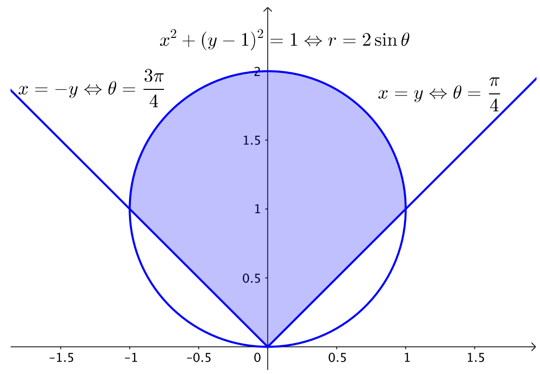
# Ampliació de Matemàtiques QP 2018-2019. Grup 2GM3
# Control 1. Integrals dobles i triples. Integrals de línia

---

1. **(3 punts)** Considerem el recinte $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq |x|,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ i la funció $f(x, y) = xy$. Escriu la integral $\displaystyle\iint_D f$ en coordenades cartesianes i en coordenades polars.

   **NO** s'ha de calcular la integral.

   **Solució** Dibuix del recinte $D$

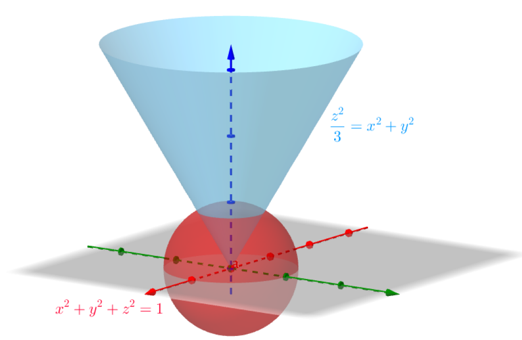



   Les integrals s'escriuen:

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \int_0^1 \int_{-y}^{y} xy\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} xy\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{2\sin\theta} r^3 \cos\theta\,\sin\theta\,dr\,d\theta$$

2. **(3.5 punts)** Calcula el volum del sòlid delimitat per $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $\dfrac{z^2}{3} = x^2 + y^2$, en el primer octant.

   **Solució** El dibuix representa l'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el con d'equació $\dfrac{z^2}{3} = x^2 + y^2$.



El sòlid descrit és l'interior a aquestes dues figures, en el primer octant.

La intersecció de les dues superfícies és: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ \dfrac{z^2}{3}=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}z^2=1 \Rightarrow z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ x^2+y^2=\frac{1}{4}$

Per tant, la projecció del sòlid sobre el pla $z=0$ és la part del primer quadrant del cercle d'equació $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$. El radi d'aquest cercle és $\frac{1}{2}$ i es troba situat a altura $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

El càlcul del volum del sòlid es pot fer en coordenades cilíndriques o en coordenades esfèriques.

- Coordenades cilíndriques: descrivim la projecció del sòlid sobre $z=0$ en polars, i afegim l'interval de $z$ entre el con d'equació $z=\sqrt{3}r$ i l'esfera d'equació $r^2+z^2=1$:

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

- Coordenades esfèriques: l'equació de l'esfera en esfèriques és $r=1$, i la del con és $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Com que només ens interessa la part del primer octant, l'angle $\theta$ anirà de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr\,d\theta$$

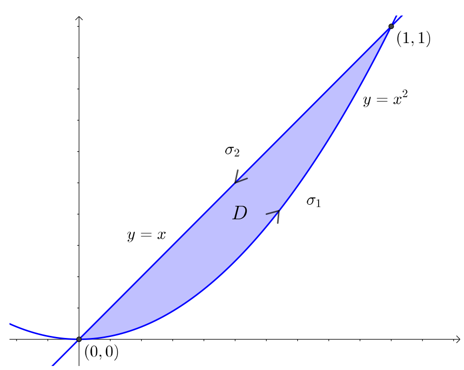
El càlcul és més senzill en coordenades esfèriques:

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi=[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{12}\pi\,u^3$$

3. **(3.5 punts)** Sigui $C^+$ la vora del recinte del pla limitat per $y=x^2$ i $y=x$, orientada positivament, i sigui $\vec{F}(x,y)=(x^2+y,y^2-x)$.

   (a) Calcula directament la integral de $\vec{F}$ sobre $C^+$.
   **Solució.** Representem la corba $C^+$ i la regió que limita, $D$:




Tindrem: $\displaystyle\int_{C^+}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\sigma_1}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}+\int_{\sigma_2}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$.

Integrem sobre els camins (parametritzacions):

$\begin{array}{rccl} \sigma_1: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,t^2) \end{array}$ i $\begin{array}{rccl} \sigma_2: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (1-t,1-t) \end{array}$

Calculem $\vec{F}(\sigma_1)$, $\sigma_1'$, $\vec{F}(\sigma_2)$, $\sigma_2'$:

- $\vec{F}(\sigma_1(t)) = (2t^2, t^4 - t)$
- $\sigma_1'(t) = (1, 2t)$
- $\vec{F}(\sigma_2(t)) = (t^2 - 3t + 2, t^2 - t)$
- $\sigma_2'(t) = (-1, -1)$

La integral de línia es calcula:

$$\int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \vec{F}(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t)dt + \int_0^1 \vec{F}(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^2, t^4 - t) \cdot (1, 2t)dt + \int_0^1 (t^2 - 3t + 2, t^2 - t) \cdot (-1, -1)dt = \int_0^1 2t^5\, dt + \int_0^1 (-2t^2 + 4t - 2)dt =$$

$$= \left[\frac{t^6}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{2t^3}{3} + 2t^2 - 2t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$$

(b) Dedueix, a partir del teorema de Green i sense calcular cap més integral, l'àrea del recinte limitat per $C$.

Segons el teorema de Green,

$$\int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Si $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, y^2 - x)$, aleshores $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2.$

Per tant,

$$\frac{-1}{3} = \int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_D -2\, dx\, dy = -2 \cdot A(D) \Rightarrow A(D) = \frac{1}{6}\, u^2$$

(c) Justifica si el camp $\vec{F}$ és o no conservatiu.

**Solució.** Com que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$, el camp no és conservatiu.