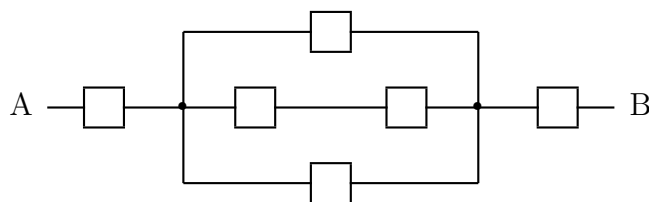


PROBLEMES TEMA 1b

1. Determineu la distribució de probabilitat de la suma de resultats obtinguts en tirar dos daus. Quina distribució s'obtindria si s'utilitzen dos daus amb cares numerades 1, 3, 4, 5, 6, 8 en un i 1, 2, 2, 3, 3, 4 a l'altre?
2. En un espai de probabilitat coneixem les probabilitats $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,4$. Determineu les probabilitats $P(A^c \cap B)$ i $P(A \cap B^c)$.
3. Siguin A i B dos successos independents. Són independents A i B^c ? i A^c i B^c ?
4. Siguin A i B dos esdeveniments amb $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$, $P(A) = 0,4$ i $P(B) = 0,6$, quant val $P(\bar{A} \cap B)$, $P(B \cup \bar{A})$ i $P(A \cup B)$?
5. Siguin A i B dos esdeveniments amb $P(A) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,8$ i $P(B) = p$. Quant ha de valer p per tal que
 - a) els esdeveniments A i B siguin incompatibles.
 - b) els esdeveniments A i B siguin independents.
6. Siguin A, B, C tres successos tals que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Es pot deduir que A i B són independents?
7. El 70 % dels alumnes que cursen l'assignatura A aproven, i el 75 % dels que cursen l'assignatura B també. Aleshores:
 - a) Quins són els percentatges màxims i mínim d'alumnes que aproven les dues assignatures?.
 - b) Si el 52,5 % d'alumnes aproven les dues assignatures, és independent aprovar l'assignatura A que aprovar l'assignatura B?.
 - c) Si el 60 % aproven les dues assignatures, quin percentatge d'alumnes aproven almenys una assignatura?.
 - d) Si el 60 % aproven les dues assignatures, quin percentatge d'alumnes suspèn les dues assignatures?.
 - e) Si el 20 % aproven l'assignatura A i suspèn l'assignatura B, quin percentatge aprova les dues?, quin percentatge aprova B i suspèn A?
8. (El problema del cavaller de Méré) El cavaller de Méré apostava que en tirar un dau 4 vegades almenys sortiria un sis. Després de guanyar moltes vegades ningú no volia jugar amb ell i va canviar el joc, apostant que en 24 tirades de dos daus sortiria un doble sis. És més probable que perdi o que guanyi? Quin és el nombre mínim de tirades a partir del qual és més probable guanyar que perdre?

9. Quantes vegades cal tirar un dau, com a mínim, per tal que la probabilitat d'obtindre un sis sigui:
- Més gran que 0,5.
 - Més gran que 0,9.
10. En un sistema de transmissió la probabilitat d'error en enviar un bit és $p = 0,1$, independentment dels altres bits enviats.
- Quina és la probabilitat p_n que en un missatge de n bits no hi hagi cap error? Quin és el valor mínim n_0 a partir del qual $p_{n_0} < 1/2$?
 - Per disminuir la probabilitat d'error s'envia cada bit per triplicat. A cada bloc de tres bits rebuts, el receptor decodifica com a 1 el bit enviat si hi ha més 1 que 0 al bloc i 0 altrament (aquest és el codi de repetició). Quina és ara la probabilitat q_n que en un missatge de n bits no hi hagi cap error? Quin és el valor mínim n_0 a partir del qual $q_{n_0} < 1/2$?
11. Cada element del sistema de la figura següent té probabilitat de fallada $p = 0,1$ independent dels altres. El sistema funciona mentre hi ha un camí de A a B que no passa per cap element defectuós. Quina és la probabilitat que el sistema falli?



12. En un lot de n xips, n'hi ha l que són defectuosos.
- Quina és la probabilitat que en una mostra de mida m n'hi hagi r de defectuosos?
 - Quina seria aquesta probabilitat si es pren la mostra de mida m amb reemplaçament? Compareu-la amb l'anterior pels valors $n = 20$, $l = 2$, $m = 10$ i $r = 1$, i per als valors $n = 100$, $l = 10$, $m = 10$ i $r = 1$.
13. En una població hi ha un 24% d'individus que són homes i fumen, i un 35% que són dones i no fumen. Si la proporció d'homes és del 55%, quina és la probabilitat que un individu escollit a l'atzar entre els fumadors sigui dona?
14. (Problema dels aniversaris) Quina és la probabilitat p_n que en un grup de n persones n'hi hagi almenys dues que tenen l'aniversari el mateix dia. Quin és el valor més petit de n pel qual $p_n > 1/2$. (Se suposa que els aniversaris estan distribuïts uniformement al llarg dels dies de l'any i que tots els anys tenen 365 dies.)

