Ampliació de matemàtiques – EETAC

Examen FQ – 31 de maig de 2019

Duració: 2 hores

Entregueu els exercicis en fulls separats – Poseu el NOM en MAJÚSCULES en tots els fulls
No es permet l'ús de calculadores ni apunts de cap tipus
És necessari justificar totes les respostes.

`Problema 1 [3 punts]`: Sigui $f(t)$ definida en l'interval $[0, 2\pi)$ per:

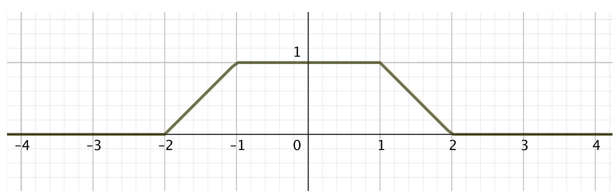
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi, \\ A, & \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

A.- (0,75 punts) Dibuixeu l'extensió periòdica, l'extensió parella i l'extensió senar de $f(t)$ en funció de A. Per a quin valor de A l'extensió parella de $f(t)$ és una funció contínua?

B.- (1,5 punts) Calculeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'extensió periòdica de $f(t)$. Sense fer cap càlcul d'integrals, deduïu-ne la sèrie de Fourier complexa corresponent.

C.- (0,75 punts) Sense fer cap càlcul, com es modifica la sèrie de Fourier trigonomètrica anterior si en lloc de considerar $f(t)$ estudiem $f(t) + \cos(t)$? Justifiqueu la resposta.

`Problema 2 [3,5 punts]`: Sigui $f(t)$ la funció representada en la gràfica següent.



A.- (0,5 punts) Expresseu $f(t)$ com a funció definida a trossos.

B.- (1 punts) Sense calcular $F(\omega)$, determineu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

C.- (1 punt) Dibuixeu $g(t) = f(t-3)$ i calculeu la seva transformada de Fourier, $G(\omega)$, sense fer cap integral.

D.- (1 punt) Sigui $H(\omega) = f(\omega)$ i $h(t)$ la seva antitransformada de Fourier. Dibuixeu la transformada de $h(t)\cos(3t)$.

<u>`Problema 3 [3,5 punts]`</u>: Sigui $f(t) = t^2$ si $0 < t < b$ i $f(t) = 0$ altrament.

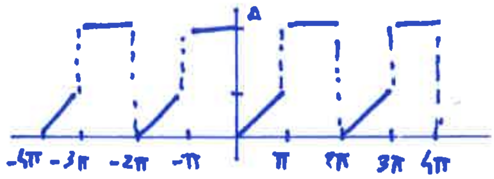
A.- (1 punt) Calculeu els valors de a i b pels quals $g(t) = p_a(t) * f(t)$ només pren valors diferents de 0 a l'interval $(-3, 5)$.

B.- (1 punt) Per a $b = 4$, digueu per quins valors de c, $c > 0$ hi ha solapament en la convolució següent: $f(t) * (\delta(t) + \delta(t - c))$.

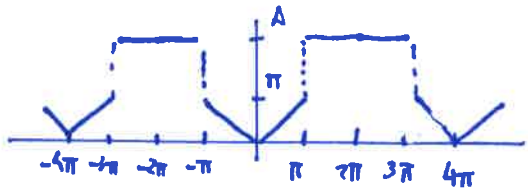
C.- (1,5 punts) Per $b = 1$, calculeu i representeu gràficament $f'(t)$. Calculeu la transformada de Fourier de $f'(t)$ i deduïu la transformada de $f(t)$.

P1 $\quad f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<\pi, \\ A, & \pi\le t<2\pi, \end{cases}$

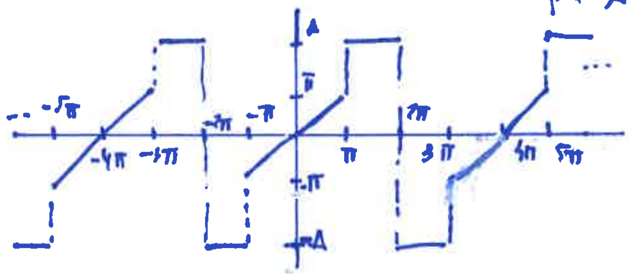
(A) Els 3 dibuixos són



Periòdica



Parella: per a que sigui contínua cal que $A=\pi$.



(B) L'extensió periòdica no és ni parell ni senar, per tant cal fer el càlcul de tots els coeficients.

