

Kapitola XIII.

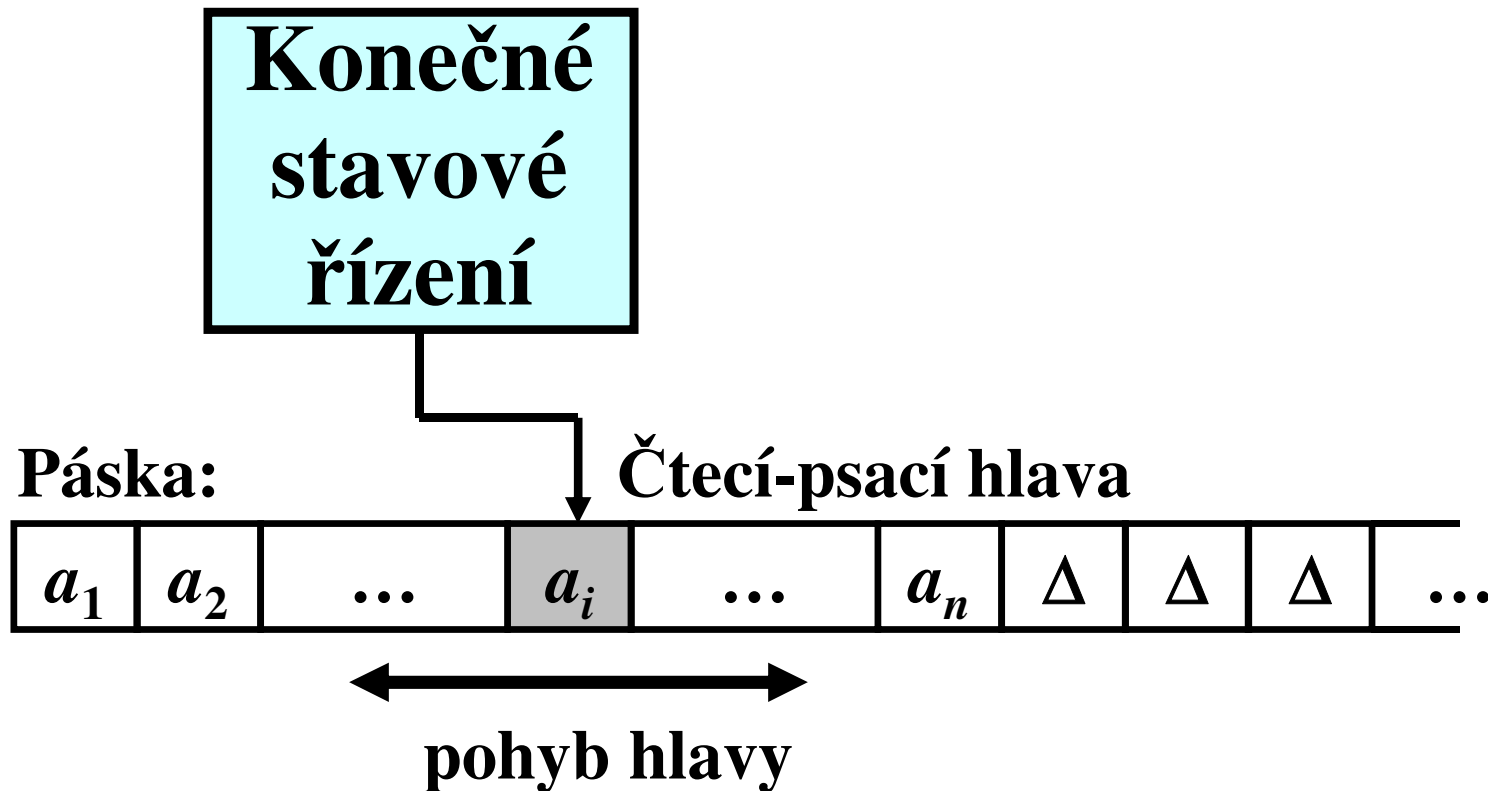
Turingovy stroje a obecné gramatiky

Alan Turing (1912 – 1954)



Turingovy stroje (TS)

Myšlenka: Výpočetní model s největší silou



Poznámka: Δ = prázdné políčko

Turingovy stroje: Definice

Definice: *Turingův stroj* (TS) je šestice

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F), \text{ kde}$$

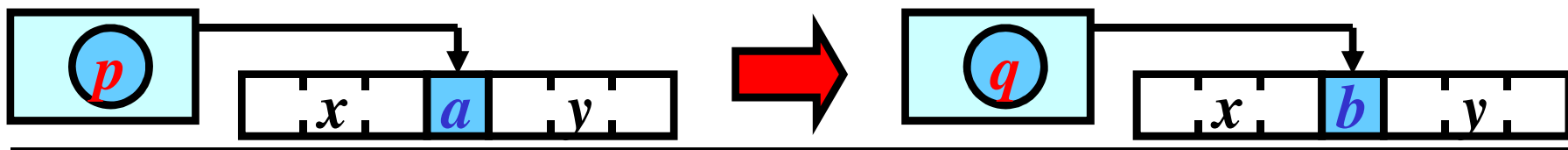
- Q je *konečná množina stavů*
- Σ je *vstupní abeceda*
- Γ je *pásková abeceda*; $\Delta \in \Gamma$; $\Sigma \subseteq \Gamma$
- R je *konečná množina pravidel* tvaru: $pa \rightarrow qbt$,
kde $p, q \in Q$, $a, b \in \Gamma$, $t \in \{S, R, L\}$
- $s \in Q$ je *počáteční stav*
- $F \subseteq Q$ je *množina koncových stavů*

