és la vora del sòlid $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$. Siguin $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2,\ z = 0\}$ i S_2 les dues superfícies que defineixen S i γ la seva vora comuna.

a.- Calculeu el valor de $\displaystyle\int_\gamma F\,\mathrm{d}\ell$, on γ es recorre en sentit antihorari, usant el teorema d'Stokes. És F un camp conservatiu?

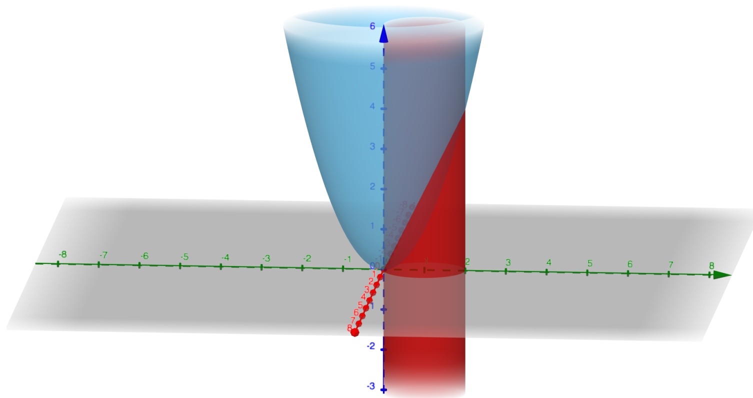
b.- Calculeu directament $\displaystyle\int\int_{S_2} F\,\mathrm{d}S$, orientant la superfície cap avall.

c.- Calculeu $\displaystyle\int\int_S F\,\mathrm{d}S$ (orientant la superfície cap a l'exterior) usant el teorema de Gauss. Deduïu de l'apartat anterior el valor de $\displaystyle\int\int_{S_1} F\,\mathrm{d}S$.

Problema 1 (*3 punts*)

a.- Dibuixeu i calculeu el volum del sòlid limitat per les superfícies $x^2+y^2-2y=0$, $z=0$ i $z=x^2+y^2$.

Solució.



$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta=\int_0^{\pi} 4\sin^4\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)^2\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\left(1+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=\int_0^{\pi}\frac{3}{2}\,d\theta=\frac{3\pi}{2}u^3$$

b.- Calculeu directament la integral del camp $F(x,y,z)=(0,0,x)$ sobre la corba intersecció de les superfícies $x^2+y^2-2y=0$ i $z=x^2+y^2$, de manera que la seva projecció sobre el pla XY estigui orientada positivament.

Solució. Donem la solució amb dues parametritzacions diferents, ambdues correctes.

Primera opció Parametrització de la corba, fent $x=\cos t$, $y=1+\sin t$, $z=x^2+y^2$, i aplicant $x^2+y^2-2y=0$:

$$\begin{array}{rcl}\sigma:[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3\\ t & \mapsto & (\cos t, 1+\sin t, 2+2\sin t)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma'(t)=(-\sin t,\ \cos t, 2\cos t)\\ F(\sigma(t))=(0,0,\ \cos t)\end{array}\right\}\Rightarrow F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)=(0,0,\ \cos t)\cdot(-\sin t,\ \cos t, 2\cos t)=2\cos^2 t$$

Integral de línia:

$$\int_C F ds=\int_0^{2\pi}F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\int_0^{2\pi}2\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi$$

Segona opció

Parametrització de la corba, fent $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=r^2$, i aplicant $r=2\sin t$:

$$\begin{array}{rcl}\sigma:[0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3\\ t & \mapsto & (2\sin t\cos t, 2\sin^2 t, 4\sin^2 t)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma'(t)=(2\cos^2 t-2\sin^2 t, 4\sin t\cos t, 8\sin t\cos t)\\ F(\sigma(t))=(0,0,2\sin t\cos t)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)=(0,0,2\sin t\cos t)\cdot(2\cos^2 t-2\sin^2 t, 4\sin t\cos t, 8\sin t\cos t)=16\sin^2 t\cos^2 t$$

