# DOSSIER DE PROBLEMES

# ÀLGEBRA I GEOMETRIA

# CURS 2020-2021 QT

# EETAC UPC

Iñaki Pelayo

16 de novembre de 2020

# Índex

# Capítol 1

# Nombres Complexos

## 1.1 Enunciats A

(A.1) Expressa en forma binòmica i troba el mòdul i l'argument dels nombres complexos següents.

(a) $\dfrac{1}{1+j}$
(b) $\dfrac{1+j}{1-j}$
(c) $\dfrac{2-3j}{j-5}$
(d) $\dfrac{2-j\sqrt{3}}{1+j}$
(e) $\dfrac{\sqrt{3}+j}{\sqrt{3}j-1}$
(f) $\dfrac{-4+8j}{j-3}$
(g) $\dfrac{3}{(j-\sqrt{3})^2}$
(h) $\dfrac{(1+j)^2}{1-j}$
(i) $(1-j\sqrt{3})^3$
(j) $(1-j)^4$

(A.2) Troba el mòdul, l'argument, la forma binòmica i representa gràficament els següents nombres complexos:

(a) $e^{\frac{\pi}{2}j}$
(b) $3e^{\frac{\pi}{4}j}$
(c) $-je^{\pi j}$
(d) $je^{3(1+\frac{\pi}{2}j)}$
(e) $e^{3+tj}$; t=0, $\pi$, $-\pi$
(f) $je^4e^{\frac{\pi}{2}j}$
(g) conjugat de $e^{\frac{\pi}{2}j}$
(h) conjugat de $e^{\frac{\pi}{4}j}$

(A.3) Per a cada apartat, dona el resultat en forma binòmica i en forma exponencial.

(a) $j^2+j^9$
(b) $5j^{23}+2j^{13}$
(c) $(1+j)^{53}$
(d) $(1/2+j\sqrt{3}/2)^{16}$
(e) $je^{j(-4j+\pi/6)}$
(f) $(2j-2)^2\cdot e^{3+\frac{\pi}{3}j}$
(g) $(1-j)^2\cdot e^{2+\frac{\pi}{3}j}$
(h) $\dfrac{2\cdot e^{1-\frac{\pi}{3}j}}{1+\sqrt{3}j}$
(i) $\dfrac{1+2j}{2-j}\cdot e^{\frac{\pi}{3}j}$
(j) $\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{3}j}(1-j)^2}{(1+j)e^{\frac{\pi}{6}j}}$

(A.4) En cada apartat, dona el resultat en forma binòmica i en forma exponencial.

(a) $z^{10}$, amb $z=(1-j)e^{\frac{3\pi}{2}j}$
(b) $z^{14}$, amb $z=(1+j)^2e^{-\frac{\pi}{3}j}$
(c) $z^4$, amb $z=\dfrac{(1-j)^2}{e^{\frac{\pi}{6}j}}$
(d) $z^{-1234}$, amb $z=j$
(e) $z^{7233}$, amb $z=-j$
(f) $z^6$, amb $z=\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{3}j}}{1+j}$

(A.5) Calcula i representa gràficament les arrels següents. Dona el resultat en forma binòmica.

(a) $\sqrt[8]{1}$
(b) $\sqrt[6]{-8}$
(c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}j}$
(d) $\sqrt{-16}$
(e) $\sqrt[5]{1}$
(f) $\sqrt{3+4j}$

## 1.2 Enunciats B

(B.1) Troba els complexos que satisfan: $\dfrac{1}{z^2} = -\overline{z}$.

(B.2) Troba dos nombres complexos sabent que el seu producte és $4j$ i que el quadrat d'un d'ells dividit per l'altre és $-2$.

(B.3) Calcula el valor de $w = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}$ sabent que $z_1$ és una arrel cúbica de 1 i $z_2$ té part imaginària igual a 1 i argument $\pi/6$.

(B.4) Troba les arrels dels polinomis següents, utilitzant les indicacions:

(a) $p(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$, sabent que $z = 1 + 2j$ és una de les seves arrels.

(b) $p(z) = z^5 - 6z^4 + 15z^3 - 18z^2 + 10z$, sabent que $z = 1 + j$ és una de les seves arrels.

(B.5) Obté, si és possible, l'expressió de la forma $(z - a)^2 + b^2$ (amb $a, b \in \mathbb{R}$), per a cadascun dels polinomis següents.

(a) $z^2 - 4z + 13$
(b) $z^2 - 2z - 2$
(c) $z^2 + 2z + 4$
(d) $z^2 - 6z + 36$
(e) $z^2 + 4z + 4$
(f) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 12$

(B.6) Dona les arrels i les descomposicions factorials a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ dels polinomis següents.

(a) $z^3 - z^2 + 2$

(b) $z^5 - 2z^4 - z + 2$

(c) $z^6 + z^4 + z^2 + 1$

(B.7) Obté polinomis que compleixin les propietats següents.

(a) $p(z)$ és real, de grau 4, amb totes les arrels diferents (reals o complexes) i de mòdul 2.

(b) $p(z)$ és real, de grau 3, i té $2 + 3j$ com arrel.

(c) $p(z)$ és real, de grau 3, i té $1 - 4j$ com arrel.

(d) $p(z)$ és real, de grau 6, i té 2 com arrel amb multiplicitat 4.

## 1.3 Enunciats C

(C.1) Resol a $\mathbb{C}$ el sistema d'equacions que segueix. Expressa les solucions en forma binòmica i en forma exponencial.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 - z_2 & = & 2j \\ z_1 \cdot z_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

(C.2) Troba tots els nombres complexos $z$ que compleixen

$$\mathrm{Re}(z^2) + j\mathrm{Im}(\overline{z}(1+2j)) = -3.$$

(C.3) Resol, deixant les solucions en forma exponencial,

$$z^4 = \frac{(1+j)e^{j(\frac{3\pi}{4}-8j)}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}j}}.$$

(C.4) Obté les arrels i la descomposició factorial en $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ del polinomi:

$$p(z) = z^3 + 2z^2 + z\frac{(-2\sqrt{3}+2j)e^{-j\frac{\pi}{3}}}{(1+j)^2}.$$

(C.5) Considerem el polinomi $p(z) = z^5 + 2z^4 + z + 2$

(a) Troba totes les arrels complexes de $p(z)$ i expressa-les tant en forma binòmica com en forma exponencial.

(b) Dona la descomposició factorial de $p(z)$ a $\mathbb{C}$ i a $\mathbb{R}$.

(C.6) Sigui $a$ és un paràmetre real. Sabent que $-1$ és una arrel del polinomi

$$p(z) = z^5 + az^4 + 4z + 4,$$

troba la resta d'arrels i la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi $p(z)$.

(C.7) Sabent que $2-3j$ és una arrel, obté les descomposicions factorials a $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ del polinomi:

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 18z + 26.$$

(C.8) Troba les arrels i dona les descomposicions factorials a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi:

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45,$$

sabent que $2-j$ és una de les seves arrels.

(C.9) Resol a $\mathbb{C}$ les següents equacions.

(a) $z^3 = \dfrac{2-j^{11}-j^{24}}{j\sqrt{2}}$.

(b) $z^3 + (1+j)z^2 + (j-2)z - 2j = 0$.

(C.10) Considerem el polinomi $p(z) = z^5 + z^4 + 4z + 4$.

(a) Troba totes les arrels complexes de $p(z)$ i expressa-les tant en forma binòmica com en forma exponencial.

(b) Dona la descomposició factorial de $p(z)$ a $\mathbb{C}$ i a $\mathbb{R}$.

## 1.4 Solucions A

(A.1) (a) $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg(z) = \frac{-\pi}{4}$

(b) $z = j$, $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

(d) $z = \frac{2-\sqrt{3}}{2} - j\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, $|z| = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $\arg(z) = -\arctan\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(e) $z = -j$, $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

(f) $z = 2 - 2j$, $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

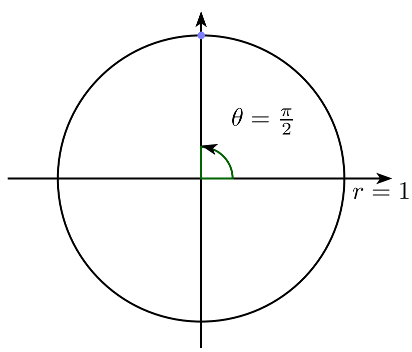
(g) $z = \frac{3}{8} + j\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $|z| = \frac{3}{4}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$

(h) $z = -1 + j$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

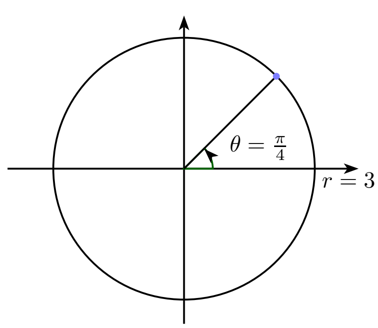
(i) $z = -8$, $|z| = 8$, $\arg(z) = \pi$

(j) $z = -4$, $|z| = 4$, $\arg(z) = \pi$

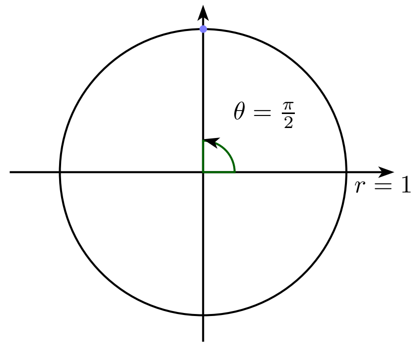
(A.2) (a) forma exponencial: $e^{\frac{\pi}{2}j}$ amb $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$
forma binòmica: $j$
representació gràfica:



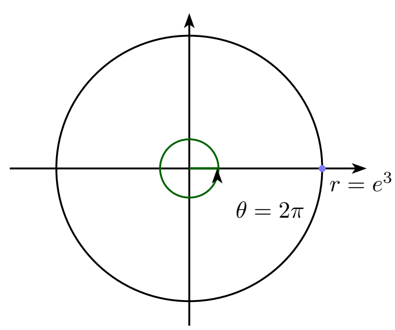

(b) forma exponencial: $3e^{\frac{\pi}{4}j}$ amb $r = 3, \theta = \frac{\pi}{4}$
forma binòmica: $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$
representació gràfica:



(c) forma exponencial: $-je^{\pi j} = e^{\frac{\pi}{2}j}$ amb $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$
forma binòmica: $j$
representació gràfica:

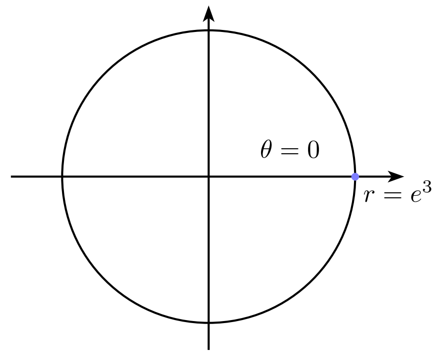



(d) forma exponencial: $e^3 e^{2\pi j}$ amb $r = e^3, \theta = 2\pi$
forma binòmica: $e^3$
representació gràfica:

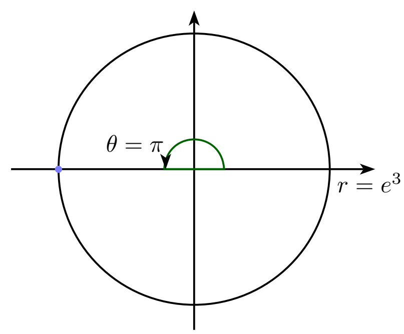



(e) forma exponencial: $e^3 e^{tj}$ amb $r = e^3, \theta = t$ $(t = 0, \pi, -\pi)$
forma binòmica: $e^3$ per $t = 0$, $-e^3$ per $t = \pi$, $-e^3$ per $t = -\pi$
representació gràfica:

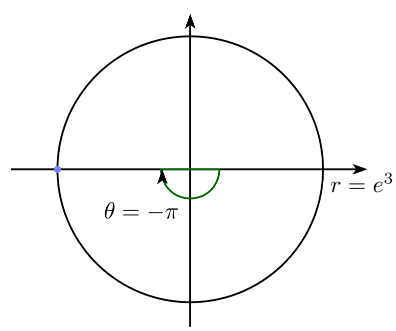
Per $t = 0$



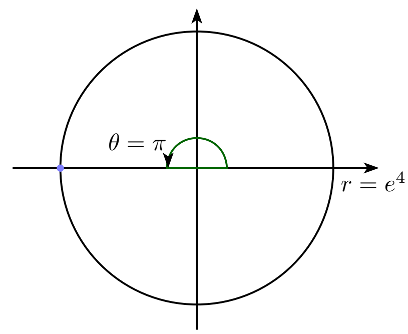

Per $t = \pi$



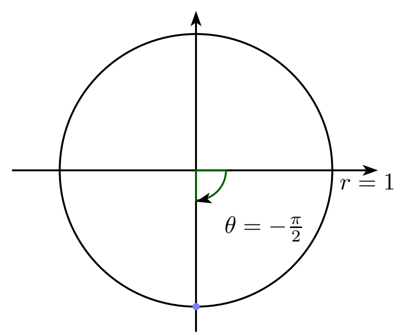

Per $t = -\pi$



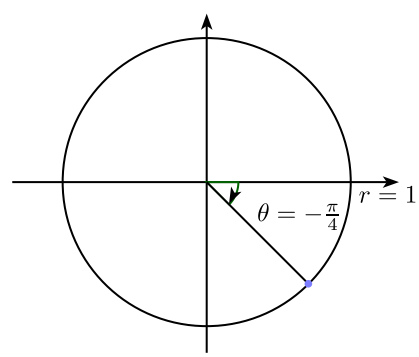

(f) forma exponencial: $e^4 e^{\pi j}$ amb $r = e^4, \theta = \pi$
forma binòmica: $-e^4$
representació gràfica:




(g) conjugat: $\overline{e^{\frac{\pi}{2}j}} = e^{-\frac{\pi}{2}j}$ amb $r = 1, \theta = -\frac{\pi}{2}$
forma binòmica: $-j$
representació gràfica:




(h) conjugat: $\overline{e^{\frac{\pi}{4}j}} = e^{-\frac{\pi}{4}j}$ amb $r = 1, \theta = -\frac{\pi}{4}$
forma binòmica: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$




(A.3) (a) $z = -1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}$

(b) $z = -3j = 3 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}j}$

(c) $z = -2^{26} - 2^{26}j = 2^{26}\sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}j}$

(d) $z = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi}{3}j}$

(e) $z = -\frac{e^4}{2} + \frac{e^4\sqrt{3}}{2}j = e^4 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}j}$

(f) $z = 4\sqrt{3}e^3 - 4e^3 j = 8e^3 \cdot e^{\frac{11\pi}{6}j}$

(g) $z = \sqrt{3}e^2 - e^2 j = 2e^2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}j}$

(h) $z = -\frac{e}{2} - \frac{e\sqrt{3}}{2}j = e \cdot e^{\frac{4\pi}{3}j}$

(i) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j = e^{\frac{5\pi}{6}j}$

(j) $z = -2 + 2j = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}$

(A.4) (a) $z^{10} = 32j = 32 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j}$

(b) $z^{14} = 2^{13} + 2^{13}\sqrt{3}j = 2^{14} \cdot e^{\frac{\pi}{3}j}$

(c) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}j = 16 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}j}$

(d) $z^{-1234} = j^2 = -1 = e^{\pi}$

(e) $z^{7235} = (-j)^3 = j = e^{\frac{\pi}{2}j}$

(f) $z^6 = 8j = 8 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j}$

(A.5) (a) $1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j),\ j,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j),\ -1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j),\ -j,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$

(b) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ j\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ -j\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$

(c) $\sqrt{3} + j,\ -1 + \sqrt{3}j,\ -\sqrt{3} - j,\ 1 - \sqrt{3}j$

(d) $4j,\ -4j$

(e) $1,\ \cos(2\pi/5) + j\sin(2\pi/5),\ \cos(4\pi/5) + j\sin(4\pi/5),\ \cos(6\pi/5) + j\sin(6\pi/5),\ \cos(8\pi/5) + j\sin(8\pi/5)$

(f) $2 + j,\ -2 - j$

## 1.5 Solucions B

(B.1) $z = -1$.

Pistes: (1) $\overline{z} \cdot z = |z|^2$; (2) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|^2 = z^2$

(B.2) Hi ha tres solucions possibles:

$z = 2e^{\frac{\pi}{2}j} = 2j,\ w = 2;$

$z = 2e^{\frac{7\pi}{6}j} = -\sqrt{3} - j,\ w = 2e^{-\frac{2\pi}{3}j} = -1 - \sqrt{3}j;$

$z = 2e^{\frac{11\pi}{6}j} = -\sqrt{3} + j,\ w = 2e^{-\frac{4\pi}{3}j} = -1 + \sqrt{3}j.$

Pista: $z \cdot w = 4j;\ \frac{z^2}{w} = -2 \Rightarrow z^3 = -8j$.

(B.3) $w = 5$.

Pista: $|z_1| = 1;\ |z_2| = 2$.

(B.4) (a) $1+2j, 1-2j, 2+j, 2-j$

(b) $0, 1+j, 1-j, 2+j, 2-j$

(B.5) (a) $z^2-4z+13=(z-2)^2+3^2$

(b) No és possible.