Matematická poznámka:

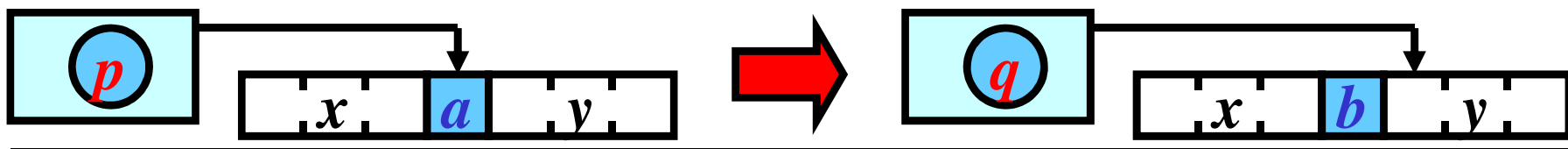
- Čistě matematicky, R je relace z $Q \times \Gamma$ do $Q \times \Gamma \times \{S, R, L\}$
- Místo relačního zápisu $(pa, qbt) \in R$ zapisujeme $pa \rightarrow qbt \in R$

Interpretace pravidel

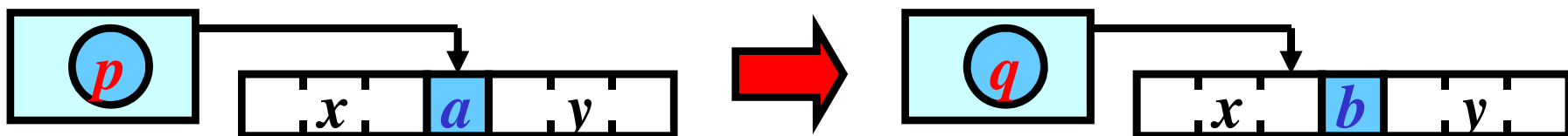
- $pa \rightarrow qbS$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a , přepiš na pásce a na b , změň aktuální stav z p na q a čtecí hlavu ponech na **stejném políčku**.



- $pa \rightarrow qbR$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a , přepiš na pásce a na b , změň aktuální stav z p na q a posuň čtecí hlavu o jedno políčko **vpravo**.



- $pa \rightarrow qbL$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a , přepiš na pásce a na b , změň aktuální stav z p na q a posuň čtecí hlavu o jedno políčko **vlevo**.



Grafická reprezentace

 označuje stav $q \in Q$

 označuje počáteční stav $s \in Q$

 označuje koncový stav $f \in F$

 $\xrightarrow{a/b, S}$  označuje $pa \rightarrow qbS \in R$

 $\xrightarrow{a/b, R}$  označuje $pa \rightarrow qbR \in R$

 $\xrightarrow{a/b, L}$  označuje $pa \rightarrow qbL \in R$

Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

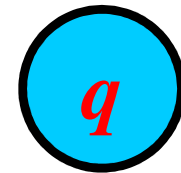
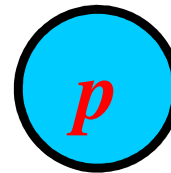
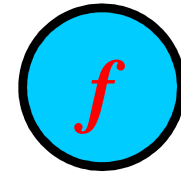
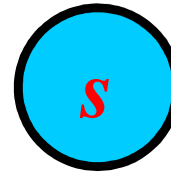
kde:

Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\};$

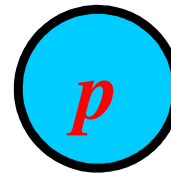
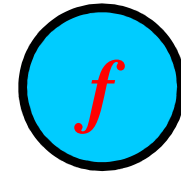
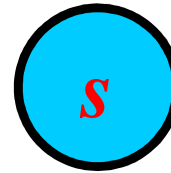


Turingův stroj: Příklad 1/2

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\};$
- $\Sigma = \{a, b\};$

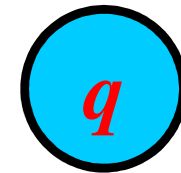
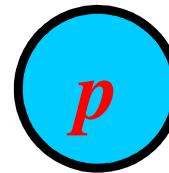
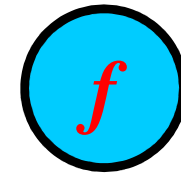
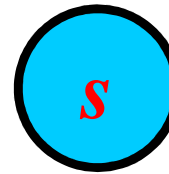


Turingův stroj: Příklad 1/2

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\};$
- $\Sigma = \{a, b\};$
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\};$