Integral de línia:

$$\int_C F ds=\int_0^{\pi}F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\int_0^{\pi}16\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi}4\sin^2 2t\,dt=\int_0^{\pi}2(1-\cos 4t)dt=\int_0^{\pi}2\,dt=2\pi$$

PROBLEMA 2

centre (0,0,0), radi a

a) Porció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ t.q. $3z^2 \geq x^2+y^2$

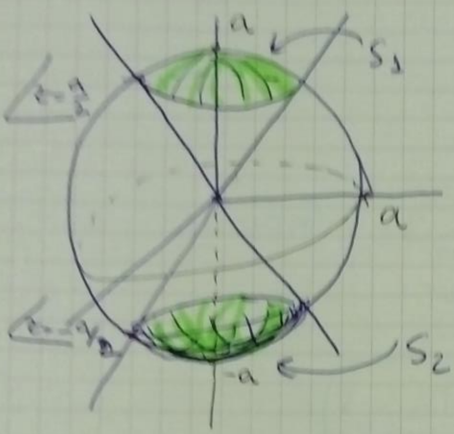
‖

2 casquets

$z^2 = \frac{x^2+y^2}{3}$

↓

Con circular



Intersecció esfera/con:

$3z^2+z^2=a^2$

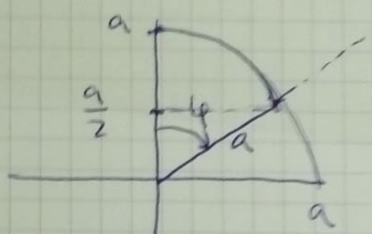
$z^2=\frac{a^2}{4}$ $\boxed{z=\pm\frac{a}{2}}$

Parametrització de S_1:

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi/3$



φ màxim: $\arccos\frac{a/2}{a} =$

$= \arccos 1/2 = \pi/3$

Parametrització de S_2

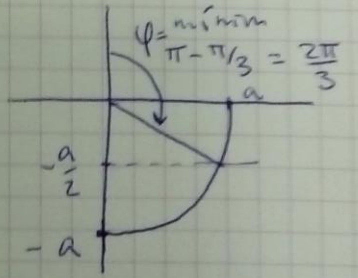
$x = a\sin\varphi\cos\theta$

$y = a\sin\varphi\sin\theta$

$z = a\cos\varphi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$



b) Àrea casquet S_1: Àrea $= \iint_D \| \vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi \| \, d\theta \, d\varphi =$

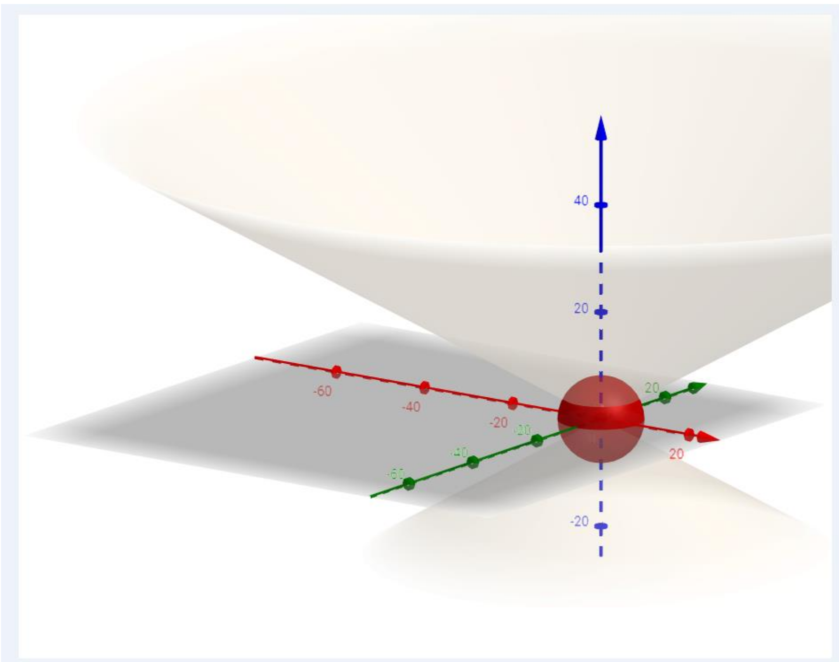
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \, a^2 \left(-\cos\varphi \Big]_0^{\pi/3} \right) =$$

$$= 2\pi a^2 \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + 1 \right)}_{=1/2} = \pi a^2$$