15. S'ensenya una mona a escriure a màquina i tecleja un text de 14 caràcters triant cadascuna de les 27 tecles de lletres (inclòs l'espai) a l'atzar. Quina és la probabilitat que escrigui la frase 'Sóc intel·ligent'?
16. En una reunió hi ha n homes i n dones que formen n parelles sentimentals. Trobeu la probabilitat que al agafar a l'atzar un home i una dona formin parella sentimental.
17. Es treuen dues boles d'una bossa que en conté 5 de vermelles, 3 de blanques i 2 de verdes.
 - a) Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin del mateix color.
 - b) Si les dues boles són del mateix color, quina és la probabilitat que siguin de color blanc?
18. Una caixa conté 10 monedes normals i 20 de trucades per a les quals $P(\text{cara}) = 0,25$. Es treu a l'atzar una moneda de la caixa i es tira dues vegades.
 - a) Quina és la probabilitat que surtin dues cares?
 - b) Si han sortit dues cares, quina és la probabilitat que la moneda fos trucada?
19. Una fàbrica produeix un 30 % de claus, un 25 % de cargols i un 45 % de xinxetes. Entre els claus, cadascun té una probabilitat del 0,005 de ser defectuós; la probabilitat que un cargol sigui defectuós és de 0,003, i una xinxeta, de 0,008. Si una peça és defectuosa, quina és la probabilitat que sigui una xinxeta?
20. Per tal d'assistir a un examen un estudiant compta amb l'ajuda d'un despertador, el qual aconsegueix despertar-lo el 80 % dels casos. Quan el despertador el desperta, la probabilitat que faci l'examen és del 0,9, mentre que si no el desperta la probabilitat que faci l'examen és del 0,5. Si fa l'examen, quina és la probabilitat que el despertador l'hagi despertat? Si no fa l'examen, quina és la probabilitat que no l'hagi despertat?
21. La probabilitat que hi hagi embús a la Diagonal a les 8 del vespre és de 0,4 els dies que no juga el Barça, mentre que puja a 0,8 els dies de partit. Sabem també que el Barça juga dos partits per setmana.
 - a) Calculeu la probabilitat que hi hagi embús un dia qualsevol.
 - b) Si un dia determinat vaig a la Diagonal a les 8 del vespre i hi ha embús, calculeu la probabilitat que estigui jugant el Barça.
22. Un metge sap que només el 60 % dels pacients que van a la consulta estan malalts. Per poder distingir entre els malalts i els que no ho són, el metge disposa d'una anàlisi que presenta el 95 % de fiabilitat (és a dir, dóna el resultat correcte el 95 % de les vegades que s'aplica: si un pacient està malalt encerta 95 % de les vegades i si un pacient està sa encerta també 95 % dels cops). Si un pacient dóna positiu, quina és la probabilitat que realment estigui malalt?

23. Tenim un dau amb tres uns, dos dosos i un tres. D'altra banda, tenim una urna amb tres boles blanques i dues negres. Llancem el dau i agafem tantes boles com el número que surti al dau.
- a) Calculeu la probabilitat de treure com a mínim una bola blanca.
 - b) Sabent que hem tret com a mínim una bola negra, calculeu la probabilitat d'haver tret un dos al dau.
24. Una urna conté tres boles negres i dues boles blanques. Un primer jugador treu tres boles. Torna a l'urna una bola negra si entre les boles que ha tret n'hi ha més de negres. Si no és així, torna a l'urna una bola blanca. A continuació, el segon jugador extreu una bola. El joc consisteix a endevinar quantes boles blanques ha extret el primer jugador. Si el segon jugador ha extret una bola blanca, quina és la probabilitat que el primer jugador hagi extret:
- a) Cap bola blanca.
 - b) Una bola blanca.
 - c) Dues boles blanques.
25. Considereu totes les matrícules que es poden formar amb quatre dígit, del 0 al 9. Prenem una matrícula a l'atzar, trobeu la probabilitat que:
- a) Tingui totes les xifres diferents.
 - b) Tingui exactament dues xifres iguals.
 - c) Tingui dos parells de xifres iguals.
 - d) Tingui exactament tres xifres iguals.
 - e) Tingui totes les xifres iguals.
26. Prenem un nombre de tres xifres a l'atzar (002 ho és). Trobeu:
- a) La probabilitat que la segona xifra sigui 3.
 - b) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que totes les xifres són senars.
 - c) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que alguna xifra és 3.
 - d) La probabilitat que la segona xifra sigui 3 sabent que la suma de les xifres és 9.
27. Tirem un dau dues vegades i anotem els resultat, trobeu la probabilitat que:
- a) Surti algun quatre.
 - b) Surti algun quatre sabent que els dos resultats són diferents.
 - c) Surti algun quatre sabent que els dos resultats són iguals.
 - d) Els dos resultats siguin iguals sabent que ha sortit algun quatre.
 - e) Els dos resultats siguin diferents sabent que ha sortit algun quatre.