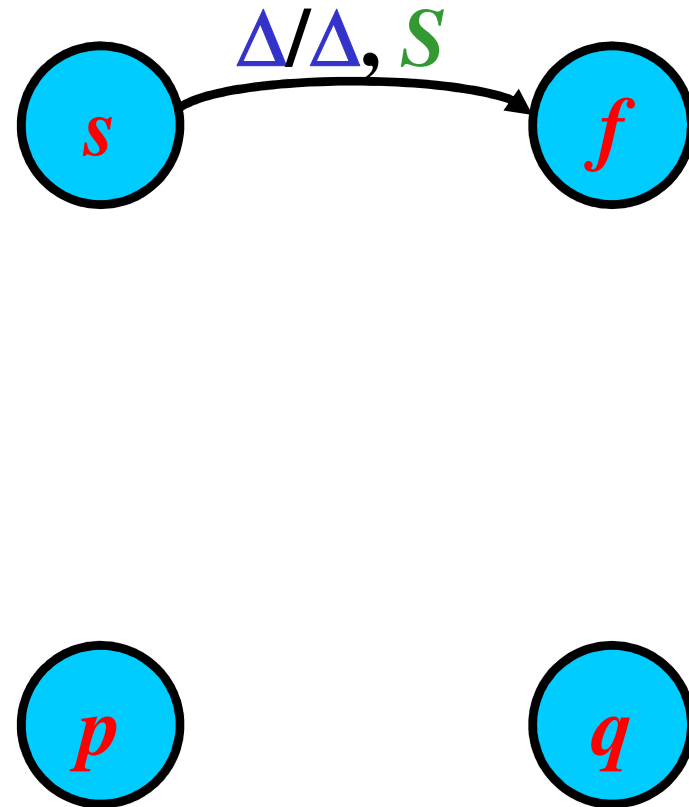


Turingův stroj: Příklad 1/2

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$

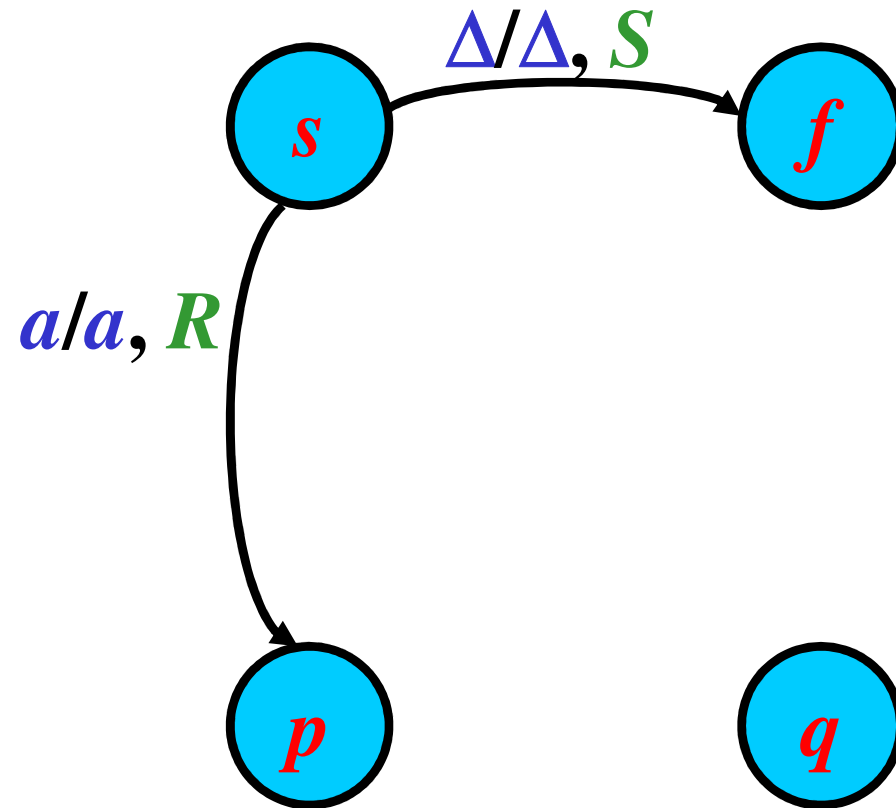


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S, \\ sa \rightarrow paR,$

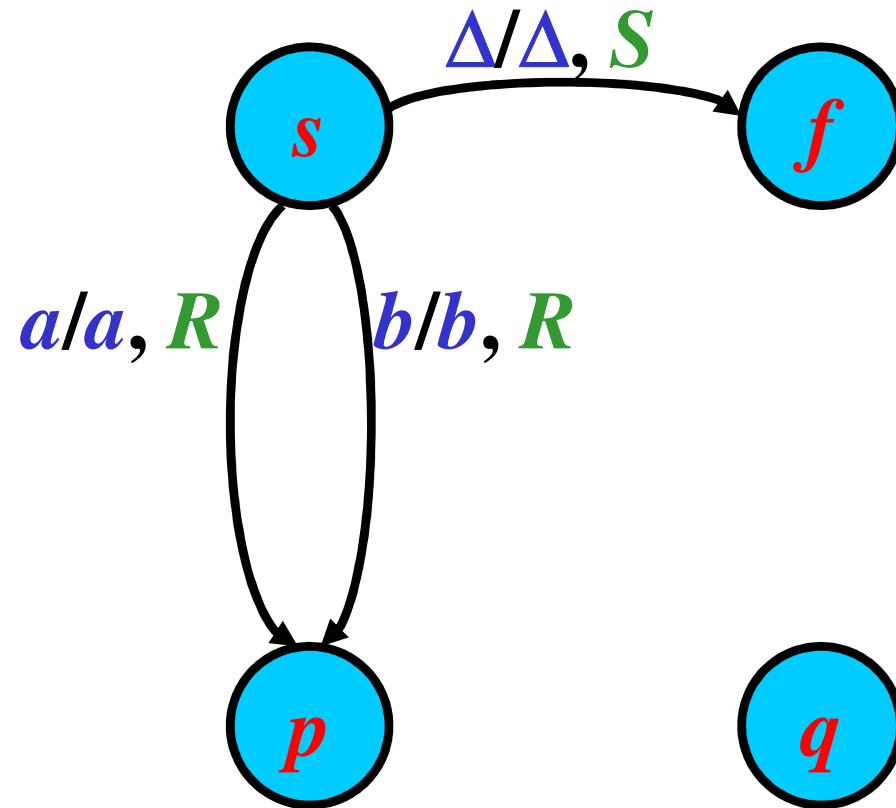


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\};$
- $\Sigma = \{a, b\};$
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\};$
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$