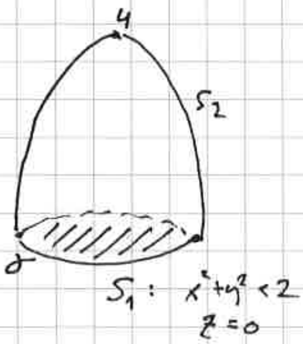
Per simetria $\longrightarrow$ Àrea S_2 = Àrea S_1

Àrea S_1 + Àrea S_2 = $2\pi a^2$

$$2\pi a^2 = 2\pi \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \boxed{a = 1}$$



(3) $F(x,y,z) = (0, x^2, z)$



S_1: $x^2+y^2<2$
$z=0$

a) $\int_\gamma F\,dl = \iint_{S_1} \nabla\times F\,dS$, per tant calculem $\nabla\times F$:

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & x^2 & z\end{vmatrix} = (0,0,2x) \neq \vec{0} \leftarrow \text{ NO conservatiu!}$$

Per altra banda S_1 ve donada per la parametrització $\sigma(R,\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$, on $0\le R\le\sqrt{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} T_R = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\\ T_\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\end{cases} \Rightarrow T_R\times T_\theta = (0,0,R) \leftarrow \text{ L'orientació és ok!}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1}\nabla\times F\,dS = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(0,0,2R\cos\theta)(0,0,R)\,d\theta\,dR = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} 2R^2\cos\theta\,d\theta\,dR =$$

$$2\int_0^{\sqrt{2}}R^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{0}\,dR = 0 \;//$$

b) $\iint_{S_2} F\,dS$, S_2 orientada cap avall.

S_2 ve donada per $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 4-2R^2\end{cases}$ $\begin{matrix} 0\le R\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le2\pi \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} T_R = (\cos\theta,\sin\theta,-4R) \\ T_\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\end{matrix}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_R\times T_\theta = (+4R^2\cos\theta, 4R^2\sin\theta, R)$

$\hookrightarrow$ Hem de canviar l'orientació (cap avall!)

$$\iint_{S_2} F\,dS = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(0, R^2\cos^2\theta, 4-2R^2)(-4R^2\cos\theta, -4R^2\sin\theta, -R)\,d\theta\,dR =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \overbrace{\underbrace{4R^4\sin\theta\cos^2\theta}_{\text{Primitiva } \frac{\cos^3\theta}{3}}}^{0} + R(4-2R^2)\,d\theta\,dR = -2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}4R-2R^3\,dR =$$

$$= -2\pi\left(2R^2 - 2\frac{R^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi\left(2\cdot2 - 2\frac{4}{4}\right) = -4\pi \;//$$ (Cap a fora seria 4π)

c) $\iint_S F\,dS = \iiint_V \nabla\cdot F\,dV$, on $\nabla\cdot F = 1 \Rightarrow V = \begin{cases} x = R\cos\theta & 0\le R\le\sqrt{2}\\ y = R\sin\theta & 0\le\theta\le2\pi \\ z = z & 0\le z\le 4-2R^2\end{cases}$

$$\Rightarrow \iiint_V dV = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4-2R^2} R\,dz\,d\theta\,dR = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}R(4-2R^2)\,dR = 4\pi \;//$$

$$\Rightarrow \underset{\underset{4\pi}{\parallel}}{\iint_S F\,dS} = \underset{\underset{\text{cap a fora}: 4\pi}{\uparrow}}{\iint_{S_1}F\,dS} + \iint_{S_2}F\,dS \Rightarrow \iint_{S_2}F\,dS = 0$$