3 Integrals de superfície

Exercicis introductoris

1. Doneu una parametrització de les superfícies següents:
   (a) Pla d'equació $x = 0$.
   (b) Pla d'equació $x - y = 1$.
   (c) Rectangle de vèrtexs $(1,1,3), (4,1,3), (1,3,3)$ i $(4,3,3)$.
   (d) Superfície d'equació $z = f(x,y)$, on $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Determineu les següents superfícies parametritzades i doneu-ne una equació cartesiana:
   (a) $\sigma(u,v) = (u, v, au + bv + c), \quad u, v \in \mathbb{R},\ a, b, c$ constants.
   (b) $\sigma(u,v) = (u, v, u^2), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, +\infty)$.
   (c) $\sigma(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z), \quad z \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi),\ R > 0$ constant.
   (d) $\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \quad r \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi)$.
   (e) $\sigma(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, \pi],\ R > 0$ constant.
   (f) $\sigma(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, +\infty)$.
3. En els enunciats següents, doneu els vectors tangents associats a la parametrització, estudieu per a quins $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ és regular, i calculeu el pla tangent de la superfície que defineix, en el punt indicat.
   (a) $\sigma(u,v) = (u^2 - v, u + v, uv), \quad p = \sigma(1,2)$.
   (b) $\sigma(u,v) = (v - u, v + u, uv), \quad p = (0,2,1)$.
   (c) $\sigma(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2), \quad p = \sigma(1,0)$.
4. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:
   (a) Helicoide parametritzada per $\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi), r \in [0,1]$.
   (b) Esfera de radi a.
   (c) Con d'equació $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{h^2}, \quad a > 0, \quad 0 < z < h$.
5. Calculeu la integral de superfície $\iint_S f\, dS$ en els casos següents:
   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{z}, \quad S$ disc de centre $(3,1,4)$ i radi 2 en el pla $z = 4$.
   (b) $f(x,y,z) = x - 2z, \quad S$ triangle sobre el pla $3x + 2y + z = 6$, limitat pels plans coordenats.
6. Calculeu la integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ en els següents casos:
   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 1), \quad S$ helicoide $\sigma(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$, amb $0 \le t \le 1$ i $0 \le \theta < 2\pi$.
   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, 0, x^7\cos(z^2)), \quad S$ cilindre $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in (0,3)$.
   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 1), \quad S$ triangle determinat pel pla $x + y + z = 1$ i els plans coordenats.
   (d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, 0, 1), \quad S$ semiesfera superior de centre l'origen i radi 1.

Exercicis bàsics

7. Doneu una parametrització i una equació cartesiana de les superfícies següents:
   (a) Cilindre de radi R amb eix de simetria la recta $\{x = a,\ z = b\}$.
   (b) Con invertit amb vèrtex a l'origen, radi de la base R i alçada H.
   (c) Hiperboloide d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$.

8. Doneu una equació cartesiana de les següents superfícies parametritzades:
   (a) $\sigma(u, v) = (v - u, v + u, uv)$, $u, v \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sigma(u, v) = (u \cos\varphi,\ u \sin\varphi,\ 1/u)$, $u \in [1, 2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

9. En els enunciats següents, doneu els vectors tangents de la parametrització, estudieu si la parametrització és regular, i calculeu el pla tangent de la superfície que defineix en el punt indicat.
   (a) $\sigma(\theta, \varphi) = (R \cos\theta \sin\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\varphi)$, $\quad \theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\quad p = \sigma\left(\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$.
   (b) $\sigma(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, r)$, $\quad r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\quad p = \sigma\left(r_0, \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Donada $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, considerem la superfície S d'equació $x = h(y, z)$. Doneu-ne una parametrització regular i obteniu una fórmula del pla tangent a S en un punt genèric.