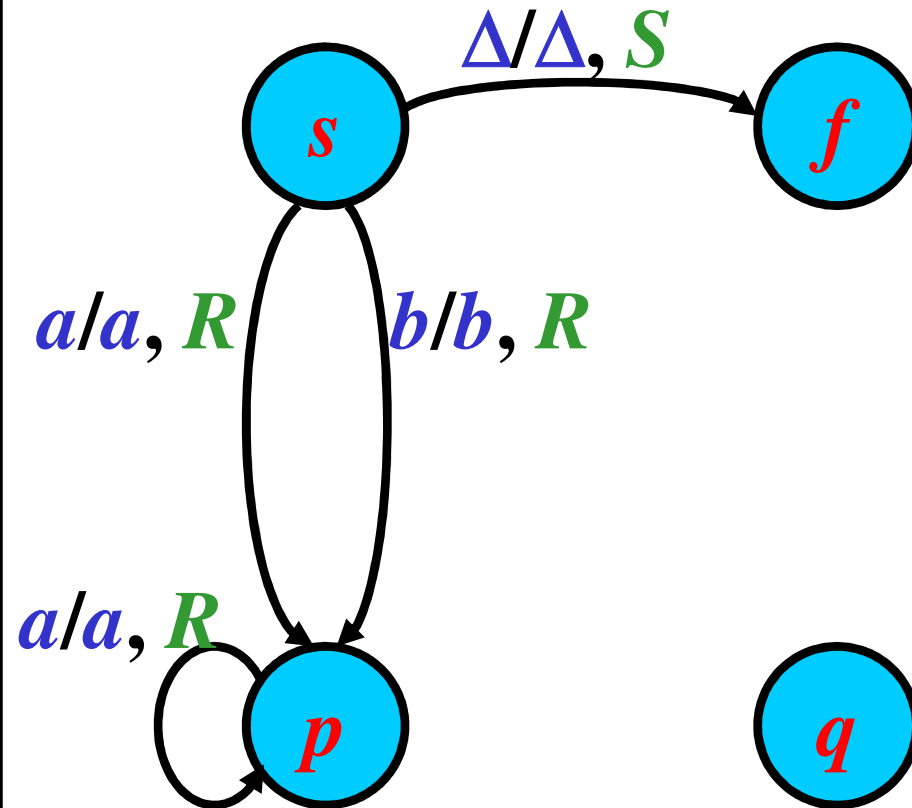


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$

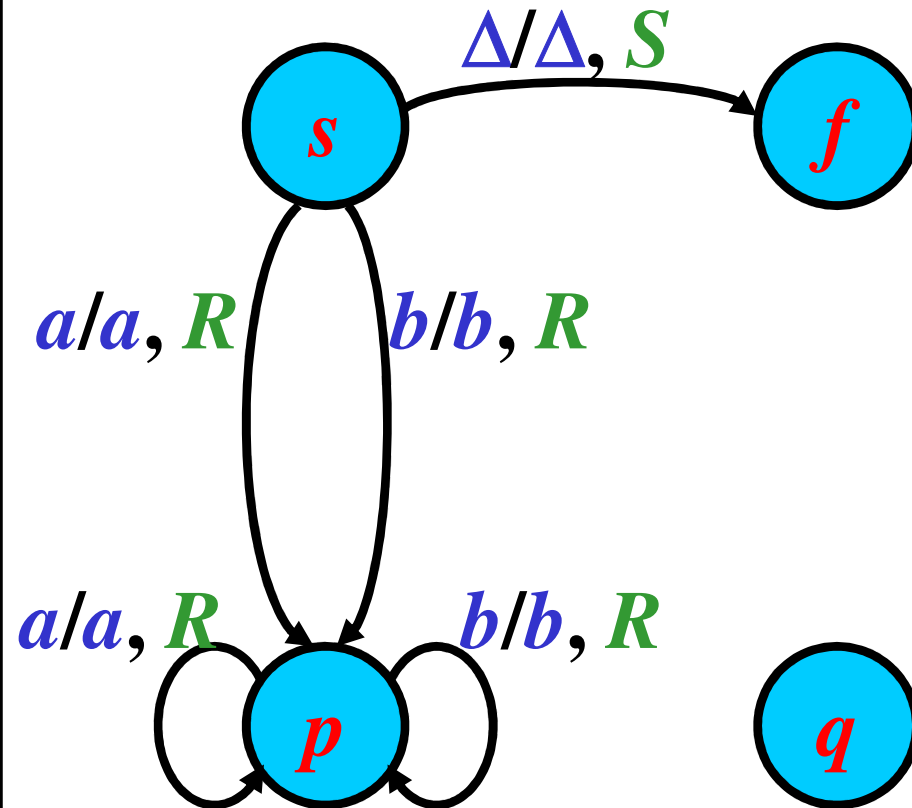


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$

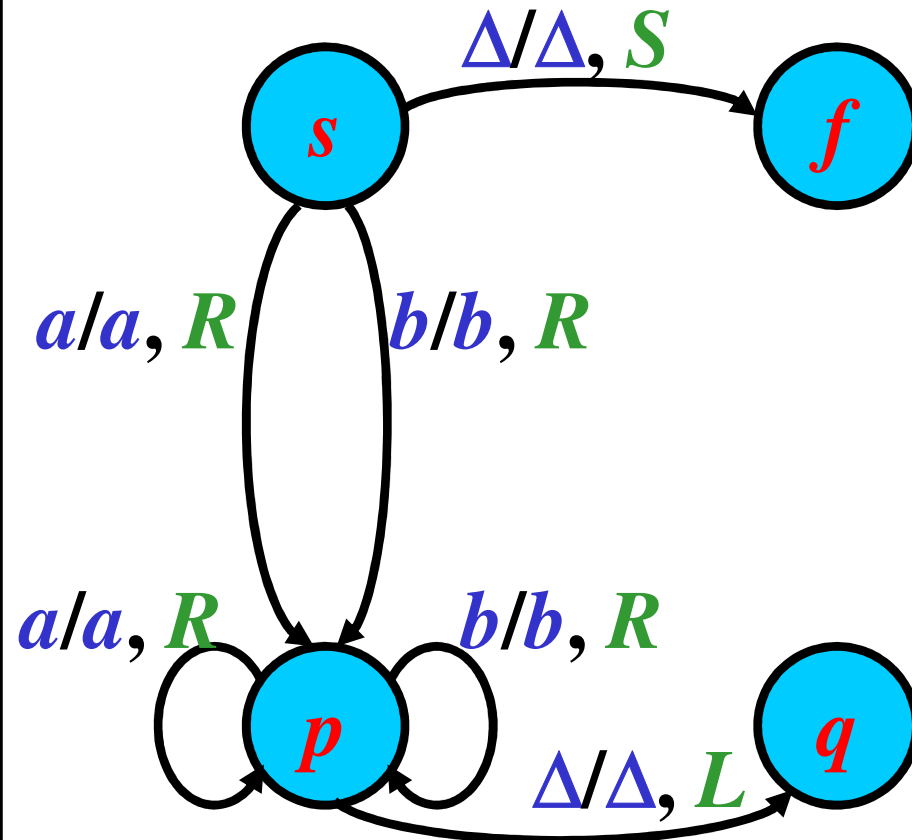


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$
