Definició de probabilitat

Resum – Probabilitat bàsica

Espai mostral E ... el conjunt dels resultats possibles en un experiment

Succés o esdeveniment ... un subconjunt de E

Una probabilitat P sobre un espai mostral finit E és una funció que assigna a cada subconjunt $A \subseteq E$ un nombre real tal que

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ aleshores $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

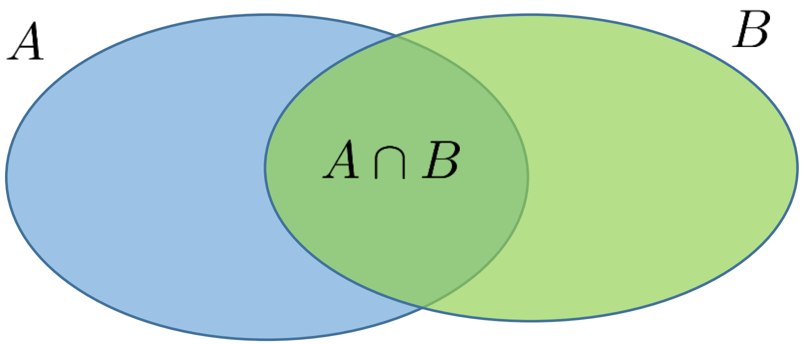
Espai de probabilitat equiprobable ... cada element de E té la mateixa probabilitat

En un espai de probabilitat finit equiprobable tenim

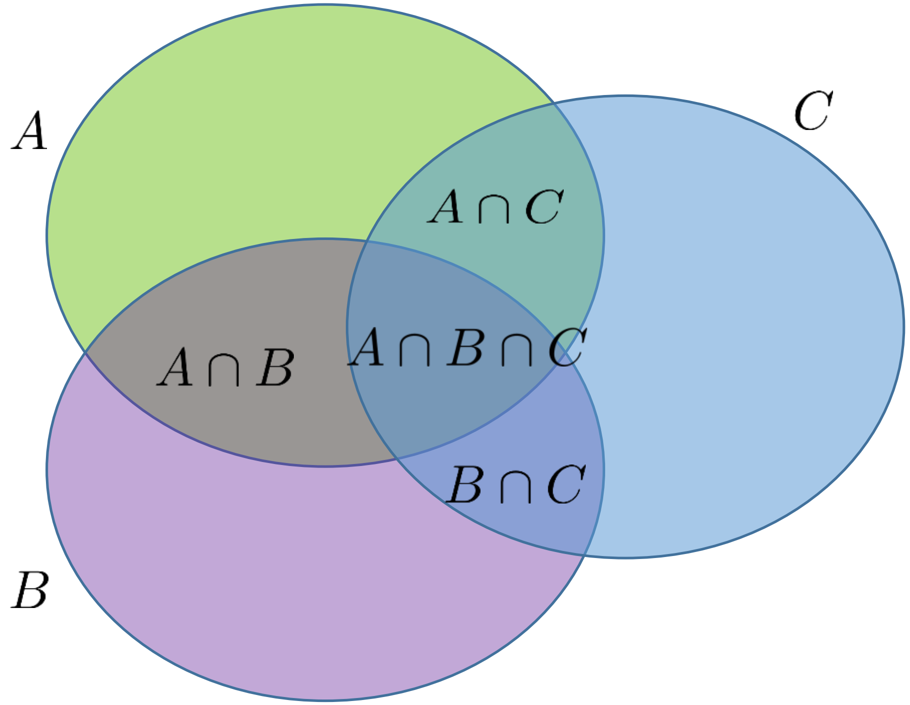
$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables de } A}{\text{nombre de casos possibles de } E}$$

El principi d'inclusió - exclusió

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilitat condicionada

si $P(B) \neq 0$ $\quad$ $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

$P(A|B)$ és la probabilitat del succés A si sabem que s'ha realitzat el succés B

Successos independents

A i B són successos independents si $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Si A i B són independents, aleshores la informació sobre la realització de B no afecta $P(A)$.

És a dir, si A i B són independents, aleshores $P(A|B) = P(A)$

El teorema de la probabilitat total

Sigui $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ per a $1 \leq i < j \leq n$.

Aleshores $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)}$

Exemple:

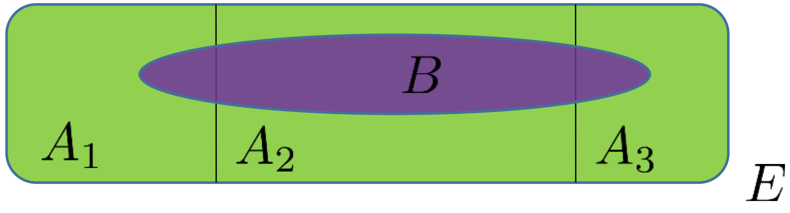
Llancem un dau.

$A_1 = \{\text{surt } 1 \text{ o } 2\}$

$A_2 = \{\text{surt } 3, 4 \text{ o } 5\}$

$A_3 = \{\text{surt } 6\}$

$B = \{\text{surt un nombre parell}\}$



$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{2}{6}\,\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,1 \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{com esperàvem.} \end{aligned}$$

El teorema de Bayes

Sigui $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ per a $1 \leq i < j \leq n$.

Aleshores $$\boxed{P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}}$$

Exemple:

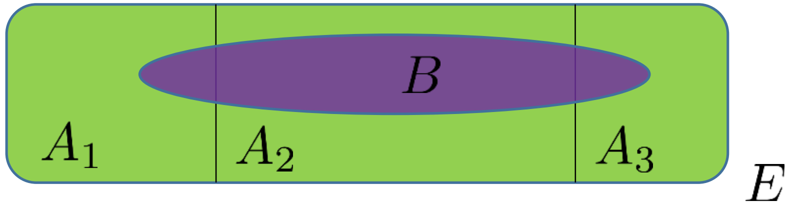
Llancem un dau.

$A_1 = \{\text{surt } 1 \text{ o } 2\}$

$A_2 = \{\text{surt } 3, 4 \text{ o } 5\}$

$A_3 = \{\text{surt } 6\}$

$B = \{\text{surt un nombre parell}\}$



$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Diagrames d'arbre

Exemple:

Una urna conté 2 boles blaves i 3 boles vermelles. S'extreu una bola i després una segona (sense reposició).

$A_1 = \{\text{la primera bola és blava}\}$

$A_2 = \{\text{la primera bola és vermella}\}$

$B = \{\text{la segona bola és vermella}\}$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(B \cap A_1) = \frac{2}{5}\frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$