Ampliació de matemàtiques – Examen FQ – 11 de juny de 2018

Durada: 2 hores

Entregueu els exercicis en fulls separats. Poseu el NOM en MAJÚSCULES en tots els fulls
No es permet l'ús de calculadores ni apunts de cap tipus.
És necessari justificar totes les respostes.

Problema 1 [1,5 punts]: Trobeu la transformada de $q_1(3(t+\pi/2))$. Especifiqueu el seu argument.

Problema 2 [2,5 punts]: Sigui $f(t)$ definida en l'interval $[0, 2\pi)$ per:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < \pi, \\ -1, & \pi \le t < 2\pi. \end{cases}$$

A) (0,5 punts) Dibuixeu, per $t \in [-4\pi, 4\pi)$, l'extensió periòdica, l'extensió periòdica de l'extensió parella i l'extensió periòdica de l'extensió senar de $f(t)$.

B) (1,5 punts) Trobeu la sèrie de Fourier complexa de l'extensió periòdica de $f(t)$.

C) (0,5 punts) Sense calcular la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'extensió parella de f, a quin valor convergeix aquesta sèrie en $t = 0$? I en $t = \pi$?

Problema 3 [2,5 punts]: Siguin $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$ funcions amb transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega},\ G(\omega) = \frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2},\ H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + \omega + 1}.$$

A) (0,75 punts) Digueu si $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$ són o no funcions reals.

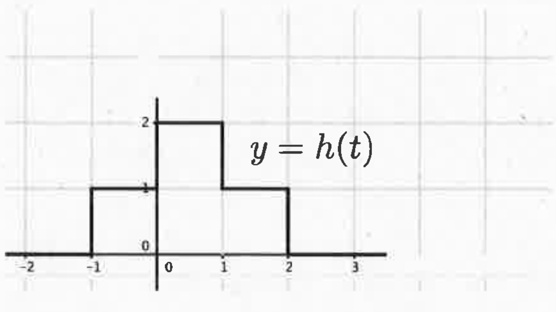
En el cas de $f(t)$, establiu

B) (0,75 punts) Calculeu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

C) (0,5 punts) Si $f(t)$ és parella, senar o cap de les dues coses.

D) (0,5 punts) Trobeu la transformada de la part parella de $f(t)$: $f_p(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$.

Problema 4 [3,5 punts]: Sigui $h(t)$ la funció següent:



A) (1,5 punts) Expresseu $h(t)$ en termes de pols rectangulars. Calculeu $h'(t) = g(t)$, la transformada de Fourier de $h(t)$ i la de $g(t)$.

B) (1 punt) Dibuixeu $h(t) * (\delta(t-1) + 2\delta(t+1))$.

C) (1 punt) Mitjançant el mètode de la convolució gràfica, calculeu $h(t) * p_1(t)$ en $t = 1/2$.

Probl. 1.

. Troben la transf. de $q_1(3(t+\frac{\pi}{2}))$. Especifique el seu arg.

• Per la prop. del canvi d'escala, $a=3$:

$$l(t)=q_1(3t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{3} Q_1\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

i fent ara ús de la prop. de translació:

$$l(t+\tfrac{\pi}{2}) \longmapsto L(\omega)e^{j\omega\frac{\pi}{2}}$$

per tant,

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{q_1(3(t+\tfrac{\pi}{2}))\right\}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\sin^2(\omega/3)}{(\omega/3)^2}e^{j\omega\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{12\sin^2(\omega/3)}{\omega^2}e^{j\omega\frac{\pi}{2}}.$$

$\boxed{\text{L'argument és } \omega\frac{\pi}{2}.}$

Prob. 3

Considerem $F(\omega)=\dfrac{1}{4+j\omega}=\dfrac{4-j\omega}{4+\omega^2}$

$$G(\omega)=\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}$$

$$H(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+\omega+1}$$

A) Si $f(t)$ és una funció real i $F(\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$ és la seva transformada, aleshores:

$\to R(\omega)$ és parella i $\to$ $I(\omega)$ és senar.

• Aquesta condició només la compleix $F(\omega)$, ja que:

$G(\omega)$ és una funció real senar i p. ex, la part real de $H(\omega)$: $\frac{2}{-\omega^2+\omega+1}$ no és parella.

Per tant l'única funció real és $f(t)$.