 $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$

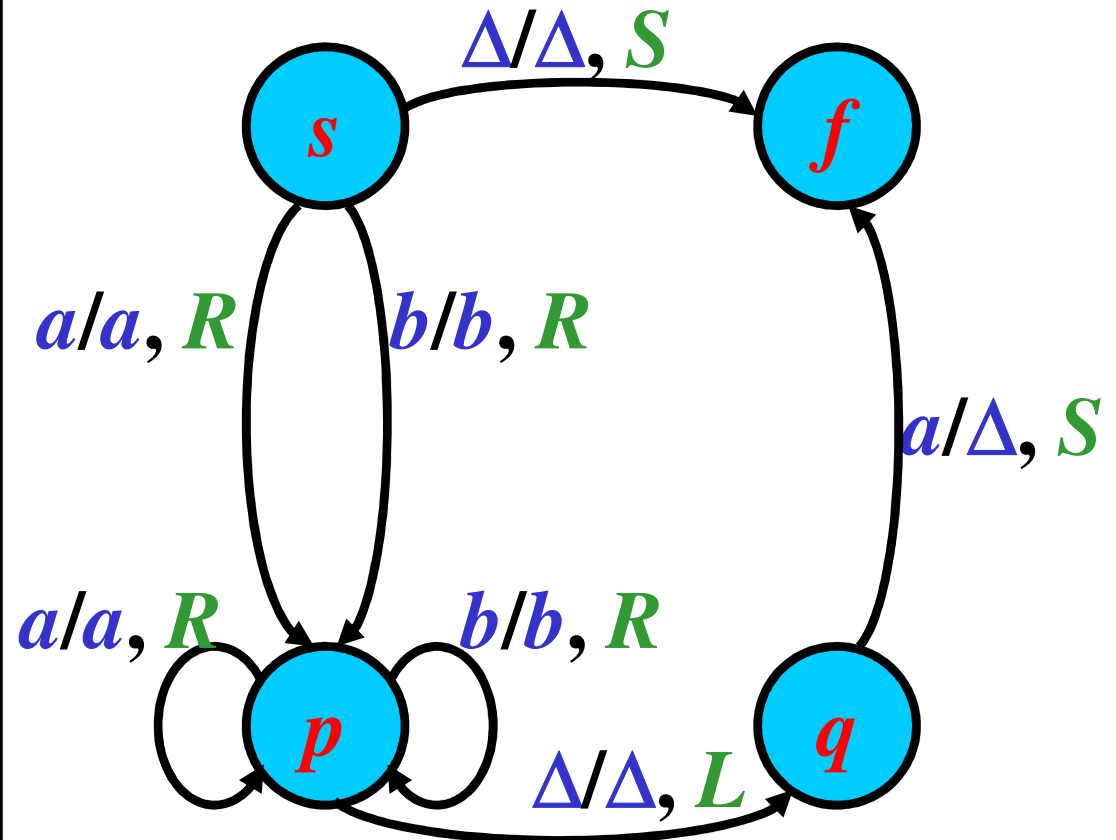


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$
 $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
 $qa \rightarrow f\Delta S,$

