Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels (UPC)
Grau en Enginyeria d'Aeronavegació/Grau en Enginyeria d'Aeroports
Algebra i Geometria. Curs 2013-2014

Prova 1. Grup 1GT81-82. Novembre de 2013

Nota: La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (3pts) Resoleu, deixant les solucions en forma exponencial,

$$z^4 = \frac{(1-j)\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{12}j}}{e^{\frac{\pi}{(1+j)}j}}$$

$$z^4 = \frac{(1-j)\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{12}j}}{e^{\frac{\pi}{(1+j)}j}} \underset{(*)}{=} \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}j}\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{12}j}}{e^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}j}} = \frac{\sqrt{6}e^{-\frac{1}{6}\pi j}}{e^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\pi}{2}j}} = \left(\sqrt{6}e^{-\frac{1}{2}\pi}\right)e^{-\frac{2}{3}\pi j} \rightarrow$$

$$z = \sqrt[4]{\left(\sqrt{6}e^{-\frac{1}{2}\pi}\right)}\, e^{\frac{\left(-\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)}{4}j} = \left(\sqrt[8]{6}e^{-\frac{1}{8}\pi}\right)e^{\left(-\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}\pi k\right)j}\quad k = 0,1,2,3.$$

$$(*)\begin{cases} \|(1-j)\| = \sqrt{2}\; i\; \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{(1+j)}j = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}j\right) \end{cases}$$

$$\boxed{z_1 = \left(\sqrt[8]{6}e^{-\frac{1}{8}\pi}\right)e^{\frac{11}{6}\pi j}, z_2 = \left(\sqrt[8]{6}e^{-\frac{1}{8}\pi}\right)e^{\frac{1}{3}\pi j}, z_3 = \left(\sqrt[8]{6}e^{-\frac{1}{8}\pi}\right)e^{\frac{5}{6}\pi j}, z_4 = \left(\sqrt[8]{6}e^{-\frac{1}{8}\pi}\right)e^{\frac{4}{3}\pi j}.}$$

2. (2pts) Discutiu en funció de a i resoleu el sistema quan sigui possible:

$$\begin{cases} x-y+z &= a \\ 2y-x+t-3z &= 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 2$ i nombre d'incògnites $= 4 \rightarrow$ S.C.I. independentment del valor de a.

$$\boxed{\text{sol: } y = a + 2z - t, \quad x = 2a + z - t.}$$

3. (3.5 pts) Siguin F i G el subespais de $\mathbb{R}^4$ definits per:
$F = \langle (1,2,1,0), (-1,1,1,1) \rangle$ i $G = \langle (2,-1,0,1), (1,-1,3,7) \rangle$

(a) (2 pts) Determinar una base per $F + G$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \rightarrow \dim F + G \geq 3.$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \dim F + G = 3 \rightarrow \boxed{\text{base } F + G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

(b) (1 pt) Determinar una base per $F \cap G$.

$\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F\cap G \rightarrow 3 = 2+2-1$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ -\alpha-\beta \\ 3\beta \\ \alpha+7\beta \end{pmatrix} \in F$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\alpha+\beta \\ 2 & 1 & -\alpha-\beta \\ 1 & 1 & 3\beta \end{pmatrix} = 4\alpha + 12\beta = 0$. Com sabem que la dimensió de la intersecció és 1 no cal plantejar l'altre determinant.

$$\left.4\alpha+12\beta=0\right\} \rightarrow [\alpha=-3\beta] \rightarrow \begin{pmatrix} 2(-3\beta)+\beta \\ -(-3\beta)-\beta \\ 3\beta \\ -3\beta+7\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\beta \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 4\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{base de } F\cap G = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.}$$

(c) (0.5 pts) Completar la base de $F+G$ per tenir una base de $\mathbb{R}^4$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{base } \mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

4. (1.5 pts) Sea F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^5$ definit per:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / \quad x_1 = x_2 = -x_3\}$$

(a) (1 pt) Doneu una base i la dimensió de F.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \forall x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de F és $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ i la dimensió de F és igual a 3.

(b) (0.5 pt) Pertany el vector $v = (1,1,0,2,2)$ al subespai F?

No, no pertany perquè la tercera component no és igual a l'oposada de la primera component.

1GM41 - 42

4. (3pt) En $\mathbb{R}^3$, es consideren els subespais

$$F = \{(3\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ i } G = \{(x,y,z) : x+2y+z=0\}.$$

(a) Trobeu $F \cap G$ i $F+G$.

(b) Doneu una base B_1 de $F \cap G$, una base B_2 de F que amplii la base B_1, i una base B_3 de $F+G$ que amplii la base B_2.

a) Un vector de $F \cap G$ és un vector de F: $(3\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta)$ que compleix l'equació que def. G: $x+2y+z=0$.

Es a dir, $(3\alpha+\beta)+2\beta+(\alpha+\beta)=0 \rightarrow 4(\alpha+\beta)=0$

obtenim: $\alpha=-\beta$ ∴

$F \cap G \ni (3\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta) = (-2\beta, \beta, 0) = \beta(-2,1,0)$.

És a dir, $\boxed{F \cap G = \langle(-2,1,0)\rangle.}$

Com $(3\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta) = \alpha(3,0,1)+\beta(1,1,1)$ i $\{(3,0,1),(1,1,1)\}$ és l. indep $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} F = 2$.

També, $\dim_{\mathbb{R}} G = 2$. (Tres incòg. una equació $\Rightarrow$ 2 graus de llibertat). Per la fórmula de Grassman:

$\dim_{\mathbb{R}}(F+G) = \dim F_{\mathbb{R}} + \dim_{\mathbb{R}} G - \dim_{\mathbb{R}}(F \cap G) = 3$.

És a dir, $F+G \subset \mathbb{R}^3$, $\dim(F+G)=3 \Rightarrow \boxed{F+G=\mathbb{R}^3}$

b) $\boxed{\text{Una base de } F \cap G \text{ és, p. ex, } B_1 = \{(-2,1,0)\}}$

Per construir una base de F, busquem un vector de F l. indep amb $(-2,1,0)$, p. ex, $(3,0,1)$.

$\boxed{B_2 = \{(-2,1,0),(3,0,1)\} \text{ és una base de } F.}$

Finalment, afegim qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$, l. ind. amb els de B_2, p. ex, $(0,0,1)$:

$\boxed{B_3 = \{(-2,1,0),(3,0,1),(0,0,1)\}}$

Resolució

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2013-2014

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GM51-52. 23 d'octubre de 2013.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (a) (2pt) Calculeu i doneu el resultat en forma binòmica i exponencial de:

$$z = \frac{(4+4j)e^{\frac{5\pi}{6}j}}{e^{\pi j}(1-\sqrt{3}j)^2}.$$

(b) (1pt) Useu l'apartat anterior per trobar totes les solucions (en forma exponencial) de $\sqrt[3]{z}$.

a) Considerem $4+4j = 4(1+j) = 4\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}j}$

$1-\sqrt{3}j = 2\cdot e^{-\frac{\pi}{3}j}$

subst. en l'expressió:

$$z = \frac{4\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}j}\cdot e^{\frac{5\pi}{6}j}}{e^{\pi j}\left(2e^{-\frac{\pi}{3}j}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}j}\cdot e^{\frac{5\pi}{6}j}}{e^{\pi j}\left(4e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}-\pi+\frac{2\pi}{3}\right)j} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3+10-12+8}{12}j}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\frac{9\pi}{12}j} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}j} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)$$

$$= -1+j \qquad \boxed{R: z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}j} = -1+j}$$

b)

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}j}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\, e^{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)j}} = \sqrt[6]{2}\; e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)j}$$

$k \in \{0,1,2\}$.

D'aquí:

$$\boxed{z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{\pi/4\, j}\;;\quad z_1 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{11\pi}{12}j}\;;\quad z_2 = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{19}{12}j}}$$

1GM51-52

2. (2pt) Considereu l'equació matricial que segueix. Utilitzeu **càlcul matricial** per expressar i trobar la seva solució:

$$X\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema anterior és equivalent a:

$$\begin{cases} X\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (1) \\ \quad i & \\ X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

De (2) obtenim: $X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

subtituïm per veure si (1) es compleix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\boxed{R: \ X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

1GM51-52

3. (2pt) En $\mathbb{R}^4$, es consideren els vectors $(1, 2, 0, -a)$, $(3, 5, b, 1)$ i $(2, 8, a, -3)$. Trobeu a i b a fi que el conjunt que formen sigui linealment dependent.

$\{(1,2,0,-a), (3,5,b,1), (2,8,a,-3)\}$ és l. depend

si i només, si,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & b & a \\ -a & 1 & -3 \end{pmatrix} < 3.$$

Considerem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & b & a \\ -a & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & b & a \\ 0 & 1+3a & -3+2a \end{pmatrix} \sim$$

$F_2: F_2 - 2F_1$

$F_4: F_4 + aF_1$

$F_3: F_3 + bF_2$

$F_4: F_4 + (1+3a)F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a+4b \\ 0 & 0 & -3+2a+4(1+3a) \end{pmatrix}$$

Per tant, hem d'imposar:

$$\begin{cases} a+4b=0 & (1) \\ -3+2a+4(1+3a)=0 & (2) \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} a+4b=0 \\ 1+14a=0 \end{cases} \longrightarrow a = -1/14$$

$$b = -\frac{a}{4} = \frac{1}{56}$$

$$\boxed{R: a = -\frac{1}{14}, \; b = \frac{1}{56}}$$

1GM51-52

4. (3pt) En $\mathbb{R}^3$, es consideren els subespais

$$F = <(3,-1,0),(1,1,2)> \text{ i } G = \{(x,y,z) : x+z = y+2z = 0\}.$$

(a) Trobeu una base i la dimensió de F, G, $F \cap G$ i $F+G$.

(b) Sense fer càlculs, raoneu perquè és possible escriure el vector $(1,1,1)$ com a suma d'un vector de F més un vector de G. És única aquesta descomposició?

a) * Una base de F és, p. ex, $\{(3,-1,0),(1,1,2)\}$. Per trobar una base de G resolem el sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 & \longrightarrow x=-z \\ y+2z=0 & \longrightarrow y=-2z \end{cases}$$

$G \ni (x,y,z) = (-z,-2z,z) = z(-1,-2,1)$.

* Una base de G és, p. ex, $\{(-1,-2,1)\}$.

* Per tant $\dim_{\mathbb{R}} F = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} G = 1$.

* Busquem ara una base de $F+G$:

$$F+G = <(3,-1,0),(1,1,2),(-1,-2,1)>.$$

Comprovem si el s. de generadors de $F+G$ és l. indep:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \text{ que té } \det A = 18 \neq 0$$

$F_2 : F_1 + 3F_2$

Per tant: $\{(3,-1,0),(1,1,2),(-1,-2,1)\}$ és una base de $F+G$.

és a dir, $\dim(F+G) = 3$ i $F+G = \mathbb{R}^3$.

* Per la fórmula de Grassman:

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 0$$

$F \cap G = 0$ i $F \cap G$ no té base! $\Rightarrow \boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$

b) Com $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ es pot escriure de manera única com a suma d'un vector de F més un vector de G.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2013-2014

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GM41-42. 23 d'octubre de 2013.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (a) (2pt) Calculeu i doneu el resultat en forma binòmica i exponencial de:

$$z = \frac{-1+j}{8e^{\frac{\pi}{6}j}(-1+\sqrt{3}j)^2}.$$

(b) (1pt) Useu l'apartat anterior per calcular l'argument (entre 0 i 2π) de z^{23}.

a) Considerem: $-1+j = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}j}$, $-1+\sqrt{3}j = 2e^{\frac{-2\pi}{3}j}$.

D'aquí:

$$z = \frac{-1+j}{8e^{\frac{\pi}{6}j}(-1+\sqrt{3}j)^2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}j}}{8e^{\pi/6 j}(2^2 e^{4\pi/3 j})} = \frac{\sqrt{2}}{32} e^{\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)j}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{32} \cdot e^{\frac{9-2-16}{12}\pi j} = \frac{\sqrt{2}}{32} \cdot e^{\frac{-9\pi}{12}j} = \frac{\sqrt{2}}{32} e^{-\frac{3\pi}{4}j}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{32} e^{\frac{5\pi}{4}j} = \frac{\sqrt{2}}{32}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}j\right) = \frac{1}{16}(-1-j)$$

$$\boxed{R: \quad z = \frac{\sqrt{2}}{32} e^{\frac{5\pi}{4}j} = \frac{-1}{32} - \frac{1}{32}j}$$

b) l'argument de $z^{23} = \frac{5\pi}{4} \cdot 23 = \frac{115}{4}\pi$, per reduir-lo a un angle entre $(0, 2\pi)$ considerem

115 | 8
35   14
3

, d'aquí:

$$115 = 14 \cdot 8 + 3$$

$$\rightarrow \frac{115}{4}\pi = 14 \cdot \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$

per tant l'argument de z^{23} és $\frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{R: \quad \frac{3\pi}{4}}$$

1941-42

2. (2pt) Considereu l'equació matricial que segueix. Utilitzeu **càlcul matricial** per expressar i trobar la seva solució:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 0 & 15 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}.$$

L'equació anterior és equivalent a:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -1 & 18 \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

De (2) deduïm:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

comprovem que X és solució de (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\boxed{R: \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

14M41-42

3. (2pt) En $\mathbb{R}^4$, es considera el subespai vectorial generat per $(2,3,1,-5)$ i $(0,2,-1,3)$. Trobeu a i b a fi que el vector $(2,a,3,-b)$ pertanyi a aquest subespai.