$T=2\pi \qquad \underline{\underline{a_0}} = \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} A\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} + \frac{A\pi}{\pi} = \frac{\pi}{2} + A.$

$\boxed{a_n}$: $\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt}_{①} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} A\cos(nt)\,dt}_{②} \overset{*}{=} \frac{-1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{-2}{\pi n^2}, & n \text{ senar} \\ 0, & n \text{ parell} \end{cases}$

$n\geq 1$

* ① $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \left\{\begin{array}{l} t=u \to dt=du \\ \cos(nt)\,dt=dv \to \frac{\sin(nt)}{n}=v \end{array}\right\} \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{t\sin(nt)}{n}}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right] =$

$= \frac{-1}{\pi n^2}\left(-\cos(nt)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi n^2}\left[1-\cos(\pi n)\right] = \frac{-1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]$ *

② $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} A\cos(nt)\,dt = \frac{A}{\pi}\,\frac{\sin(nt)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 0$

$\boxed{b_n}$: $\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt}_{①} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} A\sin(nt)\,dt}_{②} \overset{**}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{1-(-1)^n}{\pi n}A$

** ① $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \left\{\begin{array}{l} t=u \to dt=du \\ \sin(nt)\,dt=dv \to -\frac{\cos(nt)}{n}=v \end{array}\right\} = -\frac{t\cos(nt)}{\pi n}\Big|_0^{\pi} + \cancel{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt} =$

$= -\frac{\pi\cos(n\pi)}{\pi n} = -\frac{1}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}/n.$

② $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} A\sin(nt)\,dt = \frac{A}{\pi}\,\frac{-\cos(nt)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{A}{\pi n}\left[+\cos(\pi n)-1\right] = \frac{-1+(-1)^n}{\pi n}\cdot A$

Per tant, la sèrie de Fourier és

$$\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)+\sum_{n\geq 1}\frac{-1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos(nt)+\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}-A\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right)\right]\sin(nt)$$

(C) Si considerem $f(t)+\cos(t)$, aleshores basta sumar 1 en el coeficient a_1 de la sèrie de Fourier de $f(t)$.

(B) Per la sèrie de Fourier complexa, prenem

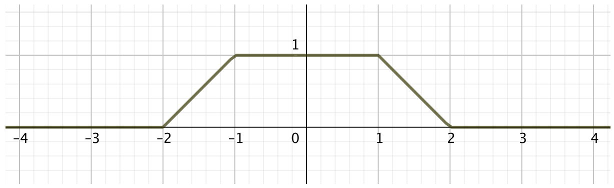
$$n\geq 1 \qquad c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)-j\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{1-(-1)^n}{\pi n}A\right)\right]$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}$$

$$n\geq 1 \qquad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)+j\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{1-(-1)^n}{\pi n}A\right)\right]$$

i $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}$

`Problema 2 [3,5 punts]:` Sigui $f(t)$ la funció representada en la gràfica següent.



A.- (0,5 punts) Expresseu $f(t)$ com a funció definida a trossos.

Solució.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ 2+t & \text{si } -2 \leq t < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \end{cases}$$

B.- (1 punts) Sense calcular $F(\omega)$, determineu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

Solució. La definició de la transformada ens diu: $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega$

Fent $t=0$, i tenint en compte que $f(0)=1$, obtenim: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$

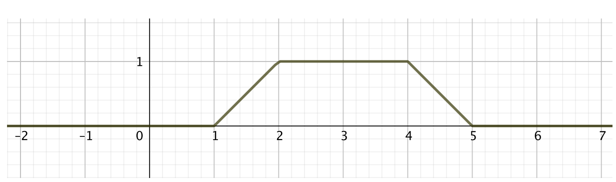
La segona integral es calcula amb la igualtat de Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = 2\pi \left(\int_{-2}^{-1} (2+t)^2 dt + \int_{-1}^{1} dt + \int_{1}^{2} (2-t)^2 dt \right) =$$

$$= 2\pi 2\pi \left(\left[\frac{(2+t)^3}{3} \right]_{-2}^{-1} + [t]_{-1}^{1} + \left[\frac{-(2-t)^3}{3} \right]_{1}^{2} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

C.- (1 punt) Dibuixeu $g(t) = f(t-3)$ i calculeu la seva transformada de Fourier, $G(\omega)$, sense fer cap integral.

Solució.



Observem que $g'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -1 & \text{si } 4 < t \leq 5 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

Per tant, $g'(t) = p_{\frac{1}{2}}(t - \frac{3}{2}) - p_{\frac{1}{2}}(t - \frac{9}{2})$, i es compleix:

$$g'(t) \longleftrightarrow e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}}\frac{2}{\omega}\sin(2\omega) - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{9}{2}}\frac{2}{\omega}\sin(2\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(2\omega)(e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{9}{2}})$$

Amb la propietat de derivació s'obté: $G(\omega) = \frac{2}{\mathtt{j}\omega^2}\sin(2\omega)(e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{9}{2}})$

