1 Integrals dobles i triples

1. Dibuixeu el recinte, invertiu l'ordre d'integració i calculeu les integrals dobles següents, en un dels dos ordres.

   (a) $\int_0^1 \int_1^2 dx\, dy$ (e) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2 dx\, dy$ (i) $\int_0^1 \int_{-1}^0 |y| \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy\, dx$

   (b) $\int_1^2 \int_0^3 (x+y) dx\, dy$ (f) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3) dy\, dx$ (j) $\int_0^1 \int_x^1 y^2 e^{xy} dy\, dx$

   (c) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2) dy\, dx$ (g) $\int_0^1 \int_0^{x^2} x e^y dy\, dx$

   (d) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy\, dx$ (h) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y dx\, dy$

2. Dibuixeu el recinte i calculeu les integrals dobles següents:

   (a) $f(x,y) = y$, sobre la regió limitada per $y = x^2$ i $x = y^2$

   (b) $f(x,y) = x^2$, sobre la regió limitada per $y = x$, $y = 2x$ i $x = 2$

   (c) $f(x,y) = 1$, sobre cadascuna de les regions del primer quadrant limitades per $2y = x^2$, $y = 3x$ i $x + y = 4$

   (d) $f(x,y) = y$, sobre la regió per sobre de $y = 0$, limitada per $y^2 = 4x$ i $y^2 = 5 - x$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$, sobre la regió del primer quadrant limitada per $x^2 = 4 - 2y$

3. Dibuixeu el recinte i calculeu les integrals dobles següents:

   (a) $\int_0^{\arctan \frac{3}{2}} \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} r dr\, d\theta$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos\theta dr\, d\theta$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\tan\theta}{\cos\theta}} r^3 \cos^2\theta dr\, d\theta$

4. Utilitzeu integrals dobles per calcular les àrees de les regions del pla següents.

   (a) Regió limitada per $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$

   (b) Regió limitada per $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$

   (c) Regió limitada per $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$

   (d) Regió limitada per $r = \tan\theta / \cos\theta$ i $\theta = \pi/3$

   (e) Regió exterior a $r = 4$ i interior a $r = 8\cos\theta$

5. Calculeu $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x+2y}} dx\, dy$ on $D = [0,1] \times [0,1]$, de dues maneres diferents: directament i efectuant el canvi de variables $u = x$, $v = 2y$.

6. Sigui P el paral·lelogram limitat per les rectes $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ i $y = x + 1$. Calculeu $\displaystyle\iint_P xy\, dx\, dy$ usant un canvi de variables lineal.

7. Sigui D la regió del pla limitada pels eixos coordenats i per la recta $x + y = 1$. Calculeu $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy$ mitjançant el canvi de variables $u = x - y$, $v = x + y$.

8. Calculeu les integrals següents usant coordenades polars:

(a) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, on D és el recinte del primer quadrant limitat per les rectes $y = x$, $y = 3x$ i les circumferències $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$

(b) $\displaystyle\iint_D xe^{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, on D és la regió interior al disc de centre l'origen i radi 1, per sobre de la recta $x + y = 0$

(c) $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, on $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

(d) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, on $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 6x \leq 0,\ y \geq -x\}$

(e) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, on $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

9. Calculeu el volum de les següents regions de $\mathbb{R}^3$:

(a) Volum per sota de $z = 3x$, per sobre de $z = 0$ i interior a $x^2 + y^2 = 25$

(b) Volum en el primer octant del sòlid limitat per $x^2 + z = 9$ i $3x + 4y = 24$

(c) Volum en el primer octant del sòlid limitat per $x^2 + y^2 = 25$ i $z = y$

(d) Volum comú als cilindres $x^2 + y^2 = 16$ i $x^2 + z^2 = 16$

(e) Volum per sobre de $z = 0$, comú a $x^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + y^2 + 2z = 16$

(f) Volum interior a $r = 2$ i exterior a $z^2 = r^2$ (on les superfícies estan expressades en coordenades cilíndriques).

(g) Volum interior al tros de cilindre $x^2 + y^2 = 4x$ comprès entre $x^2 + y^2 = 4z$ i $z = 0$.

(h) Volum del sòlid $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \in [1, 2]\}$.

(i) Volum en el primer octant del sòlid limitat superiorment per $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 9$ i inferiorment per $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

(j) Volum del sòlid $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2},\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1,\ z \in [0, 2]\}$.