$(2,a,3,b) \in \langle (2,3,1,-5),(0,2,-1,3) \rangle$ si i només si, existeixen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(2,a,3;b) = \alpha(2,3,1,-5) + \beta(0,2,-1,3)$$

per tant, si i només si,

$$\text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \text{rg} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & b \end{array}\right)$$

Considerem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -b+5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -b+11 \end{pmatrix}$$

$F_1: \frac{1}{2}F_1$

$F_2: F_2 - \frac{3}{2}F_1$

$F_3: F_3 - \frac{1}{2}F_1$

$F_4: F_4 + \frac{5}{2}F_1$

$F_2: F_3$

$F_3: F_2 + 2F_3$

$F_4: F_4 + 3F_3$

D'aquí, com $\text{rg}\, A = 2$, imposem: $\begin{cases} a+1=0 \\ -b+11=0 \end{cases}$

és a dir, $a=-1$, $b=11$.

$$\boxed{R: \ a=-1, \ b=11}$$

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup DT. 15 d'octubre de 2015.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (1pt) Trobeu tots els complexos z complint:

$$ze^{zj} = \bar{z}.$$

2. (3pt) Trobeu les arrels i la descomposició factorial a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$ del polinomi

$$p(z) = z^5 - z^4 + 4z - 4.$$

3. (3pt) Sigui $F_a = \langle (1, a, 1), (-1, 2, 0), (1, -1, -a) \rangle$.
   (a) Per quins valors de a i b, el vector $(b, 3-b, 0)$ pertany al subespai F_a?
   (b) Discutiu en funció de a, la dim F_a.
   (c) Per quins valors de a, $F_a = \mathbb{R}^3$?

4. (3pt) En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considerem el subespai:

$$F = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ A^t = A, \ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

   (a) Doneu una base de F.
   (b) Justifiqueu que $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ és del subespai F i expresseu-lo com a combinació lineal dels vectors de la base que heu donat en l'apartat anterior.

Resolució

$\boxed{1.}$ Plantegem $z = a + bj = Re^{\alpha j}$, $a, b, R, \alpha \in \mathbb{R}$
$R \geq 0.$

Subst. a l'equació:

$$Re^{\alpha j} \cdot e^{(a+bj)j} = Re^{-\alpha j}$$

és a dir,

$$Re^{-b} \cdot e^{(\alpha + a)j} = Re^{-\alpha j}.$$

D'aquí: $Re^{-b} = R \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Aleshores, l'equació que obtenim és:

$$z\, e^{zj} = z \quad , z \in \mathbb{R}.$$

D'aquí, o bé, $z = 0$

o bé, $e^{zj} = 1 \Rightarrow z = 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Solució: $\boxed{z = 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}}$.

$\boxed{2}$ $p(z) = z^5 - z^4 + 4z - 4$

Com $p(1) = 1 - 1 + 4 - 4 = 0$, per Ruffini:

	1	-1	0	0	4	-4
1		1	0	0	0	4
	1	0	0	0	4	$\lfloor 0$

$$p(z) = (z-1)(z^4+4).$$

Les seves arrels són 1 i les arrels de z^4+4:

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-4}$$

Ara bé, $-4 = 4e^{\pi j}$, per tant,

$$z = \sqrt[4]{4\, e^{\pi j}} = \sqrt[4]{4\, e^{(\pi + 2\pi k) j}} , \ k \in \{0,1,2,3\}$$
$$= \sqrt{2}\, e^{\frac{(\pi + 2\pi k) j}{4}}$$

- $z_0 = \sqrt{2}\, e^{\pi/4 j} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$
- $z_1 = \sqrt{2}\, e^{3\pi/4 j} = -1 + j$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{5} j} = -1 - j$$
$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{5} j} = 1 - j$$

* Les arrels de $p(z)$ són $\{1,\ 1 \pm j,\ -1 \pm j\}$

* La descomposició factorial a $\mathbb{C}$:

$$p(z) = (z-1)(z-1-j)(z-1+j)(z+1-j)(z+1+j)$$

i la descomposició factorial a $\mathbb{R}$

$$p(z) = (z-1)\left((z-1)^2+1\right)\left((z+1)^2+1\right).$$

$\boxed{3}$ El vector $\vec{v} = (b, 3-b, 0) \in F_a$ si i només si és combinació lineal dels vectors:

$$\{\vec{u}_1 = (1, a, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 2, 0),\ \vec{u}_3 = (1, -1, -a)\}$$

Com són vectors de $\mathbb{R}^3$, això passa si i només si

$$rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}).$$

Plantegem

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & a & -1 & 3-b \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_2 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{v} \end{array}
\end{array}
\underset{F_2 \mapsto F_2 + 2F_1}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & a+2 & 1 & 3+b \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim_{\substack{F_3 \mapsto F_2-(a+2)F_3 \\ F_2 \mapsto F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{1+a(a+2)} & 3+b \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow a^2+2a+1 = (a+1)^2.$

Casos $a \neq -1$, $a=-1$.

- <u>Cas $a \neq -1$:</u> $rg(\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3) = 3$ i per tant

$rg(\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3) = rg(\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3\, \vec{v}) = 3$

$\Rightarrow v \in F_a$, $\forall b$.

- <u>Cas $a=-1$:</u> $rg(\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3) = 2$ d'aquí ~~per tant~~

$rg(\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3 | v) = 2 \Longleftrightarrow b=-3.$

$\Rightarrow \vec{v} \in F_a$, si $b=-3$

b) La $\dim F_a = rg(u_1\, u_2\, u_3) = \begin{cases} 3, & \text{si } a \neq -1 \\ 2, & \text{si } a=-1 \end{cases}$

c) $F_a = \mathbb{R}^3$, com $F_a \subset \mathbb{R}^3$, si i només si $\dim F_a = \dim \mathbb{R}^3$. Per tant, si i només si $a \neq -1$.

$\boxed{4}$ $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ amb $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$A^t = A$ si i només si: $\quad b=c \rightarrow b=c$

$Tr(A)=0$ si i només si $\quad a+d=0 \rightarrow a=-d$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F : \quad \begin{pmatrix} -d & c \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara bé; $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ són clarament

l. independents, per tant,

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ és una base de F.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ té traça: $\quad 3+(-3)=0$

a més $A^t = A$

$\Rightarrow A \in F$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2015-2016

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GT8. 15 d'octubre de 2015.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (1pt) Trobeu tots els complexos z complint:

$$ze^{zj} = -\bar{z}.$$

2. (3pt) Resoleu l'equació:

$$\frac{z^4}{2} = \frac{\sqrt{3}+j}{je^{2\pi j/3}}.$$

3. (3pt) Sigui $F_a = \langle (0, a, 1), (-1, 2, 0), (1, -1, -a+2) \rangle$.
   (a) Per quins valors de a i b, el vector $(b+1, 2-b, 0)$ pertany al subespai F_a?
   (b) Discutiu en funció de a, la dim F_a.
   (c) Per quins valors de a, $F_a = \mathbb{R}^3$?

4. (3pt) En $\mathbb{R}_2[x]$, considerem el subespai:

$$F = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}.$$

   (a) Doneu una base de F.
   (b) Justifiqueu que $3x^2 - x - 2$ és de F i trobeu les seves coordenades en la base que heu donat en l'apartat anterior.

$\boxed{1}$ Considerem : $z = a + bj = Re^{\alpha j}$ on $\alpha, R, a, b \in \mathbb{R}$
i $R > 0$

Subst. a l'equació:

$$Re^{\alpha j} \cdot e^{(a+bj)j} = -Re^{-\alpha j}$$

és a dir,

$$Re^{-b} e^{(\alpha+a)j} = Re^{(-\alpha+\pi)j}$$

Igualant mòduls:

$$Re^{-b} = R \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

Aleshores, l'equació:

$$z e^{zj} = -z \quad , \; z \in \mathbb{R}$$

D'aquí, o bé, $z = 0$

o bé, $e^{zj} = -1 \Rightarrow z = \pi + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

Solucions:

$$\{ 0, \; \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

$\boxed{2}$ Hem de resoldre:
$$z^4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + j}{j \, e^{\frac{2\pi}{3} j}}$$

ara bé, $\sqrt{3} + j = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6} j}$; $j = e^{\frac{\pi}{2} j}$

Per tant:
$$z^4 = \frac{4 e^{\frac{\pi}{6} j}}{e^{\frac{\pi}{2} j} \cdot e^{\frac{2\pi}{3} j}} \Longleftrightarrow z^4 = 4 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) j}$$

$$\Longleftrightarrow z^4 = 4 \, e^{\frac{1-3-4}{6} \pi j} \Longleftrightarrow z^4 = 4 e^{\pi j}$$

D'aquí, hobem les arrels quartes de $4 e^{\pi j}$:

$$z = \sqrt[4]{4 e^{\pi j}} = \sqrt[4]{4 \, e^{(\pi + 2\pi k) j}} = \sqrt{2} \, e^{\frac{\pi + 2\pi k}{4} j}$$

$k = 0$: $z_0 = \sqrt{2} \, e^{\frac{\pi}{4} j} = 1 + j$

$k = 1$: $z_1 = \sqrt{2} \, e^{\frac{3\pi}{4} j} = -1 + j$

$k = 2$: $z_2 = \sqrt{2} \, e^{\frac{5\pi}{4} j} = -1 - j$

$k = 3$: $z_3 = \sqrt{2} \, e^{\frac{7\pi}{4} j} = 1 - j$

Solucions:
$$\{ 1 \pm j, -1 \pm j \}$$

$\boxed{3}$ $F_a = \langle \vec{u}_1 = (0, a, 1), \vec{u}_2 = (-1, 2, 0), \vec{u}_3 = (1, -1, -a+2) \rangle$

$v = (b+1, 2-b, 0)$

a)

$v \in F_a$ si i només si v és comb. lineal de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

Però com són vectors de $\mathbb{R}^3$, això passa si i només si

$$rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v})$$

Considerem:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & b+1 \\ 2 & a & -1 & 2-b \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_2 & u_1 & u_3 & v \end{array} \end{array} \underset{F_2 \mapsto F_2 + 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & b+1 \\ 0 & a & 1 & 4+b \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{1-a(-a+2)}_{a^2-2a+1} & 4+b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & b+4 \end{array}\right)$$

Distingim dos casos: $a = 1$, $a \neq 1$.

<u>Si $a \neq +1$</u>. $rg(u_1 u_2 u_3) = 3 \Rightarrow F_a = \mathbb{R}^3$

i aleshores, clarament, $v \in F_a$ $\forall b$.

Si $a = 1$, $rg(u_1 u_2 u_3) = 2$, $v \in F_a \iff$ <u>$b = -4$</u>

b) D'acord amb els càlculs de l'apartat anterior:

$$\dim F_a = rg(u_1\, u_2\, u_3) = \begin{cases} 3, & \text{si } a \neq 1 \\ 2, & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

c) $F_a = \mathbb{R}^3$ si i només si $\dim F_a = 3$.

Per tant, si i només si, $a \neq 1$.

$\boxed{4}$

a) $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$: $p(x) = ax^2 + bx + c$, on $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Si $p(1) = 0$: $a + b + c = 0$

$\Rightarrow c = -a - b$.

Per tant,

$$p(x) \in F \iff p(x) = ax^2 + bx + (-a-b)$$
$$= a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

$\Rightarrow \{x^2 - 1, x - 1\}$ són un sist. de generadors de F, clarament l. indep. (perquè no existeix cap real α tq: $\alpha(x-1) = x^2 - 1$!!!)

b) $p(x) = 3x^2 - x - 2$: $p(1) = 0 \Rightarrow p \in F$

Plantegem $3x^2 - x - 2 = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x - 1)$

és a dir,

$$3x^2 - x - 2 = \alpha x^2 + (\beta \quad) x + (-\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha \\ -1 = \beta \\ -2 = -\alpha - \beta \ \checkmark \end{cases}$$ s. compatible.