(c) $z^2+2z+4=(z+1)^2+(\sqrt{3})^2$

(d) $z^2-6z+36=(z-3)^2+(3\sqrt{3})^2$

(e) $z^2+4z+4=(z+2)^2$

(f) $z^2-2\sqrt{3}z+12=(z-\sqrt{3})^2+3^2$

(B.6) (a) Arrels de $p(z)$: $-1, 1+j, 1-j$

$$p(z)=(z+1)((z-1)^2+1)=(z+1)(z^2-2z+2)=(z+1)(z-1-j)(z-1+j)$$

(b) Arrels de $p(z)$: $2, 1, -1, j, -j$

$$p(z)=(z-2)(z-1)(z+1)(z^2+1)=(z-2)(z-1)(z+1)(z-j)(z+j)$$

(c) Arrels de $p(z)$: $j,\ -j,\ \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2},\ \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}$

$$p(z)=(z^2+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)$$

$$p(z)=(z-j)(z+j)(z-\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2})(z-\frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2})(z-\frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2})(z-\frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2})$$

(B.7) (a) Per exemple, $p(z)=z^4-16$

(b) $p(z)=((z-2)^2+3^2)(z-a)$, amb $a\in\mathbb{R}$. Per exemple, $p(z)=z^3-4z^2+13z$.

(c) $p(z)=((z-1)^2+4^2)(z-a)$, amb $a\in\mathbb{R}$. Per exemple, $p(z)=z^3-3z^2+19z-17$.

(d) Per exemple, $p(z)=(z-2)^4(z-a)(z-b)$, amb $a,b\in\mathbb{R}$ i diferents de 2.

## 1.6 Solucions C

(C.1) $(z_1,z_2)=(1+j,1-j)=(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j},\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}j})$

$(z_1,z_2)=(-1+j,-1-j)=(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}j},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}j})$

Pista: $z_1^2-2jz_1-2=0$

(C.2) $z=1+2j,-1-2j$.

Pista: $z=a+bj \Rightarrow a^2-b^2=3;\ b=2a$

(C.3) $z\in\{e^2e^{\frac{\pi}{3}j}, e^2e^{\frac{5\pi}{6}j}, e^2e^{\frac{4\pi}{3}j}, e^2e^{\frac{11\pi}{6}j}\}$

Pista: $z^4=e^8e^{\frac{4\pi}{3}j}$

(C.4) Les arrels són $\{0, -1+j, -1-j\}$, la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ és $z(z^2+2z+2)$ i a $\mathbb{C}$ és $z(z+1-j)(z+1+j)$.

Pista: $p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z$

(C.5) (a) $\{-2, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\}$
$\{2e^{\pi j}, e^{\frac{\pi}{4}j}, e^{\frac{3\pi}{4}j}, e^{\frac{5\pi}{4}j}, e^{\frac{7\pi}{4}j}\}$

(b) $p(z) = (z+2)(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$
$p(z) = (z+2)(z-e^{\frac{\pi}{4}j})(z-e^{\frac{3\pi}{4}j})(z-e^{\frac{5\pi}{4}j})(z-e^{\frac{7\pi}{4}j})$.

(C.6) Les arrels són: $\{-1, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$

$p(z) = (z+1)(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$

$p(z) = (z+1)(z-1-j)(z+1-j)(z+1+j)(z-1+j)$

Pistes: (1) $a = 1$; (2) $p(z) = (z+1)(z^4+4)$

(C.7) $p(z) = (z^2-4z+13)(z^2+2z+2)$

$p(z) = (z-2+3j)(z-2-3j)(z+1+j)(z+1-j)$

(C.8) Les arrels són: $\{2-j, 2+j, -3j, 3j\}$

$p(z) = (z^2-4z+5)(z^2+9)$

$p(z) = (z-2+j)(z-2-j)(z+3j)(z-3j)$

(C.9) (a) $z^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot j = e^{\frac{7\pi}{4}\cdot j} \Rightarrow z \in \{e^{\frac{7\pi}{12}\cdot j}, e^{\frac{15\pi}{12}\cdot j}, e^{\frac{23\pi}{12}\cdot j}\}$

(b) $z^3 + (1+j)z^2 + (j-2)z - 2j = (z-1)(z+2)(z+j) \Rightarrow z \in \{1, -2, -j\}$

(C.10) (a) $\{1, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j\} = \{e^{0\cdot j}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\cdot j}, \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}\cdot j}, \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}\cdot j}, \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}\cdot j}\}$

(b) $p(z) = (z-1)(z-1+j)(z-1-j)(z+1+j)(z+1-j)$
$p(z) = (z+1)(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$

# Capítol 2

# Matrius i Sistemes Lineals

## 2.1 Enunciats A

(A.1) Calcula, en el cas en què sigui possible, la matriu suma $A+B$ i la matriu producte $AB$ de les següents matrius:

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A.2) Obté la matriu $A^3-3A^2-5A+2I_n$, en els següents casos:

(a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(A.3) Calcula el determinant de les següents matrius:

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$

**nota**: La matriu de l'apartat (i) és una matriu quadrada d'ordre $n \geq 2$.

(A.4) Obté el determinant de la matriu $C^{-1}ACBA^{-1}$, sabent que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(A.5) Calcula el rang de les següents matrius:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -7 & 4 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(A.6) Obté les inverses de les següents matrius:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

(A.7) Sabiendo que $|A| = 3$, halla el determinante de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} c & f & i \\ 4a & 4d & 4g \\ b & e & h \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} d+2f & a+2c & g+2i \\ f & c & i \\ e & b & h \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 2a & g & 3d \\ 2b & h & 3e \\ 2c & i & 3f \end{pmatrix}$ (f) $F= \begin{pmatrix} -i & f+c & c \\ -g & d+a & a \\ -h & e+b & b \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} a+d & g & d \\ b+e & h & e \\ f+c & i & f \end{pmatrix}$ (i) $I = \begin{pmatrix} d-f & -f & 2e \\ a-c & -c & 2b \\ g-i & -i & 2h \end{pmatrix}$

(A.8) Classifica i resol el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array} \right.$$

(A.9) Classifica i resol el següent sistema d'equacions lineals, per Gauss:

$$\left.\begin{array}{llll} x & +2y & -z & = -1 \\ 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ x & +y & & = 0 \end{array}\right\}$$

(A.10) Classifica i resol els següents sistemes d'equacions lineals, per Gauss:

(a) $\left\{\begin{array}{rlll} x & +y & -3z & = 4 \\ 2x & +y & +z & = 5 \\ 3x & +y & +5z & = 6 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rlll} 2x & -y & +z & = 7 \\ x & +2y & -5z & = 2 \\ x & -3y & +6z & = 9 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rllll} x & +2y & -z & +3t & = 8 \\ 2x & -y & +z & -2t & = 0 \\ x & +3y & +2z & +t & = 4 \\ 3x & +5y & -4z & -t & = -6 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +z & +t & +u & = 1 \\ x & -y & +z & -t & -u & = 2 \\ x & +y & -z & +t & -u & = -1 \end{array}\right.$

(A.11) Classifica els següents sistemes d'equacions lineals:

(a) $\left\{\begin{array}{lcr} 2x - y + 3z & = & -9 \\ 4x + 2y + 5z & = & -7 \\ 6x - 5y - z & = & -1 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{lcr} 2x - 3y + 4z & = & 6 \\ 3x - y + 5z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & 4 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{lcr} 3x + y & = & 1 \\ 2x - y & = & 2 \\ x - 3y & = & 3 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 2x - y + z & = & -1 \\ -x + 3y + 2z & = & 2 \end{array}\right.$ (e) $\left\{\begin{array}{lcr} 12x - 13y + 14z & = & 7 \\ 28x + 32y - 18z & = & 32 \\ 34x + 19y + 15z & = & -49 \end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{lcr} 2x + 3y & = & 5 \\ x - y & = & 2 \\ 3x + y & = & 6 \end{array}\right.$

(g) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y - z & = & 2 \\ x + y - 2z - t & = & 1 \\ x + 2y & = & 2 \\ 2x - y + 2z + t & = & 3 \end{array}\right.$ (h) $\left\{\begin{array}{lcr} 4y + 3z + 6t & = & 37 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 26 \\ 2x - y + z - t & = & -3 \\ x + y + z + t & = & 8 \end{array}\right.$ (i) $\left\{\begin{array}{lcr} 5x + y & = & -7 \\ 2x - y & = & -7 \\ 3x + y & = & -3 \\ 2x + 4y & = & 8 \end{array}\right.$

(A.12) Resol el sistemes d'equacions lineals del problema anterior que siguin compatibles.

## 2.2 Enunciats B

(B.1) Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu $3 \times 3$, on $C_1, C_2, C_3$ són les seves columnes. Sabent que el determinant de la matriu $A$ val 2, calcula el determinant de la matriu $B$ donada per:

(a) $B = (C_1 + 2C_2, C_1, C_1 + C_2 + C_3)$.

(b) $B = (C_1 + C_2, C_1, C_1 + C_2 + 2C_3)$.

(c) $B = (C_1 + C_2 + C_3, C_1 + C_2, C_2 + C_3)$.

(B.2) Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu $3 \times 3$, on $C_1, C_2, C_3$ són les seves columnes. Si $A$ és invertible demostra que, aleshores, també ho és la matriu $B$ donada per:

(a) $B = (C_1, C_2 + 4C_1, C_3 + 2C_2 + 8C_1)$.

(b) $B = (C_1, C_2 + 9C_1, C_3 + 3C_2 + 27C_1)$.

(B.3) Resol les següents equacions matricials $A\,X = B$, on:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(B.4) En els següents casos, determina per quins valors reals de $\lambda$ el sistema d'equacions lineals $(A - \lambda.I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ és compatible indeterminat:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -3 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(B.5) D'un sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites $x, y, z$ se sap que:

- la suma de les incògnites és 6,
- la segona és la mitjana aritmètica de les altres dues, i
- la tercera és la suma de les altres dues.

Resol aquest s.e.l. tot indicant si és incompatible, compatible determinat o compatible indeterminat.

(B.6) Obté tots els polinomis $p(x)$ de grau tres que verifiquen: $p(1) = 2$, $p'(-2) = 29$, $p''(-1) = -18$. Hi ha algú que compleix $p(-1) = 2$ ?

(B.7) Obté l'equació de la paràbola vertical que passa pels punts A=(1,-1), B=(3,5) y C=(-2,20). Ídem, canviant C per D=(5,11).

(B.8) Resol els següents sistemes d'equacions lineals en funció dels valors del paràmetre real $a$:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{c} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\} \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{array}{c} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = a \end{array}\right\} \qquad \text{(c)} \quad \left.\begin{array}{c} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{array}\right\}$$

## 2.3 Enunciats C

(C.1) Demostra que tota matriu $A$ d'ordre 2 cumpleix: $A^2 - tr(A) \cdot A + |A| \cdot I_2 \ = \ O_2$

(C.2) Resol l'equació matricial $AX = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(C.3) Considera cadascuna de les equacións matricials que segueixen. Utilitza **càlcul matricial** per expressar i trobar la seva solució:

$$\text{(a)}\ X \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 0 & 15 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}.$$

(C.4) Discuteix el següent sistema d'equacions lineals segons els valors dels paràmetres $a$ i $b$:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & & & = & 1 \\ 3x & + & ay & + & z & = & b. \end{array}\right\}$$

(C.5) Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 4x3 i paràmetre $k$ on:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Quan $k=-1$ classifica i resol aquest s.e.l.

(b) Esbrina per quins valors del paràmetre $k$ aquest s.e.l. és incompatible.

(C.6) Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre $a$ on:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & a+3 & 4 \\ -1 & a-2 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Quan $a=-1$ classifica i resol aquest s.e.l.

(b) Esbrina per quins valors del paràmetre $a$ aquest s.e.l. és compatible indeterminat.

(C.7) Discuteix els següents sistemes d'equacions lineals amb paràmetres:

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+(\alpha+2)y+\alpha z & = & \alpha^2+8 \\ (\alpha+1)x+(\alpha+1)y & = & 2\alpha+4 \\ -\alpha x+(2\alpha+3)y+(2\alpha+4)z & = & \alpha+1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{lcl} bx+y+z & = & 1 \\ x+by+z & = & 1 \\ x+y+bz & = & 1 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} (a+1)x+y+z & = & a^2+3a \\ x+(a+1)y+z & = & a^3+3a^2 \\ x+y+(a+1)z & = & a^4+3a^2 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{lcr} 3x-y+2z & = & 1 \\ x+4y+z & = & b \\ 2x-5y+az & = & -2 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{lcc} (2\alpha+2)x+\alpha y+2z & = & 2\alpha-2 \\ 2x+(2-\alpha)y & = & 0 \\ (\alpha+1)x+(\alpha+1)z & = & \alpha-1 \end{array}\right.$

(f) $\left\{\begin{array}{lcc} mx+y & = & n \\ x+my & = & 1 \\ x+y & = & n \end{array}\right.$

(g) $\left\{\begin{array}{lcr} -5x-12z & = & 7 \\ -2x+my-10z-2t & = & 10 \\ \ \ 2x+5z & = & -3 \\ -6x-18z-t & = & n \end{array}\right.$

(h) $\left\{\begin{array}{lcc} bx+c^2y+c^2bz & = & c^2b \\ x+cy+c^2z & = & 1 \\ x+cy+bcz & = & c \end{array}\right.$

(i) $\left\{\begin{array}{lcr} mx+y-z & = & 1 \\ 2x+y & = & 2 \\ x+my+z & = & -1 \\ x+y+mz & = & m \end{array}\right.$

(j) $\left\{\begin{array}{lcr} 2x+cy+z & = & 7 \\ x+cy+z+t & = & d \\ x+2cy+t & = & -1 \\ dx+cy & = & d \end{array}\right.$

(k) $\left\{\begin{array}{lcc} kx+y+z+t & = & 2 \\ x-ky+z+t & = & 3 \\ x+y-kz+t & = & 4 \\ x+y+z-kt & = & 5 \\ x+y+z+t & = & 1 \end{array}\right.$

(l) $\left\{\begin{array}{lcc} c^2x-y+3z & = & c^2+1 \\ x+y+z & = & 1 \\ cx+y+z & = & c \end{array}\right.$

(m) $\left\{\begin{array}{rcl} -x_1+mx_2-x_3 &=& 0\\ -x_3+mx_4-x_5 &=& 0\\ mx_1-x_2 &=& 0\\ -x_4+mx_5 &=& 0\\ -x_2+mx_3-x_4 &=& 0 \end{array}\right.$ (n) $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+z &=& 1\\ x+aby+z &=& b\\ x+by+az &=& 1 \end{array}\right.$

(o) $\left\{\begin{array}{lcl} x+my+m^2z &=& 1\\ x+(m+1)y+(m+1)^2z &=& 1\\ x+(m-1)y+(m-1)^2z &=& 1 \end{array}\right.$ (p) $\left\{\begin{array}{lcl} x+my+m^2z &=& 1\\ (m+1)y+(m+1)^2z &=& 0\\ (m-1)y+(m-1)^2z &=& 1 \end{array}\right.$

(C.8) Discuteix els següents sistemes segons els valors dels paràmetres reals $a$, $b$, $k$ i $m$:

(a) $\left\{\begin{array}{rrrl} a^2x & +y & +z & =3\\ x & +a^2y & +z & =4-a\\ x & +y & +a^2z & =2+a^2 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rrl} x & -2y & =3(k+m)\\ x & -y & =2(k+m)+1\\ mx & +ky & =m^2-k^2-6\\ kx & +my & =k^2-m^2+6 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rrrrl} ax & +y & +z & +t & =1\\ x & +ay & +z & +t & =b\\ x & +y & +az & +t & =b^2\\ x & +y & +z & +at & =b^3 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +(1-m)z & =m+2\\ (1+m)x & -y & +2z & =0\\ 2x & -my & +3z & =m+2 \end{array}\right.$

## 2.4 Solucions A

(A.1) (a) $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A+B$ no es pot calcular, $AB=\begin{pmatrix} -2 & 2\\ -1 & -1\\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 1\\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $AB$ no es pot calcular.

(d) No es pot calcular ni $A+B$ ni $AB$.

(A.2) (a) $O_3$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 8\\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 13\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(A.3) (a) 9, (b) 18, (c) 320, (d) $-60$, (e) $-264$, (f) 22, (g) $(a-b)(a-c)(b-c)$, (h) $4abc$, (i) 0.

(A.4) El determinant val $-11$.

Pistes: (1) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$; (2) $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$

(A.5) Totes tres tenen rang dos.

(A.6)

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 17 & -3 \\ 1 & -12 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

(A.7) (a) 3 (b) -3 (c) 12 (d) 3 (e) -18 (f) 3 (g) -18 (h) -3 (i) -6

(A.8) Sistema compatible indeterminat, amb 2 graus de llibertat. Solució: $x = t + 2z$, $y = -z$.

(A.9) $x = 1, y = -1, z = 0$.

(A.10) (a) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1 - 4z$, $y = 3 + 7z$.
(b) Sistema incompatible.
(c) Sistema compatible determinat. Solució: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, $t = 3$.
(d) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1/2 + u$, $y = -1/2 - u - t$, $z = 1 - u$.

(A.11) (a) Compatible determinat.
(b) Incompatible.
(c) Compatible determinat.
(d) Compatible indeterminat.
(e) Compatible determinat.
(f) Incompatible.
(g) Compatible determinat.
(h) Compatible indeterminat.
(i) Compatible determinat.

(A.12) (a) $(x, y, z) = (1, 2, -3)$
(b)
(c) $(x, y)$=($\frac{3}{5}$,-$\frac{4}{5}$)
(d) $(x, y, z)$=(-$\frac{1}{5}$,$\frac{3}{5}$,0)+$\lambda$.(-1,-1,1)
(e) $(x, y, z) = (2, -3, -4)$
(f)
(g) $(x, y, z, t)$=($\frac{4}{3}$,$\frac{1}{3}$,1,-$\frac{4}{3}$)
(h) $(x, y, z, t)$=(-3,4,7,0)+$\lambda$.($\frac{4}{5}$,- $\frac{3}{5}$,-$\frac{6}{5}$,1)
(i) $(x, y)$=(-2,3)

## 2.5 Solucions B

(B.1) (a) $\det(B) = -4$.