11. (a) Doneu una parametrització d'una tanca circular, centrada a l'origen, de radi 1 i alçada donada per $h(x, y) = |x| + |y|$, en cada punt (x, y) de la base.
    (b) Més en general, doneu una parametrització d'una paret amb base la corba parametritzada $(x(t), y(t))$, $t \in I$ i alçada donada per $f(x, y)$, en cada punt (x, y) de la base.

12. Determineu $f(u)$ per tal que la superfície parametritzada $r(u, v) = (f(u), v, a - u - v)$ tingui com a producte vectorial fonamental el vector $(1, 1, 1)$, per a tot $a \in \mathbb{R}$. De quina superfície es tracta?

13. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:
    (a) Casquet esfèric d'alçada h en l'esfera de radi a.
    (b) La porció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindre $x^2 + y^2 = ay$, essent $a > 0$.
    (c) El tros de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$ (on $a \geq 0$) contingut dins el paraboloide $2z = x^2 + y^2$.
    (d) El fragment del con d'equació $x^2 + y^2 = z^2$ limitat pels plans $z = 0$ i $y + 2z = 1$.
    Indicació: feu servir x i y com a paràmetres.

14. Calculeu la integral de superfície $\iint_S f\, dS$ en els següents casos:
    (a) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$, $\quad S$ hemisferi superior de l'esfera de radi a centrada a l'origen.
    (b) $f(x, y, z) = z$, $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$.
    (c) $f(x, y, z) = x$, $\quad S$ cilindre definit per $x^2 + y^2 = a^2$, amb $0 < z < 1$.
    (d) $f(x, y, z) = 1$, $\quad S$ quàdrica parametritzada per $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, $u^2 + v^2 < 1$.
    (e) $f(x, y, z) = x\,(y + z - 2)$, $\quad S$ triangle de vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ i $(0, 1, 1)$.
    (f) $f(x, y, z) = xy$, $\quad S$ frontera del tetraedre limitat pels plans $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$, $x = y$.

15. Sigui C la corba d'equació $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, on $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$.
    (a) Considerem la superfície S_{OX} obtinguda fent girar la corba C entorn de l'eix OX. Doneu una parametrització de S_{OX} i demostreu que la seva àrea és $2\pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

(b) Sigui $a \geq 0$. Considerem la superfície S_{OY} obtinguda fent girar la corba C entorn de l'eix OY. Doneu una parametrització de S_{OY} i demostreu que la seva àrea és $2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

(c) Calculeu de dues maneres diferents l'àrea del paraboloide obtingut fent girar entorn de l'eix OY la paràbola d'equació $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, parametritzant la superfície o bé utiltitzant els apartats anteriors.

16. Considerem la superfície obtinguda fent girar la circumferència de centre $(a, 0)$ i radi R, on $a > R > 0$, al voltant de l'eix OY. Aquesta superfície s'anomena *Tor.* Dibuixeu-la i calculeu-ne l'àrea. *Indicació: Useu l'exercici 15.*

17. Donats $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i $f \in \mathcal{C}^1(D)$, sigui S la gràfica de f.

    (a) Doneu una parametrització de S i una expressió del vector normal de la parametrització, en cada punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

    (b) Demostreu que l'àrea de S és igual a $\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}$.

    (c) Calculeu l'àrea de la gràfica de $f(x, y) = x^{3/2} + y^{3/2}$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

18. En cadascun dels apartats següents, feu un esbós de la superfície S i calculeu el flux $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$, a través de la frontera del cub $0 \leq x, y, z \leq 2$, orientada vers l'exterior.

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, z)$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \mid z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$, orientada amb la normal cap amunt.

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, x^2 y, x^2 z)$, a través de la frontera del conjunt definit per $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq b$, orientada cap a l'exterior.

    (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$, a través de la superfície cònica $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, tancada amb el pla $z = 0$, orientada cap a l'exterior

    (e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1/3)$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$, orientada amb la normal cap amunt.

    (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, a través de la superfície $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z > 0$, orientada amb la normal en sentit radial positiu.

    (g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$, sobre la part de l'esfera unitat continguda dins el con $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, orientada amb la normal cap amunt.