En la base: $B = \{ x^2 - 1, x - 1 \}$ les coordenades de $3x^2 - x - 2$ són $(3, -1)_B$.

Àlgebra i geometria. QP 2015-16. Grup 1GT5

Nom i cognoms:

Control 1. Nombres complexos i sistemes d'equacions lineals. Solució

Temps: 50 minuts

1. **(2.5 punts)** Calcula les arrels del polinomi $p(z) = z^5 - 2z^4 + 5z^3 + z^2 - 2z + 5$, sabent que $1 + 2\mathtt{j}$ és una d'elles. Dóna la descomposició de $p(z)$ a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$.

   Solució. Si $1 + 2\mathtt{j}$ és una arrel de $p(z)$, també ho és $1 - 2\mathtt{j}$. També observem que $z = -1$ és una de les altres arrels, perquè $p(-1) = 0$.

   Dividim el polinomi per $z - (1 + 2\mathtt{j})$, $z - (1 - 2\mathtt{j})$, i $z + 1$, per exemple pel mètode de Ruffini.

	1	-2	5	1	-2	5
$1+2\mathtt{j}$		$1+2\mathtt{j}$	-5	0	$1+2\mathtt{j}$	-5
	1	$-1+2\mathtt{j}$	0	1	$-1+2\mathtt{j}$	0
$1-2\mathtt{j}$		$1-2\mathtt{j}$	0	0	$1-2\mathtt{j}$	
	1	0	0	1	0	
-1		-1	1	-1		
	1	-1	1	0		

   Així tenim:

   $$p(z) = (z^2 - z + 1)(z - (1 + 2\mathtt{j}))(z - (1 - 2\mathtt{j}))(z + 1)$$

   Resolem l'equació $z^2 - z + 1 = 0$: les solucions són $z = \dfrac{1 \pm \mathtt{j}\sqrt{3}}{2}$.

   Ara només cal observar que $(z - (1 + 2\mathtt{j}))(z - (1 - 2\mathtt{j})) = z^2 - 2z + 5$.

   Per tant, podem descomposar $p(z)$ en $\mathbb{C}$ i en $\mathbb{R}$:

   $$p(z) =_{\mathbb{C}} \left(z - \frac{1 + \mathtt{j}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 - \mathtt{j}\sqrt{3}}{2}\right)(z-(1+2\mathtt{j}))(z-(1-2\mathtt{j}))(z+1) =_{\mathbb{R}} (z^2-z+1)(z^2-2z+5)(z+1)$$

2. **(2.5 punts)** Calcula totes les arrels sisenes de -1.

   Solució.

   $$-1 = e^{\pi\mathtt{j}} \Rightarrow \sqrt[6]{-1} = e^{\frac{\pi + k2\pi}{6}\mathtt{j}},\ k = 0, \ldots, 5$$

   Les sis solucions són: $e^{\frac{\pi}{6}\mathtt{j}}$, $e^{\frac{\pi}{2}\mathtt{j}}$, $e^{\frac{5\pi}{6}\mathtt{j}}$, $e^{\frac{7\pi}{6}\mathtt{j}}$, $e^{\frac{3\pi}{2}\mathtt{j}}$, $e^{\frac{11\pi}{6}\mathtt{j}}$.

3. **(2.5 punts)** Discuteix segons els valors de a i b, i resol quan sigui possible:

   $$\left.\begin{array}{l} x + (2 - a)z = 0 \\ ax + 2y - z = b \\ -y + z = 1 - b \end{array}\right\}$$

   Solució. Escrivim la matriu ampliada i la redu̍ím a una matriu triangular pel mètode de Gauss:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 0 \\ a & 2 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 1-b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 2 & a^2-2a-1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 1-b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 2 & a^2-2a-1 & b \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 & 2-b \end{array}\right)$$

Observem que $a^2-2a+1=(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1$.

Per tant:

- Si $a\neq 1$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $a=1$ i $b=2$ el sistema és Compatible Indeterminat.
- Si $a=1$ i $b\neq 2$ el sistema és Incompatible.

Resolució per $a\neq 1$. A partir de la matriu del sistema obtenim

$$\left.\begin{array}{l} x+(2-a)z=0 \\ 2y+(a^2-2a-1)z=b \\ (a-1)^2z=2-b \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{2-b}{(a-1)^2},\ y=\frac{1}{2}\left(b-(a^2-2a-1)\frac{2-b}{(a-1)^2}\right),\ x=(a-2)\frac{2-b}{(a-1)^2}$$

Simplificant la y:

$$x=\frac{(a-2)(2-b)}{(a-1)^2},\ y=b-1+\frac{2-b}{(a-1)^2},\ z=\frac{2-b}{(a-1)^2}$$

Resolució per $a=1$ i $b=2$. A partir de la matriu del sistema obtenim

$$\begin{array}{l} x+z=0 \\ 2y-2z=2 \end{array} \Rightarrow x=-z,\ y=1+z$$

4. **(2.5 punts)** Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ resol l'equació matricial $A\cdot X=B$.

Solució. Com que $\det A=0$, no podem calcular A^{-1}. Calculem X escrivint el sistema de 4 equacions amb 4 inògnites que resulta de l'equació matricial:

Escrivint $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ l'equació es resol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z=1 \\ 2x+4z=2 \\ y+2t=3 \\ 2y+4t=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y+2t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2z \\ y=3-2t \end{array}\right.$$

Per tant, $X=\begin{pmatrix} 1-2z & 3-2t \\ z & t \end{pmatrix}$

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2015-2016

Àlgebra i Geometria. Control 1.
Grup 1GM40-60. 22 d'Octubre de 2015.

Nota: La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. **(3 punts)**
   (a) Trobeu totes les solucions complexes de l'equació
   $$z^3 = j.$$
   (b) Trobeu un polinomi de grau el més petit possible i **amb coeficients reals**, que tingui entre les seves arrels totes les solucions de l'apartat anterior.

2. **(3 punts)** Donat el sistema d'equacions definit per:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ 5 \end{pmatrix},$$
   trobeu el valor dels paràmetres a i b pels quals el sistema té infinites solucions i resoleu-lo en aquest cas.

3. **(4 punts)** Donats els subespais $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0\}$ i $G =< (1, 1, 2), (1, 2, 3) >$. Es demana:
   (a) Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels subespais F i G.
   (b) Amplieu la base anterior de F fins a obtenir una base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Trobeu una base i dimensió dels subespais $F + G$ i $F \cap G$.
   (d) Per quins valors del paràmetre a el vector $v = (1 - a, a, 1 + a)$ és del subespai G? Trobeu, en aquest cas, les coordenades de v en la base de G trobada a l'apartat (a).

CONTROL 1GM40-60 22/10/15

1)

a) $z^3 = j = e^{\frac{\pi}{2}j} \Rightarrow z = \sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2}j}} = \begin{cases} \overset{k=0}{} \; e^{\frac{\pi}{6}j} \\ \overset{k=1}{} \; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)j} \\ \overset{k=2}{} \; e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)j} \end{cases}$

$|j| = 1$

$\mathrm{Arg}(j) = \frac{\pi}{2}$

$$= \begin{cases} e^{\frac{\pi}{6}j} = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}j = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2} \\ e^{\frac{5\pi}{6}j} = \cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}j = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2} \\ e^{\frac{3\pi}{2}j} = \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}j = -j \end{cases}$$

Per tant, les solucions són $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$; $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$; $z_3 = -j$

b) Un polinomi a coeficients reals que tingui z_1, z_2 i z_3 com a arrels també tindrà $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ com a arrels amb la mateixa multiplicitat per tant, el polinomi buscat serà de grau 6 amb factorització sobre $\mathbb{C}$

$$\underbrace{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)}_{\|} \cdot \underbrace{(z-z_2)(z-\bar{z}_2)}_{\|} \underbrace{(z-z_3)(z-\bar{z}_3)}_{\|}$$

és a dir, $\left(\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot (z^2+1)$

$= z^6 + 1.$

2) Perquè el sistema
$$\begin{array}{c} \overset{A}{\|} \qquad\qquad \overset{b}{} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 2 & 1 & -8 & b \\ -1 & -2 & 10 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$
tingui infinites solucions, el sistema ha de ser compatible indeterminat.

és a dir $\quad \mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}(A|b) \leq 2$

Com que el menor d'A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ el rang haurà de ser 2.

Aplicant Gauss
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & -1 & -8+2a & b+4 \\ 0 & -1 & 10-a & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 + f_1 \end{array}$$

Mirant la segona i tercera fila veiem que rang $A = \text{rang}(A|b) = 2$

$$\iff \begin{array}{l} 10 - a = -8 + 2a \\ 3 = b + 4 \end{array} \iff \boxed{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -1 \end{array}}$$

En aquest cas, el sistema és $\left.\begin{array}{r} x + y - 6z = -2 \\ -y + 4z = 3 \end{array}\right\}$

que té per solució $\boxed{y = 4z - 3}$ $\boxed{x = -y + 6z - 2 =}$
$z \in \mathbb{R}$ $= -4z + 3 + 6z - 2$
$\boxed{= 2z + 1}$

S.C.I. amb 1 grau de llibertat.

3) a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} =$
↘ sistema homogeni amb 2 graus de llibertat

$= \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$ $\boxed{\dim F = 2}$

$G = \langle (1, 1, 2), (1, 2, 3) \rangle$ el sistema de generadors de G és linealment independent $\Rightarrow$ $\boxed{\dim G = 2}$. Les bases de F i G estan formades pels sist. de generadors donats.

b) Per ampliar la base de F a una base de $\mathbb{R}^3$, observem que, a partir de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

p.e. $\{\underbrace{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)}_{\in F}, (0, 0, 1)\}$ és també base de $\mathbb{R}^3$

ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

c) Sabem que $F + G = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3) \rangle$ apliquem el mètode de reducció de Gauss per trobar base i dimensió, apliquem el mètode de reducció de Gauss a la matriu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} f_1 \\ f_2+f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-f_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} f_1 \\ f_2+f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-f_1-(f_2+f_1) \end{array}$$

Obtenim així la relació $f_4 - f_1 - f_2 - f_1 = f_3 - f_1 \iff$

$$\iff \underbrace{f_1 + f_2}_{\in F} = \underbrace{f_4 - f_3}_{\in G} \in F \cap G, \quad f_4 - f_3 = (0,1,1)$$

és a dir $\dim(F \cap G) = 1$ i $\dim(F+G) = \underset{= 2}{\dim F} + \underset{= 2}{\dim G} - \underset{= 1}{\dim F \cap G}$

$$= \boxed{3}$$

Una base de $F + G = \{(1,1,0), (-1,0,1), (1,1,2)\}$

i una base de $F \cap G = \{(0,1,1)\}$.

d) $v = (1-a, a, 1+a) \in G = \langle \underset{v_1}{(1,1,2)}, \underset{v_2}{(1,2,3)} \rangle$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1-a & a & 1+a \end{vmatrix} = 2(1+a) + 3(1-a) + 2a - 4(1-a) - (1+a) - 3a = \underbrace{1+a-(1-a)-a}_{= a} = 0$$

$$\iff \boxed{a = 0}$$

Per tant $(1,0,1) \in \langle (1,1,2), (1,2,3) \rangle$ i les seves coordenades λ_1, λ_2 són $(1,0,1) = \lambda_1 \underset{v_1}{(1,1,2)} + \lambda_2 \underset{v_2}{(1,2,3)}$ en la base v_1, v_2

$$\iff \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2016-2017

Àlgebra i Geometria. Control 1.
Grups 1GM4-1DT. 4 d'Octubre de 2016.

Nota: La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. Donat el polinomi a coeficients reals $p(x) = x^3 - x^2 + x - k$, es demana:

   (a) **(2 punts)** Trobeu el valor del nombre real k sabent que $p(x)$ té una arrel imaginària pura.

   (b) **(1.5 punts)** Trobeu la factorització de $p(x)$ en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$.

2. **(3 punts)** Donada l'equació matricial $AX = B$, trobeu X sent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 10 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Sigui el subespai $F =< (1, 2, 0), (0, 1, 2) >$. Es demana:

   (a) **(1.5 punts)** Trobeu la dimensió i una base del subespai F i amplieu la base de F trobada a una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(1 punt)** Trobeu el valor d'$a \in \mathbb{R}$ per tal que el vector $u = (3, a, -2)$ sigui d'U.

   (c) **(1 punt)** Donat el subespai $G =< (1, 0, -4), (1, 1, -2) >$, determineu si és cert que $F = G$.