(b) $\det(B) = -4$.

(c) $\det(B) = 2$.

Pistes: (1) $\det(C_1 + C_1', C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3) + \det(C_1', C_2, C_3)$;

(2) $\det(\alpha \cdot C_1, C_2, C_3) = \alpha \cdot \det(C_1, C_2, C_3)$;

(3) $\det(C_1, C_2, C_3) = -\det(C_2, C_1, C_3)$

(B.2) Pista: $C_3 = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2 \Rightarrow \det(C_1, C_2, C_3) = 0$.

(B.3) (a) Té solució única. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) Té solució única. $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) No té solució.

(d) Té infinites solucions. La solució general és $X = \begin{pmatrix} 1-a & -3-b \\ -a & -2-b \\ a & b \end{pmatrix}$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

(B.4) (a) $\lambda \in \{1, 4\}$

(b) $\lambda = 5$

(c) $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 5\}$

(d) Sempre és $C.D.$

(e) $\lambda \in \{0, 2, 3\}$

(f) $\lambda = 2$

(g) $\lambda \in \{0, 1, 2, 4\}$

(h) $\lambda \in \{2, 4, 6\}$

Pistes: (1) $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ $C.I. \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0$;

(2) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ 7 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

(B.5) És compatible determinat.

Solució: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

(B.6) $p(x) = ax^3 + (3a-9)x^2 - 7x + 18 - 4a$.

$p(-1) = 2 \Rightarrow p(x) = 7x^3 + 12x^2 - 7x - 10$

Pista: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $p''(x) = 6ax + 2b$.

(B.7) $y = 2x^2 - 5x + 2$. No existeix.

Pista: La paràbola $y = ax^2 + bx + c$ passa pel punt $P = (h, k) \Leftrightarrow ah^2 + bh + c = k$.

(B.8) (a) Per $a = 0$ és un sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 5 - 3y$, $z = 0$.

Per $a = -1$ sistema incompatible.

Per $a \neq 0, -1$ sistema compatible determinat. Solució: $x = -4/(1 + a)$, $y = (3 + a)/(1 + a)$, $z = 2a/(1 + a)$.

(b) Per $a = 7$ és un sistema compatible determinat. Solució: $x = 1$, $y = 1$.

Per $a \neq 7$ sistema incompatible.

(c) Per $a \neq \frac{1}{5}$ és un sistema compatible determinat. Solució: $x = (2a - 1)/(5a - 1)$, $y = (2 - a)/(5a - 1)$, $z = -3/(5a - 1)$.

Per $a = \frac{1}{5}$ sistema incompatible.

## 2.6 Solucions C

(C.1) Pistes: (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = a + d$; (2) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C.2) No té solució.

Pista: $X$ és una matriu quadrada d'ordre 2.

(C.3) (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(C.4) Si $a \neq -2, 1$, aleshores el sistema és compatible determinat.
Si $a = -2$ i $b = 0$, o bé, $a = 1$ i $b = 3$ aleshores el sistema és compatible indeterminat, amb un grau de llibertat.
En la resta de casos, $a = -2$ i $b \neq 0$, o bé, $a = 1$ i $b \neq 3$, aleshores el sistema és incompatible.

Pista: El determinant de la matriu del sistema és: $(a + 2)(a - 1)$.

(C.5) (a) Compatible determinat: $(x, y, z) = (-1, 4, 4)$.

(b) Aquest s.e.l. és incompatible si i només si $k \notin \{-1, 0, 2\}$.

Pista: El determinant de la matriu de ampliada és: $-2k(k + 1)(k - 2)$.

(C.6) (a) Compatible determinat: $(x, y, z) = (-30, 7, 5)$.

(b) Mai és compatible indeterminat.

Pista: El determinant de la matriu del sistema és: $-a - 2$.

(C.7) (a)

| $\alpha = -1$ | $\alpha = 0$ | $\alpha = 1$ | e.o.c. |
|---|---|---|---|
| $I.$ | $C.I.$ | $I.$ | $C.D.$ |

(b)

| $b=-2$ | $b=1$ | e.o.c. |
|---|---|---|
| $I.$ | $C.I.$ | $C.D.$ |

(c)

| $a=-3$ | $a=0$ | e.o.c. |
|---|---|---|
| $I.$ | $C.I.$ | $C.D.$ |

(d)

| $a\neq 1$ | $a=1$ | |
|---|---|---|
| | $b\neq 3$ | $b=3$ |
| $C.D.$ | $I.$ | $C.I.$ |

(e)

| $\alpha=-1$ | $\alpha=0$ | $\alpha=1$ | e.o.c. |
|---|---|---|---|
| $I.$ | $C.I.$ | $C.I.$ | $C.D.$ |

(f)

| $nm=1$ | | $nm\neq 1$ |
|---|---|---|
| $m=1$ | $m\neq 1$ | |
| $C.I.$ | $C.D.$ | $I.$ |

(g)

| $m=0$ | | $m\neq 0$ |
|---|---|---|
| $n=13$ | $n\neq 13$ | |
| $C.I.$ | $I.$ | $C.D.$ |

(h)

| $c=0$ | $b=c$ | | e.o.c. |
|---|---|---|---|
| | $c=1$ | $c\neq 1$ | |
| $I.$ | $C.I.$ | $I.$ | $C.D.$ |

(i)

| $m=-1$ | $m=0$ | $m=2$ | e.o.c. |
|---|---|---|---|
| $C.D.$ | $C.D.$ | $C.D.$ | $I.$ |

(j)

| $d=1$ | $d\neq 1$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $c\neq 0$ | $c=0$ | | |
| | | $d=0$ | $d=4$ | e.o.c. |
| $I.$ | $C.D.$ | $C.I.$ | $C.I.$ | $I.$ |

(k)

| $k=3\sqrt{3}-4$ | $k=-3\sqrt{3}-4$ | e.o.c. |
|---|---|---|
| $C.D.$ | $C.D.$ | $I.$ |

(l)

| $c=1$ | $c\neq 1$ |
|---|---|
| $C.I.$ | $C.D.$ |

(m)

| $m\in\{-\sqrt{3},-1,0,1,\sqrt{3}\}$ | e.o.c. |
|---|---|
| $C.I.$ | $C.D.$ |

(n)

| $b=0$ | $a=1$ | | $a=-2$ | | e.o.c. |
|---|---|---|---|---|---|
| | $b=1$ | $b\neq 1$ | $b=-2$ | $b\neq -2$ | |
| $I.$ | $C.I.$ | $I.$ | $C.I.$ | $I.$ | $C.D.$ |

(o) $C.D.$

(p)

| $m=-1$ | $m=1$ | e.o.c. |
|---|---|---|
| $C.I.$ | $I.$ | $C.D.$ |

(C.8) (a) Si $a \neq \pm 1$, aleshores el sistema és compatible determinat.
Si $a=1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $a=-1$, aleshores el sistema és incompatible.

(b) Si $a \neq 1, -3$, aleshores per a tot $b$ el sistema és compatible determinat.
Si $a=1$ i $b=1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $a=1$ i $b\neq 1$, aleshores el sistema és incompatible.
Si $a=-3$ i $b=-1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $a=-3$ i $b\neq -1$, aleshores el sistema és incompatible.

(c) Si $k=6$ i $m=-6$, aleshores el sistema és compatible determinat.
En cas contrari, el sistema és incompatible.

(d) Si $m\neq 0, \pm 2$, aleshores el sistema és compatible determinat.
Si $m=0$ o $m=-2$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $m=2$, aleshores el sistema és incompatible.

# Capítol 3

# Espais Vectorials

## 3.1 Enunciats A

(A.1) Esbrina quins dels següents subconjunts són subespais vectorials.

(a) El conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x + y + z = 0\}$.

(b) El conjunt $\{(\lambda + \mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(c) El conjunt $\{(\lambda + 2, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(d) El conjunt $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tals que $x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(e) El conjunt $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $\mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

(f) El conjunt $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $\det(A) = 0\}$.

(g) El conjunt dels polinomis reals de grau menor que 4.

(h) El conjunt dels polinomis reals de grau més gran que 4.

(A.2) En els següents casos, expressa el vector $\vec{u} = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ com a combinació lineal dels elements del conjunt de vectors $S$:

(a) $S = \{\vec{e}_1 = (1, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1)\}$

(b) $S = \{\vec{v}_1 = (2, 2),\ \vec{v}_2 = (4, 1)\}$

(c) $S = \{\vec{w}_1 = (0, 1),\ \vec{w}_2 = (2, 1),\ \vec{w}_3 = (-1, -2)\}$

(d) $S = \{\vec{a}_1 = (4, -6),\ \vec{a}_2 = (-6, 9)\}$

(A.3) Indica quins dels següents subconjunts de vectors de $\mathbb{R}^3$ són lliures:

- $A = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 2),\ \vec{u}_2 = (1, 2, 3),\ \vec{u}_3 = (1, 0, 1)\}$
- $B = \{\vec{u}_1 = (2, 1, -1),\ \vec{u}_2 = (-5, -1, -1),\ \vec{u}_3 = (1, -1, 3)\}$
- $C = \{\vec{u}_1 = (0, 1, -1),\ \vec{u}_2 = (1, 0, -1),\ \vec{u}_3 = (1, -1, 0)\}$
- $D = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{u}_2 = (0, -1, 0),\ \vec{u}_3 = (1, 1, 1),\ \vec{u}_4 = (1, 0, 2)\}$
- $E = \{\vec{u}_1 = (1, -1, 0),\ \vec{u}_2 = (-1, 1, 0)\}$

(A.4) En $\mathbb{R}^3$ considerem el subespai vectorial $U = \langle (1, 2, 1), (3, 1, 5) \rangle$ i el subespai vectorial $V$ generat pels vectors $(1, 2, 1)$, $(3, 1, 5)$ i $(3, -4, 7)$. Defineixen $U$ i $V$ el mateix subespai de $\mathbb{R}^3$?

(A.5) Considerem el subespai vectorial $F = \langle (2, 1, -1), (8, -5, 1), (1, -4, 2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Troba una base d'aquest subespai i amplia-la a una base de $\mathbb{R}^3$.

(A.6) Dona la dimensió i una base del subespai vectorial definit per $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x - y + z = x - 2y = y + z = 0\}$.

(A.7) En $\mathbb{R}^4$ considerem el subespai vectorial $F$ generat pels vectors $(1, 2, 1, 3)$ i $(2, 0, 3, 2)$, i el subespai $G$ generat per $(-1, 6, -3, 5)$, $(0, 4, -1, 4)$ i $(3, 2, 1, -1)$. Comprova que $F \subset G$, i amplia una base de $F$ fins a obtenir una base de $G$.

(A.8) Considerem, en $\mathbb{R}^4$, els vectors $\vec{v} = (10, 1, 6, -2)$, $\vec{u}_1 = (1, -3, -2, 5)$, $\vec{u}_2 = (3, -2, -4, 9)$, $\vec{u}_3 = (4, -7, 2, 3)$. Pertany $\vec{v}$ al subespai generat per $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$? És $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base d'aquest subespai? En cas afirmatiu, troba la relació de dependència en $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

(A.9) Considerem:

(a) En $\mathbb{R}^3$ els subespais vectorials $U = \langle (1, 2, -1), (2, -3, 2) \rangle$ i $V = \langle (4, 1, 3), (-3, 1, 2) \rangle$.

(b) En $\mathbb{R}^4$ el subespai vectorial $U = \langle (1, -1, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 2) \rangle$, i el subespai vectorial $V = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tals que $a + b + c = 0$ i $b + d = 0$.

(c) En $\mathbb{R}^4$ el subespai vectorial $U = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tals que $x + y + z + t = 0$, i el subespai $V = (\lambda a + a(2 + a)\mu, 0, 0, \lambda + \mu) \in \mathbb{R}^4$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

(d) En $\mathbb{C}^5$ el subespai vectorial $U$ generat per $(1, 2, -1, -1, -2), (0, 2, -1, 0, -2), (0, 0, 2, -1, 0)$, i el subespai $V$ generat pels vectors $(3, 3, 0, -5, 2), (1, 1, 0, -3, 2), (1, 1, 0, 1, -2)$.

En cada cas: Troba una base i la dimensió dels subespais vectorials $U$, $V$ , $U + V$ , i $U \cap V$. Defineixen $U$ i $V$ el mateix subespai? És l'espai vectorial suma dels subespais $U$ i $V$ ? És l'espai vectorial suma directa dels subespais $U$ i $V$?

(A.10) Sigui $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si les coordenades dels vectors $(1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$ i $(1, 1, 0)$ en aquesta base són, respectivament, $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 2)$ i $(1, 1, -2)$, esbrina quins són els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

## 3.2 Enunciats B

(B.1) Sigui $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Comprova que $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ també és una base de $\mathbb{R}^3$. Si un vector té coordenades $(a, b, c)$ en la base $B_1$, quines coordenades té en la base $B_2$?

(B.2) En $\mathbb{R}^3$ considerem les bases $B_1 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ i $B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$. Sigui $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ un vector amb coordenades $(x, y, z)$ en la base $B_1$, i amb coordenades $(x', y', z')$ en la base $B_2$. Expressa $x$, $y$ i $z$ en funció de $x'$, $y'$ i $z'$.

(B.3) En $\mathbb{C}^3$ considerem els subespais $F$ i $G$, on $F = \langle (0, j, 1), (0, 1, j) \rangle$, i on $G$ és el subespai generat per $(1 - 2j, 1 + 2j, 1)$ i per $(5, -3 + 4j, 1 + 2j)$. És cert que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$?

(B.4) Considerem els subespais $F = \langle (1, 1, -1, 2),\ (0, 1, 1, 1) \rangle$ i $G = \langle (1, 2, -3, 2),\ (1, -1, 0, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Troba les coordenades del vector $\vec{v} = (4, 2, 0, 8)$ en una base de $F + G$. Determina quins vectors $\vec{a} \in F$ i $\vec{b} \in G$ compleixen $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. Raona per què $\vec{a}$ i $\vec{b}$ no són únics.

(B.5) Sigui $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Comprova que

$$B_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 + \vec{u}_4, \vec{u}_1, \vec{u}_4, \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\}$$

també és una base de $\mathbb{R}^4$. Si un vector té coordenades $(a, b, c, d)$ en la base $B_1$, quines coordenades té en la base $B_2$?

(B.6) Demostra que $\{1 + x^3,\, 2x + 3x^2,\, 1 - x^2,\, x + 2x^2\}$ és una base de $\mathbb{R}_3[x]$ i troba les coordenades de $1 + 5x + 10x^2 + 2x^3$ en aquesta base.

(B.7) En els següents casos, obté dos subespais suplementaris diferents de $F$:

(a) $F = \langle\{\vec{u} = (1, 2, -1),\ \vec{v} = (3, -1, -3),\ \vec{w} = (-4, -1, 4)\}\rangle \subset \mathbb{R}^3$

(b) $F = \langle\{\vec{u} = (1, 3, 0, -1),\ \vec{v} = (2, 5, 1, 2),\ \vec{w} = (1, 2, 1, 3)\}\rangle \subset \mathbb{R}^4$

(c) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 = x_2 - x_3 = x_2 + x_3 + x_5\} \subset \mathbb{R}^5$

(B.8) Siguin $F$, $G$ dos subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$ de dimensions $n - 1$ y 2, respectivament. Demostra que si $F$ no conté a $G$, llavors $\dim(F \cap G) = 1$ i $F + G = \mathbb{R}^n$.

(B.9) Considerem els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \langle\{\vec{u}_1 = (1, 1, 5, 2),\ \vec{u}_2 = (2, 3, 11, 5),\ \vec{u}_3 = (0, 1, 1, 1)\}\rangle \\ G &= \langle\{\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 2),\ \vec{v}_2 = (5, 2, 6, 2),\ \vec{v}_3 = (1, 1, 3, 4)\}\rangle \end{aligned}$$

Demostra que $F$ i $G$ són subespais vectorials suplementaris en $\mathbb{R}^4$. Obté la descomposició del vector $\vec{a} = (2, 0, 0, 3)$ sobre ells.

(B.10) Considerem els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \langle\{\vec{u}_1 = (0, 0, 5, 2),\ \vec{u}_2 = (2, 3, -1, 5),\ \vec{u}_3 = (0, 1, 1, 1)\}\rangle \\ G &= \langle\{\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 2),\ \vec{v}_2 = (5, 2, 6, 2),\ \vec{v}_3 = (1, 1, 3, 4)\}\rangle \end{aligned}$$

Demostra que $F + G = \mathbb{R}^4$, però no són subespais vectorials suplementaris. Obté dues descomposicions del vector $\vec{a}$=(2,0,0,3) sobre ells.

## 3.3 Enunciats C

(C.1) En $\mathbb{R}^4$, es consideren els vectors $(1, 2, 0, -a)$, $(3, 5, b, 1)$ i $(2, 7, a, -3)$. Troba $a$ i $b$ a fi que el conjunt que formen sigui linealment dependent.

(C.2) Donat $a \in \mathbb{R}$, definim:

$$V_a = \langle\{(1, a, 1, 1), (1, a, 1 - a, 0), (0, 1, 2a, 2), (1, 1 + a, 1 + a, 2)\}\rangle.$$

(a) Troba, segons els valors de $a$, la dimensió i una base de $V_a$.