    (h) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$, sobre la frontera de la regió tancada pel pla $x + y + z = 1$ i els plans coordenats, orientada vers l'exterior.

    (i) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, a través de la frontera de $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \geq 0,\ x \geq z\}$, orientada cap a l'exterior.

    (j) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-2y, z, x)$, a través de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2z = x + 1,\ 4x^2 + y^2 \leq 12z^2\}$, orientada amb la normal apuntant cap avall.

19. Siguin $\mathbf{F} = (2, -3, 1)$ i S un cercle de radi a situat en un pla Π. Doneu l'equació dels plans Π per als quals el flux de $\mathbf{F}$ a través de S és màxim.

20. Sigui $\mathbf{F}$ un camp vectorial i $F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ la seva component radial, on $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Demostreu que el flux de $\mathbf{F}$ a través de l'esfera unitat és igual a $\pm \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} F_r \sin\varphi\, d\varphi$.

21. Sigui S el disc de centre $(0,0,3)$ i radi 2 en el pla $z=y+3$ i D la seva projecció en el pla XY.
    (a) Determineu i dibuixeu D.
    (b) Donat el camp escalar $f(x,y,z)=z-y$, expresseu $\iint_S f\,\mathrm{dS}$ com una integral doble sobre D i calculeu-la.

22. Calculeu el centre de gravetat de l'octant determinat pels plans coordenats de l'esfera centrada a l'origen i de radi R amb densitat constant.

23. Calculeu la massa d'una superfície esfèrica S, de radi R, tal que en cada punt $P\in S$ la densitat de massa és igual a:
    (a) La distància de P al centre de S.
    (b) La distància de P al pol nord de S.

24. Calculeu el flux de calor a través de l'esfera unitat S, quan la temperatura en un punt $(x,y,z)\in S$ ve donada per $T(x,y,z)=z$. Doneu una interpretació física del resultat.

Solucions

1.
    (a) $\sigma(u,v)=(0,u,v), \quad u,v\in\mathbb{R}$
    (b) $\sigma(x,z)=(x,x-1,z), \quad x,z\in\mathbb{R}$
    (c) $\sigma(x,y)=(x,y,3), \quad x\in[1,4], y\in[1,3]$
    (d) $\sigma(x,y)=(x,y,f(x,y)), \quad (x,y)\in D$

2.
    (a) Pla $z=ax+by+c$
    (b) Cilindre parabòlic $z=x^2$
    (c) Cilindre circular $x^2+y^2=R^2$
    (d) Con $x^2+y^2=z^2$
    (e) Esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$
    (f) Paraboloide hiperbòlic $z=x^2-y^2$

3. (a) $T_u=(2u,1,v),\ T_v=(-1,1,u)$.
    Parametrització regular excepte en $(-1/2,-1/2)$. Pla tangent $x+4y-3z=5$.
    (b) $T_u=(-1,1,v),\ T_v=(1,1,u)$. Parametrització regular. Pla tangent $z=y-1$.
    (c) $T_u=(\cosh v,\sinh v,2u),\ T_v=(u\sinh v,u\cosh v,0)$.
    Parametrització regular excepte on $u=0$. Pla tangent $2x-z-1=0$.

4. (a) $\pi(\sqrt{2}+\operatorname{arcsinh}1)$ (b) $4\pi a^2$ (c) $\pi a\sqrt{a^2+h^2}$

5. (a) 8π (b) $-10\sqrt{14}$

6. (a) 2π (b) 0 (c) $\pm\dfrac{1}{2}$ (d) $\pm\dfrac{5\pi}{4}$

7. (a) $\sigma(\theta,y)=(a+R\cos\theta,y,b+R\sin\theta),\ \theta\in[0,2\pi),\ y\in\mathbb{R}.$ $(x-a)^2+(z-b)^2=R^2.$
    (b) $\sigma(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,rH/R),\ \theta\in[0,2\pi),\ r\in[0,R].$ $R^2z^2=(x^2+y^2)H^2.$
    (c) $\sigma(t,z)=(\sqrt{z^2+R^2}\cos t,\sqrt{z^2+R^2}\sin t,z),\ t\in[0,2\pi),\ z\in\mathbb{R}.$
    També $\sigma(\theta,t)=(R\cos\theta\cosh t,R\sin\theta\cosh t,R\sinh t),\ t\in\mathbb{R},\ \theta\in[0,2\pi).$

