4 Teoremes de Stokes i Gauss

1. (a) Donat un camp vectorial $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, demostreu que div (rot $\mathbf{F}$) $= 0$.

(b) Donat un camp escalar $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, demostreu que rot $(\nabla f) = \mathbf{0}$.

2. Considerem el camp vectorial radial, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, definit a $\mathbb{R}^3$ i el camp escalar $r = |\mathbf{r}|$ definit a $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$. Donada $h \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$, obteniu les relacions següents:

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$.

(b) $\nabla h(r) = \dfrac{h'(r)}{r}\,\mathbf{r}$.

(c) $\nabla (r^\alpha) = \alpha\, r^{\alpha-2}\,\mathbf{r}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$.

(e) $\operatorname{div}(h(r)\,\mathbf{r}) = 3h(r) + rh'(r)$. Quan val 0 aquesta divergència? I, en general, quant val $h(r)$?

(f) $\operatorname{div}(r^\alpha\,\mathbf{r}) = (3 + \alpha)r^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

(g) $\operatorname{rot}(h(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

(h) Useu els apartats anteriors per determinar un camp vectorial, definit a $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, amb rotacional i divergència nuls.

(i) $\Delta h(r) = h''(r) + 2h'(r)/r$.

(j) $\Delta r^\alpha = \alpha(1 + \alpha)r^{\alpha-2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes orientades indicades, utilitzant el teorema de Stokes:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y^3, 1, z)$, C circumferència intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = R^2$ amb el pla $z = 0$, recorreguda en el sentit positiu vista des de dalt.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -2z, x)$, C el·lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = R^2$ i el pla $x = z$, recorreguda de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^{xy}, xe^{xy} + x, xyz)$, C corba unió de les tres corbes obtingudes tallant el tros de con $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$, $0 \le z \le 1$, amb els plans $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ i dins el primer octant; recorreguda de manera que, des de l'origen, es vegi en el sentit de les busques del rellotge.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$, C corba tancada intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla $x + y + z = 1$, recorreguda en el sentit $(1, 0, 0) \to (0, 1, 0) \to (0, 0, 1)$.
Indicació: Relacioneu la integral a calcular amb l'àrea tancada per C.

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -x, 2y)$, C triangle de vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$, orientat en aquest sentit.

(f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, C intersecció de $z = xy$ amb $x^2 + y^2 = 1$, recorreguda de forma que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

4. Verifiqueu el teorema de Stokes per a la superfície helicoïdal definida per la parametrització $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, i el camp vectorial donat per $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yx, zy)$.

5. Considerem la semiesfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$.

(a) Calculeu el flux del rotacional del camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, zx, yzx)$ a través de S, orientada amb la normal "cap amunt".

(b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ al llarg de la vora de S.

6. Calculeu els fluxos dels camps vectorials següents (cap a l'exterior en els apartats a), b) i c)) de les superfícies donades, utilizant el teorema de la divergència de Gauss:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z^2)$, S vora del cub $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, xy^2, xyz)$,
S vora de la regió $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z < a^2,\ x > 0, y > 0, z > 0\}$, on $a > 0$ constant.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$,
S vora de la regió $V = \left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \le \dfrac{z^2}{b^2},\ 0 \le z \le b\right\}$, on $a, b > 0$ constants.

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} - (2x+y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
S hemisferi $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0$, orientat segons la normal exterior de l'esfera.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\cos z, \sin z, \frac{1}{9}(x^2+y^2)^{3/2}\right)$
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 16,\ 4 \le z \le 5\}$, orientat amb la normal apuntant cap avall.

7. Donades $a, b, c > 0$, considerem les funcions

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{i} \quad g(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

Apliqueu el teorema de Gauss a fi de calcular el flux del camp $\nabla\varphi$ a través de la superfície $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$, orientada amb la normal "cap avall".

8. (a) Donada una superfície tancada S, proveu que el volum del sòlid limitat per S és $\dfrac{1}{3}\displaystyle\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{dS}$, on $\mathbf{r}$ és el camp radial a $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifiqueu la fórmula anterior en el cas del sòlid $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \ge x^2+y^2,\ z \in [0,2]\}$.

9. (a) Determineu $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que el camp $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \sin x, azx^2, byx^2)$ sigui conservatiu (o irrotacional). Obteniu-ne aleshores un potencial.

(b) Determineu $h(x,y,z)$ de manera que el camp $\mathbf{F}(x,y,z) = (h, 2x - 3zy^2, -y^3 + 2xz)$ sigui conservatiu (o irrotacional). Obteniu-ne aleshores un potencial.

10. Sigui $\mathbf{F}$ un camp vectorial de la forma $\mathbf{F} = \phi(r)\mathbf{r}$, definit a $\mathbb{R}^3$.

(a) Demostreu que $\mathbf{F}$ és conservatiu. És irrotacional?