① $p(x)=x^3-x^2+x-k \in \mathbb{R}[x]$

a) Sabem que $p(bj)=0 \Rightarrow p(-bj)=0,\ b\in\mathbb{R}$, ja que $p(x)\in\mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x)=(x-bj)(x+bj)(x-a)$, amb $a\in\mathbb{R}$, ja que $gr(p)=3$

Així:

$p(x)=x^3-x^2+x-k=(x-bj)(x+bj)(x-a)=(x^2+b^2)(x-a)=x^3-ax^2+b^2x-ab^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -a=-1 \rightarrow a=1$
$\quad b^2=1 \rightarrow b=\pm 1$
$\quad -ab^2=-1=-k \Rightarrow \boxed{k=1}$

b) $\boxed{\begin{array}{l} p(x)=(x-j)(x+j)(x-1) : \text{factorització a } \mathbb{C}[x] \\ p(x)=(x^2+1)(x-1) : \text{factorització a } \mathbb{R}[x] \end{array}}$

② És clar que $X=\begin{pmatrix} x & z & u \\ y & t & v\end{pmatrix}$. D'altra banda $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0 \Rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'eq. matricial $AX=B$ es converteix en:

$x-3y=-5 \qquad z-3t=1 \qquad u-3v=3$
$\boxed{-2x+6y=10 \qquad -2z+6t=2 \qquad -2u+6v=-6}$ → proporcionals a les respectives primeres equacions

$\Rightarrow$ SCI : $x-3y=-5 \rightarrow x=3y-5$ // $z-3t=1 \rightarrow z=1+3t$ // $u-3v=3 \rightarrow$ $\rightarrow u=3+3v$

$\Rightarrow \boxed{X=\begin{bmatrix} 3y-5 & 3t+1 & 3v+3 \\ y & t & v\end{bmatrix},\ y,t,v\in\mathbb{R}}$

③ $F=\langle(1,2,0),(0,1,2)\rangle$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F=\{(1,2,0),(0,1,2)\} : \text{base de } F \\ \dim F=2\end{cases}}$

Ampliem a una base de $\mathbb{R}^3$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$ L.I. i $\dim\mathbb{R}^3=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{R}^3=\{(1,2,0),(0,1,2),(0,0,1)\}}$

b) $v\in F \Leftrightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}=10-2a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=5}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} G=\{(1,0,-4),(1,1,-2)\} : \text{base de } G \\ \dim G=2=\dim F\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow F=G \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}=2 : \text{SÍ, ja que } C_3=C_1-2C_2 \\ \text{i} \\ \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}=2 : \text{SÍ, ja que } C_3=C_1-C_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>Efectivament $F=G$</u>

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2016-2017

Nom i Cognoms:...

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GT8 6 d'octubre de 2016.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (a) (0.5pt) Troba l'argument entre 0 i 2π de z^{100}, on $z = e^{\frac{7\pi}{6}j}$.

   (b) (2.5pt) Troba la forma binòmica i exponencial del complex
   $$z = \frac{(1-2j)e^{\frac{\pi}{2}j}}{(2+j)e^{\frac{4\pi}{3}j}}.$$

2. (2pt) Calcula:
$$\begin{vmatrix} 1000 & 3000 & 0 & 5000 & 1000 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. (3.5pt) Sigui $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R} : \ x + y - az + t = y + 2t = x + 3y - az + 5t = 0\}$ i el vector $v = (2, -2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Per quin valor de a, el vector v és de F?

   (b) Troba una base i la dimensió de F, pel valor de a de l'apartat anterior.

4. (1.5pt) Completa les expressions que segueixen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, :

   (a) $z - \bar{z} =$ (b) La part real de $Re^{\beta j}$ és ...... (c) $e^{\alpha j} + e^{-\alpha j} =$

   (d) Sigui A una matriu de dimensió 4×3 (4 files). Si el sistema $Ax = b$ és compatible i indeterminat amb 2 graus de llibertat aleshores el rg $A =$ i el rg $(A|b) =$.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2016-2017

Nom i Cognoms:..

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GM5 6 d'octubre de 2016.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (a) (0.5pt) Troba l'argument entre 0 i 2π de z^{100}, on $z = e^{\frac{4\pi}{3}j}$.

   (b) (2.5pt) Troba les solucions de $z^{12} = -32 + 32\sqrt{3}j$ que tenen el seu argument en $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Expressa-les en forma exponencial.

2. (2pt) Calcula

$$\begin{vmatrix} 1000 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5000 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1000 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3000 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. (3.5pt) Considera $F = \langle (2,-1,3,4), (1,1,0,1) \rangle$ i els vectors $u = (5, a, 6, 9)$ i $v = (-a, 2, -b, b)$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Per quin valors de a i b, el vectors u, v són de F?

   (b) Quina és la dimensió de F. Dóna una base de F que contingui els vectors u, v.

4. (1.5pt) Completa les expressions que segueixen,:

   (a) $z + \bar{z} =$ (b) $z\bar{z} =$ (c) $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha j} - e^{-\alpha j} =$

   (d) Sigui A una matriu de dimensió 3×4 (3 files). Si el sistema $Ax = b$ és compatible i indeterminat amb 3 graus de llibertat aleshores el rg $A =$ i el rg $(A|b) =$.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2016-2017

Nom i Cognoms:...

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GM5 6 d'octubre de 2016 (rectificat).

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (a) (0.5pt) Troba l'argument entre 0 i 2π de z^{100}, on $z = e^{\frac{4\pi}{3}j}$.
   (b) (2.5pt) Troba les solucions de $z^{12} = -32 + 32\sqrt{3}j$ que tenen el seu argument en $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Expressa-les en forma exponencial.

2. (2pt) Calcula

$$\begin{vmatrix} 1000 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5000 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1000 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3000 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. (3.5pt) Considera $F = \langle (2, -1, 3, 4), (1, 1, 0, 1) \rangle$ i els vectors $u = (5, a, 6, 9)$ i $v = (-a, -2, b, b)$, on $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Per quin valors de a i b, el vectors u, v són de F?
   (b) Quina és la dimensió de F. Dóna una base de F que contingui els vectors u, v.

4. (1.5pt) Completa les expressions que segueixen,:
   (a) $z + \bar{z} =$ (b) $z\bar{z} =$ (c) $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha j} - e^{-\alpha j} =$
   (d) Sigui A una matriu de dimensió 3×4 (3 files). Si el sistema $Ax = b$ és compatible i indeterminat amb 3 graus de llibertat aleshores el rg $A =$ i el rg $(A|b) =$.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curs 2016-2017

Nom i Cognoms:. . . . .

Algebra i Geometria. Prova 1. Grup 1GT5. 9 de març de 2017.

Nota La resolució de la prova no pot reduir-se a la realització de càlculs, es necessari que aquests vagin precedits de petites explicacions que justifiquin el seu ús.

1. (1.5pt) Dóna la forma binòmica i exponencial de:

$$z = \frac{-8e^{\frac{5\pi}{4}j}}{(2j)^2 e^{\frac{\pi}{2}j}}.$$

2. (1.5pt) Troba les arrels del polinomi $p(z) = 2z^4 + 8$ (pots deixar la resposta en forma exponencial).

3. (2pt) Discuteix en funció dels paràmetres **reals** a i b el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & b^2 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

4. (2pt) Sigui $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R} : \ x + 2y = -x - y + z + t = y + z + t = 0\}$. Dóna una base i la dimensió de F.

5. (3pt) Sigui $B_1 = \{(2, -1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Comprova que B_1 és una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Troba les coordenades de $(5, 0, 7)$ en la base B_1.

$\boxed{1}$

$$z = \frac{-8\,e^{\frac{5\pi}{4}j}}{(2j)^2\,e^{\frac{\pi}{2}j}} = \frac{-8\,e^{5\pi/4\,j}}{-4\cdot e^{\pi/2\,j}} = 2\,e^{\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)j} = 2\,e^{\frac{3\pi}{4}j} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}j$$

$$\boxed{\text{R:}\quad z = 2e^{3\pi/4\,j} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}j}$$

$\boxed{2}$

$p(z) = 2z^4+8$. Plantegen $2z^4+8=0 \leftrightarrow z^4=-4$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{4e^{\pi j}} = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}j}, \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$\boxed{z_0} = \sqrt{2}e^{\pi/4\,j} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 1+j$$

$$\boxed{z_1} = \sqrt{2}\,e^{3\pi/4\,j} = -1+j$$

$$\boxed{z_2} = \sqrt{2}\,e^{5\pi/4\,j} = -1-j$$

$$\boxed{z_3} = \sqrt{2}\,e^{7\pi/4\,j} = 1-j.$$

$\boxed{3}$

$$\begin{cases} x+y+az = b^2 \\ x+ay+z = b \\ ax+y+z = 1 \end{cases}$$

Plantegem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b^2 \\ 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & b-b^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-ab^2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & b-b^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-ab^2+b-b^2 \end{array}\right) = (A'|b')$$

$\det A' = -(a-1)(a^2+a-2) = -(a-1)^2(a+2)$

Casos:

- (∘) $\underline{a \neq 1, -2}$ $\underline{\text{s. comp. DETERMINAT.}}$

(∘) $\underline{a=1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+b-2b^2 \end{array}\right)$$

Imposem $b(1-b)=0 < \begin{matrix} b=0 \longrightarrow 1+b-2b^2\big|_{b=0} \neq 0 \\ b=1. \rightarrow 1+b-2b^2\big|_{b=1} = 0. \end{matrix}$

- (∘∘) $\underline{b=1 \quad \text{s. comp. INDET}}$ 2 graus de llibe.
- (∘∘) $\underline{b=0 \quad \text{s. incomp.}}$
- (∘∘) $\underline{b \neq 0, 1 \quad \text{s. incomp.}}$

(∘) $\underline{a=-2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b^2 \\ 0 & 1 & -1 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b+1 \end{array}\right)$$

- Imposem $b^2+b+1=0$: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$.
- Com $b \in \mathbb{R}$, s incompatible.

$\boxed{4}$ F: $\begin{cases} x+2y = 0 \\ -x-y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \rightarrow$$ S. comp ind. 2 graus de llibertat.

Scanned by CamScanner

Resolem:

$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2z - 2t$

$y + z + t = 0 \rightarrow y = -z - t$

$(x, y, z, t) \in F$:

$(-2z - 2t, -z - t, z, t) =$

$= z(-2, -1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$

$$\boxed{\text{R: } \underline{\dim F = 2}, \text{ una base és, p. ex., } \{(-2,-1,1,0), (-2,-1,0,1)\}.}$$

$\boxed{5}$ Sigui $B_1 = \{v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$

a) B_1 és una base.

Com $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, 3 vect. l. independents formen una base.

$\underline{\{v_1, v_2, v_3\} \text{ són l. ind.}} \Leftrightarrow \underline{rg(v_1, v_2, v_3) = 3} \Leftrightarrow \det(v_1\, v_2\, v_3) \neq 0$.

Calculem:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

b) $(5, 0, 7) = (\alpha, \beta, \gamma)_{B_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 5 = 2\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha + \beta \\ 7 = \gamma \end{cases} \quad \rightarrow \boxed{\alpha = 5} \rightarrow \boxed{\beta = 5}, \quad \boxed{\gamma = 7}$$

R: $(5, 0, 7) = (5, 5, 7)_{B_1}$.

1. Resol en $\mathbb{C}$ les següents equacions.

(a){20pt} $z^3 = \dfrac{2 - j^{11} - j^{24}}{j\sqrt{2}}$.

$$\boxed{z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot j = e^{\frac{7\pi}{4}\cdot j} \Rightarrow z \in \{e^{\frac{7\pi}{12}\cdot j}, e^{\frac{15\pi}{12}\cdot j}, e^{\frac{23\pi}{12}\cdot j}\}}$$

(b){20pt} $z^3 + (1+j)z^2 + (j-2)z - 2j = 0$.

$$\boxed{z^3 + (1+j)z^2 + (j-2)z - 2j = (z-1)(z+2)(z+j) \Rightarrow z \in \{1, -2, -j\}}$$

2. Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 4x3 i paràmetre k on:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b}= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a){20pt} Quan $k = -1$ classifica i resol aquest s.e.l.

$\boxed{\text{C.D.: } (x, y, z) = (-1, 4, 4).}$

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre k aquest s.e.l. és incompatible.

$\boxed{\text{Aquest s.e.l. és incompatible si i només si } k \notin \{-1, 0, 2\}}$

3. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$: $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ i $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$, on:

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 1, 3), \vec{u}_2 = (2, 0, 3, 2), \vec{v}_1 = (-1, 6, -3, 5), \vec{v}_2 = (0, 4, -1, 4), \vec{v}_3 = (3, 2, 1, -1)$$

(a){20pt} Calcula la dimensió i aconsegueix les equacions del subespai vectorial $U + V$.

$\boxed{U \subset V \implies U + V = V.\ \dim(U+V) = dim(V) = 3.\ \text{Equació: 4x-3y-4z+2t=0}}$

(b){20pt} Obté una base i aconsegueix les equacions del subespai vectorial $U \cap V$.