(b) Existeix algun valor de $a$ pel qual el vector $v = (0, 2, 0, 5)$ pertany al subespai $V_a$? Si és el cas, troba-lo i escriu $v$ com a combinació lineal de la base trobada a l'apartat anterior (pel valor corresponent de $a$).

(C.3) Sigui $F_a = \langle\{(1, a, 1), (-1, 2, 0), (1, -1, -a)\}\rangle$.

(a) Per quins valors de $a$ i $b$, el vector $(b, 3 - b, 0)$ pertany al subespai $F_a$?

(b) Discuteix en funció de $a$, la dim $F_a$.

(c) Per quins valors de $a$, $F_a = \mathbb{R}^3$?

(C.4) Sigui $F$ el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ definit per:

$$F = \{(\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda, \mu) : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Dona una base i la dimensió de $F$.

(b) Calcula $a$ per tal que el vector $(2, 4, a, 3)$ sigui de $F$.

(c) Pel valor de $a$ de l'apartat anterior, troba les coordenades de $v$ en la base que has donat a l'apartat (a).

(C.5) En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considerem el subespai:

$$F = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ A^t = A, \ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

(a) Dona una base de $F$.

(b) Justifica que $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ és del subespai $F$ i expressa-la com a combinació lineal dels vectors de la base que has donat a l'apartat anterior.

(C.6) En $\mathbb{R}_2[x]$, considerem el subespai:

$$F = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}.$$

(a) Dona una base de $F$.

(b) Justifica que $3x^2 - x - 2$ és de $F$ i troba les seves coordenades en la base que has donat a l'apartat anterior.

(C.7) En $\mathbb{C}^3$, considerem els subespais

$$\begin{aligned} F &= \langle\{(1, j, -1), (0, 1, j)\}\rangle, \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : \ x + y - z = z - jy = 0\}. \end{aligned}$$

(a) És cert que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$?.

(b) Comprova que $v = (j, 1, j) \in F$, dona una base $B_1$ de $F$ i troba les coordenades de $v$ en la base $B_1$.

(C.8) Donats els subespais de $\mathbb{R}^3$

$$F = \langle\{(1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, 1, -1)\}\rangle \qquad G = \langle\{(1, 1, 0), (-1, 1, a)\}\rangle,$$

troba la dimensió i una base de $F + G$ en funció del paràmetre $a$.

(C.9) En $\mathbb{R}^4$, es consideren els subespais $F = \{(x, y, z, t) : \ 2x - y + t = y + z - t = 0\}$ i $G = \{(\lambda, 2\lambda + \mu, 0, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(a) Comprova que $\vec{v} = (-2, 1, 4, 5)$ és un vector de $F$ però no és un vector de $G$. Raona la resposta.

(b) Troba tots els vectors comuns de $F$ i $G$ i dona una base de $F \cap G$.

(c) Troba una base i la dimensió de $F$ i de $G$.

(d) És $F + G = \mathbb{R}^4$? Raona la resposta.

(C.10) En $\mathbb{R}^4$, es consideren els subespais $F = \{(x, y, z, t) : \; x-2y+t = x+2z-5t = x-4y-2z+7t = 0\}$ i $G =< (1, 0, 0, -1), (0, 1, a, 2) >$, on $a$ és un nombre real.

(a) Comprova que $v = (1, 1, 2, 1)$ és de $F$.

(b) Troba una base i la dimensió de $F$ i de $G$.

(c) Troba el valor de $a$ que fa que la dimensió de $F + G$ sigui 3, i dona per aquest valor de $a$ una base de $F + G$.

(d) És $F \cap G = 0$? RaonaUNICOOS la resposta.

## 3.4 Solucions A

(A.1)

(a) Certa
(b) Certa
(c) Falsa
(d) Certa
(e) Certa
(f) Falsa
(g) Certa
(h) Falsa

(A.2) (a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ (b) $\vec{u} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (c) $\vec{u} = (3\beta - 5)\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 + (2\beta - 2)\vec{w}_3$ (d) No és possible.

(A.3) Tots són lligats.

(A.4) $U$ i $V$ defineixen el mateix subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(A.5) Una base de $F$ és $\{(2, 1, -1), (1, -4, 2)\}$ i el vector $(0, 0, 1)$ completa aquesta base a una de $\mathbb{R}^3$.

(A.6) És un subespai de dimensió 1. Una base és $(-2, -1, 1)$.

(A.7) $G = \langle (1, 2, 1, 3), (2, 0, 3, 2), (3, 2, 1, -1) \rangle$.

(A.8) Sí, $\vec{v}$ pertany a aquest subespai. Sí, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és una base del subespai que generen aquests vectors. Les components de $\vec{v}$ en aquesta base són $(-7, 3, 2)$.

(A.9) (a) Es té que $\dim U = \dim V = 2$, $\dim (U + V) = 3$ i $\dim (U \cap V) = 1$. En particular $U$ i $V$ no defineixen el mateix subespai, $\mathbb{R}^3$ és suma dels subespais $U$ i $V$ , però la suma no és directa. Bases: $U = \langle (1, 2, -1), (2, -3, 2) \rangle$, $V = \langle (4, 1, 3), (-3, 1, 2) \rangle$, $U \cap V = \langle (7, 0, 1) \rangle$.

(b) La dimensió de $U$ és 3 i el sistema de generadors donat és una base de $U$. La dimensió de $V$ és 2 i $\{(0, -1, 1, 1), (1, -1, 0, 1)\}$ formen una base de $V$ . Per tant, $U$ i $V$ no defineixen el mateix subespai. Intersecció: $U \cap V = \langle (1, -3, 2, 3) \rangle$ i, per tant, $\dim (U \cap V) = 1$. La suma té dimensió quatre, $U + V = \mathbb{R}^4$, i la suma no és directa.

(c) La dimensió de $U$ és 3 i els vectors

$$(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)$$

formen una base del subespai vectorial $U$. Si $a \neq 0,-1$, aleshores la dimensió de $V$ és 2 i els vectors $(a,0,0,1),(a(2+a),0,0,1)$ en constitueixen una base. En aquest cas $U$ i $V$ no defineixen el mateix subespai, $U+V=\mathbb{R}^4$, la suma no és directa, i $U \cap V$ és subespai de dimensió 1 generat pel vector $(-1,0,0,1)$. Si $a=-1$, aleshores $V$ és el subespai generat pel vector $(-1,0,0,1)$. En aquest cas: $U+V=U$ i $U \cap V = V$. Si $a=0$, aleshores $\{(0,0,0,1)\}$ és una base de $V$ . En aquest cas $U+V=\mathbb{R}^4$, $U \cap V = \{0\}$ i, per tant, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

(d) La dimensió de $U$ és 3 i el sistema de generadors donat n'és una base. La dimensió de $V$ és 2 i els vectors $(1,1,0,-3,2)$ i $(1,1,0,1,-2)$ en formen una base. Per tant $U$ i $V$ no defineixen el mateix subespai. A més $U+V=\mathbb{C}^5$ i $U \cap V = \{0\}$. Per tant la suma és directa

(A.10) $\vec{u}=(2,0,1)$, $\vec{v}=(-3,1,0)$, $\vec{w}=(-1,0,1/2)$.

## 3.5 Solucions B

(B.1) $(a-b,b-c,c)$.

(B.2) $x=(x'-y'+z')/2$, $y=(-x'+y'+z')/2$, $z=(x'+y'-z')/2$.

(B.3) Sí, com a $\mathbb{C}$-subespais vectorials. No, com a $\mathbb{R}$-subespais vectorials.

(B.4) El vector $\vec{v}$ té coordenades $(2,2,2)$ en la base $\{(1,1,-1,2),\ (0,1,1,1),\ (1,-1,0,1)\}$ de $F+G$. A més, $\vec{a}=(2,4,0,6)-\lambda(2,1,-3,3)$ i $\vec{b}=(2,-2,0,2)+\lambda(2,1,-3,3)$ per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.

(B.5) El rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és 4. Les coordenades són $\left(\frac{2b-c}{3}, \frac{3a-2b+c}{3}, \frac{-2b+c+3d}{3}, \frac{b+c}{3}\right)_{B_2}$.

(B.6) Les coordenades són $(2,1,-1,3)$.

(B.7) (a) $\dim(F)=2$. Dos subespais vectorials suplementaris de $F$ són $G=\langle\{\vec{e}_1\}\rangle$ y $G=\langle\{\vec{e}_3\}\rangle$, on $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\dim(F)=2$. Dos subespais vectorials suplementaris de $F$ son $G=\langle\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\rangle$ y $G=\langle\{\vec{e}_3,\vec{e}_4\}\rangle$, donde $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

(c) $\dim(F)=3$. Dos subespais vectorials suplementaris de $F$ son $G=\langle\{\vec{e}_1,\vec{e}_3\}\rangle$ y $G=\langle\{\vec{e}_1,\vec{e}_5\}\rangle$, donde $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^5$.

(B.8) Aplicar la fòrmula de Grassmann i deduïr que $dim(F \cap G \leq 1$.

(B.9) $\vec{a} = (-\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = (-1, -2, -6, -3) + (3, 2, 6, 6)$

(B.10) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}_1\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Calculant las coordenades de $\vec{a}$ en aquesta base, s'obté la descomposició: $-17\vec{a} = (-28, 3, 9, -45) + (-6, -3, -9, -6)$.

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Calculant las coordenades de $\vec{a}$ en aquesta base, s'obté la descomposició: $4\vec{a} = (14, 6, 18, 36) + (-6, -6, -18, -24)$.

## 3.6 Solucions C

(C.1) $a = -1/14$ i $b = 1/56$.

(C.2) (a) Per a tot $a$, la dimensió de $V_a = 3$. Una base és, per exemple, $\{\vec{v}_1 = (1, a, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, a, 2a, 2), \vec{v}_3 = (1, 1 + a, 1 + a, 2)\}$, ja que $\text{rang}\{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\} = 3$.

(b) Sí, per $a = 0$. Per aquest valor, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$.

(C.3) (a) Si $a \neq -1$, per a tot $b$. Si $a = -1$, només per a $b = -3$.

(b) Si $a \neq -1$, dim $F_a$ =3. Si $a = -1$, dim $F_{-1}$ =2.

(c) Per $a \neq -1$.

(C.4) (a) La dimensió de $F$ és 2. Una base és, per exemple, $B = \{(1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$.

(b) $a = 1$.

(c) $\vec{v} = (-1, 3)_B$.

(C.5) (a) Una base és, per exemple, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) És una matriu d'ordre $2 \times 2$ i la seva traça és zero. La combinació lineal en la basé anterior és: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(C.6) (a) Una base és, per exemple, $B = \{x^2 - 1, x - 1\}$.

(b) És un polinomi de grau 2 que s'anuła en x=1. Les coordenades en la base anterior són: $3x^2 - x - 2 = (3, -1)_B$.

(C.7) (a) No, ja que dim $(F + G)$=2.

(b) Una base de $F$ és, per exemple, $B_1 = \{(1, j, -1), (0, 1, j)\}$ i $\vec{v} = (j, 2)_{B_1}$.

(C.8)
- Si $a = 2$, dim $(F + G)$ =2. Una base és, p.e., $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 2)\}$.
- Si $a \neq 2$,dim $(F + G)$ =3. Com $F + G = \mathbb{R}^3$, qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és una base de $F + G$, p.e., la canònica de $\mathbb{R}^3$.

(C.9) (a) —

(b) Els vectors comuns de $F$ i $G$, és a dir, $F \cap G$ són $\{(0, \mu, 0, \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$. Una base de $F \cap G$ és, p.e.,$\{(0, 1, 0, 1\}$.

(c) La dimensió de $F$ és 2, una base és, p.e., $\{(1,2,-2,0),(-1,0,2,2)\}$, i la dimensió de $G$ és 2, una base és, p.e., $\{(1,2,0,0),(0,1,0,1)\}$.

(d) No, perquè dim $(F+G)$ =3, fet que deduïm de la fórmula de Grassmann.

(C.10) (a) —

(b) La dimensió de $F$ és 2, una base és, p.e., $\{(-2,1,1,0),(5,3,0,1)\}$, i la dimensió de $G$ és 2, una base és, p.e., $\{(1,0,0,-1),(0,1,a,2)\}$.

(c) Per a tot valor de $a$ es té dim $(F+G)$ =3. Una base és, p.e., $\{(-2,1,1,0),(5,3,0,1),(1,0,0,-1)\}$.

(d) No, ja que dim $(F\cap G)$ =1, fet que deduïm de la fórmula de Grassmann.

# Capítol 4

# Aplicacions Lineals

## 4.1 Enunciats A

(A.1) Indica quines de les següents aplicacions són lineals:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f(x, y) = x + y$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f(x, y) = xy$.
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (0, 0)$.
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (7, x + y)$.
(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y, z) = (x + 3y, x - y + z)$.
(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$.
(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (x + y + 3, x - y + 3)$.
(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x - y + z^2)$.
(i) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(A) = \mathrm{Tr}(A)$.
(j) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(A) = \det(A)$.

(A.2) En els següents casos, classifica $f$, i troba una base i les equacions implícites de $Im(f)$ y $Ker(f)$:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (0, -2x)$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2x + 2y$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (-x + 2y, 3x + y, 4y)$
(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 2y + 2z)$
(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$
(f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x, x - z, 4z, 0)$
(g) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (y - z + t, x + 3y + z + 2t, -y + z + t, x + y + z)$

(A.3) Per a cada una de les següents aplicacions $\mathbb{R}$-lineals $f$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$: dona la matriu associada a $f$ en les bases canòniques; indica si $f$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva; calcula la dimensió i una base del nucli i de la imatge de $f$; i determina l'aplicació inversa $f^{-1}$ en cas que existeixi.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (x + y, -y)$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y) = (x - y, 2x + 3y, 3x + 2y)$.
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$.

(A.4) Per a les següents aplicacions $\mathbb{R}$-lineals $f_1$ i $f_2$, determina si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1(x, y, z, t) = (x + t, y + t, z + t)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.
(b) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1(x, y, z) = (x + y, z, x + y)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.
(c) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, on $f_1(x, y) = (x, x+y, x-y)$, $f_2(x, y, z) = (x, x-y, x+y+z, x-z)$.

(A.5) Considerem les aplicacions lineals i les bases:

$$\left\{\begin{array}{ll} f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}, & f(x,y)=2x-y \\ g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2, & g(x)=(x,-2x)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}_1 \text{ base canònica de } \mathbb{R}^2 \\ B_1{=}\{(1,2),(-1,1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{C}_2 \text{ base canònica de } \mathbb{R} \\ B_2{=}\{-2\} \text{ base de } \mathbb{R}\end{array}\right.$$

Calcula les següents matrius associades:

$[f]_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}$, $[f]_{\mathcal{C}_1B_2}$, $[f]_{B_1\mathcal{C}_2}$, $[f]_{B_1B_2}$, $[g]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1}$, $[g]_{\mathcal{C}_2B_1}$, $[g]_{B_2\mathcal{C}_1}$, $[g]_{B_2B_1}$, $[fg]_{B_2}$, $[gf]_{B_1}$.

(A.6) Siguin $f_1$ i $f_2$ els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ definits per $f_1(x,y,z)=(x+y+2z,2x+y+z,x+2y+z)$ i $f_2(x,y,z)=(2y+z,x+3y+z,x+y)$. Dona bases del nucli i de la imatge de $f_1-f_2$. Existeixen vectors no nuls $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ tals que $f_1(\vec{v})=f_2(\vec{v})$? En cas afirmatiu, determina-los.

(A.7) Sigui $f$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(x,y,z)=(x-y+z,0,x-z)$. Demostra que els vectors $\vec{v}_1=(1,1,1)$, $\vec{v}_2=(1,-2,3)$, $\vec{v}_3=(2,0,-1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$, i troba la matriu associada a $f$ en aquesta base. Determina un vector $\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{w})=14\vec{v}_1+7\vec{v}_2-4\vec{v}_3$.

(A.8) Sigui $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sigui $f$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $f(\vec{u}_2)=2\vec{u}_1-\vec{u}_3$, $f(\vec{u}_3)=f(\vec{u}_1-\vec{u}_2)$. Comprova que els vectors $\vec{v}_1=\vec{u}_1-\vec{u}_2$, $\vec{v}_2=\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $\vec{v}_3=2\vec{u}_1-\vec{u}_3$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$, i dona la matriu associada a $f$ en aquesta base.

(A.9) Siguin $E_3$ i $E_4$ dos $\mathbb{R}$-espais vectorials de dimensions 3 i 4 respectivament. Sigui $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ una base de $E_3$, i sigui $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ una base de $E_4$.

(a) Troba la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació lineal $f:E_4\to E_3$ definida per $f(\vec{e}_1)=\vec{v}_1+2\vec{v}_2+\vec{v}_3$, $f(\vec{e}_2)=\vec{v}_2+\vec{v}_3$, $f(\vec{e}_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $f(\vec{e}_4)=\vec{v}_1-\vec{v}_2$.

(b) Comprova que els vectors $\vec{u}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_4$, $\vec{u}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_3$, $\vec{u}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{u}_4=\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$ determinen una base de $E_4$, i que els vectors $\vec{w}_1=f(\vec{u}_1)$, $\vec{w}_2=f(\vec{u}_2)$, $\vec{w}_3=f(\vec{u}_3)$ determinen una base de $E_3$. Dona la matriu associada a $f$ en aquestes bases.