28. Un mecanisme està format per dos dispositius independents connectats en sèrie. La probabilitat que qualsevol d'ells s'avarïi és p .
- Quina probabilitat hi ha que el mecanisme funcioni?.
 - Si connectem n mecanismes en paral·lel, quina probabilitat tenim que funcioni?.
 - Si $p = 0,3$, quants mecanismes hem de connectar en paral·lel per a garantir que la probabilitat que el mecanisme funcioni sigui més gran que 0,99?
29. Llancem una moneda trucada a l'aire (el 20 % de les vegades surt cara i la resta creu). Si surt cara traiem una carta d'una baralla que en té 40, si a la moneda surt creu traiem dues cartes sense reposició.
- Quina és la probabilitat que no surti cap as?.
 - Sabent que no ha sortit cap as, quina és la probabilitat que ens hagi sortit cara a la moneda?.
 - Quina és la probabilitat que surti com a mínim un as?.
30. En una cadena de producció d'aparells elèctrics es fan tres proves de qualitat: 1, 2 i 3 independents dos a dos. Per cada una de les proves hi ha un 10 % d'aparells que no la superen. Es diu que un aparell és defectuós quan falla com a mínim dues de les proves.
- Troba la probabilitat P_3 que un aparell sigui defectuós.
 - Sabent que un aparell és defectuós troba la probabilitat que hagi fallat en les tres proves.
 - Si en lloc de realitzar tres proves en fem n , quina és ara la probabilitat P_n que un aparell sigui defectuós (en falla com a mínim dues).
 - Determina el nombre mínim n_o de proves que cal fer a que $P_{n_o} \geq 0,1$.

SOLUCIONS

1. Daus normals: $P(2)=\frac{1}{36}$, $P(3)=\frac{2}{36}$... Daus especials: $P(2)=\frac{1}{36}$, $P(3)=\frac{2}{36}$...
2. 0.2, 0.1.
3. Són independents.
4. 0.3, 0.9, 0.7.
5. a) 0.3, b) 0.6.
6. No. Contraexemple, en l'experiència 'tirar un dau i anotar el resultat' considereu els esdeveniments $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
7. a) Mínim 0.45, màxim 0.7. b) Són independents. c) 0.85. d) 0.15 e) 0.5, 0.25.
8. Que perdi. A partir de 25.
9. a) 4, b) 13.
10. a) 0.9^n , $n_0 = 7$ b) 0.972^n , $n_0 = 25$.
11. 0.1915
12. a) $\frac{\binom{l}{r} \cdot \binom{n-l}{m-r}}{\binom{n}{m}}$, b) $\frac{\binom{m}{r} \cdot l^r \cdot (n-l)^{m-r}}{n^m}$
13. 0.29.
14. $1 - \frac{P_{365,n}}{365^n}$, $n = 22$.
15. 27^{-14} .
16. $\frac{1}{n}$
17. a) $\frac{14}{45}$, b) $\frac{3}{14}$.
18. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$.
19. 0.615.
20. 0.878, 0.556.
21. a) 0.514, b) 0.44.
22. 0.9661.
23. a) $\frac{23}{30}$, b) $\frac{2}{5}$.

24. a) $\frac{2}{11}$, b) $\frac{6}{11}$, c) $\frac{3}{11}$.
25. a) 0.5040, b) 0.4320 c) 0.0270, d) 0.0360, e) 0.001.
26. a) 0.1, b) 0.2, c) 0.369, d) 0.127.
27. a) 0.3056, b) 0.333, c) 0.1667, d) 0.0909, e) 0.909.
28. a) $(1 - p)^2$, b) $1 - p^n \cdot (2 - p)^n$, c) 7.
29. a) 0.8262, b) 0.2179, c) 0.1738.
30. a) 0.028, b) 0.036, c) $1 - 0,9^{n-1}[0,9 + 0,1n]$, d) $P_5 = 0,081$ i $P_6 = 0,1143$.