$\boxed{U \subset V \implies U \cap V = U.\ \dim(U \cap V) = dim(U) = 2.\ \text{Una base: } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.\ \text{Equacions: 6x-y-4z=0; 7y+4z-6t=0}}$

1. Sigui a un paràmetre real. Sabent que -2 és una arrel del polinomi $p(z) = z^5 + 2z^4 + az + 2$,

(a){15pt} Calcula el valor del paràmetre a i troba la resta d'arrels del polinomi p.

$$\boxed{p(-2) = (-2)^5 + 2(-2)^4 - 2a + 2 = -32 + 32 - 2a + 2 = -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \Rightarrow p(z) = (z+2)(z^4+1)$$

$$\boxed{z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow z = \sqrt[4]{1_\pi} = \{1_{\frac{\pi}{4}}, 1_{\frac{3\pi}{4}}, 1_{\frac{5\pi}{4}}, 1_{\frac{7\pi}{4}}\}}$$

Per tant, les arrels d'aquest polinomi són: $\{-2, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\}$

(b){15pt} Dona la factorització de p en factors irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$.

$$p(z) = (z+2)(z^2 - j)(z^2 + j) = (z+2)(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)$$

$$(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j) = (z - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} = z^2 - \sqrt{2}z + 1$$

$$(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}j)(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j) = (z + \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} = z^2 + \sqrt{2}z + 1$$

Per tant, $p(z) = (z+2)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$

2. Considerem la família uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x2 i paràmetre k on:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}= \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

(a){10pt} Quan $k = -2$ classifica i resol aquest s.e.l.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{Aquest s.e.l. és incompatible.}$$

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre k aquest s.e.l. és incompatible.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - k^2 - k + 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \end{array} \Rightarrow k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)(k^2-1) = (k-1)(k+1)(k-1) = (k-1)^2(k+1)$$

$$k = 1\text{:}\ B = (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r(B) = r(A) = 1 < 2 \Rightarrow \text{s.e.l. compatible indeterminat.}$$

$$k = -1\text{:}\ B = (A|b) = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r(B) = r(A) = 2 \Rightarrow \text{s.e.l. comp. determinat.}$$

Per tant, aquest s.e.l. és incompatible per tots el valors del paràmetre K, excepte aquests dos: $k = 1$ i $k = -1$

3. Considerem els vectors de $\mathbb{R}^4$:
$\vec{u}_1 = (1,-1,2,1), \vec{u}_2 = (1,0,-1,2), \vec{u}_3 = (2,-1,1,2), \vec{u}_4 = (0,-1,-1,0), \vec{w} = (-1,-1,4,-1)$.

(a){10pt} Demostra que el conjunt $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5+1 = -4 \neq 0 \Rightarrow B \text{ és lliure} \Rightarrow B \text{ és una base.}$$

(b){15pt} Troba les coordenades del vector $\vec{w}$ en las base B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\vec{w} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_3$

(c){15pt} Obté la dimensió i les equacions del subespai vectorial F de $\mathbb{R}^4$ generat pel conjunt $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{w}\}$.

$\vec{w} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_3 \Rightarrow rang(S) = 2 \Rightarrow \dim(F) = 2$

nº d'equacions $= 4 - \dim(F) = 4 - 2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & -1 & y \\ 2 & 1 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & -3 & z-2x \\ 0 & 0 & t-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+3y+z \\ 0 & 0 & x-t \end{pmatrix}$$

Per tant, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+3y+z=0, x-t=0\}$

Control 1 [1GM31] AiG/GESA/EETAC/UPC 07-03-18

Nom...Grup...............No puntuar:........

---

1. Considerem el polinomi $p(z) = z^5 + z^4 + 4z + 4$.

(a){20pt} Troba totes les arrels complexes de $p(z)$ i expresseu-les tant en forma binòmica com en forma exponencial.

(b){20pt} Dona la factorització de $p(z)$ en factors irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$.

---

2. Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre a on:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & a+3 & 4 \\ -1 & a-2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b}= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a){20pt} Quan $a = -1$ classifica i resol aquest s.e.l.

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre a aquest s.e.l. és compatible indeterminat.

---

3. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0, x + y + z + t = 0\} \text{ i}$$

$$V = \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\rangle, \text{ on: } \vec{v}_1 = (0, 1, 2, 1), \vec{v}_2 = (1, 0, 3, 4), \vec{v}_3 = (1, 0, -3, -2)$$

(a){20pt} Calcula la dimensió i una base del subespai vectorial U.

(b){20pt} Obté la dimensió, una base i les equacions del subespai vectorial $U \cap V$.

Control 1 [1GM31] AiG/GESA/EETAC/UPC 07-03-18

Nom..Grup..............No puntuar:......

1. Considerem el polinomi $p(z) = z^5 + z^4 + 4z + 4$.

(a){20pt} Troba totes les arrels complexes de $p(z)$ i expresseu-les tant en forma binòmica com en forma exponencial

(b){20pt} Dona la factorització de $p(z)$ en factors irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$.

(a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$p(z) = (z+1).(z^4+4)$

$z^4 = -4 = 4.e^{\pi j} \longrightarrow z = \sqrt[4]{4.e^{\pi j}} \longrightarrow$

$\longrightarrow z \in \boxed{\left\{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}j}, \sqrt{2}.e^{\frac{3\pi}{4}j}, \sqrt{2}.e^{\frac{5\pi}{4}j}, \sqrt{2}.e^{\frac{7\pi}{4}j}\right\}}$

$\longrightarrow z \in \boxed{\left\{1+j, -1+j, -1-j, 1-j\right\}}$

(b) factorització en $\mathbb{C}[x]$:

$p(z) = (z+1).(z^4+4)$

$\boxed{p(z) = (z+1)(z-1-j)(z+1-j)(z+1+j)(z-1+j)}$

Factorització en $\mathbb{R}[x]$:

$(z-1-j)(z-1+j) = (z-1)^2 - j^2 = (z-1)^2+1 = z^2-2z+2$

$(z+1-j)(z+1+j) = (z+1)^2 - j^2 = (z+1)^2+1 = z^2+2z+2$

$\boxed{p(z) = (z+1).(z^2-2z+2).(z^2+2z+2)}$

2. Considerem la família uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre a on:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & a+3 & 4 \\ -1 & a-2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a){20pt} Quan $a = -1$ classifica i resol aquest s.e.l.

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre a aquest s.e.l. és compatible indeterminat.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{C.D.}} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ y = 2z - 3 \rightarrow y = 7 \\ z = 5 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y - 2z \Rightarrow x = 1 - 21 - 10 \rightarrow \boxed{x = -30} \\ \boxed{y = 7} \\ \boxed{z = 5} \end{cases}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & a+3 & 4 \\ -1 & a-2 & -1 \end{vmatrix} = (-a - 3 - 12 + 2a - 4) - (-2a - 6 - 3 + 4a - 8) =$

$= (a - 19) - (2a - 17) = -a - 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = -2}$

Si $a \neq -2$: Compatible determinat

Si $a = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$ Incompatible.

$\boxed{\text{MAI ÉS COMPATIBLE INDETERMINAT}}$

3. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0, x + y + z + t = 0\}$$

$$V = \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\rangle, \text{ on: } \vec{v}_1 = (0, 1, 2, 1), \vec{v}_2 = (1, 0, 3, 4), \vec{v}_3 = (1, 0, -3, -2$$

(a){20pt} Calcula la dimensió i una base del subespai vectorial U.

(b){20pt} Obté la dimensió, una base i les equacions del subespai vectorial $U \cap V$.

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y = -t \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - z + t \\ y = -t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases}$$

$$(x, y, z, t) = (-z, -t, z, t) = z \cdot (-1, 0, 1, 0) + t \cdot (0, -1, 0, 1)$$

Base de $\cancel{U}$: $\boxed{\vec{u}_1 = (-1, 0, 1, 0),\ \vec{u}_2 = (0, -1, 0, 1)}$

$$\boxed{\dim(U) = 2}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(V) = 3$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & z \\ 4 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & z - 3x \\ 4 & 1 & 1 & t - 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z - 3x \\ 1 & 1 & t - 4x \end{vmatrix} =$$

$$= (t - 4x + 2y) - (y + z - 3x) = \boxed{-x + y - z + t = 0}$$

~~dim~~

$$U \cap V: \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - z + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{U \cap V = U}$

CONTROL 1 . GRUPO 1A5. 12-OCTUBRE-2018.

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Ejercicio 1. Factorizar en R[x] y en C[x] el polinomio
$p(x)=x^5-8x^4+30x^3-66x^2+85x-50$, sabiendo que $p(1-2j)=0$. [25 Puntos]

Ejercicio 2. Sea d=Det (u,v,w), calcular Det (2v+w , −3u−w , 4u−5v).
Justifica los pasos que realizas con las propiedades adecuadas del determinante. [15 Puntos]

Ejercicio 3. Estudiar el siguiente sistema lineal en función del parámetro **k**.
Expresa las soluciones empleando las fórmulas de Cramer cuando sea posible. Sistema:

$$\begin{aligned} (k+1)x + 4y + z &= k+3 \\ 4x + (k+1)y + z &= -3k \\ -10x - 14y + (k-6)z &= -26 \end{aligned}$$

[35 Puntos]

Ejercicio 4. En R^4 tenemos los subespacios vectoriales:

$G = \{ (x,y,z,t) \mid x+3y+2z=0, x-t=0 \}$

$F = \langle (0,1,1,2), (2,-1,-2,0), (2,0,-1,2) \rangle$

a) Encontrar una base de F y otra de G, [10 Puntos]
b) Determinar las ecuaciones del subespacio F, [5 Puntos]
c) Encontrar sendas bases de F+G y F∩G. [10 Puntos]

CONTROL 1. GRUPO 1AS. 12-OCT-2018. ALGEBRA i GEOMETRIA

E1. Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$:

$$p(x) = x^5 - 8x^4 + 30x^3 - 66x^2 + 85x - 50, \quad \text{con } p(1-2j) = 0$$

También es raíz, el conjugado $1+2j$, pq $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Con la ayuda de la Regla de Ruffini:

	1	-8	30	-66	85	-50
$1-2j$		$1-2j$	$-11+12j$	$43-26j$	$-75+20j$	50
	1	$-7-2j$	$19+12j$	$-23-26j$	$10+20j$	0
$1+2j$		$1+2j$	$-6-12j$	$13+26j$	$-10-20j$	
	1	-6	13	-10	0	

A continuación tratamos de factorizar $q(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$:

como $q(x)$ es mónico (coeficiente principal igual a 1), si tiene alguna raíz entera, será divisor del término independiente -10, es decir: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Probamos:

$$q(+1) = (+1)^3 - 6(+1)^2 + 13(+1) - 10 = 1 - 6 + 13 - 10 = -5 + 3 = -2$$

$$q(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 13(-1) - 10 = -1 - 6 - 13 - 10 < 0$$

$$q(+2) = (+2)^3 - 6(+2)^2 + 13(+2) - 10 = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$$

Y volvemos a usar la Regla de Ruffini:

	1	-6	13	-10
2		2	-8	10
	1	-4	5	0

finalmente: $x^2 - 4x + 5 = 0 \iff x = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16-20}\right) = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{-4}\right)$,

$x = \frac{1}{2}\left(4 \pm 2\sqrt{-1}\right) = 2 \pm j$, y ahora tenemos que en:

$\mathbb{C}[x]$: $p(x) = (x-1+2j)(x-1-2j)(x-2)(x-2+j)(x-2-j)$

y como: $(x-1+2j)(x-1-2j) = (x-1)^2 - (2j)^2 = x^2 - 2x + 1 + 4$

$\mathbb{R}[x]$: $p(x) = (x^2 - 2x + 5)(x-2)(x^2 - 4x + 5)$

E2. Calcular el siguiente determinante:

$Det(2v+w, -3u-w, 4u-5v) =$

$= Det(2v, -3u-w, 4u-5v) + Det(w, -3u-w, 4u-5v) =$

$= \underline{Det(2v, -3u, 4u-5v)} + Det(2v, -w, 4u-5v) +$

$+ Det(w, -3u, 4u-5v) + \underbrace{Det(w, -w, 4u-5v)}_{0} =$

$= \underbrace{Det(2v, -3u, 4u)}_{0} + \underbrace{Det(2v, -3u, -5v)}_{0} +$

$+ Det(2v, -w, 4u) + \underbrace{Det(2v, -w, -5v)}_{0} +$

$+ \underbrace{Det(w, -3u, 4u)}_{0} + Det(w, -3u, -5v) =$

$= 2(-1)4\, Det(v, w, u) + (-3)(-5)\, Det(w, u, v) =$

$= -8[-Det(u, w, v)] + 15[-Det(u, w, v)] =$

$= 8[-Det(u, v, w)] - 15[-Det(u, v, w)] = (-8+15)d = 7d$

E3. Estudiar el sistema y resolverlo cuando sea posible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 4 & 1 & k+3 \\ 4 & k+1 & 1 & -3k \\ -10 & -14 & k-6 & -26 \end{array}\right)$$

con A la matriz de coeficientes y b la columna de términos independientes. Calculamos det A:

$$|A| = \begin{vmatrix} k+1 & 4 & 1 \\ 4 & k+1 & 1 \\ -10 & -14 & k-6 \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftarrow F_1 - F_2}{=} \begin{vmatrix} k-3 & 3-k & 0 \\ 4 & k+1 & 1 \\ -10 & -14 & k-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & k+1 & 1 \\ -10 & -14 & k-6 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (k-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k+5 & k+1 & 1 \\ -24 & -14 & k-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-3)(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} k+5 & 1 \\ -24 & k-6 \end{vmatrix} = (k-3)[(k+5)(k-6)+24] =$$