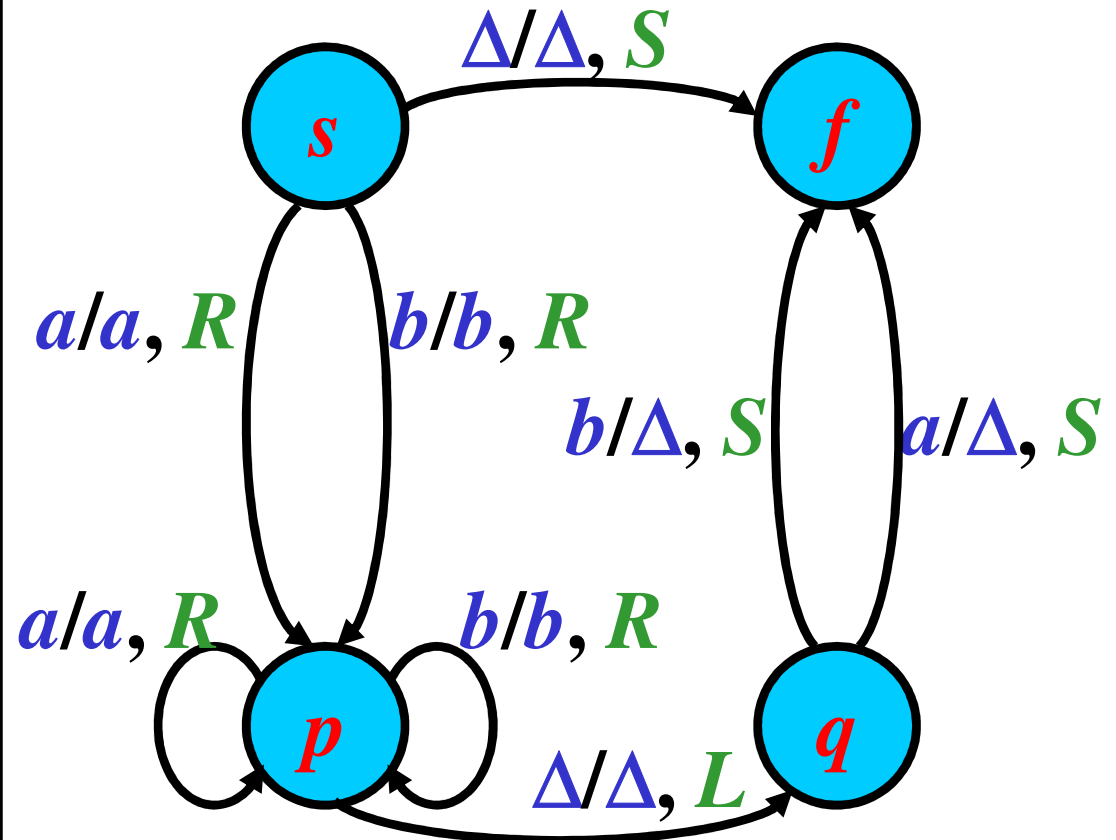


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{$
 $s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$
 $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
 $qa \rightarrow f\Delta S,$
 $qb \rightarrow f\Delta S\}$

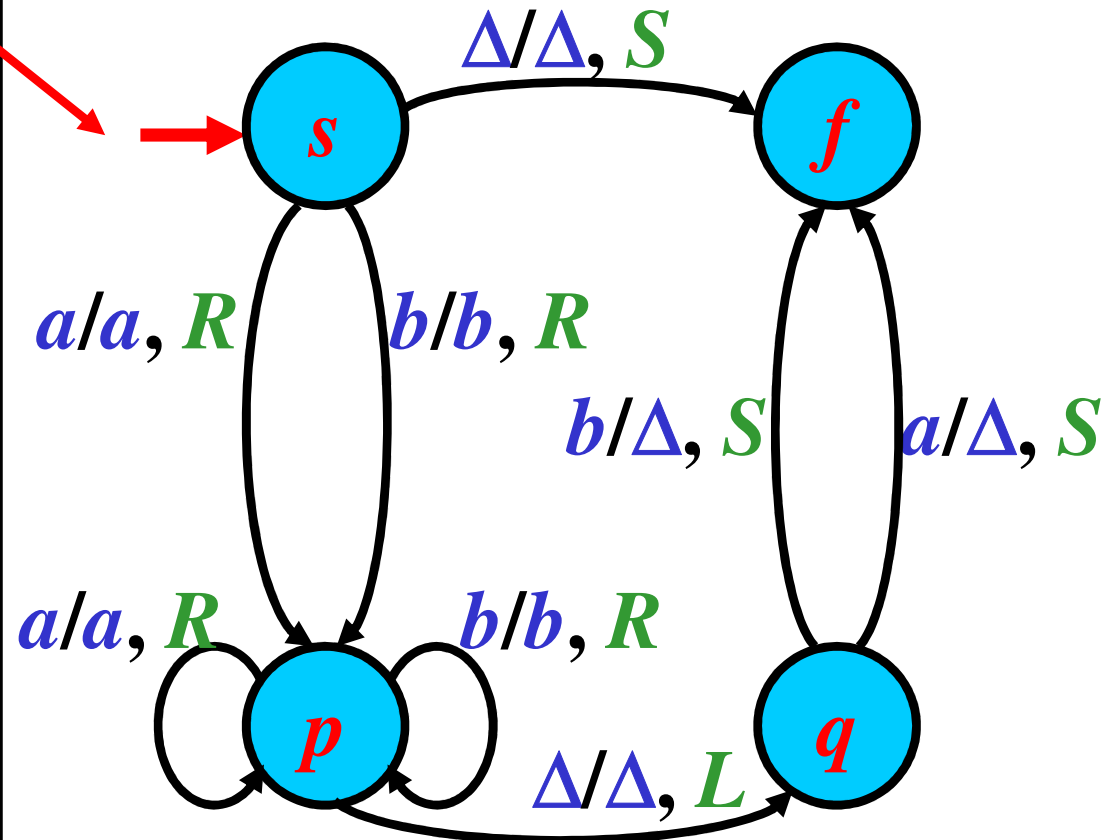


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{$
 $s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$
 $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
 $qa \rightarrow f\Delta S,$
 $qb \rightarrow f\Delta S\}$