B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \Big|_{\omega=0} = F(0)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{4}$$

C) $f(t)$ no és ni parella ni senar, ja que:

$f = f_p(t) \Leftrightarrow$ $F(\omega)$ és real parella

$f = f_s(t) \Leftrightarrow$ $F(\omega)$ és imag. pura i senar.

D) Per teoria, sabem:

$\mathcal{F}\{f_p(t)\} = R(\omega)$, per tant

$$\mathcal{F}\{f_p(t)\} \underset{(A)}{=} \frac{4}{4+\omega^2}$$

Obs: ERROR FREQ. ex 1: 1) $\ell(t) = q_1(t+\frac{\pi}{2})$

2) $\ell(t) = q_1(3t)$ $\qquad \ell(3t) = q_1(3t+\frac{\pi}{2})$

$\ell(t+\frac{3\pi}{2}) = q_1(3t+\frac{9\pi}{2}) \neq$ $\qquad$ $= q_1(3t+\frac{3\pi}{2})$!!!...

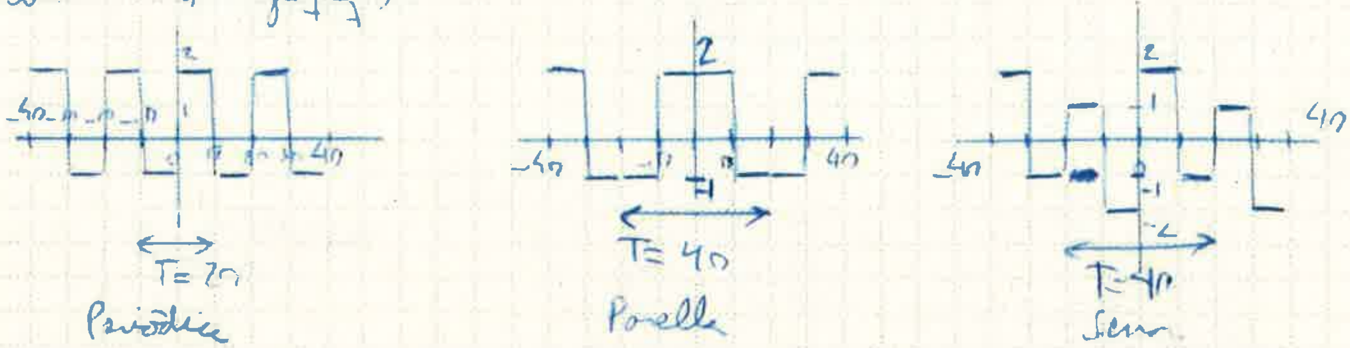
P2 $f(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t<\pi \\ -1, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

A) Dibuixa les diverses extensions en $[-4\pi, 4\pi)$

B) Troba la sèrie de Fourier complexa

C) Calcula la avaluació de l'extensió parella de f en $t=0$, $t=\pi$.

A) Dibuixem les 3 gràfiques



B) Calculem la sèrie de Fourier complexa, tot calculant els seus coeficients on $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$,

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\,dt \underset{T=2\pi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-jkt}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2e^{-jkt}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -e^{-jkt}\,dt \; (*) \longrightarrow$$ Distingim el cas $k=0$ i $k\neq 0$:

$\underline{k=0}$: $c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}2\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\,dt=\frac{2\pi}{2\pi}-\frac{\pi}{2\pi}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$\underline{k\neq 0}$: continuem amb $(*)$:

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-jk}\left.e^{-jkt}\right|_{\pi}^{2\pi}=\frac{-1}{jk\pi}\left[e^{-jk\pi}-1-\frac{1}{2}\left[e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi}\right]\right]$$

$$=\frac{-1}{jk\pi}\left[(-1)^k-1-\frac{1}{2}\left[1-(-1)^k\right]\right]=\frac{-1}{jk\pi}\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(-1)^k\right)=$$

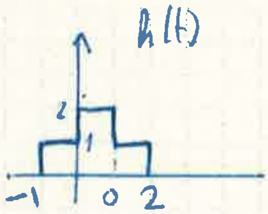
$$=\frac{3j}{2k\pi}\left((-1)^k-1\right)=\begin{cases}0, & k \text{ parell}\\ -\frac{3j}{k\pi}, & k \text{ senar.}\end{cases}$$