$= (k-3)(k^2-k-30+24) = (k-3)(k^2-k-6) = (k-3)\cdot(k-3)(k+2) =$

$= (k-3)^2(k+2)$

Estudiamos cada caso:

- $k \notin \{3,-2\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ rango A = rango $(A,b) = 3 = n^{\circ}$ incógnitas y del Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado. Podemos encontrar las soluciones con las fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+3 & 4 & 1 \\ -3k & k+1 & 1 \\ -26 & -14 & k-6 \end{vmatrix}}{(k-3)^2(k+2)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & k+3 & 1 \\ 4 & -3k & 1 \\ -10 & -26 & k-6 \end{vmatrix}}{(k-3)^2(k+2)}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 4 & k+3 \\ 4 & k+1 & -3k \\ -10 & -14 & -26 \end{vmatrix}}{(k-3)^2(k+2)}$$

- $k=3 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ rang $A < 3$

  Hay que estudiar el sistema: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & -9 \\ -10 & -14 & -3 & -26 \end{array}\right)$

  como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = -12+14 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$, por tanto: rang $A = 2$

  y también: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -9 \\ -14 & -3 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -9 \\ -2 & -3 & -26 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = -2(-9-6) \neq 0$

  por tanto: rango $(A,b) = 3 > 2 =$ rang A, y del Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es incompatible,

  de hecho: $6 = 4x+4y+z = -9$, que no puede ser,

- $k=-2 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ rang $A < 3$

  Hay que estudiar el sistema: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & +1 \\ 4 & -1 & 1 & 6 \\ -10 & -14 & -8 & -26 \end{array}\right)$

  como $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1-16 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$, por tanto: rang $A = 2$

  y también: $\begin{vmatrix} -1 & 4 & +1 \\ 4 & -1 & 6 \\ -10 & -14 & -26 \end{vmatrix} = -26-240-56-(10+84-416) = 0$,

  por tanto: rang $(A,b) = 2 =$ rang $A < 3 = n^{\circ}$ incógnitas y del Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado con $3-2=1$ grados de libertad. Soluciones:

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline -1 & 4 & 1-z \\ 4 & -1 & 6-z \end{array}$$

  por tanto: $x = \frac{-1}{15}\begin{vmatrix} 1-z & 4 \\ 6-z & -1 \end{vmatrix}$, $y = \frac{-1}{15}\begin{vmatrix} -1 & 1-z \\ 4 & 6-z \end{vmatrix}$

E4. Subespacios vectoriales: $G=\{(x,y,z,t) \mid x+3y+2z=0,\ x-t=0\}$

$F=\langle (0,1,1,2),(2,-1,-2,0),(2,0,-1,2)\rangle$

a) Encontrar bases de F y G:

· base de G:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & e_1 \\ 3 & 0 & e_2 \\ 2 & 0 & e_3 \\ 0 & -1 & e_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & e_1 \\ 3 & 0 & e_2 \\ 2 & 0 & e_3 \\ 1 & 0 & e_1+e_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & e_1 \\ 3 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 2e_2-3e_3 \\ 0 & 0 & 3e_1-e_2+3e_4 \end{array}\right)$$

como $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=2$ la base es: $\{(0,2,-3,0),(3,-1,0,3)\}$

· base de F:

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3'=f_1-f_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3^2=f_2+f_3'} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto: $0=f_3^2=f_2+f_3'=f_2+f_1-f_3 \Rightarrow f_3=f_1+f_2$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=2$ y la base es: $\{(0,1,1,2),(2,-1,-2,0)\}$

b) Dar las ecuaciones de F:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -2 & z \\ 2 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-z \\ 0 & -2 & 2y-t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & -x+2(y-z) \\ 0 & 0 & x+(2y-t) \end{array}\right)$$

como el sistema ha de ser compatible: $\left.\begin{array}{l} -x+2y-2z=0 \\ x+2y-t=0 \end{array}\right\}$

c) Encontrar bases de F+G y F∩G:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \xrightarrow{f_2'=2g_1-3f_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ f_1 \\ f_2' \end{array} \xrightarrow[f_2^2=2f_2'-g_2]{f_1'=2f_1-g_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 12 \end{pmatrix}\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ f_1' \\ f_2^2 \end{array} \xrightarrow{f_2^3=3f_1'-f_2^2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ f_1' \\ f_2^3 \end{array}$$

La base de $F+G=\{g_1,g_2,f_1\}=\langle(3,-1,0,3),(0,2,-3,0),(0,1,1,2)\rangle$.

Base de F∩G:

$$0=f_2^3=3f_1'-f_2^2=3f_1'-(2f_2'-g_2)=3f_1'-2f_2'+g_2=$$
$$=3(2f_1-g_2)-2(2g_1-3f_2)+g_2=2(3f_1+3f_2-2g_1-g_2)$$

luego: $3(f_1+f_2)=2g_1+g_2=3(2,0,-1,2)$, y entonces: base $F\cap G=\{(2,0,-1,2)\}$

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria Aeronàutica i Aeronavegació
Àlgebra i Geometria. Curso 2018-2019

Àlgebra i Geometria. Control 1.
Grup 1A1. 17 de Octubre de 2018.

Nota: La resolución de la prueba no puede reducirse a la realización de cálculos, es necesario que estos vayan precedidos de pequeñas explicaciones que justifiquen su uso.

1. (a) **(1.5 puntos)** Determinar todos los complejos que satisfacen $jz^3 + 8 = 0$.

   (b) **(2 puntos)** Sea el polinomio $p(z) = z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 12z + 8$. Encontrar todas sus raíces sabiendo que $z = 2j$ es una de ellas, y obtener una factorización del mismo en $\mathbb{R}[z]$.

2. **(3 puntos)** Discutir la compatibilidad del sistema en función de a y solucionar el caso $a = 2$:

$$\begin{aligned} 2x + ay + z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \\ y - z &= 2a \end{aligned}$$

3. Sean $F = \langle (0,1,1), (1,0,2), (-2,3,-1) \rangle$, $G = \langle (1,1,3), (-1,4,a) \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   (a) **(1.5 puntos)** Encontrar bases de F y G.

   (b) **(1 punto)** Determinar si existe algún valor de a para el cual se tenga $F = G$.

   (c) **(1 punto)** Justificar que no existe ningún valor de a para el cual $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

1a) $jz^3+8=0 \iff z^3=-\frac{8}{j}=8j=8e^{j\pi/2} \Rightarrow z=\sqrt[3]{8e^{j\pi/2}}=2e^{j\frac{\pi/2+2k\pi}{3}},\ k=0,1,2$

$k=0 \to \boxed{z_0=2e^{j\pi/6}}$; $k=1 \to \boxed{z_1=2e^{j5\pi/6}}$; $k=2 \to \boxed{z_2=2e^{j\frac{3\pi}{2}}}$

1b) $p\in\mathbb{R}[z] \Rightarrow z=2j$ arrel $\Rightarrow z=-2j$ arrel $\Rightarrow (z-2j)(z+2j)=z^2+4 \mid p$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & -3z^3 & +6z^2 & -12z & +8 & z^2+4 \\
-z^4 & & -4z^2 & & & \\ \hline
 & -3z^3 & +2z^2 & -12z & & z^2-3z+2 \\
 & 3z^3 & & +12z & & \\ \hline
 & & 2z^2 & & +8 & \\
 & & -2z^2 & & -8 & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}$$

$z^2-3z+2 \to z^2-3z+2=0 \iff z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2} < {2 \atop +1}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \text{Arrels de } p(z):\ \pm 2j,\ +1,\ 2 \\ \Rightarrow \text{Factorització a } \mathbb{R}(z):\ p(z)=(z-1)(z-2)(z^2+4)\end{array}}$$

2)

$$(A|B)=\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2a \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}(A|B)\le 4 \\ \text{rang } A = 3,\ \forall a\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} \overset{\substack{F_1-2F_2 \\ F_3-F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & a-2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=} 4\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4(a^2-a-2)=0 \iff a^2-a-2=0 \iff a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2} < {2 \atop -1}$$

Solució:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ a\neq 2 \text{ i } a\neq -1 \Rightarrow \text{rang}(A|B)=4\neq 3=\text{rang } A \Rightarrow SI \\ 2)\ a=2 \text{ ó } a=-1 \Rightarrow \text{rang}(A|B)=\text{rang } A=3=\text{nº inc} \Rightarrow SCD \end{array}}$$

Solució $a=2$: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \\ y-z=4 \end{cases} \xrightarrow{S.} 2x=2 \to x=1 \Rightarrow 1+y+z=1 \Rightarrow z=-y \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2 \Downarrow z=-2$

$\boxed{x=1,\ y=2,\ z=-2}$

3a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+3+1=0$ i $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{F=\{(0,1,1),(1,0,2)\}}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\neq 0 \Rightarrow \boxed{G=\{(1,1,3),(-1,4,a)\},\ \forall a\in\mathbb{R}}$

3b) Com que $\dim F=\dim G=2 \Rightarrow F=G \iff \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & a \end{pmatrix}=2 \iff$

$\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2+1-3=0$ OK i $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -2+4-a=0 \iff \boxed{a=2}$

3c) $F,G\subset\mathbb{R}^3 \Rightarrow \boxed{3\ge \dim(F+G)} = \dim F+\dim G-\dim F\cap G = 2+2-\dim F\cap G =$
$= \boxed{4-\dim F\cap G} \Rightarrow \boxed{\dim F\cap G \ge 4-3=1} \Rightarrow$ F, G no poden estar en suma directa

→ Resolució Control 1. 1A2. 10 oct. 2015 ←

1 Troba les arrels de $p(z) = z^5 + 2z^4 + z + \dfrac{2(\sqrt{3}-j)\, e^{\frac{2\pi}{3}j}}{(1+j)^2}$ en forma binòmica i exponencial.

1r) Simplifiquem l'expressió $A = \dfrac{2(\sqrt{3}-j)\, e^{\frac{2\pi}{3}j}}{(1+j)^2}$

Com *) $|\sqrt{3}-j| = 2, \Rightarrow \sqrt{3}-j = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}\right) = 2e^{-\frac{\pi}{6}j}$

**) $(1+j)^2 = 2j = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$

Subs. en: $A = \dfrac{4e^{-\frac{\pi}{6}j}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}j}}{2e^{\pi/2 j}} = 2\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)j} =$

$= 2\cdot e^{\frac{-1+4-3}{6}j} = 2.$

2n) Calculem ara les arrels de: $p(z) = z^5 + 2z^4 + z + 2$

Via Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \text{arrel } -2$$

$-2 = 2e^{\pi j}$

$\Rightarrow p(z) = (z+2)(z^4+1)$

La resta d'arrels són $z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\pi j}}$

$= e^{\frac{\pi + 2\pi k}{4}j}$

$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}j} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}j} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}j} = +\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$

R: $\left\{ -2 = 2e^{\pi j},\ e^{\frac{\pi}{4}j} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ e^{\frac{3\pi}{4}j} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ e^{\frac{5\pi}{4}j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j,\ e^{\frac{7\pi}{4}j} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right\}$

$\boxed{2}$ Discutir la comp. del sistema en funció dels paràmetres reals a, b.

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 & (3) \\ x + aby + z = b & (2) \\ x + by + az = 1 & (1) \end{cases}$$

Plantegem la matriu ampliada del sistema (reorganitzant les equacions):

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\boxed{F_2 \mapsto F_2 - F_1};\ \boxed{F_3 \mapsto F_3 - aF_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\underset{\boxed{F_3 \mapsto F_3 + F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

D'aquí, deduïm $\det A = -b(a-1)^2(a+2)$

ja que: $2-a-a^2 = -(a+2)(a-1)$

Casos:

$\boxed{\text{I) } b \neq 0,\ a \neq 1, -2}$ $\Rightarrow$ $rg A = 3 = rg(A|b)$: Sist. comp. determinat.