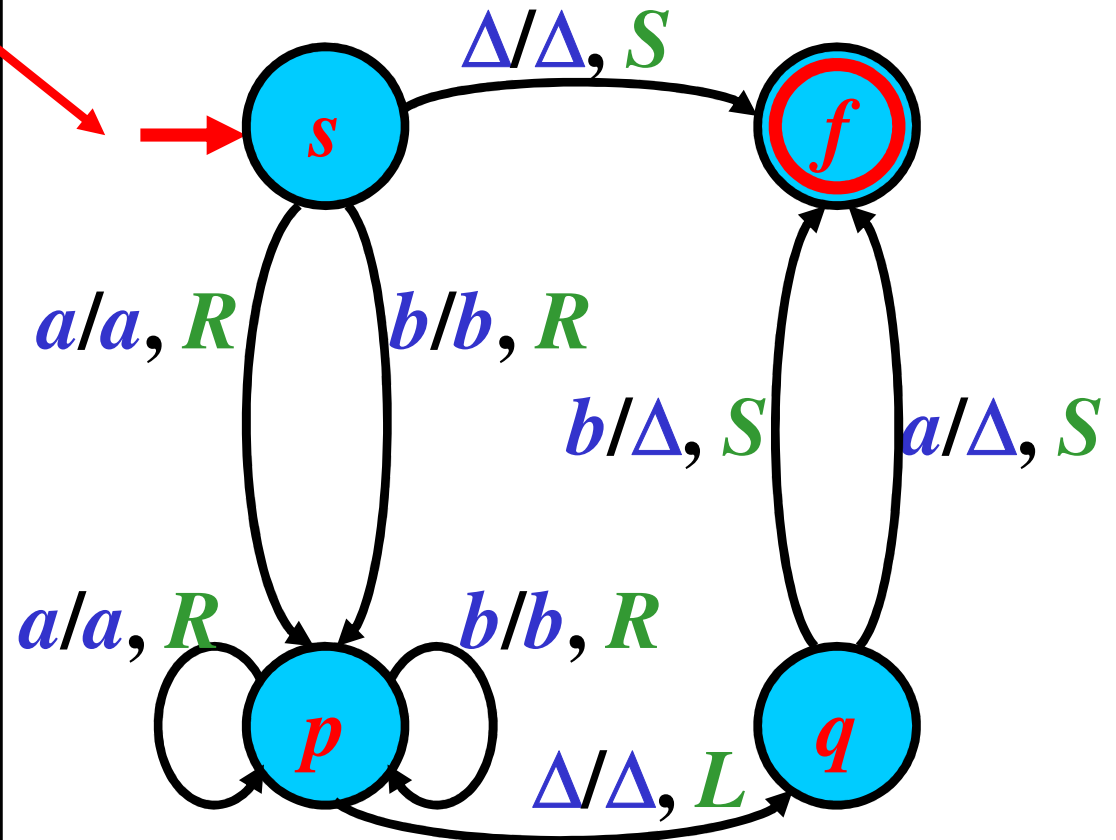


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

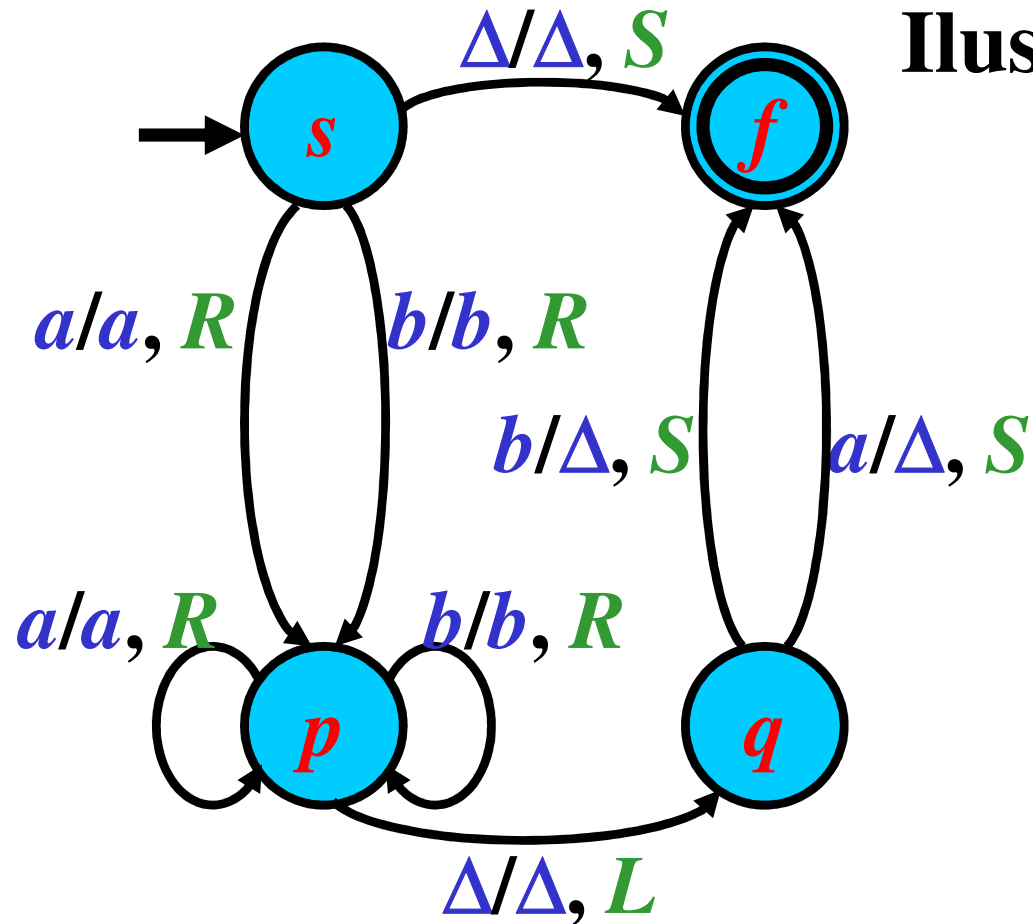
kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{$
 $s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
 $sa \rightarrow paR,$
 $sb \rightarrow pbR,$
 $pa \rightarrow paR,$
 $pb \rightarrow pbR,$
 $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
 $qa \rightarrow f\Delta S,$
 $qb \rightarrow f\Delta S\}$
- $F = \{f\}$