(A.10) Troba els valors i vectors propis de les següents matrius. Indica quines d'elles són diagonalitzables i, si ho són, obté una base on la matriu tingui forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -16+j & 35 & -24 \\ 0 & j & 0 \\ 12 & -26 & 18+j \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

## 4.2 Enunciats B

(B.1) En els següents casos, obté, si és possible, una matriu diagonal $D$ i una matriu $P$ tal que: $D = P^{-1}AP$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad e)\ A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad f)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(B.2) Considerem, per a cada valor del paràmetre real $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfisme $f_a$ de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_a(x, y, z) = ((a-2)x - y + 2z,\ 2x + (1-a)y + (a+1)z,\ ax - 3y + 2az)$. Per a quins valors del paràmetre $a$ l'endomorfisme $f_a$ és un epimorfisme, un monomorfisme o un isomorfisme?

(B.3) Sigui $a \in \mathbb{R}$. Considerem l'aplicació lineal $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_a(x, y, z) = (ax - z,\ x + y + z,\ 2y)$.

(a) Troba la dimensió i una base del nucli i de la imatge de $f_a$ segons els valors de $a$. Per a quins valors $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme $f_a$ és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme?

(b) Siguin $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ els subespais vectorials definits per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $2x+y+z = 0\}$ i $S' = \langle\{(1, -1, 2), (3, -1, 6)\}\rangle$. Determina els valors de $a$ per als quals $f_a(S) = S'$.

(B.4) Es considera, en $\mathbb{R}^3$, l'endomorfisme $f_a$ definit per $f_a(x, y, z) = (x + az,\ ay + x,\ z + ay)$, on $a$ és un paràmetre real. Troba la dimensió i una base del nucli i de la imatge de $f_a$ segons els valors de $a$. Per a quins valors $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme $f_a$ és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme?

(B.5) Determina els valors dels paràmetres per als quals les següents matrius són diagonalitzables i, en aquest cas, dona la seva forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2a+3 & -4a+5 & 4a-9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -a+1 & -2a+2 & 2a-3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -2a+3 & 3a-3 & -8a-b+10 \\ -2a+2 & 3a-2 & -8a+2b+7 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(B.6) Sigui $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ i $f$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \text{i} \quad f(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

(a) Escriu la matriu associada a $f$ en la base $B$.

(b) Especifica una base i la dimensió del Nuc $f$ i la Im $f$. Troba Nuc$f\cap$Im$f$. És Nuc$f\oplus$Im$f=\mathbb{R}^2$?

(c) Troba els valors i vectors propis de la matriu trobada a l'apartat a). És aquesta matriu diagonalitzable?

(B.7) Troba una matriu $A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que tingui vectors propis $(1,2,-1)$, $(1,0,1)$ i $(0,1,-2)$ amb valors propis $-2$, $1$ i $2$ respectivament.

(B.8) Considerem l'endomorfisme $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_{a,b}(x,y,z)=(x+ay+bz,3y,bx+z)$. Determina per a quins valors dels paràmetres reals $a,b\in\mathbb{R}$ l'endomorfisme $f_{a,b}$ és diagonalitzable i té, exactament, dos valors propis diferents.

(B.9) Sigui $a\in\mathbb{R}$, i sigui $f_a$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_a(x,y,z)=(x+ay+az,-x+y-z,x+2z)$. Determina els valors de $a$ per als quals l'endomorfisme $f_a$ és diagonalitzable. Per a aquests valors del paràmetre $a$ dona una base respecte de la qual la matriu tingui forma diagonal.

(B.10) Obté, si existeix, una base de vectors propios de l'endomorfisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ del que se sap:

$$f(2,1,0)=(1,5,-3),\quad f(1,0,-1)=(2,0,-2),\quad f(0,1,3)=(-4,6,2)$$

## 4.3 Enunciats C

(C.1) Siguin $f,g$ els endomorfismes de $\mathbb{R}^2$ definits per: $[f]_{\mathcal{C}}=[g]_{B\mathcal{C}}=A$, on:

$$B=\{(1,-1),(1,-2)\},\quad A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$$

(a) Demostra que $f$ és diagonalitzable.

(b) Demostra que $g$ no és diagonalitzable.

(c) Demostra que $fg$ és diagonalitzable.

(d) Demostra que $f-3g$ no és diagonalitzable.

(C.2) Sigui $f_a$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_a(x,y,z)=(ax-z,x+(a-1)y-z,2y+z)$.

(a) Per a cada valor de $a$ dona una base del nucli i de la imatge de $f_a$.

(b) Per $a=-2$, demostra que el polinomi característic de $f_a$ és $c(x)=-x^3-4x^2-3x$.
Estudia per aquest valor de $a$ si l'endomorfisme és diagonalitzable, i si ho és, dona una base de vectors propis i la matriu diagonal associada.

(C.3) Sigui $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1)&=(-1,a,-1),\\ f(\vec{e}_2)&=(2,1,1),\\ f(\vec{e}_3-2\vec{e}_1+\vec{e}_2)&=(4,1-2a,a+4),\end{aligned}$$

on $a$ és un paràmetre real.

(a) Calcula la matriu associada a $f_a$ en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Troba la dimensió del nucli i de la imatge de $f_a$, segons els valors de $a$. Per quins valors de $a$ l'endomorfisme $f_a$ és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme.

(c) Per $a = -1/2$, dona una base del nucli i de la imatge de $f_a$.

(C.4) Sigui $a \in \mathbb{R}$. Considerem $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, on

$$f_a(x, y, z, t) = (x + y + az, -2x + y + t, ax + 2y - 2t, az + t).$$

(a) Troba per a quins valors de $a$ l'aplicació lineal $f_a$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

En els apartats que segueixen, fixa $a = 0$.

(b) Calcula el polinomi característic de $f_0$ i comprova que 1 és un valor propi.

(c) Obté els vectors propis de valor propi 1 de $f_0$.

(C.5) Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 17 \end{pmatrix}$ la matriu associada a $f$ en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i $v = (1, -1, 2)$.

(a) Demostra que el polinomi característic de $A$ és:

$$c(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 45\lambda + 22.$$

(b) Troba les coordenades de $f(v)$ en una base de vectors propis de $f$.

(C.6) Considerem $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + 5y + z, x + y + z)$.

(a) Dona la matriu associada a $f$ en les bases canòniques.

(b) Troba la dimensió i una base del nucli i la imatge de $f$.

(c) Calcula la matriu associada a $f$ en les bases: $\{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(1, -1), (1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Considerem ara l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que en les bases canòniques té matriu associada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Calcula la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques.

(e) Troba els valors propis de $g \circ f$ i estudia si és diagonalitzable.

(C.7) Obté $f(x, y, z)$, on $f$ és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ del que se sap que $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ és una base de vectors propis i que la seva matriu en la base canònica és:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & -1 & f \end{pmatrix}$$

(C.8) En els següents casos, discuteix per a quins valors dels paràmetres $a$ i $b$ la matriu $A$ diagonalitza:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} \qquad e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad f)\ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & -b & 2 \end{pmatrix}$$

(C.9) Totes les matrius simètriques diagonalitzan. Prova-lo per $n = 2$.

(C.10) Sigui $f$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}_2[x]$ definit per: $f(p(x)) = (x^2 - 1)p''(x) + (2x + 1)p'(x)$. Obteniu, si és possible, una base $N$ tal que $[f]_N$ és una matriu diagonal.

## 4.4 Solucions A

(A.1)

(a) Lineal.
(b) No lineal.
(c) Lineal.
(d) No lineal.
(e) Lineal.
(f) Lineal.
(g) No lineal.
(h) No lineal.
(i) Lineal.
(j) No lineal.

(A.2) (a) $Ker\,(f) = \{(x, y) \mid x = 0\} = \langle (0, 1) \rangle$. $Im\,(f) = \{(x, y) \mid x = 0\} = \langle (0, 1) \rangle$.

(b) $Ker\,(f) = \{(x, y) \mid x + y = 0\} = \langle (1, -1) \rangle$. $Im\,(f) = \mathbb{R}$. $f$ és un epimorfisme.

(c) $Ker\,(f) = \{\vec{o}\}$. $Im\,(f) = \{(x, y) \mid 12x + 4y - 7z = 0\} = \langle (-1, 3, 0), (2, 1, 4) \rangle$. $f$ és un monomorfisme.

(d) $Ker\,(f) = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, z = 0\} = \langle (1, -1, 0) \rangle$. $Im\,(f) = \mathbb{R}^2$. $f$ és un epimorfisme.

(e) $Ker\,(f) = \{\vec{o}\}$. $Im\,(f) = \mathbb{R}^3$. $f$ és un isomorfisme.

(f) $Ker\,(f) = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = 0\} = \langle (0, 1, 0) \rangle$.

$Im\,(f) = \{(x, y, z, t) \mid 4x - 4y - z = 0, t = 0\} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, -1, 4, 0) \rangle$.

(g) $Ker\,(f) = \{\vec{o}\}$. $Im\,(f) = \mathbb{R}^4$. $f$ és un isomorfisme.

(A.3) (a) Matriu: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. És isomorfisme amb inversa $f^{-1}(x, y) = (x + y, -y)$.

(b) Matriu: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. És monomorfisme, però no és epimorfisme. La imatge té dimensió 2 i una base és $\{(1, 2, 3), (-1, 3, 2)\}$.

(c) Matriu: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. És isomorfisme amb inversa $f^{-1}(x,y,z) = (x/3, x/3-y, -x+y+z)$.

(A.4) (a) No és monomorfisme. És epimorfisme. No és isomorfisme.

(b) No és monomorfisme. És epimorfisme. No és isomorfisme.

(c) És monomorfisme. No és epimorfisme. No és isomorfisme.

(A.5) $[f]_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $[f]_{\mathcal{C}_1 B_2} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $[f]_{B_1\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}$, $[f]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$[g]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $[g]_{\mathcal{C}_2 B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $[g]_{B_2\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $[g]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

$[f\,g]_{B_2} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$, $[g\,f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(A.6) $\{v \in \mathbb{R}^3$ tals que $f_1(v) = f_2(v)\} = \langle(-2,-1,1)\rangle$.

(A.7) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 36 & -4 \end{pmatrix}$, $w = (26, 0, -13)$.

(A.8) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(A.9) (a) $\dim \operatorname{Im} f = 3$, $\operatorname{Im} f = E_3$, $\dim \ker f = 1$, $\ker f = \langle e_1 - e_2 - e_3\rangle$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A.10) (a) Els valors propis són 1 i 2. Els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(1,0)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(-1,1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$-diagonalitzable i $\mathbb{C}$-diagonalitzable. Té forma diagonal $\operatorname{Diag}(1,2)$ respecte de la base

$$\{(1,0), (-1,1)\}.$$

(b) No té valors propis reals. No té vectors propis reals. No és $\mathbb{R}$-diagonalitzable.
Sobre $\mathbb{C}$ els valors propis són $1+j$ i $1-j$. Els vectors propis de valor propi $1+j$ són $\langle(1,-j)\rangle$, i els de valor propi $1-j$ són $\langle(1,j)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$-diagonalitzable. Té forma diagonal $\operatorname{Diag}(1+j, 1-j)$ respecte de la base

$$\{(1,-j), (1,j)\}.$$

(c) Els valors propis són 2 i $-4$. Els vectors propis de valor propi 2 són $\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$, i els de valor propi $-4$ són $\langle(0,1,-1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$-diagonalitzable i $\mathbb{C}$-diagonalitzable. Té forma diagonal $\operatorname{Diag}(2,2,-4)$ respecte de la base

$$\{(1,0,1), (0,1,1), (0,1,-1)\}.$$

(d) Els valors propis són 1 i 2. Els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(5,0,3),(0,5,-4)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(1,1,0)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$-diagonalitzable i $\mathbb{C}$-diagonalitzable. Té forma diagonal $\mathrm{Diag}(1,1,2)$ respecte de la base

$$\{(5,0,3),(0,5,-4),(1,1,0)\}.$$

(e) Els valors propis són 0 i $-3$. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(2,0,1)\rangle$, i els de valor propi $-3$ són $\langle(-8,1,-3)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$-diagonalitzable ni $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

(f) En $\mathbb{R}$ té un únic valor propi: 3. Els vectors propis de valor propi 3 són $\langle(-1,1,1)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable.
En $\mathbb{C}$ els valors propis són 3, $2+j$, $2-j$. Els vectors propis de valor propi 3 són $\langle(-1,1,1)\rangle$, els de valor propi $2+j$ són $\langle(-2-j,j,1)\rangle$, i els de valor propi $2-j$ són $\langle(-2+j,-j,1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$-diagonalitzable i té forma diagonal $\mathrm{Diag}(3,2+j,2-j)$ respecte de la base

$$\{(-1,1,1),(-2-j,j,1),(-2+j,-j,1)\}.$$

(g) En $\mathbb{R}$ té un únic valor propi: 0. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1,0,1)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable.
En $\mathbb{C}$ té valors propis 0, $2j$, $-2j$. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1,0,1)\rangle$, els de valor propi $2j$ són $\langle(1,j,-1)\rangle$, i els de $-2j$ són $\langle(1,-j,-1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$-diagonalitzable i té forma diagonal $\mathrm{Diag}(0,2j,-2j)$ respecte de la base

$$\{(1,0,1),(1,j,-1),(1,-j,-1)\}.$$

(h) Té dos valors propis $j$, $2+j$. Els vectors propis de valor propi $j$ són $\langle(-3,0,2)\rangle$, i els de valor propi $2+j$ són $\langle(-4,0,3)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

(i) Els valors propis són 0 i 2. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(3,0,1,0)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(1,0,0,-2),(0,1,0,-4)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$-diagonalitzable ni $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

## 4.5 Solucions B

(B.1) (a) $D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(b) $D=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(c) $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

(d) $A$ no diagonalitza.

(e) $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(f) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(B.2) L'endomorfisme $f_a$ és bijectiu si i només si $a \neq -1, 3$. Si $a = -1, 3$, aleshores $f_a$ no és ni epimorfisme ni monomorfisme.

(B.3) (a) Si $a \neq -1$, aleshores $f_a$ és un automorfisme. Si $a = -1$, aleshores $\mathrm{rk}\, f_{-1} = 2$. En aquest cas el nucli és el subespai generat pel vector $(1, 0, -1)$, i la imatge és el subespai generat pels vectors $(0, 1, 2)$ i $(-1, 1, 0)$.

(b) $f_a(S) = S'$ si i només si $a = -2$.

(B.4) Si $a = 0$, aleshores $\dim \mathrm{Im}\ f_a = 2$ i $\dim \ker f_a = 1$, amb $\{(0, 1, 0)\}$ base del nucli i amb $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base de la imatge. Si $a = -1$, aleshores $\dim \mathrm{Im}\ f_a = 2$ i $\dim \ker f_a = 1$, amb $\{(1, 1, 1)\}$ base del nucli i amb $\{(1, 1, 0), (0, -1, -1)\}$ base de la imatge. En aquest cas no és monomorfisme, ni epimorfisme, ni isomorfisme. Si $a \neq 0, -1$, aleshores $\dim \mathrm{Im}\ f_a = 3$ i $\dim \ker f_a = 0$. Per tant: $\ker f_a = \{0\}$ no té base; $\mathrm{Im}\ f_a = \mathbb{R}^3$ amb base la base canònica de $\mathbb{R}^3$; i, en aquest cas, $f_a$ és automorfisme.

(B.5) (a) En $\mathbb{R}$ diagonalitza si i només si $a = k\pi$ amb $k \in \mathbb{N}$. En aquest cas, té forma diagonal $\mathrm{Diag}(\pm 1, \pm 1)$.
En $\mathbb{C}$ diagonalitza per a tot valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$. Té forma diagonal $\mathrm{Diag}(\cos a + i \sin a, \cos a - i \sin a)$.

(b) Si $a = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de $b$ i $c$. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(1, 1, 2)$.
Si $a \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.

(c) Si $a \neq -1, 5$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de $b$. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(-1, 5, a)$.
Si $a = 5$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.
Si $a = -1$ i $b = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(-1, -1, 5)$.
Si $a = -1$ i $b \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.

(d) Mai és diagonalitzable.

(e) Si $a > 0$, aleshores és $\mathbb{R}$-diagonalitzable i $\mathbb{C}$-diagonalitzable. En aquest cas té forma diagonal $\mathrm{Diag}(-1, +\sqrt{a}, -\sqrt{a})$.
Si $a = 0$, aleshores no és ni $\mathbb{R}$-diagonalitzable ni $\mathbb{C}$-diagonalitzable.
Si $a < 0$, aleshores és $\mathbb{C}$-diagonalitzable peró no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable. Sobre $\mathbb{C}$ té forma diagonal $\mathrm{Diag}(-1, +j\sqrt{-a}, -j\sqrt{-a})$.

(f) Diagonalitza si i només si $a \neq b$. En aquest cas, té forma diagonal $\mathrm{Diag}(1, a, b)$.

(B.6) (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) dim Im $f$ =rg $(A)$=1. Una base és, per exemple, $\{(2,-1)_B = 2e_1 - e_2\}$, i la dim Nuc $f$ és 1, una base del nucli és $\{(-2,1)_B = -2e_1 + e_2\}$. Clarament, Im $f\cap$ Nuc $f = \langle 2e_1 - e_2\rangle$. Els dos espais no estan ni en suma directa ni la seva suma és $\mathbb{R}^2$.

(c) Com $c_A(x) = x^2$, l'únic valor propi és el zero (doble). Com que només hi ha un vector propi linealment independent, no diagonalitza.

(B.7) És la matriu $\begin{pmatrix} 5/2 & -3 & -3/2 \\ 4 & -6 & -4 \\ -7/2 & 5 & 9/2 \end{pmatrix}$.