(b) Determineu $\phi(r)$ per tal que el flux de $\mathbf{F}$ a través de qualsevol superfície tancada que no contingui l'origen sigui nul.

(c) En aquest darrer cas, calculeu la circulació de $\mathbf{F}$ entre els punts $(1,0,0)$ i $(0,1,\pi/2)$ mitjançant la funció potencial.

11. Comproveu que les següents integrals de línia no depenen del camí, i calculeu-les.

(a) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2+yz)\mathrm{d}x + (3y^2+xz)dy + (3z^2+xy)dz$

(b) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx + xzdy + xydz$ (c) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

12. Considerem el camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, 2x, x+y^2)$ definit a $\mathbb{R}^3$.

(a) Estudieu si és un camp solenoïdal. Sigui $\mathbf{G}$ un potencial vectorial.

(b) Calculeu la circulació de $\mathbf{G}$ al llarg de la circumferència de centre $(0,0,0)$ i radi 2, continguda en el pla $z = 0$. Indiqueu el sentit de recorregut que heu considerat en fer el càlcul.

(c) Determineu, sense fer més càlculs, el flux de $\mathbf{F}$ a través de les superfícies següents:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2+y^2 \le 4\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 = 4\}$$
$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \ge 0,\ z = 4 - x^2 - y^2\} \qquad S_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

Expliqueu raonadament el sentit dels fluxos calculats i els teoremes utilitzats.

13. Considerem el camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(-x,-y,2z)$.

(a) Existeix algun camp $\mathbf{Q}$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{Q}=\mathbf{F}$? En cas afirmatiu, determineu-ne algun.

(b) Calculeu $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}$, on $S=\{(x,y,z)\mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ z>c\}$, orientada en sentit radial exterior. *Indicació:* Useu el resultat anterior.

14. Sigui V el sòlid limitat per les superfícies d'equacions $x^2+y^2=1,\ z=1$ i $z=y+3$, i S la vora del sòlid V.

(a) Calculeu $\displaystyle\iiint_V 8z\,dx\,dy\,dz$.

(b) Considerem el camp vectorial $\mathbf{F}$ definit per $\mathbf{F}(x,y,z)=(0\,,\frac{8}{3}yz+z^2\,,-x^2+3z+y)$. Sabent que el volum de V és 2π, raoneu la relació entre el flux del camp $\mathbf{F}$ que entra a través de S i $\displaystyle\iiint_V 8z dx\,dy\,dz$. Sense calcular cap integral deduïu el valor del flux esmentat.

(c) Donat el camp $\mathbf{G}(x,y,z)=(1-2z-\frac{8}{3}y\,,2x,\,0)$, relacioneu $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$ i raoneu si $\displaystyle\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{dS}=0$, sense calcular cap integral.

Solucions

2. (e) $h(r)=\dfrac{C}{r^3},\ h(r)=\dfrac{C}{r^2}$, per a tot $C\in\mathbb{R}$.

3. (a) $-\dfrac{\pi R^6}{8}$ (b) $-3\pi R^2$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $-\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ (e) $\dfrac{1}{2}$ (f) $-\pi$

4. $\pm\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi}{8}\right)$

5. (a) $-\pi$ (b) 0

6. (a) $\dfrac{5}{2}$ (b) $\dfrac{5a^6}{24}$ (c) $\dfrac{\pi a^2b^2}{2}$ (d) $\dfrac{2\pi}{3}$ (e) $-\dfrac{54\pi}{5}$

7. $-\dfrac{1}{3}\,abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

8. (b) 2π

9. (a) $a=b=1$. Un potencial és $\phi(x,y,z)=x^2yz-\cos x+C$.

(b) $h(x,y,z)=2y+z^2+g(x)$. Un potencial és $\phi(x,y,z)=2xy+xz^2-y^3z+\int g(x)\,dx$.

10. (b) $\phi(r)=\dfrac{k}{r^3}$ (c) $k-\dfrac{k}{\sqrt{1+(\pi/2)^2}}$

11. (a) 4 (b) $abc-1$ (c) $5\sqrt{2}$

12. (a) $\mathbf{G}(x,y,z)=\left(2xz-\dfrac{y^3}{3},\dfrac{x^2-z^2}{2},0\right)$

(b) 4π (en sentit antihorari al pla $z=0$)

(c) $\displaystyle\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot dS=\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot dS=\iint_{S_3}\mathbf{F}\cdot dS=4\pi$, amb el vector normal cap amunt.

$\displaystyle\iint_{S_4}\mathbf{F}\cdot dS=0$

13. (a) Sí, per exemple $\mathbf{Q}(x, y, z) = (0, 2zx, yx)$ (b) $2\pi c R^2$

14. (a) 33π (b) -17π (c) $\mathbf{G}$ és un camp solenoïdal