Ampliació de Matemàtiques. Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials i Doble Titulació (EETAC).

Examen Mig Quadrimestre. 28 d'octubre de 2019

Temps: 2 hores.
No és permés l'ús de calculadora ni cap mena d'apunts.
Cal presentar cadascun dels 4 problemes en fulls separats.
Cal raonar i desenvolupar adequadament les respostes.

1. Sigui $f(x,y,z) = x - \sin^2(yz)$ el potencial escalar d'un camp vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Es demana:

   a) **(1 punt)** Calculeu $\vec{F}(x,y,z)$.

   b) **(1,5 punts)** Calculeu la integral de línia de $\vec{F}$ sobre la trajectoria donada per la corba $\gamma(t) = (e^t - t, t\sqrt{t}, \frac{t-1}{t+1})$ des del punt $\gamma(0)$ fins al punt $\gamma(1)$.

2. Sigui S la superfície parametritzada com $\phi(u,v) = (u, uv, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$. Si la densitat de massa de S és $m(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2 + \frac{y}{xz}}$, la massa total de S és la integral de superfície

$$\int\int_S m(x,y,z)\; dS.$$

   Es demana:

   a) **(1,5 punts)** Calculeu la massa total de S.

   b) **(1 punt)** Quina és la densitat de massa en el punt de la superfície en el que el seu vector normal és $(1/2, -1, 1/3)$?

3. **(2,5 punts)** Considereu les superfícies $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1 - z,\ z \geq 0\}$ i $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$. Calculeu:

   a) El flux del rotacional del camp vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$ a través de S_1 orientada amb la normal exterior.

   b) La circulació del mateix camp $\vec{F}$ sobre la corba que constitueix la vora de S_2 orientada positivament (sentit antihorari al pla XY vista des de $z \geq 0$).

4. **(2,5 punts)** Considereu el camp vectorial $F(x, y, z) = (x, y, -z)$.

a) Calculeu la integral

$$\int\int_{S_1} F \cdot dS$$

sobre la superfície S_1 formada pel cercle $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$, orientada amb la normal cap amunt.

b) Tenint en compte que el volum de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, és $16\pi/3$, i sense calcular cap integral més, feu servir el teorema de Gauss (o de la divergència), per deduir a partir del resultat de l'apartat a), el valor de

$$\int\int_{S_2} F \cdot dS,$$

on S_2 és la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, orientada amb la normal cap a l'exterior.

RESOLUCIÓ EMQ. Ampliació de MAT.

1] a) $f(x,y,z) = x - \sin^2(yz)$ és el potencial escalar d $\vec{F} \Rightarrow$

$$\vec{F} = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, -2\sin(yz)\cos(yz)\,z, -2\sin(yz)\cos(yz)\,y);$$

b) $\int_\gamma \vec{F}$ t.q. $\gamma(t) = \left(e^t - t, t\sqrt{t}, \frac{t-1}{t+1}\right) \quad 0 \le t \le 1$

Origen: $\gamma(0) = \left(e^0 - 0, 0\sqrt{0}, \frac{0-1}{0+1}\right) = (1, 0, -1)$

Final: $\gamma(1) = \left(e^1 - 1, 1\sqrt{1}, \frac{1-1}{1+1}\right) = (e-1, 1, 0)$

$$\int_{(1,0,-1)}^{(e-1,1,0)} \vec{F} \cdot d\gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{F} \text{ és conservatiu} \\ \text{amb potencial escalar } f}}{=} f(e-1,1,0) - f(1,0,-1) =$$

$$= e - 1 - \sin^2(1\cdot 0) - (1 - \sin^2(0\cdot(-1)))$$

$$= \boxed{e - 2}$$

2] $S: \phi(u,v) = (u, uv, v)$; $\quad u \in [0,1], v \in [0,1]$

a) $$\iint_S m(x,y,z)\, dS = \int_0^1 \int_0^1 m(u, uv, v) \cdot \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\|\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u^2 + v^2 + \frac{uv}{u \cdot v}} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + 1}\, du\, dv =$$

$$\vec{T}_u = (1, v, 0) \quad \Rightarrow \vec{T}_u \wedge \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & v & 0 \\ 0 & u & 1 \end{vmatrix} = (v, -1, u)$$

$$\vec{T}_v = (0, u, 1)$$

$$\|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| = \sqrt{v^2 + 1 + u^2}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sqrt{u^2 + v^2 + 1}\right)^2 du\, dv = \int_0^1 \int_0^1 u^2 + v^2 + 1\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{u^3}{3} + uv^2 + u\right]_0^1 dv = \int_0^1 \frac{1}{3} + v^2 + 1\, dv$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

b) Com que $\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v = (v, -1, u)$ el vector normal serà

$\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}\right)$ quan $u = \frac{1}{3}$ i $v = \frac{1}{2}$, així

$\phi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ i la corresponent funció

densitat de massa val $m\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \boxed{\frac{7}{6}}$

3)

$S_1 = \{x^2 + y^2 = 1 - z\ ;\ z \geq 0\}$

i $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$

a) $$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T. de Stokes}}}{=} \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$$

on $\gamma = \{x^2 + y^2 = 1\ ;\ z = 0\}$ que és la vora compartida per S_1 i S_2

(amb parametrització antihorària des de l'origen) $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ i vector tangent $\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

llavors $$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin\theta - 0}_{\overset{\shortparallel}{y-z}}, \underbrace{0 - \cos\theta}_{\overset{\shortparallel}{z-x}}, \cos\theta \cdot \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta - \cos^2\theta \, d\theta = \boxed{-2\pi}$$

b) $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = -2\pi$ pel resultat de l'apartat anterior.

4) $F(x, y, z) = (x, y, -z)$

a) $$\iint_{S_1} F \cdot dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{r\cos\theta}, \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{r\sin\theta}, \underset{\substack{\shortparallel \\ -z}}{0}) \cdot \underbrace{\overset{\substack{\text{vector normal} \\ \text{apuntat cap amunt} \\ \downarrow}}{(0, 0, r)}}_{\substack{\shortparallel \\ \vec{T}_r \wedge \vec{T}_\theta}} d\theta\, dr$$

$S_1 = \{x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$ té per parametrització

$\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

on $0 \leq r \leq 2$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 0 \; d\theta \, dr = \boxed{0}$$

b)

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \, dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T. de Gauss}}}{=} \iiint_V \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{div} \vec{F}}} \; dx\,dy\,dz = \text{Volum}(V) = \frac{16\pi}{3}$$

$S_1 \cup S_2$ és una superfície tancada a la qual podem aplicar el teorema de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} =$$

$$= 1 + 1 - 1 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \, dS = \frac{16\pi}{3} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\iint_{S_1} \vec{F} \, dS}} = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$