Ampliació de matemàtiques, grup 2A31 – EETAC

Control 1 – 22 d'octubre de 2020

Duració: 1 hora

No es permet l'ús de calculadora ni de formulari. Detalleu i raoneu les vostres respostes. Poseu el vostre nom i cognom a tots els fulls.

Problema 1 [3 punts]: Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ i sigui $f(x,y) = y + \sin(x)$.

a) [1 punt] Dibuixeu D.
b) [2 punts] Expresseu

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

en els dos ordres d'integració possibles. **No cal que resolgueu la integral.**

Problema 2 [3 punts]: Sigui $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4;\ z^2 < x^2 + y^2\}$. Calculeu el volum de V mitjançant una integral triple.

Problema 3 [4 punts]: Donat el camp vectorial $\vec{G}(x,y) = (-y,x)$ i el recinte $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq 0\}$ i sigui C^+ la vora de I orientada positivament.

a) [3 punts] Calculeu

$$\oint_{C^+} \vec{G} d\vec{\ell}$$

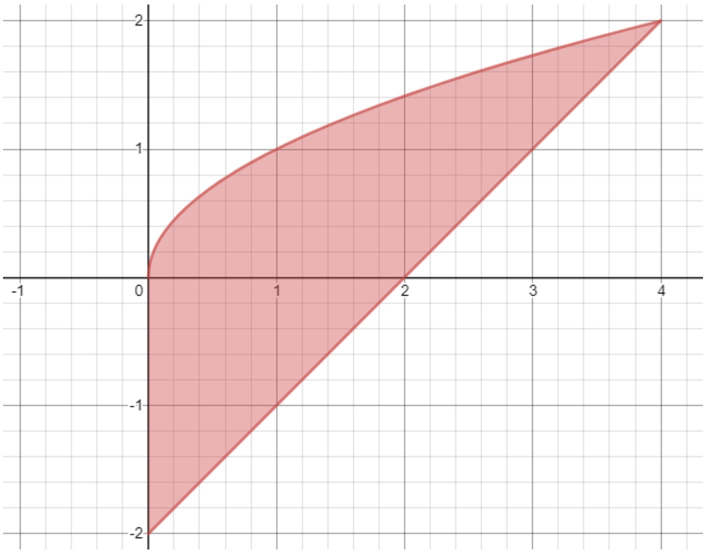
directament i aplicant el Teorema de Green.

b) [1 punt] És $\vec{G}$ un camp conservatiu? Justifiqueu la resposta.

Solució problema 1:

a) Les funcions $y = x - 2$ i $y = \sqrt{x}$ intersequen a $(4{,}2)$.

Per tant, el dibuix queda com el que es pot veure a la dreta.



b)

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{y+2} (y + \sin(x))dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{y^2}^{y+2} (y + \sin(x))dx\,dy = \int_{0}^{4}\int_{x-2}^{\sqrt{x}} (y + \sin(x))dy\,dx$$

Solució problema 2:

Canviem a coordenades esfèriques. Les condicions de la circumferència imposen $1 < r < 2$ i les del con $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$. Per tant, el sòlid ens queda $V = \left\{1 < r < 4;\ 0 \le \theta < 2\pi; \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right\}$. Així, el seu volum és

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{4} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{7}{3}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

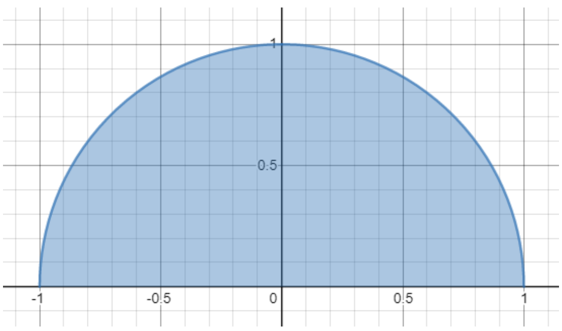
$$= \int_{0}^{2\pi} \left[-\frac{7}{3}\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{7\sqrt{2}}{3} d\theta = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$$

Solució problema 3:

a) El recinte I és el mostrat a la imatge. Així, podem expressar la seva vora orientada positivament com la unió de

$$\gamma_1(t) = (\cos t\,, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (t, 0) \quad t \in [-1{,}1]$$



Per tant,

$$\oint_{C^+} \vec{G}d\vec{\ell} = \int_0^{\pi} \langle \vec{G}(\gamma_1(t)), \gamma_1{}'(t)\rangle dt + \int_{-1}^{1} \langle \vec{G}(\gamma_2(t)), \gamma_2{}'(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle dt + \int_{-1}^{1} \langle (0,t), (1,0)\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt + \int_{-1}^{1} 0dt = \int_0^{\pi} dt + 0 = \pi$$

D'altra banda, aplicant el teorema de Green tenim

$$\oint_{C^+} \vec{G}d\vec{\ell} = \iint_I \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_I \big(1-(-1)\big)dxdy = \iint_I 2dxdy = 2\iint_I dxdy$$

$$= 2\grave{A}rea(I) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

b) En un camp conservatiu totes les circulacions són zero. Com que hem trobat una circulació no nul·la, el camp no és conservatiu.