Ampliació de matemàtiques – EETAC

Control 2 – 17 de desembre de 2020

Duració: 1 hora

Detalleu i raoneu les vostres respostes. Poseu el vostre nom i cognom a tots els fulls.

Problema 1 [2 punts]: Determineu si la sèrie següent és convergent o divergent. Si és convergent, calculeu el valor al que convergeix.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{-n^2}{(10n+10)^2}$$

Problema 2: Sigui $f(t)$ la funció definida en l'interval $t \in [0, 2\pi)$ per

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -2, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

a) [1,5 punts] Dibuixeu, per $t \in (-5\pi, 5\pi)$, les extensions periòdiques de f, de l'extensió parella de f i de l'extensió senar de f.

b) [3 punts] Trobeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'extensió periòdica de f.

c) [1,5 punts] Sigui $S(t)$ la sèrie sinus de f. Trobeu a quin valor convergeixen $S(0)$, $S(1)$ i $S(\pi)$.

Problema 3: [2 punts] Trobeu la sèrie de Fourier complexa de la funció $g(t) = \cos^3 t$

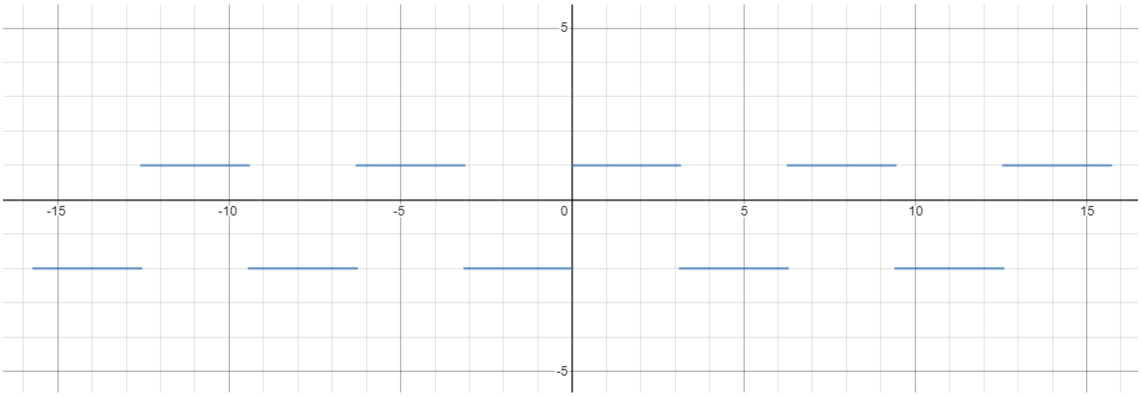
Solució 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{(10n+10)^2} = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{n}{10n+10}\right)^2 = \frac{-1}{100}$$

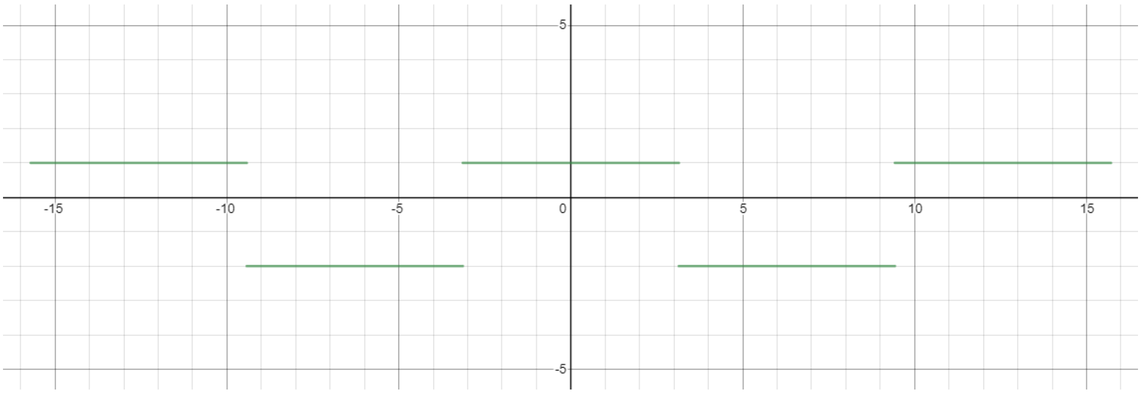
Per tant, pel criteri zero, la sèrie és divergent.

