Ampliació de Matemàtiques.
Enginyeria en Sistemes Aeroespacials/Doble Titulació (EETAC).

Examen de Final de Quadrimestre. 18 de Juny de 2021

Problema 1. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$, es demana:

(a) (**1 punt**) Considera les extensions amb simetria parella, f_p, i senar, f_s, de f. Dibuixa a l'interval $[-2\pi, 2\pi]$ les corresponents extensions periòdiques de cadascuna d'aquestes dues funcions simètriques. A quins punts de l'interval $[-2\pi, 2\pi]$ presenten el fenomen de Gibbs les sèries de Fourier corresponents a f_p i f_s ?

(b) (**0,5 punts**) Quins són els períodes fonamentals i les freqüències angulars fonamentals de cadascuna d'aquestes funcions f_p i f_s?

(c) (**1,5 punts**) Identifica justificadament a quina de les dues extensions, f_p o f_s, correspon la sèrie de Fourier següent

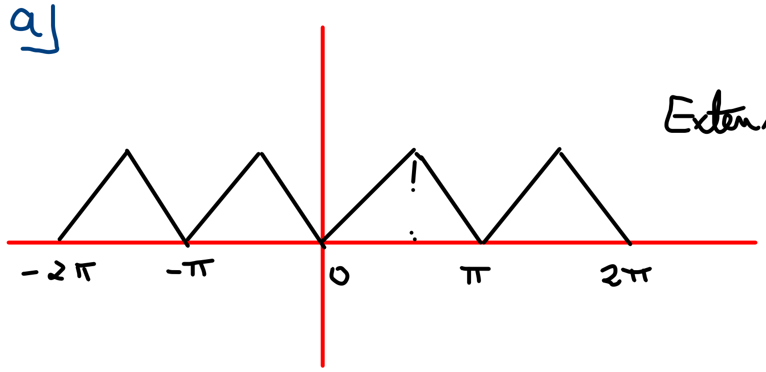
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)t,$$

i calcula la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'altra extensió.

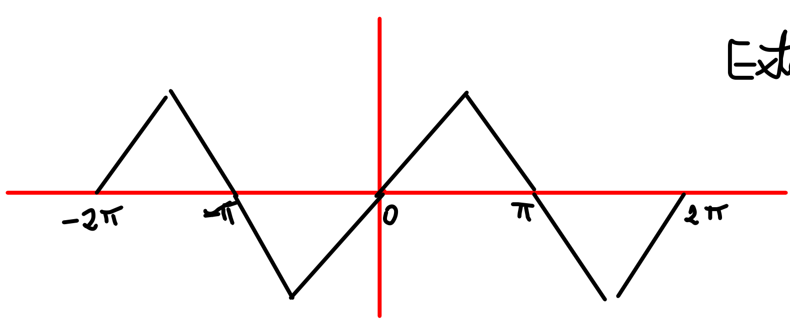
(d) (**0,5 punts**) Utilitza alguna de les sèries de Fourier anteriors (la donada o bé la calculada) per obtenir el valor de la sèrie numèrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

a)



Extensió parella f_p



Extensió senar f_s

En ser, tant f_p com f_s, funcions contínues, cap de les dues extensions presenten el fenomen de Gibbs.

b) f_p té període π amb freqüència angular fonamental $w_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

f_s té període 2π amb freqüència angular fonamental $w_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

c) La sèrie de Fourier donada correspon a la de l'extensió senar f_s ja que és una sèrie de Fourier en sinus. Per calcular la sèrie de Fourier de f_p, observem que aquesta ha de ser del tipus

$$SFT[f_p](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nt); \quad \text{on}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos(2nt)\,dt \underset{\text{parts}}{=} \frac{2}{\pi n}\,\frac{\cos(\pi n) - 1}{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ -\frac{2}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \text{ és senar} \end{cases}$$

$$\boxed{SFT[f_p](t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2(2k+1)t)}$$

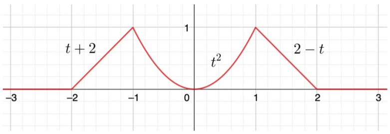
d) Apliquem el teorema de Dirichlet a la sèrie de Fourier de f_s $\quad SFT[f_s](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)t)$

en el punt $t = \frac{\pi}{2}$ i obtenim

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = SFT[f_s]\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \underbrace{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Problema 2. Sigui $f(t)$ la funció de la figura:



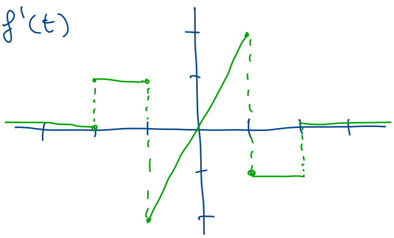
(a) (**1,5 punts**) Representa gràficament $f'(t)$ i $f''(t)$. Expressa f' i f'' en termes de funcions esglaó i delta, tenint en compte la derivació de funcions generalitzades. Dedueix la transformada de $f(t)$ utilitzant propietats.

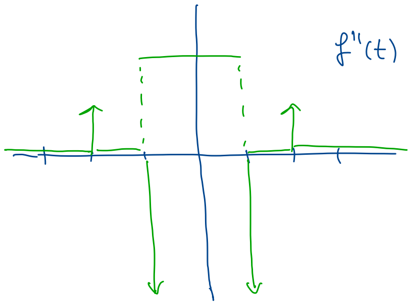
(b) (**0,5 punts**) Dibuixa la gràfica de l'antitransformada de $e^{-2j\omega}F(\omega)$.

