Ampliació de matemàtiques – EETAC
Control 2 – 9 de maig de 2019
Duració: <u>1 hora</u>
No es permet l'ús de calculadora

<u>`Problema 1 [3 punts]`</u>: Sigui $f(t)$ definida per:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2^t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

A.- (2 punts) Dibuixeu $f(t)$, la seva extensió periòdica, la seva extensió parell i la seva extensió senar.
B.- (1 punt) Sense calcular la sèrie de Fourier de f, quant val la sèrie de Fourier de f avaluada en $t = 0$? I en $t = 1$?

<u>`Problema 2 [2 punts]`</u>: Considerem la suma de la sèrie següent:

$$\sum_{n \ge 1} \frac{(4a-1)^{n+1}}{5}.$$

A.- (1 punt) Digueu per quins valors de a la sèrie següent és convergent.
B.- (1 punt) Trobeu la suma per $a = \frac{3}{8}$.

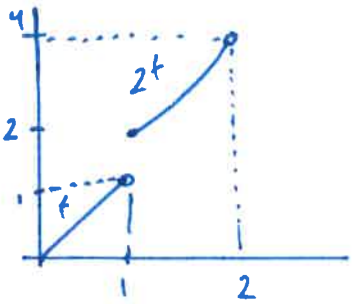
<u>`Problema 3 [5 punts]`</u>: Sigui $g(t) = e^t$, amb $-\pi \le t < \pi$.

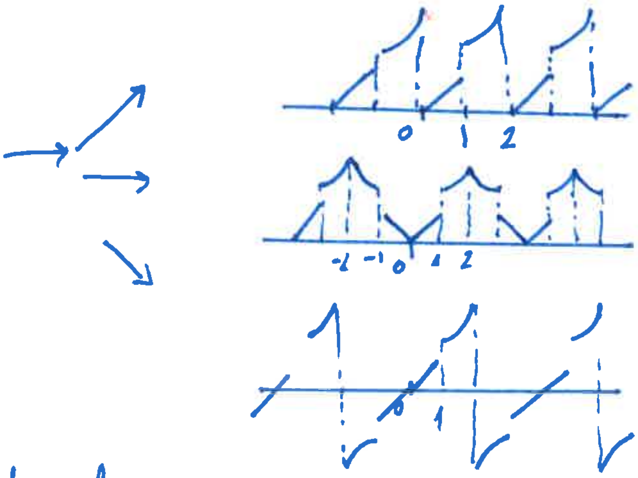
A.- (1 punt) Dibuixeu l'extensió periòdica de $g(t)$.
B.- (2.5 punts) Trobeu la sèrie de Fourier complexa de $g(t)$.
C.- (1.5 punt) Sense fer cap càlcul, trobar la sèrie de Fourier trigonomètrica de $g(t)$.

Sol. examen

① $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1, \\ 2^t, & 1\le t<2 \end{cases}$

Ⓐ





Ⓑ Usem el teorema de Dirichlet en els dos casos:

$$\underline{t=0} \Rightarrow \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{0+4}{2}=2\ ; \quad t=1 \Rightarrow \frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{1+2}{2}=3/2$$

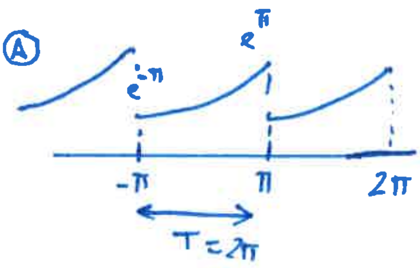
② $$\sum_{n\ge 1}\frac{(4a-1)^{n+1}}{5}=\sum_{n\ge 2}\frac{(4a-1)^n}{5}=\frac{1}{5}\sum_{n\ge 2}(4a-1)^n$$

Ⓐ Cal que $|4a-1|<1 \Leftrightarrow -1<4a-1<1 \Rightarrow \begin{cases} a<\frac{1}{2} \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow a\in(0,1/2)$

Ⓑ Si fem $a=3/8 \Rightarrow 4a-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5}\sum_{n\ge 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{5}\,\frac{1/4}{1-1/2}=\frac{1}{10}$

③ $g(t)=e^t$ si $-\pi\le t<\pi$

Ⓐ



Ⓑ $$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-jnt}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-jn}\,e^{(1-jn)t}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-jn)}\left(e^{\pi}e^{-jn\pi}-e^{-\pi}e^{jn\pi}\right)=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi}\,\frac{1}{1-jn}$$

$$=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}(-1)^n\,\frac{1+jn}{1+n^2} \Rightarrow \text{la } SF_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{jnt}$$

Ⓒ Com $c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n) \Rightarrow \begin{cases} a_n=2\,\mathrm{Re}\{c_n\}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}(-1)^n\,\frac{1}{1+n^2}\ //\ a_0=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \\ b_n=-2\,\mathrm{Im}\{c_n\}=-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}(-1)^n\,\frac{n}{1+n^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{SF_t(t)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n\ge 1} a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)}$$