(B.8) Per a $b = 0$ i $a \in \mathbb{R}$ arbitrari. Per a $b = 2$ i $a = 0$. Per a $b = -2$ i $a = 0$.

(B.9) L'endomorfisme és diagonalitzable si i només si $a = 0$. En aquest cas els valors propis són 1 i 2, els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(0,1,-1)\rangle$. L'endomorfisme té forma diagonal Diag$(1,1,2)$ en la base

$$(1,0,-1),(0,1,0),(0,1,-1).$$

(B.10) $\{(1,-1,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

## 4.6 Solucions C

(C.1) (a) $p_f(x) = (x-1)(x+1)$. Per tant, d'acord amb el teorema elemental de diagonalització, $f$ diagonalitza.

(b) $[g]_{\mathcal{C}} = [g]_{B\mathcal{C}}[I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{C}B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_g(x) = (x-1)^2$
La matriu $[g]_{\mathcal{C}} - I_2$ té rang 1. Per tant, $g$ no diagonalitza, per què $\bar{m}(1) = 1 < 2 = m(1)$.

(c) $[fg]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{fg}(x) = x^2 - x - 1$, que té dues arrels real diferents. Per tant, d'acord amb el teorema elemental de diagonalització, $f$ diagonalitza.

(d) $[f-3g]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}} - 3[g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{f-3g}(x) = x^2 + 6x + 11$, que no té arrels reals. Per tant, $f - 3g$ no diagonalitza.

(C.2) (a) Si $a = -2$ una base del nucli de $f_{-2}$ és, per exemple, $\{(-1,-1,2)\}$ i de la imatge és, per exemple, $\{(-2,1,0),(0,-3,2)\}$. Si $a = 1$ una base del nucli de $f_{-2}$ és, per exemple, $\{(2,-1,2)\}$ i de la imatge és, per exemple, $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Si $a \neq 1,-2$ el nucli no té base i qualsevol base de $\mathbb{R}^3$, per exemple, la canònica és base de la imatge.

(b) Com $c(x) = -x(x+3)(x+1)$ tots els valors propis són de multiplicitat 1, i per tant, diagonalitza. Una base de vectors propis és, per exemple, $\{-1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,-1)\}$ i la forma diagonal associada a ella és $D = \mathrm{Diag}(0,-3,-1)$.

(C.3) (a) La matriu associada a la base canònica és: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$.

(b) Si $a \neq -1, 1/2$ obtenim dim Im $f_a$=3 i dim Nuc $f_a$=0. En cas contrari, dim Im $f_a$=2 i dim Nuc $f_a$=1. $f_a$ és monomorfisme, epimorfisme i isomorfisme si i només si, $a \neq -1, 1/2$.

(c) Si $a = -1/2$ una base del nucli de $f_{-1/2}$ és, per exemple, $\{(2,1,2)\}$ i de la imatge és, per exemple, $\{(-2,-1,-2),(2,1,1)\}$.

(C.4) (a) Per $a \neq 0, 2$.

(b) $c(x) = x(x-1)(x-1-\sqrt{2}j)(x-1+\sqrt{2}j)$

(c) Són $\{\mu(1,0,-4,2) : \ \mu \neq 0\}$.

(C.5) (a) —

(b) Obtenim $f(v) = (8, 13, 30)$. Els valors propis són $\{1(doble), 22\}$. Una base de vectors propis és, per exemple, $B_1 = \{(-2,1,0),(-4,0,1),(1,2,4)\}$. En aquesta base, $f(v) = (-5/3, 2/3, 22/3)_{B_1}$.

(C.6) (a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Una base de la imatge és, per exemple, $\{(1,1),(5,1)\}$ i la seva dimensió és 2. La dimensió del nucli és 1, i una base és, per exemple, $\{(-1,0,1)\}$.

(c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) El polinomi característic de $g \circ f$ és $c(x) = -x(4-x)^2$ i els seus valors propis són $\{0, 4(\text{doble})\}$. No diagonalitza.

(C.7) $f(x,y,z) = (2x + y + z, x + 2y + \frac{1}{2}z, x - y + \frac{1}{2}z)$

(C.8) (a) Mai diagonalitza.

(b) $a \neq 1$ i $b = 0$.

(c) $b = 0$.

(d) Mai diagonalitza.

(e) Sempre diagonalitza.

(f) $b = 0$ i $a \neq 2$.

(C.9) Tota matriu simètrica no nul.la té dos valors propis diferents:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(x) = x^2 - (a+c)x + (ac - b^2).$

Aquest polinomi té dues arrels reals diferents per què el seu discriminant és: $(a-c)^2 + 4b^2$.

(C.10) $[f]_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad [I_{\mathbb{R}^3}]_{N\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

# Capítol 5

# Ecuacions Diferencials Ordinàries

## 5.1 Enunciats A

(A.1) Determina l'equació diferencial de les següents famílies de corbes:

(a) $x^2 + y^2 = a^2$

(b) $x^2 + y^2 = ax$

(c) $xy = a$

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1$

(e) $(1 + ce^{2x})y - 2ce^{2x} = 0.$

(f) $y^2 = c(x + 1).$

(g) $y = (x + c)^3.$

(h) $y = \frac{x+K}{1-Kx}.$

(A.2) Resol les següents equacions diferencials de variables separables:

(a) $y' = -\frac{t}{y}$

(b) $tyy' = 1 - t^2 \qquad (t > 0)$

(c) $e^{-y}(1 + y') = 1$

(d) $tx' + x = x^2$

(e) $y' = \frac{t^2}{y^2}.$

(f) $e^y y' - x - x^3 = 0.$

(g) $y' + t^2 y' = 1 + y^2.$

(h) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2.$

(i) $y' + y^2 \sin x = 0.$

(A.3) Resol les següents equacions diferencials homogènies:

(a) $(x + 4y)dx - 3xdy = 0$

(b) $x - y + xy' + yy' = 0$

(c) $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

(d) $x^2 y' - 2xy + y^2 = 0$

(e) $(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy = 0$

(f) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

(g) $\left[x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx + x \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$

(A.4) Resol les següents equacions diferencials lineals de primer ordre:

(a) $2ty' - y = 3t^2$

(b) $y' = -2ty + 2te^{-t^2}$

(c) $xy' - 4y - x^6 e^x = 0$.

(d) $tx' - 2x = t^2$.

(e) $x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \dfrac{x^3-2}{x}$

(f) $y' = y\sin(t) + 2\sin(2t)$.

(g) $(x+y^2)y' = 1$.

(A.5) Resol els següents PVI:

(a) $tv' = 4 - v^2$, $v(1) = 3$

(b) $xy' + y - 2x = 0$, $y(1) = 0$

(c) $y' = x - 2xy$, $y(0) = 1$

(d) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$, $y(0) = 1$

(e) $y' - y\tan(t) = \sec(t)$, $y(0) = 0$

(f) $y' - 2ty = \cos(t) - 2t\sin(t)$, $y(0) = 0$

(g) $y' + 2xy - x = 0$, $y(0) = -3$

(A.6) Resol les següents equacions diferencials lineals homogènies de segon ordre:

(a) $y'' + y' - 6y = 0$

(b) $y'' + 4y = 0$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$

(d) $y'' - 3y' = 0$.

(e) $y'' - 2y' + y = 0$.

(f) $y'' + y = 0$.

(A.7) Resol les següents equacions diferencials lineals de segon ordre:

(a) $y'' + y' - 2y = 2(1 + t - t^2)$

(b) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

(c) $y'' + 4y = \sin 2t$

(d) $y'' - 8y' + 16y = (1-t)e^{4t}$

(e) $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

(f) $y'' + y' - 2y = t^2 e^{4t}$.

(A.8) Donada l'equació diferencial: $y'' + y = 2\cos t$

(a) Troba totes les seves solucions.

(b) Troba les solucions que compleixen: $y(0) = 0$.

(c) Troba les solucions que compleixen: $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(d) Busca l'equació diferencial associada a la família solució de l'apartat (b).

(A.9) Donada l'equació diferencial: $y'' - 2y' + 2y = e^t \sin t$

(a) Troba totes les seves solucions.
(b) Troba les solucions que compleixen: $y(0) = y'(0) = 0$.

(A.10) Resol els següents PVI:

(a) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 8$
(b) $y'' - y' = -5e^{-t}(\sin t + \cos t), \quad y(0) = -4, y'(0) = 5$
(c) $y''' - y' = -2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$
(d) $y'' + 4y' - 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
(e) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0$
(f) $y'' + y = 2\cos(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(g) [$\star$] $y'' - 2y' + y = 4e^{-x},\ \lim_{x\to\infty} y = 0$
(h) [$\star$] $y'' - y' - 5y = 1,\ \lim_{x\to\infty} y = -\frac{1}{5}$

(A.11) Resol els següents sistemes d'equacions diferencials lineals:

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + x = 0 \end{cases}$

(A.12) Resol el següent sistema d'equacions diferencials lineals:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y - 4z + 4x + 1 \\ \frac{dz}{dx} = -y + z + \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

(A.13) Resol el següent PVI:

$\dfrac{dx}{dt} + y = 2x \qquad \dfrac{dy}{dt} + x - 2y = -5e^t \sin t$ amb $x(0) = 2,\ y(0) = 3$.

(A.14) Resol:

(a) L'edo $y'' - y' - 2y = t$.
(b) El PVI: $y + xy\cot x + xy' = 0,\ y(\pi/2) = 2$.

(A.15) Troba la família de corbes ortogonals a les corbes solució de l'edo: $y' = \dfrac{x}{3y - x^2}$.

(A.16) Determina les trajectòries ortogonals a la família de paràboles: $y = cx^2$

(A.17) Troba l'EDO de la familia de corbes ortogonals a la familia: $y = (x^2 + 1)^K$

(A.18) Troba la família de corbes ortogonals a la familia $y = K - x^2$

(A.19) Troba la família de corbes ortogonals a la familia $x + y = K$-

(A.20) En el següents casos, troba la família de corbes ortogonals a la familia donada:

(a) $x^2 + y^2 = K$ (b) $y = \dfrac{K}{x}$ (c) $y = \dfrac{Kx}{1 + x}$ (d) $3x^2 - 5y^2 = K$

## 5.2 Enunciats B

(B.1) Determina l'equació diferencial de les següents famílies de corbes:

(a) $y = Ct + \dfrac{K}{t^5}$.

(b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

(B.2) Resol les següents equacions diferencials:

(a) $xy' + 4 + y^4 = 0$

(b) $(4x^4 - x^3 y + y^4)dx + x^4 dy = 0$

(B.3) Donada l'equació diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + bx + c}{ey + fx + g}$$

demostra que:

(a) Si $af - be \neq 0$, es poden trobar constants $h, k$ de manera que l'equació es transforma en una d'homogènia si es fa el doble canvi de variable $v = y - k$, $u = x - h$.

(b) Si $af - be = 0$, amb el canvi de variable $v = ey + fx$ l'equació es transforma en una de variables separables.

(B.4) Resol les següents equacions diferencials:

(a) $(4x - 2y + 1)y' = 2x - y - 1$

(b) $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$

(B.5) Resol les següents equacions diferencials lineals homogènies:

(a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(b) $y''' + 2y'' + y' = 0$.

(c) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

(d) $y^{iv} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

(e) $y^{iv} + 5y'' - 36y = 0$

(f) $y^{iv} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$

(g) $y^{vi} + 9y^{iv} + 24y'' + 16y = 0$

(B.6) Resol les següents equacions diferencials lineals:

(a) $y''' - y'' = 12t^2 + 6t$

(b) $y^{iv} - y = 1$

(c) $y^{v} + 2y''' + y' = 2t$

(B.7) Resol les següents equacions diferencials:

(a) $y'' - 4y = e^{2t} + t^2$

(b) $y'' + 3y' = 3 + \sin t$

(c) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin(x)$.

(d) $y'' + 8y = 5t + 2e^{-t}$.

(e) $y'' + y = t\cos(t) - \cos(t)$.

(B.8) Resol el següent problema de condicions inicials:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = e^{\alpha t} \quad \alpha \neq 1$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{\alpha^2 + 4}, \quad y''(0) = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 4}$$

(B.9) Les equacions de la forma:

$$a_0 t^n y^{(n} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1} + ... + a_{n-1} t y' + a_n y = 0$$

on les $a_i$ són constants, s'anomenen *equacions d'Euler.*

(a) Prova que amb la substitució $t = e^x$ aquestes equacions es redueixen a equacions diferencials lineals homogènies a coeficients constants.

(b) Resola l'equació: $t^2 y'' + 2ty' - 6y = 0$

(B.10) (a) Resol l'equació diferencial: $y^v + 2y^{iv} + 5y^{'''} + 8y^{''} + 4y' = t + 4$.

(b) Dona l'expressió d'una solució particular en els casos següents (no cal calcular els coeficients)

(b1) $y^v + 2y^{iv} + 5y^{'''} + 8y^{''} + 4y' = e^{-t} + t\cos(2t)$.

(b2) $y^v + 2y^{iv} + 5y^{'''} + 8y^{''} + 4y' = e^{-t}\cos(2t)$.

(B.11) (a) Prova que el canvi de variable dependent $z = e^y$ converteix l'equació diferencial

$$xe^y y' - 2e^y = x^3$$

en una de tipus lineal i a continuació troba la seva solució general.

(b) Troba l'equació diferencial que satisfan les corbes $y = y(x)$ tals que la seva normal a qualsevol punt $(x_0, y(x_0))$ talla a l'eix OY al punt $(0, 2y(x_0))$.

(B.12) Resol el següent sistema d'equacions diferencials lineals:

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y + 6z, \qquad \frac{dz}{dt} = -2y + 6z.$$

(B.13) Resol els següents sistemes d'equacions diferencials lineals:

(a) $X' = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$

(b) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$

(B.14) Resol el següent sistema d'equacions diferencials lineals $X' = AX$ on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix}$$

(B.15) Resol els següents sistemes d'equacions diferencials:

(a) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(b) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases}$

(B.16) Converteix a un sistema de primer ordre i resol el sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dz}{dt} + 2y = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2z = 0$$

(B.17) Resol els següents sistemes amb condicions inicials:

(a) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B.18) Donat el sistema d'equacions diferencials lineals:

$$\frac{dx}{dt} - az = \sin at \qquad \frac{dy}{dt} - ay = at \qquad \frac{dz}{dt} + ax = \cos at$$

(a) Resol el sistema per a tots els valors de $a \in \mathbf{R}$.

(b) Si $a \neq 0$, quines solucions verifiquen $x(0) = 0, y(0) = -1/a$?

(B.19) Redueix el sistema que segueix a una equació lineal d'ordre superior i resol el sistema.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & y & + & e^{2t} \\ y' & = & 4x & + & y & - & 5e^{2t} \end{array}\right.$$

(B.20) (a) Resol l'equació diferencial: $y''' - 4y'' + 3y' = 4e^t - 6 - 8e^{-t}$.

(b) Usa l'apartat anterior per resoldre el problema de valors inicials:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x' & = & & & 3y' & - & 4e^t + 8e^{-t} \\ y'' & = & -x & + & 4y' & - & 6t \\ x(0) & = & -2, & y(0) & = & 7, & y'(0) = 0. \end{array}\right.$$

## 5.3 Enunciats C

(C.1) Si tirem una pedra enlaire, verticalment, a quina altura arribarà?. Considera la pedra com un punt, i només actuant el camp gravitatori.

(C.2) Quan es penja un pes de 0.92Kg d'una molla, l'estira 153mm fins que queda en equilibri. Aleshores es dóna al pes una velocitat cap amunt de 1.53m/s. Suposem que la força amortidora és igual a 9 vegades la velocitat.

(a) Troba la posició i la velocitat del pes en qualsevol moment.

(b) Escriu el resultat de l'apartat precedent en la forma $A(t)\sin(\omega t + \varphi),\ A(t) > 0$.

(C.3) Es connecten en sèrie una bateria de $24 \sin 10t$ V, una resistència de 6 $\Omega$, una bobina de 0.5 H i un condensador de 0.02 F. Si la càrrega i la intensitat són nul.les quan $t = 0$, estableix la càrrega i la intensitat en un moment qualsevol.

(C.4) Considerem una població de $N = N(t)$ individus que segueix un model poblacional de Verhulst, això és, presenta un ritme de creixement proporcional al nombre d'individus que hi ha a cada instant però atenuat per la competició pels recursos via un terme de la forma $p(t)N^2$. L'EDO que satisfà $N(t)$ és:

$$\frac{dN}{dt} = N - N^2 t, \quad N(0) = N_0.$$

(a) Prova que el canvi de variable $y = \dfrac{1}{N}$ transforma l'EDO anterior en lineal.

(b) Obté $N(t)$.

(c) Prova que, per a $t \to +\infty$, la població tendeix a extingir-se.

(C.5) Un cert producte químic es dissol en aigua a una velocitat proporcional al producte de la quantitat encara no dissolta i la diferència entre la concentració d'una solució saturada i la concentració real. Es sap que en 100 g d'una solució saturada hi ha 50 g del producte, i que si es remenen 30 g del producte en 100 g d'aigua, en dues hores es dissolen 10 g. Quants grams es dissoldran en cinc hores?

(C.6) Un objecte es deixa caure des d'una distància tres vegades el radi de la Terra ($R_\oplus$), mesurada des del centre, i partint del repòs. Calcula quina velocitat tindrà quan estigui a una distància dues vegades $R_\oplus$ del centre. Els únics valors numèrics que calen són la gravetat a la superfície de la Terra, $g = 9.8ms^{-1}$ i $R_\oplus = 6437$ km (el moviment transcorre fora de l'atmosfera i no hi ha fregament!). Recorda que

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}.$$

(C.7) Segons la llei de Newton, la velocitat de refredament d'un cos a l'aire és proporcional a la diferència entre la temperatura $T$ del cos i la temperatura $T_0$ de l'aire. Si la temperatura de l'aire és de $20^o$C i el cos es refreda, en 15 minuts, de $100^o$C a $60^o$C, quan trigarà en arribar als $25^o$C?

