Ampliació de matemàtiques – EETAC

Control 2 – 28 d'octubre de 2019

Duració: 1 hora

No es permet l'ús de calculadora. Detalleu i raoneu les vostres respostes. Poseu el vostre nom i cognom a tots els fulls.

Problema 1 [4 punts]: Trobeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de la funció $f(t) = t$ definida en $t \in [-1, 1)$ estesa periòdicament.

Problema 2 [3 punts]: Sabent que la sèrie de Fourier per $g(t) = \frac{t}{2}$ per $t \in (-\pi, \pi]$ és

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \sin(nt)}{n}$$

Trobeu

$$\sum_{n\geq 1} 2 \cdot \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2$$

Problema 3 [2 punts]: Sigui $e^{i\pi} + e^{it} + 2ie^{-2it} + e^{-it} - 2ie^{2it}$

la sèrie de Fourier complexa d'una funció $h(t),\ t \in (-\pi, \pi)$. Trobeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de $h(t)$ i dibuixeu-ne els espectres d'amplitud i de fase.

Problema 4 [1 punt]: Definiu una funció $S(t),\ t \in (-1, 1)$, tal que sigui senar i produeixi el fenomen de Gibbs en $t = 0$.

Solució problema 1:

Solució problema 2:

Els coeficients de la sèrie de Fourier són

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Per la igualtat de Parseval (SFT),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^2}{4}dt = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{12}\right]_{-\pi}^{\pi} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi^3}{12}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'altra banda,

$$\sum_{n\geq 1} 2\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)^2 = 2\sum_{n\geq 1}\frac{9}{n^2\pi^2} = \frac{18}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{18}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = 3$$

Solució problema 3:

Tenim $h(t) \simeq e^{i\pi} + e^{it} + 2ie^{-2it} + e^{-it} - 2ie^{2it} \Longrightarrow c_0 = -1;\ c_1 = 1;\ c_{-2} = 2i;\ c_{-1} = 1;\ c_2 = -2i$ i la resta de termes són nuls. Per tant, $a_0 = 2c_0 = -2;\ a_1 = 2Re(1) = 2;\ b_2 = -2Im(-2i) = 4$ i la resta de coeficients són zero. La sèrie de Fourier trigonomètrica queda doncs com $-1 + 2\cos(t) + 4\sin(2t)$.

Solució problema 4: Per exemple, $S(t) = signe(t)$.