$\boxed{\text{II) } b = 0}$: $(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right)$

$a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to rg(A) = 1 < rg(A|b) = 2$

$\Rightarrow$ Sist. incompatible

$a = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A) = 2 < rg(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ S. incomp.

$a \neq 1, -2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right) \to rg(A) = 2 < rg(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ S. incompatible

$\Rightarrow$ Si $b = 0$, sist. incompatible.

$\boxed{\text{III) } a=1}$ $(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$

$rg\,A = rg(A|b) \Leftrightarrow b=1.$

$\boxed{\text{S. compatible} \Leftrightarrow b=1}.$

$\boxed{\text{IV) } a=-2}$: $(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right)$

$rg\,A = rg(A|b) \Leftrightarrow b=-2.$

$\boxed{\text{S. comp.} \Leftrightarrow b=-2}$

$\boxed{3}$ Sigui $F = \langle u_1=(-1,1,0,1,1), u_2=(1,0,2,-1,3), u_3=(2,0,-1,1,2),$
$u_4=(-4,1,4,-2,0)\rangle$

a) Una base de F.
Com ens donen un sist. de generadors, mirem un conjunt màx. l. independent.
Plantegem

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{\sim}$$

$F_2 \mapsto F_2+F_1$
$F_4 \mapsto F_3+F_1$, $F_5 \mapsto F_5+F_1$

$F_3 \mapsto F_3-2F_2$
$F_5 \mapsto F_5-4F_2$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A = 3$$

Una base de F és, p. ex, $\{u_1, u_2, u_3\}$.

b) $v \in F \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq: $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = v$.

Estudiem si el sist. que segueix té solució:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

seguim les mat. now per fets de l'apartat a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A|b) = rg(A) = 3$$

$\Rightarrow$ El sistema és comp. determinat. El resolem:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + 2\gamma = -2 \\ \beta + 2\gamma = -3 \\ -5\gamma = 10 \rightarrow \boxed{\gamma = -2} \end{cases}$$

$\beta - 4 = -3 \rightarrow \boxed{\beta = 1}$

$-\alpha + 1 - 4 = -2 \rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

$$v = (-1, 1, -2)_{B_F}$$

c) A partir dels càlculs de l'apartat a)

$$rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$\Rightarrow$ Una base de $\mathbb{R}^5$ és, p. ex: $\{u_1, u_2, u_3, e_4, e_5\}$

on $e_4 = (0,0,0,1,0)$, $e_5 = (0,0,0,0,1)$.

1. Considerem els polinomis $p(z) = z^5 + 7z^4 + 11z^3 - 9z^2 + 54$ i $q(z) = 4z^6 - 9z^4 + 4z^2 - 9$.

(a){20pt} Troba totes les arrels complexes de $p(z)$ i expresseu-les tant en forma binòmica com en forma exponencial.

$\boxed{p(z) = (z+3)^3 \cdot (z^2 - z + 2) = 0 \Rightarrow z \in \{-3, 1+j, 1-j\} \Leftrightarrow z \in \{3e^{\pi j}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}, \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}j}\}}$

(b){20pt} Dona la factorització de $q(z)$ en factors irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$.
[pista: $e^{\frac{\pi j}{4}}$, $e^{\frac{5\pi j}{4}}$ i $-\frac{3}{2}$ són tres de les seves arrels.]

$\boxed{q(z) = (2z+3) \cdot (2z-3) \cdot (z^4+1)}$

$\boxed{q(z) = (2z+3) \cdot (2z-3) \cdot (z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j) \cdot (z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j) \cdot (z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j) \cdot (z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j)}$

$\boxed{q(z) = (2z+3) \cdot (2z-3) \cdot ((z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}) \cdot (z + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2})}$

$\boxed{q(z) = (2z+3) \cdot (2z-3) \cdot (z^2 - \sqrt{2}z + 1) \cdot (z^2 + \sqrt{2}z + 1)}$

---

2. Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals homogènies $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ d'ordre 4x4 i paràmetre λ on:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}, \; A = C - \lambda \cdot I_4, \; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \; \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a){20pt} Quan $\lambda = 2$, classifica i resol aquest s.e.l.h.

$$\boxed{\lambda = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{r(A) = 2 \Rightarrow \text{Compatible Indeterminat, amb dos graus de llibertat.}}$

$\boxed{\text{Solució general: } (x, y, z, t) = (\lambda, \mu, 0, -2\lambda - 4\mu)}$

$\boxed{\text{Subespai vectorial de solucions: } W = \langle\{(1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -4)\}\rangle}$

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre λ aquest s.e.l.h. és compatible indeterminat.

$$\boxed{\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 2)^3}$$

$\boxed{\text{Per tant, aquest s.e.l.h. és compatible indeterminat si i només si } \lambda \in \{0, 2\}.}$

---

3. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0, 2x + y - 3z = 0\} \; ,$$

$$V = \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\rangle, \text{ on: } \vec{v}_1 = (2, 4, 3), \vec{v}_2 = (3, -1, 1), \text{ i}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\} \; ,$$

(a){20pt} Calcula la dimensió, les equacions implícites i una base dels subespais vectorials U, V, $U + V$ i $U \cap V$.

$\boxed{U = \langle(1, 1, 1)\rangle}$ $\boxed{V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0}$ $\boxed{\text{Per tant, } U \subset V.}$

$\boxed{\text{Per tant, } U \cap V = U, U + V = V.}$

(b){20pt} Esbrina si el subespais vectorials U i W són suplementaris.

$\boxed{W = \langle\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}\rangle}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim(U + W) = 3 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus V}$$

(1) Considerem la matriu:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ -1 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & 1 & z+1 \end{pmatrix}.$$

(a){15pt} Calcula el determinant de $\mathbf{Q}$.

$\boxed{det(Q) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = (z^2+1)(z^2+z+1)}$

(b){20pt} Resol en $\mathbb{C}$ l'equació $det(\mathbf{Q}) = 0$ i expressa les seves solucions en forma exponencial.

$$\boxed{(z^2+1)(z^2+z+1) = (z-j)(z+j)(z - \frac{-1+\sqrt{3}j}{2})(z - \frac{-1-\sqrt{3}j}{2})}$$

Per tant, les solucions són: $e^{\frac{\pi}{2}j}$, $e^{\frac{3\pi}{2}j}$, $e^{\frac{2\pi}{3}j}$, $e^{\frac{4\pi}{3}j}$

---

(2) Considerem la familia uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 3x3 i paràmetre m on:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 2m & 1 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a){15pt} Quan $m = 2$, classifica i resol aquest s.e.l.

La matriu del sistema és: A=

La m.e.r.f de A és: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, el $r(A) = 3$. Es a dir, és un sistema compatible determinat.

La matriu ampliada és B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La m.e.r.f de B és: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per tant, la solució és: $(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 0)$

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre m aquest s.e.l. és incompatible.

$\boxed{det(A) = -2m^3 + 6m - 4 = -(m-1)^2(m+2)}$

Si $m \notin \{-2, 1\}$, llavors $r(A) = 3$. Per tant, sistema compatible determinat.

Si $m = 1$, llavors $r(A) = 1$, $r(B) = 2$. Per tant, sistema incompatible.

Si $m = -2$, llavors $r(A) = 2$, $r(B) = 3$. Per tant, sistema incompatible.

(3) Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 6y + z = 0, 6x + 13y + t = 0\} \ ,$$

$$V = \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\rangle, \text{ on: } \vec{v}_1 = (1, 2, 1, 0), \vec{v}_2 = (-2, -1, 0, 1).$$

(a){15pt} Calcula la dimensió i una base del subespai vectorial $U \cap V$.

Els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són linealment independents. Per tant, $dim(V) = 2$.

Les equacions de V són: $x - 2y + 3z = 0$, $2x - y + 3t = 0$.

Les equacions de $U \cap V$ són: $3x + 6y + z = 0$, $6x + 13y + t = 0$, $x - 2y + 3z = 0$, $2x - y + 3t = 0$.

La matriu d'aquest s.e.l. homogeni és: $A= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 13 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

La m.e.r.f. de A és: $A= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Per tant, $dim(U \cap V) = 1$ i una base és $(-5, 2, 3, 4)$.

(b){15pt} Calcula la dimensió i una base del subespai vectorial $U + V$.

La matriu del s.e.l. homogeni $3x + 6y + z = 0$, $6x + 13y + t = 0$ és: $A= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 13 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, $dim(U) = 2$.

Una base de U és: $\vec{u}_1 = (1, 0, -3, -6)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -6, -13)$.

Un sistema de generadors de $U + V$ és: $\vec{u}_1 = (1, 0, -3, -6)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -6, -13)$, $\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 0), \vec{v}_2 = (-2, -1, 0, 1)$.

La matriu de coordenades (per files) d'aquest conjunt de vectors és: $P= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La m.e.r.f de la matriu P és: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per tant, $dim(U + V) = 3$.

Una base de de $U + V$ és: $\vec{w}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{w}_2 = (0, 1, 0, -1)$, $\vec{w}_3 = (0, 0, 1, 2)$.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels

Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials

Àlgebra i Geometria. Curso 2019-20

Àlgebra i Geometria. Control 1.

Grupo 1A2. 16 de Octubre de 2019.

Nota: La resolución de la prueba no puede reducirse a la realización de cálculos, es necesario que éstos vayan precedidos de la adecuada explicación que justifique su uso.

Problema 1.

(a) (*1.5 puntos*) Encontrar las raíces cuartas de $8(-1+\sqrt{3}\,j)$.

(b) (*1.5 puntos*) Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10$, sabiendo que $2-j$ es un cero del mismo.

Problema 2. (*1+2 puntos*) Estudiar el sistema lineal en función del parámetro $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k}x + y + z = 1$$
$$2\mathbf{k}x + (\mathbf{k}+1)y + 2z = \mathbf{k}+1$$
$$3x + 3y + (4-\mathbf{k})z = \mathbf{k}.$$

Cuando el sistema sea compatible, expresar las soluciones usando las fórmulas de Cramer.

Problema 3. Sean $F = \langle (1,0,-1,2),\ (0,2,1,1),\ (1,2,0,3) \rangle$ y

$G = \{ (x,y,z,t) \text{ tq } x+y-z-t=0,\ y-2z=0,\ x+z-t=0 \}$, subespacios de $\mathbb{R}^4$.

(a) (*1.5 puntos*) Encontrar las ecuaciones de F y una base de G.

(b) (*1.5 puntos*) Encontrar una base y las dimensiones de $F \cap G$ y $F+G$. Comprobar que se cumple la fórmula de Grassmann.

(c) (*1 punto*) Describir *todos* los subespacios vectoriales suplementarios de $F+G$ en $\mathbb{R}^4$.

Problema 1.

a) Hemos de resolver: $z^4 = 8(-1+\sqrt{3}j) = 16\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 2^4 e^{\frac{2\pi}{3}j}$

ya que: $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, y: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ponemos $z = re^{\alpha j} \Rightarrow z^4 = r^4 e^{4\alpha j}$, e igualamos: $r^4 e^{4\alpha j} = 2^4 e^{\frac{2\pi}{3}j}$

luego: $\begin{cases} r^4 = 2^4 \Rightarrow r = 2, \text{ en } \mathbb{R} \\ 4\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3} + k\right), \text{ con } k = 0,1,2,3 \end{cases}$

entonces, para:

$k=0$: $\alpha_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}j} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3}+j$

$k=1$: $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}j} = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -1+\sqrt{3}j$

$k=2$: $\alpha_2 = \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi \Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{6}j} = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = -\sqrt{3}-j = -z_0$

$k=3$: $\alpha_3 = \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 2e^{\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 1-\sqrt{3}j = -z_1$

b) Factorización del polinomio con coeficientes reales: $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10$ que tiene $2-j$ como un cero y por tanto $2+j$ también es un cero, por ser su conjugado. Empleamos la regla de Ruffini para realizar la división:

	1	-2	-1	2	10
$2-j$		$2-j$	$-1-2j$	$-6-2j$	-10
	1	$-j$	$-2-2j$	$-4-2j$	0
$2+j$		$2+j$	$4+2j$	$4+2j$	
	1	2	2	0	

El polinomio cociente es: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 = 0 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{-1} = \pm j$

y tiene raíces: $x = -1+j, -1-j$.

Se cumple: $(x-(2-j))\cdot(x-(2+j)) = (\underline{x-2}+j)(\underline{x-2}-j) = (x-2)^2 - j^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$.