(c) (**0,5 punts**) Quant val la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega}F(\omega)d\omega$?

(d) (**1 punt**) Calcula gràficament $(f * p_1)(2)$, és a dir, $f(t) * p_1(t)$ en $t = 2$.

$f'(t)$





$f''(t)$

$$f'(t) = p_{\frac{1}{2}}\left(t+\tfrac{3}{2}\right) + 2t\, p_2(t) - p_{\frac{1}{2}}\left(t-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$f''(t) = 2p_1(t) + \delta(t+2) + \delta(t-2) - 3\delta(t+1) - 3\delta(t-1)$$

Calculem la transformada de $f''(t)$:

$$2p_1(t)+\delta(t+2)+\delta(t-2)-3\delta(t+1)-3\delta(t-1) \longleftrightarrow \frac{4}{w}\sin w + e^{2wj} + e^{-2wj} - 3e^{wj} - 3e^{-wj}$$

Apliquem la propietat de derivació: $f''(t) \longleftrightarrow -w^2F(w)$

$$-w^2F(w) = \frac{4}{w}\sin w + e^{2wj} + e^{-2wj} - 3e^{wj} - 3e^{-wj}$$

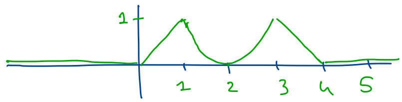
Per tant

$$F(w) = -\frac{1}{w^2}\left(\frac{4\sin w}{w} + e^{2wj} + e^{-2wj} - 3e^{wj} - 3e^{-wj}\right)$$

Observació: també es pot calcular a partir de $f'(t)$.

(b) Antitransformada de $e^{-2j\omega} F(\omega)$:

Apliquem la propietat de translació: $f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$



(c) Quant val $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega} F(\omega)\, d\omega$?

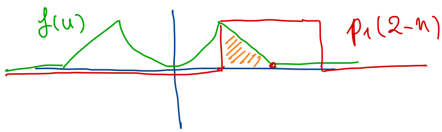
Utilitzem: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega)\, d\omega.$

Amb $t = 1$ tindrem:

$$2\pi \cdot \underbrace{f(-1)}_{\substack{\parallel \\ 1 \text{ (De la gràfica)}}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega} F(\omega)\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega} F(\omega)\, d\omega = 2\pi$$

(d) $f(t) * p_1(t)$, en $t=2$, gràficament.



$$(f * p_1)(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot p_1(2-u)\, du =$$

$$= \text{Area del solapament} = \frac{1}{2}$$

Problema 3. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ **amb** $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, sigui $f(t) = e^{\lambda|t|}$. Sabent que la seva transformada de Fourier és $F(\omega) = \dfrac{-2\lambda}{\lambda^2+\omega^2}$, es demana, sense necessitat de calcular cap integral:

(a) (**0,5 punts**) La transformada de Fourier de $te^{-2|t|}$.

(b) (**0,75 punts**) La transformada de Fourier de $\dfrac{1}{2+t^2}$.

(c) (**0,5 punts**) La transformada de Fourier de $\dfrac{1}{2+4t^2}$.

(d) (**0,75 punts**) L'antitransformada de Fourier de $\dfrac{\cos(\omega)}{2+\omega^2}$.

(e) (**0,5 punts**) El valor de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2+\omega^2}\, d\omega$, amb $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

a) $e^{-2|t|} \longleftrightarrow \dfrac{(-2)(-2)}{(-2)^2+\omega^2} = \dfrac{4}{4+\omega^2}$

$\Rightarrow TF\left[te^{-2|t|}\right](\omega) = -\dfrac{1}{j}\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{4}{4+\omega^2}\right) = j\,\dfrac{4(-2\omega)}{(4+\omega^2)^2}$

$= \boxed{\dfrac{-8\omega j}{(4+\omega^2)^2}}$

b) Per la propietat de dualitat aplicada en el cas $\lambda = -\sqrt{2}$

$TF\left[\dfrac{1}{2+t^2}\right](\omega) = \dfrac{2\pi}{-2(-\sqrt{2})} f(-\omega) = \boxed{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|\omega|}}$

c) $TF\left[\dfrac{1}{2+4t^2}\right](\omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{canvi} \\ \text{d'escala} \\ a=2}}{=} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\left|\frac{\omega}{2}\right|} = \boxed{\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\omega|}}$

d) $TIF\left[\frac{\cos w}{2+w^2}\right](t) = TIF\left[\frac{1}{2}\left(\frac{e^{jw}}{2+w^2}+\frac{e^{-jw}}{2+w^2}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{-\sqrt{2}|t-1|}+e^{-\sqrt{2}|t+1|}\right]$$

traslació en el temps aplicat a l'apartat b)

$$= \boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[e^{-\sqrt{2}|t-1|}+e^{-\sqrt{2}|t+1|}\right]}$$

e) $\underbrace{\frac{e^{\lambda|t|}}{(-2\lambda)}}_{f(t)} \longleftrightarrow \frac{1}{\lambda^2+w^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+w^2}\,dw = 2\pi\, f(0) = 2\pi\,\frac{e^{\lambda\cdot 0}}{(-2\lambda)} = \boxed{-\frac{\pi}{\lambda}}$$