C) Cal aplicar el teorema de Dirichlet:

en $t=0$: $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=2$

en $t=\pi$: $\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$

P4

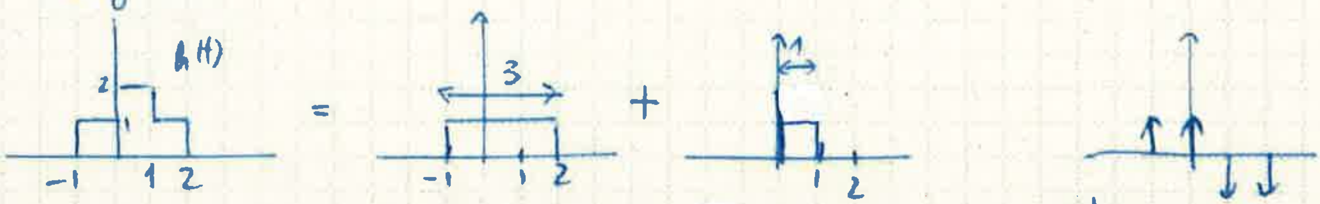


A) Expressa $h(t)$ en termes de pols rectangulars. Calcula $h'(t)$, i calcula $\mathcal{F}\{h(t)\}$, $\mathcal{F}\{h'(t)\}$

B) Dibuixa $h(t) * \{\delta(t-1) + 2\delta(t+1)\}$

C) Via convolució gràfica, calcula $h(t) * p_1(t)\Big|_{t=1/2}$

A) En la primera part, $h(t)$ pot expressar-se de diverses formes com a suma de pols rectangulars:



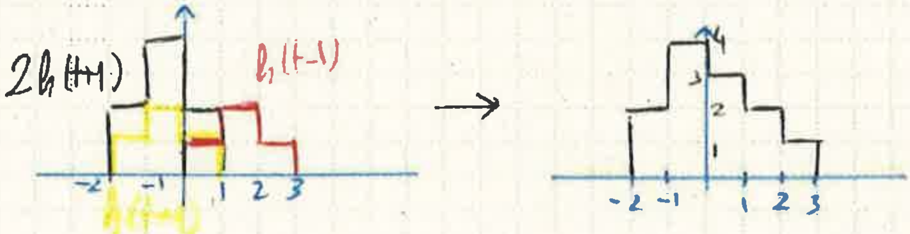
$$h(t) = p_{3/2}\left(t-\tfrac{1}{2}\right) + p_{1/2}\left(t-\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow h'(t) = \delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

Calculem finalment $\mathcal{F}\{h(t)\}$, $\mathcal{F}\{h'(t)\}$:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{p_{3/2}(t-\tfrac{1}{2})\} + \mathcal{F}\{p_{1/2}(t-\tfrac{1}{2})\} = e^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{2}{\omega}\sin\left(\tfrac{3}{2}\omega\right) + e^{-j\omega/2}\frac{2}{\omega}\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)$$

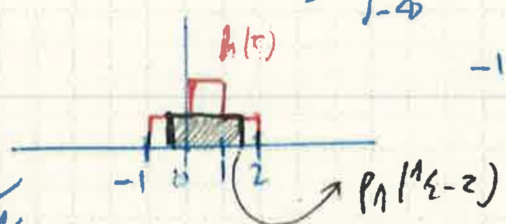
$$\mathcal{F}\{h'(t)\} = j\omega\, \mathcal{F}\{h(t)\} = j\left[e^{-j\frac{\omega}{2}}\, 2\sin\left(\tfrac{3}{2}\omega\right) + e^{-j\omega/2}\, 2\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right].$$

B) Primer observem que $h(t) * \{\delta(t-1) + 2\delta(t+1)\} = h(t-1) + 2h(t+1)$. Dibuixem-les:



C) Cal que calculem $h(t) * p_1(t)\Big|_{t=1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, p_1(\tfrac{1}{2}-\tau)\, d\tau$. Per tant,

$$-1 \leq \tfrac{1}{2} - \tau \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \tfrac{1}{2} - \tau \leq 1 \rightarrow \tau \geq \tfrac{1}{2} \\ -1 \leq \tfrac{1}{2} - \tau \rightarrow \tau \leq \tfrac{3}{2} \end{cases}$$



L'àrea és $\tfrac{1}{2} + 2 + \tfrac{1}{2} = 3$