(C.8) Demostra que la corba per la qual el pendent de la tangent en qualsevol punt és proporcional a l'abscissa del punt de contacte és una paràbola.

(C.9) Demostra que la corba que té la propietat que totes les seves normals passen per un punt donat és una circumferència.

(C.10) Determina la corba per la qual el segment de la tangent comprès entre els eixos de coordenades queda dividit, pel punt de tangència, en dues parts iguals.

(C.11) Per a $a$ i $b$ fixos, $a > b > 0$, i $\lambda$ variable es considera la família de corbes planes de equació:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1.$$

Comprova que l'equació diferencial de la família (que no conté $\lambda$) no varia al substituir $y'$ per $-1/y'$. Interpreta el resultat en el context de trajectòries ortogonals.

(C.12) Es llança un objecte de massa $m$ verticalment i cap a dalt amb velocitat inicial $v_0$ m/s des d'una altura $h_0$. L'objecte només està sotmès a l'acció de la gravetat i a la força de resistència de l'aire que és proporcional a la velocitat ($= -\alpha v$). Quant temps triga en assolir la màxima altura i quant val aquesta?

(C.13) Un home té una fortuna que augmenta a una velocitat proporcional a la quantitat actual. Si tenia 1 milió fa un any i ara té 2 milions, quant tindrà dintre de sis mesos?, i dintre de 2 anys?

(C.14) Sabent que la temperatura superficial d'un objecte canvia amb una velocitat proporcional a la diferencia entre la temperatura $T$ i la seva temperatura ambient (que suposem constant) $T_A$, es demana:

(a) Troba l'evolució temporal de la temperatura corresponent a la condició inicial $T(0) = T_o$ .

(b) Suposant que la temperatura d'una tassa de cafè és de $200^oF$ quan s'acaba de servir i que un minut després és de $190^oF$ en una habitació que està a $70^oF$, quin temps ha de passar perquè el cafè estigui a $150^oF$?

(C.15) El $C^{14}$ té una vida mitjana de 5730 anys i sabem que tots els organismes estan formats per carboni. El percentatge de $C^{14}$ en una mostra és del 63%. Dedueix la seva edat.

## 5.4 Solucions A

(A.1) (a) $x + yy' = 0$

(b) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$

(c) $y + xy' = 0$

(d) $4x + yy' = 0$

(e) $y' = 2y - y^2$.

(f) $2(x+1)y' = y$.

(g) $y' = 3y^{2/3}$.

(h) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$.

(A.2) (a) $t^2 + y^2 = 2K \Leftrightarrow t^2 + y^2 = C^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{C^2 - t^2}$

(b) $\dfrac{y^2}{2} - \ln t + \dfrac{1}{2}t^2 = K \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2\ln t - t^2 + C}$

(c) $\ln|1 - e^{-y}| - t = C$

(d) $x = \dfrac{1}{1 + Ct}$

(e) $y = (t^3 + C)^{1/3}$.

(f) $y = \ln(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C)$.

(g) $y = \dfrac{t + C}{1 - Ct}$.

(h) $y = \tan(x - \frac{1}{2}x^2 + C)$.

(i) $y = \dfrac{-1}{\cos x + C}$.

(A.3) (a) $x + y = Cx^{\frac{4}{3}}$

(b) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$

(c) $y^2 + x^2 - Cx = 0$

(d) $y = \dfrac{Cx^2}{1 + Cx}$

(e) $y = x\tan(\ln x + C)$

(f) $\sqrt{x^2 + y^2} + y - Cx^2 = 0$

(g) $y = x \arcsin\left(\dfrac{C}{x}\right)$

(A.4) (a) $y = t^2 + C\sqrt{t}$

(b) $y = \dfrac{t^2 + C}{e^{t^2}}$

(c) $y = Cx^4 + x^5e^x - x^4e^x$.

(d) $x = Ct^2 + t^2\ln(t)$ .

(e) $y = \dfrac{Cx}{x^3+1} + \dfrac{1}{x}$.

(f) $y = Ce^{-\cos(t)} + 8\sin^2(\frac{t}{2})$.

(g) $x = Ce^y - 2y - 2 - y^2$.

(A.5) (a) $v(t) = \dfrac{10t^4+2}{5t^4-1}$

(b) $y = x - \dfrac{1}{x}$

(c) $2y = 1 + e^{-x^2}$.

(d) $y = 2e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$

(e) $y = \dfrac{t}{\cos(t)}$

(f) $y = \sin(t)$

(g) $y = \dfrac{1-7e^{-x^2}}{2}$

(A.6) (a) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$

(b) $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$

(c) $y = e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$

(d) $y = C_1 + C_2e^{3x}$.

(e) $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

(f) $y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$.

(A.7) (a) $y = t^2 + C_1e^t + C_2e^{-2t}$

(b) $y = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$

(c) $y = C_1\sin 2t + C_2\cos 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$

(d) $y = -\dfrac{1}{6}t^3e^{4t} + \dfrac{1}{2}t^2e^{4t} + C_1e^{4t} + C_2te^{4t}$

(e) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$.

(f) $y = C_1e^t + C_2e^{-2t} + \dfrac{e^{4t}}{18}(t^2 - t + \dfrac{7}{18})$.

(A.8) (a) $y = t\sin t + C_1\sin t + C_2\cos t$

(b) $y = t\sin t + C_1\sin t$

(c) $y = \cos t + t\sin t$

(d) $y' = \sin t + y\cot t$

(A.9) (a) $y = -\frac{1}{2}te^t\cos t + C_1e^t\sin t + C_2e^t\cos t$

(b) $y = -\frac{1}{2}te^t\cos t + \frac{1}{2}e^t\sin t$

(A.10) (a) $y = \frac{1}{2}t^2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t}$

(b) $y = -2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t - 4 + 2e^t$

(c) $y = t^2 + \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{-t}$

(d) $y = (\dfrac{1}{2} + \dfrac{2\sqrt{6}}{6})e^{(-2+\sqrt{6})t} + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{2\sqrt{6}}{6})e^{-(2+\sqrt{6})t}$.

(e) $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$.

(f) $y = \cos(t) + t\sin(t)$.

(g) $y = e^{-x}$.

(h) $y = -\frac{1}{5}$.

(A.11) (a) $x(t) = C_1e^{3t}\sin t + C_2e^{3t}\cos t$

$y(t) = \dfrac{C_1 - C_2}{2}e^{3t}\sin t - \dfrac{C_1 + C_2}{2}e^{3t}\cos t$

(b) $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$

$x(t) = -C_1e^t + C_2e^{-t}$

(A.12) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^2 + x$

$z(x) = -C_1e^{2x} + \dfrac{C_2}{4}e^{-3x} - \dfrac{1}{2}x^2$

(A.13) $x(t) = 2e^t\cos t - e^t\sin t,$ $\quad$ $y(t) = 3e^t\cos t + e^t\sin t.$

(A.14) (a) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}$.

(b) $y = \dfrac{\pi}{x\sin x}$.

(A.15) $y = \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{x^2}{5}$

(A.16) $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = C$

(A.17) $y' = \dfrac{-(x^2+1)\ln(x^2+1)}{2xy\ln y}$

(A.18) $y = \ln\sqrt{x} + C$

(A.19) $y = x + C$

(A.20) (a) $y = Cx$ $\quad$ (b) $y^2 - x^2 = C$ $\quad$ (c) $3x^2 + 2x^3 + 3y^2 = C$ $\quad$ (d) $y = \dfrac{C}{\sqrt[3]{x^5}}$

## 5.5 Solucions B

(B.1) (a) $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0$.

(b) $y'' - 4y = 0$

(B.2) (a) $Cx = \left(\dfrac{2-2y+y^2}{2+2y+y^2}\right)^{\frac{1}{16}} \cdot e^{-\frac{1}{8}[\arctan(y+1)+arctan(y-1)]}$.

**Pista 1:** $y^4 + 4 = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$

**Pista 2:** $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 2} = \arctan(y-1)$

(b) $\ln x + C = \dfrac{1}{16} \ln\left(\dfrac{2-2v+v^2}{2+2v+v^2}\right) - \dfrac{1}{8}[\arctan(v+1) + arctan(v-1)]$, on $y = xv$.

(B.3) (a) $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{av+bu}{ev+fu}$

(b) $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{(a+f)v + ce + fg}{v+g}$

(B.4) (a) $x - 2y - \ln|4x - 2y + 2| = C$

(b) $\ln|x+y-1| = \dfrac{x-y+3}{x+y-1} + C$

(B.5) (a) $y = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$

(b) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3$.

(c) $y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos(x) + C_3e^{-2x}\sin(x)$.

(d) $y = C_1e^{4t} + C_2e^{-t} + C_3te^{-t} + C_4t^2e^{-t}$

(e) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\sin 3t + C_4\cos 3t$

(f) $y = C_1 + C_2e^{2t} + C_3te^{2t} + C_4t^2e^{2t}$

(g) $y = C_1\sin t + C_2\cos t + C_3\sin 2t + C_4\cos 2t + C_5t\sin 2t + C_6t\cos 2t$

(B.6) (a) $y = -t^4 - 5t^3 - 15t^2 + C_1 + C_2t + C_3e^t$

(b) $y = -1 + C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t$

(c) $y = C_1 + (C_2 + C_3t)\cos t + (C_4 + C_5t)\sin t + t^2$

(B.7) (a) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}$

(b) $y = C_1 + C_2e^{-3t} - \frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t + t$

(c) $y = C_1 + C_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x)$.

(d) $y = C_1\cos(2\sqrt{2}t) + C_2\sin(2\sqrt{2}t) + \frac{5}{8}t + \frac{2}{9}e^{-t}$.

(e) $y = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \frac{1}{4}t\cos(t) - \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{4}t^2\sin(t)$.

(B.8) $y = -Ae^t + Ae^{\alpha t}$ on $A = \dfrac{1}{\alpha^3 - \alpha^2 + 4\alpha - 4}$

(B.9) (b) $y = C_1t^{-3} + C_2t^2$

(B.10) (a) $y = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t}{2} + C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-t} + C_4 \cos(2t) + C_5 \sin(2t)$.

(b) (b1) $y_p = At^2 e^{-t} + t(Bt + C)\cos(2t) + t(Dt + E)\sin(2t)$

(b2) $y_p = Ae^{-t}\cos(2t) + Be^{-t}\sin(2t)$

(B.11) (a) $y = \ln(Cx^2 + x^3)$.

(b) $yy' = x$.

(B.12) $x(t) = C_1 e^t \qquad y(t) = 2C_2 e^{2t} + \dfrac{3}{2} C_3 e^{3t} \qquad z(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$

(B.13) (a) $X(t) = \begin{pmatrix} -C_3 e^{-4t} + C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{5t} \\ C_3 e^{-4t} - 2C_1 e^{-t} \end{pmatrix}$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_1 e^{2t} + (-C_2 - C_4 + C_3)e^t \\ C_4 e^t - C_3 t e^t \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 t e^t \end{pmatrix}$

(B.14) $X(t) = \begin{pmatrix} -3C_4 - 2C_2 - 6C_3 + C_1 e^{64t} \\ C_2 + 3C_1 e^{64t} \\ C_4 + 5C_1 e^{64t} \\ C_3 + 7C_1 e^{64t} \end{pmatrix}$

**Pista 1:** $p_A(x) = x^4 - 6x^3$.
**Pista 2:** $r(A) = 3$. Per tant, la matriu $A$ diagonalitza.

(B.15) (a) $$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ \sin t + 2\cos t \end{pmatrix} \right\}$$
$$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) $$X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + 4t & 0 & 8t \\ 3t & 1 & 6t \\ -2t & 0 & 1 - 4t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 6t^2 \\ t - 4.5t^2 \\ t + 3t^2 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) $x(t) = e^t + C_1 - C_2 e^{-2t}$
$y(t) = e^t + C_1 + C_2 e^{-2t}$

(B.16) $z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} + C_4 e^{-t}$
$y(t) = -C_1 e^t - C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} + C_4 e^{-t}$

Aquest sistema també es pot resoldre sumant i restant les equacions diferencials donades:

$$\frac{d^2(y+z)}{dt^2} + 3\frac{d(y+z)}{dt} + 2(y+z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y + z = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$
$$\frac{d^2(y-z)}{dt^2} - 3\frac{d(y-z)}{dt} + 2(y-z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - z = Ce^t + De^{2t}$$

(B.17) (a) $X(t) = 2e^t \begin{pmatrix} t\cos t + (3t+1)\sin t \\ -2t\sin t \end{pmatrix}$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} \\ 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$

(c) $X(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - (1+\frac{1}{2}t)\sin 2t \\ (1+\frac{1}{2}t)\cos 2t + \frac{5}{4}\sin 2t \end{pmatrix}$

(d) $X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \\ 1+2t \end{pmatrix}$

(B.18) (a) $X(t) = \begin{pmatrix} C_1\cos at + C_3\sin at + t\sin at \\ C_2e^{at} - (t+1/a) \\ -C_1\sin at + C_3\cos at + t\cos at \end{pmatrix}$ si $a \neq 0$

Si $a = 0:$ $x(t) = C_1,$ $y(t) = C_2,$ $z(t) = t + C_3.$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} (c+t)\sin at \\ -(t+1/a) \\ (c+t)\cos at \end{pmatrix}$

(B.19) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \dfrac{4e^{2t}}{3}$

$y(t) = -2C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t} + \dfrac{e^{2t}}{3}$

(B.20) (a) $y(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{3t} - 2t + e^{-t} + (1-2t)e^t$

(b) $x(t) = -8 - 6t + (11-6t)e^t - 5e^{-t}$

$y(t) = 1 - 2t + (5-2t)e^t + e^{-t}$

## 5.6 Solucions C

(C.1) $\dfrac{v_o^2}{2g}$, essent $v_o$ la velocitat inicial i $g$ la gravetat.

(C.2) (a) $-0.24e^{-4.8t}\sin 6.4t$

(b) $0.24e^{-4.8t}\sin(6.4t+\pi)$

(C.3) $q(t) = -0.4\cos 10t + e^{-6t}(0.4\cos 8t + 0.3\sin 8t)$; $i(t) = -5e^{-6t}\sin 8t + 4\sin 10t$

(C.4) (a) El canvi la transforma en: $y' + y = t$.

(b) La solució per l'edo anterior és: $y_g = Ce^{-t} + t - 1$ , i la solució de l'edo inicial és: $N(t) = \dfrac{N_0}{(N_0+1)e^{-t} + N_0(t-1)}$

(c) $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$.

(C.5) 17.7 grams

(C.6) $\sqrt{2gR_\oplus}$.

(C.7) Una hora

(C.8) $y' = Ax \qquad \Longrightarrow \qquad y = \dfrac{A}{2}x^2 + B$

(C.9) $-\dfrac{1}{y'} = \dfrac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \Longrightarrow \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = C$

(C.10) $y = \dfrac{c}{x}$

(C.11) $(x+yy')(x-\dfrac{y}{y'}) = a^2 - b^2$. La família conté el.lipses i també, quan $-a^2 < \lambda < -b^2$, hipèrboles que són ortogonals a les el.lipses.

(C.12) $m\dfrac{dv}{dt} = -\alpha v - mg; \qquad v(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{m}{\alpha}\ln(1 + \dfrac{v_0\alpha}{mg})$

$h(T) = h_0 + \dfrac{m}{\alpha}(v_0 - gT)$

(C.13) 2,8282 milions i 8 milions, respectivament.

(C.14) (a) $T(t) = (T_o - T_A).e^{Kt} + T_A$.

(b) 6,06 minuts.

(C.15) 3819,48 anys.

# Capítol 6

# Transformada de Laplace

## 6.1 Enunciats A

(A.1) Troba la transformada de Laplace de les funcions següents, aplicant la definició

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

(a) $f(t) = 3t - 2$

(b) $f(t) = t^2 - 2t + 4$

(c) $f(t) = e^{2t}$

(d) $f(t) = te^{-t}$

(e) $f(t) = \cos kt$

(f) $\sin(kt + \frac{\pi}{2})$

(g) $f(t) = e^{-2t}\cos 3t$

(h) $f(t) = \sinh \frac{3t}{2}$

(A.2) Troba la transformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $f(t) = t\cos at$

(b) $f(t) = t\sin bt$

(c) $f(t) = e^{2t}\, t^3$

(d) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

(e) $f(t) = \sinh at \left( = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2} \right)$

(f) $f(t) = e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)$

(g) $f(t) = \begin{cases} \sin(t - \pi/3), & \text{si } t \geq \pi/3 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi/3 \end{cases}$

(h) $f(t) = \sin t \cos 2t$

(A.3) (a) Escriu la funció $f(t)$ que inclogui la funció esglaó i que prengui els valors següents:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < c \\ 4 & \text{si} \quad c \leq t \end{cases}$$

(b) Calcula la funció que commuti del valor 4 al valor -7 quan $t \geq c$.

(c) Volem un interruptor que s'engegui (amb el valor 1 per a $t < c$) i que s'apagui quan $t \geq c$. Obté la funció corresponent.

(d) Escriu una funció (que inclogui la funció esglaó) que tingui el valor 3 fins al punt $t = -2$ i que, a partir d'aquest punt, s'anul·li.