8. (a) Paraboloide hiperbòlic $z=\dfrac{-x^2+y^2}{4}$
    (b) Tros de la superfície de revolució $x^2+y^2=\dfrac{1}{z^2},\quad \dfrac{1}{2}\le z\le 1$

9. (a) $T_\theta=R(-\sin\theta\,\sin\varphi,\ \cos\theta\,\sin\varphi,\ 0),\ T_\varphi=R(\cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ -\sin\varphi).$
    Parametrització regular excepte en els punts $(0,0,\pm R)$. Pla tangent $\cos\theta_0\,x+\sin\theta_0\,y=R$.

(b) $T_r = R(\cos\theta,\, \sin\theta,\, 1)$, $T_\theta = (-r\sin\theta,\, r\cos\theta,\, 0)$.
Parametrització regular excepte a l'origen. Pla tangent $x + y - \sqrt{2}z = 0$.

10. $\sigma(y,z) = (h(y,z), y, z),\ y, z \in \mathbb{R}$.
Pla tangent en $P = \sigma(y_0, z_0)$: $\quad x - h(y_0,z_0) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \dfrac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0)\cdot(z-z_0)$.

11. (a) $\sigma(z,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, z\cdot(|\cos\theta| + |\sin\theta|)), \quad \theta \in [0,2\pi),\ z\in[0,1]$
(b) $\sigma(z,t) = (x(t), y(t), z\cdot f(x(t),y(t))), \quad t \in I,\ z \in [0,1]$

12. $f(u) = u + C$, per a qualsevol $C \in \mathbb{R}$. La superfície és un pla.

13. (a) $2\pi a h$ (b) $(-4+2\pi)a^2$ (c) $4\pi a^2$, si $a \le 1$; $4\pi a$, si $a > 1$ (d) $2\pi\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

14. (a) $\dfrac{\pi a^5}{2}$ (b) $\pi\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{12} - \dfrac{11}{60}\right)$ (c) 0 (d) $\dfrac{2\pi}{3}(3\sqrt{6}-4)$ (e) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (f) $\dfrac{3+5\sqrt{2}}{24}$

15. (a) $\sigma(x,\theta) = (x,\ f(x)\sin\theta,\ f(x)\cos\theta),\ \theta\in[0,2\pi),\ x\in[a,b]$.
(b) $\sigma(x,\theta) = (x\cos\theta,\ f(x),\ x\sin\theta),\ \theta\in[0,2\pi),\ x\in[a,b]$.
(c) $\dfrac{(17)^{3/2}-1}{6}\,\pi$

16. $2\pi a \cdot 2\pi R$

17. (a) $\sigma(x,y) = (x,y,f(x,y)),\ (x,y)\in D, \quad \vec{n} = (-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1)$
(c) $\dfrac{4}{1215}(242\sqrt{22} - 169\sqrt{13} + 16)$

18. (a) 24 (b) 24π (c) $\dfrac{5\pi a^4 b}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{6}$ (e) $\dfrac{5\pi}{3}$ (f) 12π (g) $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$ (h) $\dfrac{5}{12}$ (i) $\dfrac{2R^3}{3}$ (j) -36π

19. $2x - 3y + z = C$

21. (a) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} \le 1\right\}$ (b) $\displaystyle\iint_D 3\sqrt{2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 12\pi$

22. $\left(\dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{2}\right)$

23. (a) $4\pi R^3$ (b) $\dfrac{16}{3}\pi R^3$

24. 0