(k) Volum en el primer octant del sòlid limitat superiorment per $z = xy$, inferiorment per $z = 0$ i lateralment per $x^2 + y^2 = a^2$ i $x^2 + y^2 = 2ax$.

(l) Volum del sòlid $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2,\ z \geq 0\}$.

10. Calculeu les integrals triples següents:

(a) $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^4}\,dx\,dy\,dz$, on A és el sòlid limitat per les superfícies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.

(b) $\displaystyle\iiint_A z\,dx\,dy\,dz$, on A és el sòlid limitat pel con $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ i el pla $z = h$, on h i R són constants positives. (*Indicació: Useu coordenades cilíndriques*).

11. Calculeu les següents integrals utilitzant coordenades cilíndriques, esfèriques i cartesianes:

(a) $\displaystyle\iiint_A xy\,dx\,dy\,dz$, on $A = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) $\displaystyle\iiint_A z\,dx\,dy\,dz$, on $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \leq 0\}$.

12. Calculeu

$$\iiint_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz,$$

on A és la regió limitada per les esferes $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, amb $a > b > 0$.

13. Calculeu $\displaystyle\iiint_A e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$, essent A la bola de radi unitat centrada a l'origen.
14. Trobeu la massa de la regió definida per $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, si la densitat és igual a xyz.
15. Calculeu el moment d'inèrcia d'un sòlid en forma de cilindre circular recte de radi a i alçada b respecte del seu eix si la densitat és proporcional a la distància a l'eix.
16. Una esfera sòlida de radi a té un forat cilíndric de radi $b < a$ tal que el seu eix coincideix amb un diàmetre de l'esfera. Calculeu, suposant la densitat ρ constant, la massa i el centre de masses del que resta de l'esfera.

Solucions

1. (a) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 dy\,dx = 1$
   (b) $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 (x+y)dy\,dx = 9$
   (c) $\displaystyle\int_1^2\int_2^4 (x^2+y^2)dx\,dy = 70/3$
   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx\,dy = 1/40$
   (e) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 x/y^2 dy\,dx + \int_1^{2^{3/2}}\int_{x^{2/3}}^2 x/y^2 dy\,dx = 3/4$
   (f) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^y (y+y^3)dx\,dy = 7/60$
   (g) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 xe^y dx\,dy = (e-2)/2$
   (h) $\displaystyle\int_2^4\int_2^x y dy\,dx + \int_4^6\int_2^{8-x} y dy\,dx = 32/3$
   (i) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_0^1 |y|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\,dy = \frac{1}{\pi}$
   (j) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y y^2 e^{xy} dx\,dy = \frac{e}{2}-1$
2. (a) 3/20 (b) 4 (c) 8/3 i 46/3 (d) 5 (e) 4
3. (a) 3 (b) 8/3 (c) 1/20
4. (a) 24 u^2 (b) 6 u^2 (c) 32/3 u^2 (d) $\sqrt{3}/2$ u^2 (e) $16\pi/3 + 8\sqrt{3}$ u^2
5. $6 - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$
6. 7
7. $\dfrac{\sin 1}{2}$
8. (a) $15(\arctan 3 - \frac{\pi}{4})$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}(e-1)}{3}$ (c) $\dfrac{13}{20}$ (d) $6(8-5\sqrt{2})$ (e) $\dfrac{\pi-1}{4}$
9. (a) 250 u^3 (b) 1485/16 u^3 (c) 125/3 u^3 (d) 1024/3 u^3 (e) 28π u^3 (f) $\dfrac{32\pi}{3}$ u^3 (g) 6π u^3 (h) $\dfrac{3\pi}{8}$ u^3 (i) $2\pi(5-2\sqrt{3})$ u^3 (j) $4\pi\sqrt{2}$ u^3 (k) $\dfrac{5}{48}a^4$ u^3 (l) $\dfrac{4\pi}{3}(\sqrt{2}+1)$ u^3
10. (a) 1/48
    (b) $\dfrac{\pi h^2 R^2}{4}$
11. (a) 1/15
    (b) -2π
12. $4\pi\ln(a/b)$
13. $\dfrac{4}{3}\pi(e-1)$
14. 4/3
15. $\dfrac{3}{5}Ma^2$
16. Massa: $\dfrac{4\pi}{3}\rho(a^2-b^2)^{3/2}$, centre de masses: $(0,0,0)$