Solució 2: (podeu obrir les gràfiques a Desmos)

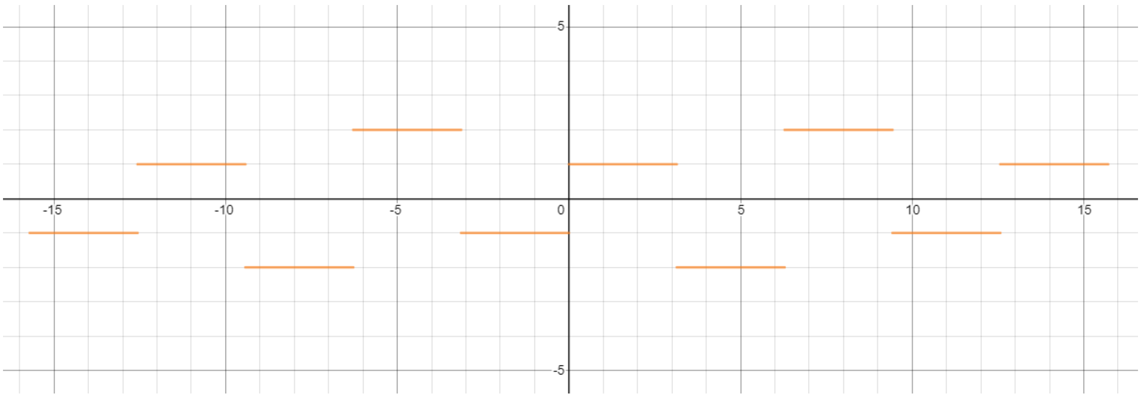
a) Extensió periòdica:



Extensió periòdica parella:



Extensió periòdica senar:



b) Tenim una funció amb $T = 2\pi$ i, per tant, $\omega_0 = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}(-\pi) = -1$$

Per $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -2\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt$$
$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -2\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(0)}{n}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

Aquesta expressió només pren valors no nuls per n senar, per tant ens queda

$$b_n = \frac{6}{(2n-1)\pi}$$

I la sèrie de Fourier trigonomètrica és

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{6\sin\big((2n-1)t\big)}{(2n-1)\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\big((2n-1)t\big)}{(2n-1)}$$

c) Sense necessitat de calcular la sèrie sinus, considerant l'extensió senar de f i pel Teorema de Dirichlet

$$S(0) = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$S(1) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$S(\pi) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

<u>Solució 3</u>:

Mètode 1:

$$\cos^3 t = \cos t \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{\cos t + \cos t \cos 2t}{2} = \frac{\cos t + \frac{\cos t + \cos 3t}{2}}{2}$$
$$= \frac{3\cos t + \cos 3t}{4}$$

Per tant, la SFT de $g(t)$ té com a únics coeficients no nuls $a_1 = \frac{3}{4}$ i $a_3 = \frac{1}{4}$. Fent el canvi a la SFC, obtenim com a únics coeficients no nuls $c_1 = c_{-1} = \frac{3}{8}$ i $c_3 = c_{-3} = \frac{1}{8}$. Per tant, la SFC queda

$$\frac{1}{8}e^{-3it} + \frac{3}{8}e^{-it} + \frac{3}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{3it} = \frac{e^{-3it} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{3it}}{8}$$

Mètode 2:

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{it} + e^{-it}\right)^3}{8} = \frac{e^{-3it} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{3it}}{8}$$