La factorización es: $p(x) = \begin{cases} (x-2+j)(x-2-j)\cdot(x+1-j)(x+1+j) & \text{en } \mathbb{C}[x] \\ (x^2-4x+5)\cdot(x^2+2x+2) & \text{en } \mathbb{R}[x] \end{cases}$

Problema 2. Para estudiar el sistema calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2k & k+1 & 2 \\ 3 & 3 & 4-k \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{=\!=} \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ k-1 & k+1 & 1-k \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = (k-1)(1-k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftarrow F_2 - F_1}{=\!=}$$

$$= -(k-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(k-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k-3) = |A|$$

Estudiamos cada caso:

- $k \notin \{1, 3\}$, como $\det A \neq 0 \Rightarrow$ rango $A =$ rango $(A,b) = 3 =$ nº incógnitas, el Teorema de Rouché-Frobenius dice que el sistema es compatible determinado. Para encontrar las soluciones usamos las fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 2 \\ k & 3 & 4-k \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2k & k+1 & 2 \\ 3 & k & 4-k \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2k & k+1 & k+1 \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix}$$

- $k = 1$: $\det A = 0 \Rightarrow$ rango $A < 3$

el sistema es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

luego: rango $A = 1 <$ rango (A,b), así que el Teorema de Rouché-Frobenius afirma que el sistema es incompatible,

- $k = 3$: $\det A = 0 \Rightarrow$ rango $A < 3$

el sistema es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

luego: rango $A = 2 =$ rango $(A,b) < 3 =$ nº incógnitas, el Teorema de Rouché-Frobenius afirma que el sistema es compatible indeterminado con $3-2=1$ grado de libertad.

Localizamos un menor no nulo en la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ y resolvemos el sistema compatible determinado en $\{x, y\}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1-z \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array}, \text{ luego: } x = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 1-z \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Problema 3.

a) Ecuaciones de F: un vector arbitrario de $\mathbb{R}^4$ es de F si se cumple:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x\\ 0 & 2 & 2 & y\\ -1 & 1 & 0 & z\\ 2 & 1 & 3 & t\end{array}\right)$$ es un sistema compatible

empleamos el método de Gauss:

$$\xrightarrow[\substack{F_3+F_1\\ 2F_1-F_4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x\\ 0 & 2 & 2 & y\\ 0 & 1 & 1 & x+z\\ 0 & -1 & -1 & 2x-t\end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-F_2\\ 2F_4+F_2\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 1}}^{A}} & \\ 1 & 0 & 1 & x\\ 0 & 2 & 2 & y\\ 0 & 0 & 0 & 2x-y+2z\\ 0 & 0 & 0 & 4x+y-2t\end{array}\right)$$

para asegurar la compatibilidad: $\left.\begin{array}{l} 0 = 2x-y+2z\\ 0 = 4x+y-2t\end{array}\right\}$, son las ecuaciones de F

como rango $A = 2$, uno de los vectores es combinación de los otros dos,

y como $\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 2 \neq 0$, es un menor no nulo, una base de F es:

$\{(1,0,-1,2),(0,2,1,1)\}$

Base de G: Encontrar la base de G equivale a diagonalizar la matriz formada por los coeficientes de las ecuaciones en columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & e_1\\ 1 & 1 & 0 & e_2\\ -1 & -2 & 1 & e_3\\ -1 & 0 & -1 & e_4\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\ F_3+F_1\\ F_4+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & e_1\\ 0 & 1 & -1 & e_2-e_1\\ 0 & -2 & 2 & e_1+e_3\\ 0 & 0 & 0 & e_1+e_4\end{array}\right) \xrightarrow[2F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & e_1\\ 0 & 1 & -1 & e_2-e_1\\ 0 & 0 & 0 & -e_1+2e_2+e_3\\ 0 & 0 & 0 & e_1+e_4\end{array}\right)$$

entonces: $\left.\begin{array}{l} -e_1+2e_2+e_3 = (-1,2,1,0)\\ e_1+e_4 = (1,0,0,1)\end{array}\right\}$ forman una base de G, ya que su rango es 2

b) Bases de $F\cap G$ y $F+G$: formamos una matriz con las bases de F y G:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & f_1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & f_2\\ -1 & 2 & 1 & 0 & g_1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & g_2\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3+F_1\\ F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & f_1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & f_2\\ 0 & 2 & 0 & 2 & f_1+g_1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -f_1+g_2\end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & f_1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & f_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & f_2-f_1-g_1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -f_1+g_2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-F_4+F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & f_1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & f_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & f_2-f_1-g_1\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & & +f_2-g_1-g_2\end{array}\right)$$

como rango $A = 3$, son bases de $F+G$: $\{f_1, f_2, -f_1+f_2-g_1\}$ o $\{f_1, f_2, g_1\}$

de la cuarta fila: $0 = f_2-g_1-g_2 \Longleftrightarrow f_2 = g_1+g_2 = (0,2,1,1)$

es un vector de $F\cap G$, luego es el único vector de su base

Como: $\dim F = \dim G = 2$, $\dim(F+G) = 3$, $\dim(F\cap G) = 1$, obviamente se cumple la fórmula de Grassmann: $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F\cap G)$: $2+2 = 3+1$.

c) Subespacios suplementarios de $F+G$ en $\mathbb{R}^4$.

En el apartado b) hemos encontrado que $F+G = \langle f_1, f_2, g_1 \rangle$, y a la vista de la última matriz, el vector $u = (0,0,0,1)$ es linealmente independiente de los anteriores.

Así que: $W = \langle u + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 g_1 \rangle$, con α_i: arbitrarios cumple que:

$$W \cap (F+G) = \{\vec{0}\}, \text{ y: } W + (F+G) = \mathbb{R}^4$$

ya que: $\text{rango}(f_1, f_2, g_1, u + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 g_1) = 4$.

Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Grau en Enginyeria de Sistemes Aeroespacials
Àlgebra i Geometria. Curso 2019-2020

Àlgebra i Geometria. Control 1.
Grupo 1A4. 22 de Octubre de 2019.

Nota: La resolución de la prueba no puede reducirse a la realización de cálculos, es necesario que estos vayan precedidos de pequeñas explicaciones que justifiquen su uso.

1. (a) **(1.5 puntos)** Resolver, en $\mathbb{C}$, la ecuación:

$$z^3 + 7j = 0.$$

   (b) **(2 puntos)** Sea el polinomio $p(z) = z^4 - z^2 - 6$. Obtener una factorización del mismo en $\mathbb{C}[z]$ y, si es posible, también en $\mathbb{R}[z]$.

Sol. (a) $z_0 = \sqrt[3]{7}e^{-j\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = \sqrt[3]{7}e^{j\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = \sqrt[3]{7}e^{j\frac{7\pi}{6}}$ b) Factorizaciones:

$$\text{En } \mathbb{C}[z]: \ p(z) = p(z) = (z-2j)(z+2j)\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z+\sqrt{3}\right)$$
$$\text{En } \mathbb{R}[z]: \ p(z) = \left(z^2+2\right)\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z+\sqrt{3}\right)$$

2. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + (a+1)y + z &= 2a \\ x + y + (a+1)z &= 0 \end{aligned}$$

   (a) **(2.5 puntos)** Discutir su compatibilidad en función de a.

   (b) **(0.5 puntos)** Solucionar el sistema en el caso compatible indeterminado.

Sol. (a) $a \neq 0$: SCD; $a = 0$ SCI (b) $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. Sea $F = \langle(1, -2, 1), (0, 1, 1), (3, -7, 2)\rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (a) **(1 punto)** Encontrar una base y la dimensión de F.

   (b) **(1.5 puntos)** Determinar el valor de a para el cual se tiene que $\vec{v} = (2, a, 1)$ pertenece a F y, para dicho valor de a, calcular las componentes de $\vec{v}$ en la base de F encontrada en el apartado (a).

   (c) **(1 punto)** Obtener un subespacio, G, de $\mathbb{R}^3$, tal que sin estar en suma directa con F cumpla $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Sol. (a) $F = \{(1, -2, 1), (0, 1, 1)\}$, $\dim F = 2$ (b) $a = -5$, $\vec{v} = (2, -1)$ (c) Por ejemplo: $G = \{(1, 0, 0), (1, -2, 1)\}$

Control 1 [1A1] AiG/EETAC/UPC 09-03-20

Nom.. No puntuar:.........

1. Resol en $\mathbb{R}$ i en $\mathbb{C}$ les següents equacions.

(a){20pt} $z^3 = \dfrac{2-j^{11}-j^{24}}{j\sqrt{2}}$ [solucions en forma exponencial].

(b){20pt} $z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0$ [pista: $2-j$ és una solució] [solucions en forma binòmica].

(a) $j^{11} = -j$ $j^{24} = 1$

$$\frac{2-j^{11}-j^{24}}{j\cdot\sqrt{2}} = \frac{2+j-1}{j\cdot\sqrt{2}} = \frac{1+j}{j\cdot\sqrt{2}} = \frac{(1+j)j\cdot\sqrt{2}}{j\cdot\sqrt{2}\cdot j\cdot\sqrt{2}} = \frac{j\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j = e^{\frac{7\pi}{4}\cdot j} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} w_0 = e^{\frac{7\pi}{12}j} \\ w_1 = e^{\frac{15\pi}{12}j} \\ w_2 = e^{\frac{23\pi}{12}j} \end{cases}}$$

(b)

	1	-2	-1	2	10
2-j		2-j	-1-2j	-6-2j	-10
	1	-j	-2-2j	-4-2j	$\boxed{0}$
2+j		2+j	4+2j	4+2j	
	1	2	2	$\boxed{0}$	

$$z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = (z-2+j)(z-2-j)\cdot(z^2+2z+2)$$

$$z^2+2z+2 = 0 \longrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2\pm 2j}{2} = \begin{cases} -1+j \\ -1-j \end{cases}$$

Solucions: $\boxed{2-j;\ 2+j;\ -1-j;\ -1+j}$

2. Considerem la família uniparamètrica de sistemes d'equacions lineals $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'ordre 4x3 i paràmetre k on:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a){20pt} Quan $k = -1$ classifica i resol aquest s.e.l.

(b){20pt} Esbrina per quins valors del paràmetre k aquest s.e.l. és incompatible.

$\boxed{(a)}$

$$B = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \underline{\det(B) = 0}$$

$$B \sim\sim\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \underline{\text{rang}(B) = 3}$$

$r(A) = r(B) = n = 3 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinat}}$

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \longrightarrow x = y + z - 1 = -1 \\ y - z = 0 \longrightarrow y = z = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Solució: $\boxed{(x, y, z) = (-1, 4, 4)}$

$\boxed{2(b)}$

$$B = (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2k & k & 1 & -1-2k \\ k-2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & k & k-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2k & 1 & -1-2k \\ k-2 & -1 & -1 \\ -1 & k & k-2 \end{vmatrix} = \dots = -2k^3+2k^2+4k$$

$$-2k^3+2k+4k=0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 2 \end{cases}$$

$k_1 = -1$ → Compatible determinat (apartat (a))

$k_2 = 0$ $\quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ C.D.

$k_3 = 2$ $\quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ C.D.

$k \notin \{-1,0,2\} \Leftrightarrow r(B) = 4 \longleftrightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE

3. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$: $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ i $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$, on:

$$\vec{u}_1 = (1,2,1,3), \vec{u}_2 = (2,0,3,2), \underbrace{\vec{v}_1 = (-1,6,-3,5), \vec{v}_2 = (0,4,-1,4), \vec{v}_3 = (3,2,1,-1)}$$

Es demana:

(a){20pt} La dimensió, equacions implícites i equacions paramètriques del subespai vectorial V.

(b){20pt} La dimensió, una base i equacions implícites del subespai vectorial $U \cap V$.

$\boxed{(a)}$

$$M_{S_V} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 20 & -8 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

on: $S_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

Per tant: $\boxed{\dim V = r(M_{S_V}) = 3}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & -3 & 11 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ x & y & z & t-2z \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 0 & 4 & 6 \\ x & y & t-2z \end{vmatrix} =$$

$$= -8x + 6y + 8z - 4t$$

Per tant, l'equació implícita de $\underline{V}$ és: $\boxed{4x - 3y - 4z + 2t = 0}$

Finalment, les equacions paramètriques de V són:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\alpha + 3\gamma \\ y &= 6\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ z &= -3\alpha - \beta + \gamma \\ t &= 5\alpha + 4\beta - \gamma \end{aligned}}$$

$\boxed{3\,(b)}$ $S_{\mathcal{U}} = \{\bar u_1, \bar u_2\}$ $\quad M_{S_{\mathcal{U}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \underline{\dim \mathcal{U} = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & y-2x & z-x & t-3x \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6x+y+4z & -4x-4y+4t \end{pmatrix} \to$$

Per tant, les equacions implícites de $\mathcal{U}$ són:

$$\boxed{\mathcal{U}: \begin{cases} 6x - y - 4z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases}}$$

Les equacions implícites de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ són:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}: \begin{cases} 6x - y - 4z = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 4x - 3y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4 - 2 = 2 \to$$

$\to \boxed{\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}} \to \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$

Per tant, una base és: $\boxed{S_{\mathcal{U}} = \{\bar e_1, \bar e_2\}}$