Observació. Alternativament, aquest càlcul es pot fer a partir de $f(t)$. La seva derivada és $f'(t) = p_{\frac{1}{2}}(t + \frac{3}{2}) - p_{\frac{1}{2}}(t - \frac{3}{2})$, llavors

$$f'(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega}\sin(2\omega)(e^{\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}}) \Rightarrow F(\omega) = \frac{2}{\mathtt{j}\omega^2}\sin(2\omega)(e^{\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}})$$

Ara, com que $g(t) = f(t-3)$, apliquem la propietat de translació en temps:

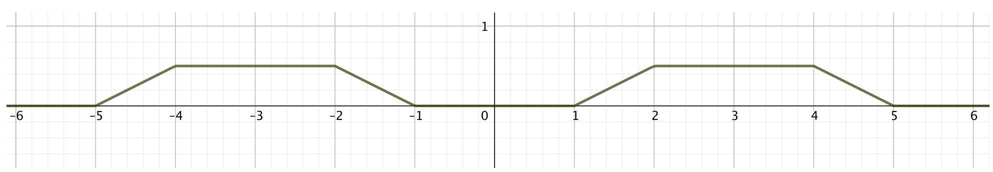
$$G(\omega) = e^{-\mathtt{j}\omega 3}\frac{2}{\mathtt{j}\omega^2}\sin(2\omega)(e^{\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}}) = \frac{2}{\mathtt{j}\omega^2}\sin(2\omega)(e^{-\mathtt{j}\omega\frac{3}{2}} - e^{-\mathtt{j}\omega\frac{9}{2}})$$

D.- (1 punt) Sigui $H(\omega) = f(\omega)$ i $h(t)$ la seva antitransformada de Fourier. Dibuixeu la transformada de $h(t)\cos(3t)$.

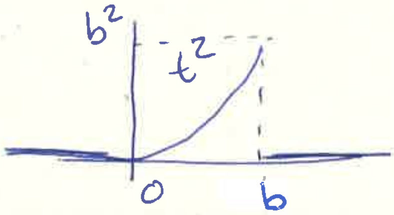
Solució. Apliquem la propietat de modulació a: $h(t) \longleftrightarrow H(\omega) = f(\omega)$ i trobem:

$$h(t)\cos(3t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(H(\omega+3) + H(\omega-3)) = \frac{1}{2}(f(\omega+3) + f(\omega-3))$$

La gràfica d'aquesta trasformada és:



PROBLEMA 3



$f(t)$

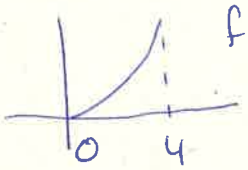
a) $g(t) = p_a(t) * f(t)$

Sabem que $f(t)$ pren valors $\neq 0$ entre 0 i b
$p_a(t)$ " " $-a$ i a $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_a(t) * f(t)$ pren valors $\neq 0$ entre $-a$ i $a+b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $-a = -3$
$a+b = 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix}}$

b) $f(t) * (\delta(t) + \delta(t-c)) = f(t) + f(t-c)$

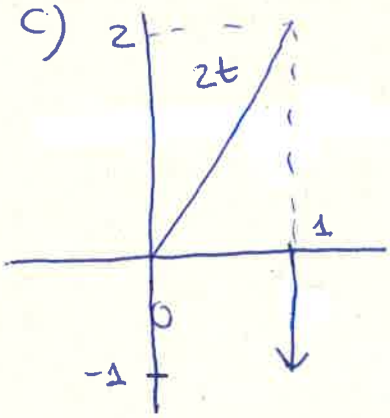


$f(t)$

$f(t)$ pren valors $\neq 0$ entre 0 i 4
$f(t-c)$ " entre c i $c+4$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ hi ha solapament $\boxed{\text{si } c < 4}$

c)



$f'(t) = 2t\, p_{1/2}(t - 1/2) - \delta(t-1)$

$\updownarrow$ (*) $\qquad \updownarrow$ $e^{-j\omega}$

$p_{1/2}(t-1/2) \leftrightarrow e^{-j\omega/2} \dfrac{2\sin\omega/2}{\omega}$

$2t\, p_{1/2}(t-1/2) \leftrightarrow 2j\left(e^{-j\omega/2} \dfrac{2\sin\omega/2}{\omega}\right)'$

Derivació en freqüència

$$2t\, p_{1/2}(t-1/2) \longleftrightarrow 4j\left(-\frac{j}{2}e^{-j\omega/2}\frac{\sin\omega/2}{\omega} + e^{-j\omega/2}\cdot\frac{\omega/2\cos\omega/2-\sin\omega/2}{\omega^2}\right)$$

Pertant, dividint per $j\omega$ obtenim $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left[4j\left(-\frac{j}{2}e^{-j\omega/2}\frac{\sin\omega/2}{\omega} + e^{-j\omega/2}\cdot\frac{\omega/2\cos\omega/2-\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\right) + e^{-j\omega}\right]$$