(A.4) Escriu la funció següent en termes de funcions d'esglaó.

$$f(t) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad t < 6 \\ 25 & \text{si} \quad 6 \leq t < 8 \\ 16 & \text{si} \quad 8 \leq t < 30 \\ 10 & \text{si} \quad 30 \leq t \end{cases}$$

(A.5) Troba la transformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $f(t) = tu(t-3)$

(b) $f(t) = t^2u(t-2)$

(c) $f(t) = \sin(t)u(t-\pi)$

(d) $f(t) = -t^2u(t-3) + \cos(t)u(t-5)$

(e) $10u(t-12) + 2(t-6)^3u(t-6) - (7 - e^{12-3t})u(t-4)$

(A.6) Troba la transformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $f(t) = \begin{cases} 5, & \text{si} \quad 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad 3 \leq t. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq t. \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ e^{1-t} & \text{si} \quad 1 \leq t. \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}\sin 2t, & \text{si} \quad 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si} \quad 2\pi \leq t. \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2, \\ 4t, & 2 \leq t. \end{cases}$

(A.7) Troba la transformada de Laplace de les següents funcions periòdiques:

(a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ 1 & \text{si} \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$ estesa amb període $2\pi$ per a $t > 2\pi$.

(b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \end{cases}$

estesa amb període 2 per a $t > 2$. (*Ona triangular*)

(A.8) (a) Usa les propietats de la transformada de Laplace, per trobar la transformada de:

$$f(t) = te^{5t}(\cos(2t) - 2\sin(3t)).$$

(b) Usa l'apartat anterior per resoldre la integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-10t} f(t)dt.$$

## 6.2 Enunciats B

(B.1) Expressa la següent integral utilitzant la transformada de Laplace de $f$: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{c^t}dt, \quad c > 0.$

Calcula $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^n}{c^t}dt, \quad c > 0.$

(B.2) Troba l'antitransformada de les funcions següents (en els apartats (c), (d) i (e) expressa els termes trigonomètrics de les solucions en la forma: $\cos(\alpha t + \phi)$).

(a) $\dfrac{s}{s^2 - 4}$

(b) $\dfrac{s-2}{s(s+2)^3}$

(c) $\dfrac{\sqrt{3}s - 2\sqrt{3} - 1}{s^2 - 4s + 5}$

(d) $\dfrac{2(s+3)}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

(e) $\dfrac{3s}{s^3 - s^2 + 3s + 5}$

(f) $\dfrac{1}{s^3 - s^2 + 2}$

(B.3) Calcula el producte de convolució dels parells de funcions següents:

(a) $e^{at}$, $e^{bt}$

(b) $\cos at$, $\cos bt$

(c) $t$, $\sin t$

(B.4) Aplicant el teorema de convolució, calcula la antitransformada de les funcions següents:

(a) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

(b) $\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$

(B.5) Calcula l'antitransformada de les funcions següents per **tres** mètodes diferents:

(a) $\dfrac{1}{s^3 + 4s}$

(b) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(B.6) Troba l'antitransformada de les funcions següents:

(a) $\dfrac{5}{s} + \dfrac{7}{s^2} + \dfrac{2e^{-s}}{s^2}$

(b) $\dfrac{s+3}{s(s^2+1)}e^{-\pi s}$

(c) $\dfrac{(2s+3)(1-e^{-3s})}{s^4+6s^3+13s^2+12s+4}$

(B.7) Calcula l'antitransformada de les funcions següents:

(a) $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+3)^2+16}$

(b) $F(s) = \dfrac{s^2+3s}{(s+3)^2+16}$

(c) $F(s) = \dfrac{s^2}{s^2-4s+5}$

(d) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+4s+5}$

(B.8) (a) Calcula l'antitransformada de:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2+16}.$$

(b) Utilitzant la transformada de Laplace, determina el valor de

$$\int_0^{+\infty} t^{100}e^{-2t}dt.$$

(B.9) Calcula l'antitransformada de les funcions següents:

(a) $F(s) = \dfrac{(s-1)^2}{(s-2)(s^2-4s+5)}$

(b) $F(s) = \dfrac{s(s-1)^2}{(s-2)(s^2-4s+5)}$

(c) $\dfrac{2s^2-5s+26}{s(s^2-4s+13)}e^{-\pi s}$

(d) $\dfrac{2s^2-5s+26}{s^2-4s+13}$

## 6.3 Enunciats C

(C.1) Resol els següents problemes de valor inicial:

(a) $y'' + y = 1 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(b) $y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

(C.2) Resol el problema de valor inicial següent: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t} \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$

(C.3) Sabent que

$$\begin{aligned} y(t) + y(t-1)u(t-1) &= t \qquad \text{si} \quad t > 0 \\ y(t) &= 0 \qquad \text{si} \quad t < 0 \end{aligned}$$

(a) Troba la transformada de $y(t)$.

(b) Troba $y(t)$ i la seva representació gràfica.

*Indicació:* Utilitza que $\dfrac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - \cdots$

(C.4) Resol els problemes de valor inicial següents:

(a) $y' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 3\delta(t-1) + \delta(t-2), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$

(C.5) Resol el problema de valor inicial següent:

$$y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\pi); \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

(C.6) Una partícula de massa 1 penja d'una molla de constant 1. La resistència de l'ambient al moviment de la partícula es pot estimar en dues vegades la seva velocitat. Per a temps $t = 0$ la partícula està en repòs en la posició d'equilibri. Se la sotmet a una força externa $f(t) = e^{-t}$ i quan el temps val $t = 1$ se li comunica un impuls mecànic de magnitud 3 en la mateixa direcció. Descriu el moviment de la partícula per a temps $t > 1$.

(C.7) Considerem el problema de valors inicials:

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t-\pi) \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Obté la solució.

(b) Especifica el valor de $X(\pi/4)$ i de $X(5\pi/3)$.

(C.8) Resol el PVI:

$$y'' - 5y' + 4y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{on} \quad f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 5, \\ 10, & t \ge 5. \end{cases}$$

(C.9) Resol el PVI:

$$y' + y = u(t-2),\ y(0) = 1.$$

(C.10) (a) Troba la transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & t \ge 2. \end{cases}$

(b) Resol el PVI: $y'' + 4y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = -2$ on $f(t)$ és la funció de l'apartat anterior.

(C.11) Considerem la funció definida per

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < \pi, \\ 0 & \text{si} \quad \pi \le t < 2\pi, \end{cases} \quad \text{estesa amb període } 2\pi \text{ per a } t \ge 2\pi.$$

(a) Dibuixa la seva gràfica en $[0, 2\pi]$ i escriu $f$ usant la funció de Heaviside.

(b) Demostra que la transformada de Laplace de $f$ es pot escriure com

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s} + \cdots$$

(c) Resol el PVI: $x'' + 2x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

(d) Troba $x\left(\frac{\pi}{2}\right)$ i $x\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

## 6.4 Solucions A

(A.1) (a) $F(s)) = \dfrac{3 - 2s}{s^2}$

(b) $F(s)) = \dfrac{4s^2 - 2s + 2}{s^3}$

(c) $F(s)) = \dfrac{1}{s - 2}$

(d) $F(s)) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$

(e) $F(s)) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

(f) $F(s)) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

(g) $F(s)) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+13}$

(h) $F(s) = \dfrac{6}{4s^2-9}$

(A.2)

(a) $F(s) = \dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(b) $F(s) = \dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$

(c) $F(s) = \dfrac{6}{(s-2)^4}$

(d) $F(s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan s$

(e) $F(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$

(f) $F(s) = \dfrac{3s-24}{s^2+4s+40}$

(g) $F(s) = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}$

(h) $F(s) = \dfrac{s^2-3}{(s^2+1)(s^2+9)}$

(A.3) (a) $4u(t-c)$

(b) $-7u(t-c)$

(c) $1-u(t-c)$

(d) $3-3u(t+2)$

(A.4) $f(t) = -4 + 29u(t-6) - 9u(t-8) - 6u(t-30)$

(A.5) (a) $F(s) = \dfrac{(3s+1)e^{-3s}}{s^2}$

(b) $F(s) = \dfrac{(4s^2+4s+2)e^{-2s}}{s^3}$

(c) $F(s) = -\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(d) $F(s) = \dfrac{e^{-5s}(s\cos 5 - \sin 5)}{s^2+1} - \dfrac{e^{-3s}(9s^2+6s+2)}{s^3}$

(e) $F(s) = \dfrac{12e^{-6s}}{s^4} + \dfrac{10e^{-12s}(s+3) - 3e^{-4s}(2s+7)}{s^2+3s}$

(A.6) (a) $F(s) = \dfrac{5(1-e^{-3s})}{s}$

(b) $F(s) = \dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}$

(c) $F(s) = \dfrac{2-e^{-s}(s^2+2s+2)}{s^3} + \dfrac{e^{-s}}{s+1}$

(d) $F(s) = \dfrac{2(1-e^{-2\pi(s+1)})}{(s+1)^2+4}$

(e) $F(s) = \dfrac{2}{s^3} - \left(\dfrac{2}{s^3} - \dfrac{4}{s}\right) e^{-2s}$.

(A.7) (a) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s} - 1}{s(e^{-\pi s} + 1)}$

(b) $F(s) = \dfrac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}$

(A.8) (a) $F(s) = \dfrac{(s-5)^2 - 4}{((s-5)^2 + 4)^2} - \dfrac{12(s-5)}{((s-5)^2 + 9)^2}$.

(b) $21/29^2 - 60/34^2$.

## 6.5 Solucions B

(B.1) Sigui $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Aleshores, amb $c = e^{\ln c}$:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{c^t} dt = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(\ln c)t} = F(\ln c); \qquad \int_0^\infty \frac{t^n}{c^t} dt = \frac{n!}{(\ln c)^{n+1}}$$

(B.2) (a) $\dfrac{e^{-2t} + e^{2t}}{2} = \cosh 2t$

(b) $\dfrac{e^{-2t}(4t^2 + 2t + 1) - 1}{4}$

(c) $2e^{2t} \cos(t + \dfrac{\pi}{6})$

(d) $e^{-t} + \sqrt{2}\, e^{-t} \cos(2t + \dfrac{5\pi}{4})$

(e) $\dfrac{3}{8}\big( - e^{-t} + \sqrt{10}\, e^t \cos(2t - \arctan 3)\big)$

(f) $\dfrac{1}{5}\big(e^{-t} - e^t \cos t + 2e^t \sin t\big)$

(B.3) (a) $\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$ quan $b \neq a$; $te^{bt}$ per $b = a$.

(b) $\dfrac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$ quan $b \neq \pm a$; $\dfrac{1}{2}\left(t \cos at + \dfrac{\sin at}{a}\right)$ per $b = \pm a$.

(c) $t - \sin t$

(B.4) (a) $f(t) = t - \sin t$

(b) $f(t) = t - 2 + e^{-t}(t + 2)$

(B.5) Considera com a possibilitats: descomposició, convolució i ús de propietats.

(a) $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$

(b) $f(t) = \frac{1}{2} t \sin t$

(B.6) (a) $5 + 7t + 2(t-1)u(t-1)$

(b) $\Big(3 - 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)\Big)\, u(t-\pi)$

(c) $t(e^{-t} - e^{-2t}) - \Big((t-3)e^{-(t-3)} - (t-3)e^{-2(t-3)}\Big)\, u(t-3)$

(B.7) (a) $f(t) = e^{-3t}\cos 4t$

(b) $f(t) = -3\,e^{-3t}\cos 4t - 4\,e^{-3t}\sin 4t + \delta(t) = -5\,e^{-3t}\cos\left(4t - \arctan(4/3)\right) + \delta(t)$

(c) $f(t) = 4\,e^{2t}\cos t + 3\,e^{2t}\sin t + \delta(t) = 5\,e^{2t}\cos\left(t - \arctan(3/4)\right) + \delta(t)$

(d) $f(t) = e^{-2t}\cos t + e^{-2t}\sin t$.

(B.8) (a) $\delta(t) - 4\sin(4t)$.

(b) $100!/2^{101}$.

(B.9) (a) $f(t) = e^{2t}(1 + 2\sin t)$.

(b) $f(t) = 2e^{2t}(1 + 2\sin t) + e^{2t}\cos t + \delta(t)$.

(c) $(2 + e^{2(t-\pi)}\cos(3t + \pi/2))u(t-\pi)$.

(d) $2e^{2t}\cos(3t - \pi/2) - 3e^{2t}\sin(3t - \pi/2) + 2\delta(t)$.

## 6.6 Solucions C

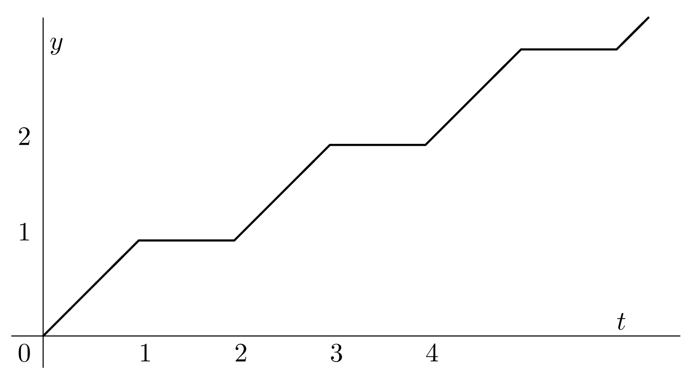
(C.1) (a) $y(t) = 1$

(b) $y(t) = \cos 2t + \sin 2t$

(C.2) $y(t) = 4e^t + \frac{e^{-t}}{3} - \frac{7e^{2t}}{3}$

(C.3) (a) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - \cdots$

(b) $y(t) = t - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)\cdots$




(C.4) (a) $f(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-t}) & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2e^{-t}(e-1) & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}$

que equival a $f(t) = 2((1 - e^{-t}) - (1 - e^{-(t-1)})\, u(t-1))$.

(b) $y(t) = (1-t)\,e^{2t} + 3(\,t-1)\,e^{2(t-1)}\,u(t-1) + (t-2)\,e^{2(t-2)}\,u(t-2)$

(C.5) $y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u(t-k\pi)\sin(t-k\pi)$,

que per a $n\pi \le t < (n+1)\pi,\ n \in \mathbf{N}$, és equivalent a:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin(t-k\pi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin t = \begin{cases} \sin t & \text{si n és parell,} \\ 0 & \text{si n és senar.} \end{cases}$$

(C.6) $y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3\delta(t-1)$; $\qquad y(t) = \dfrac{t^2 e^{-t}}{2} + 3\,(t-1)\,e^{1-t}\,u(t-1)$.

(C.7) (a) $X = (y(t), z(t))^t$, on:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(2t) + \sin(2t) - \sin(2t)u(t-\pi) \\ z(t) &= (\cos(2t) - \sin(2t))u(t-\pi) + 2\sin(2t). \end{aligned}$$

(b) $X(\pi/4) = (1,2)^t$, $X(5\pi/3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$

(C.8) $y(t) = \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{1}{24}e^{4t} - \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2}(t-5) - \dfrac{2}{3}e^{t-5} + \dfrac{1}{24}e^{4(t-5)}\right) u(t-5)$.

(C.9) $y(t) = e^{-t} + (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$.

(C.10) (a) $F(s) = \dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}$.

(b) $y(t) = \dfrac{t}{4} - \dfrac{9\sin 2t}{8} + \Big(\dfrac{\sin(2t-4)}{8} - \dfrac{t-2}{4}\Big)u(t-2)$.

(C.11) (a) $f(t) = u(t) - u(t-\pi) + u(t-2\pi) - u(t-3\pi) + \ldots$

(b) **Pista:** Usa que $\mathcal{L}[u(t-a)] = e^{-sa}/s$

(c) $x(t) = e^{-t}\sin t + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t) - (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-(t-\pi)}(\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi))u(t-\pi)$

(d) $x(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-\pi 2}$ i $x(\dfrac{3\pi}{2}) = \dfrac{1}{2}(e^{-\pi/2} - e^{-3\pi/2})$

| | $f(t)$ | $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ | | $f(t)$ | $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $1$ | $\frac{1}{s}$ | (16) | $f(at)$ | $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| (2) | $af(t)+bg(t)$ | $aF(s)+bG(s)$ | (17) | $f(t)=f(t+T)$ | $\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$ |
| (3) | $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ | (18) | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| (4) | $u(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ | (19) | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| (5) | $f(t-a)u(t-a)$ | $e^{-as}F(s)$ | (20) | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| (6) | $\delta(t)$ | $1$ | (21) | $te^{at}$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ |
| (7) | $\delta(t-a)$ | $e^{-as}$ | (22) | $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| (8) | $tf(t)$ | $-\frac{dF(s)}{ds}$ | (23) | $\sin kt$ | $\frac{k}{s^2+k^2}$ |
| (9) | $t^n f(t)$ | $(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$ | (24) | $\cos kt$ | $\frac{s}{s^2+k^2}$ |
| (10) | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(u)du$ | (25) | $e^{at}\sin kt$ | $\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$ |
| (11) | $f'(t)$ | $sF(s)-f(0)$ | (26) | $e^{at}\cos kt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$ |
| (12) | $f''(t)$ | $s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ | (27) | $t\sin kt$ | $\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ |
| (13) | $f'''(t)$ | $s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$ | (28) | $t\cos kt$ | $\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$ |
| (14) | $\int_0^t f(u)g(t-u)du$ | $F(s)G(s)$ | (29) | $\sinh kt$ | $\frac{k}{s^2-k^2}$ |
| (15) | $\int_0^t f(u)du$ | $\frac{F(s)}{s}$ | (30) | $\cosh kt$ | $\frac{s}{s^2-k^2}$ |