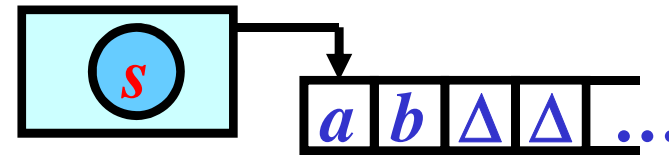
Turingův stroj: Příklad 2/2

TS M :



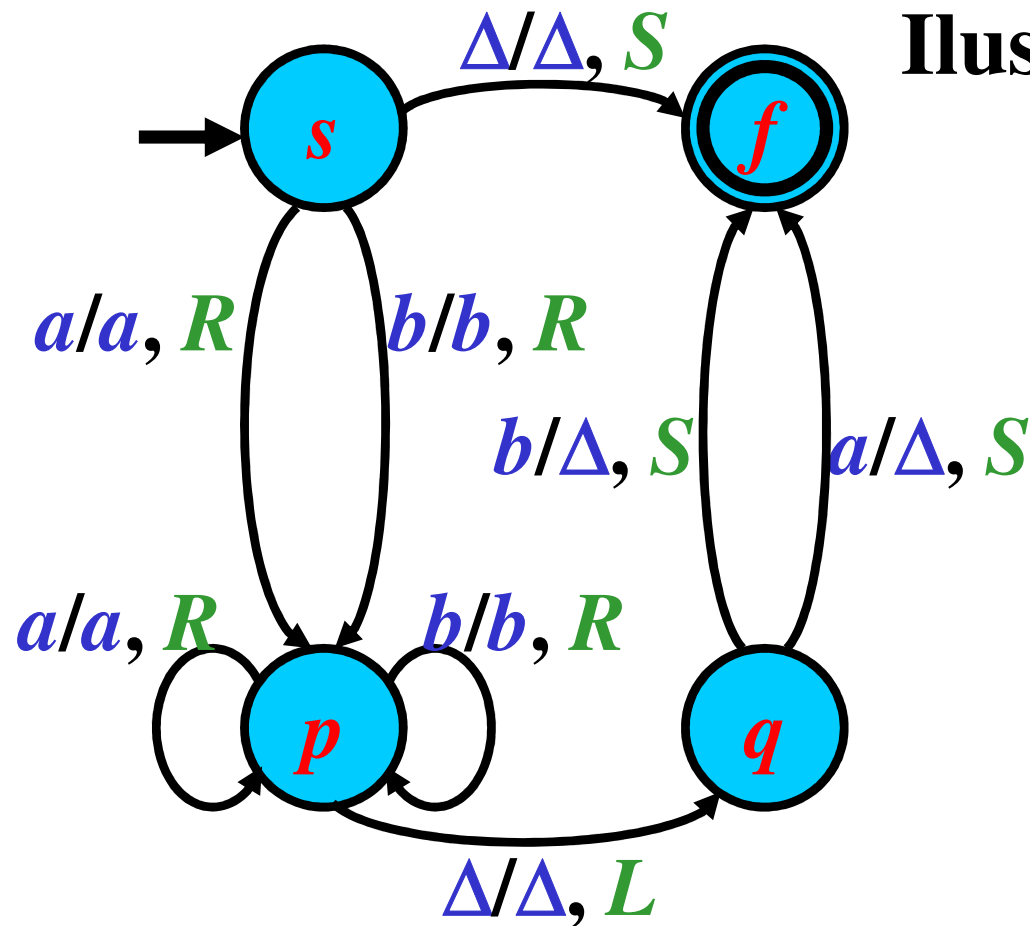
Pozn.: M smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ :

Ilustrace:



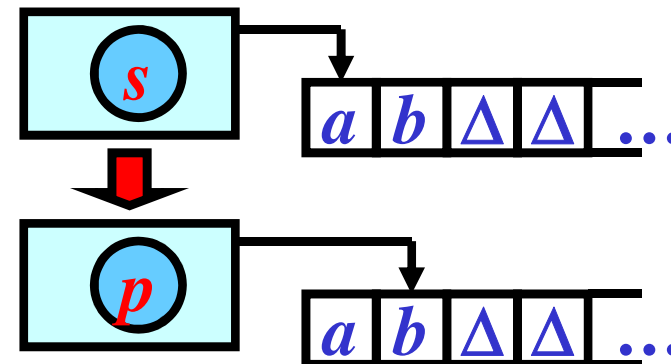
Turingův stroj: Příklad 2/2

TS M :



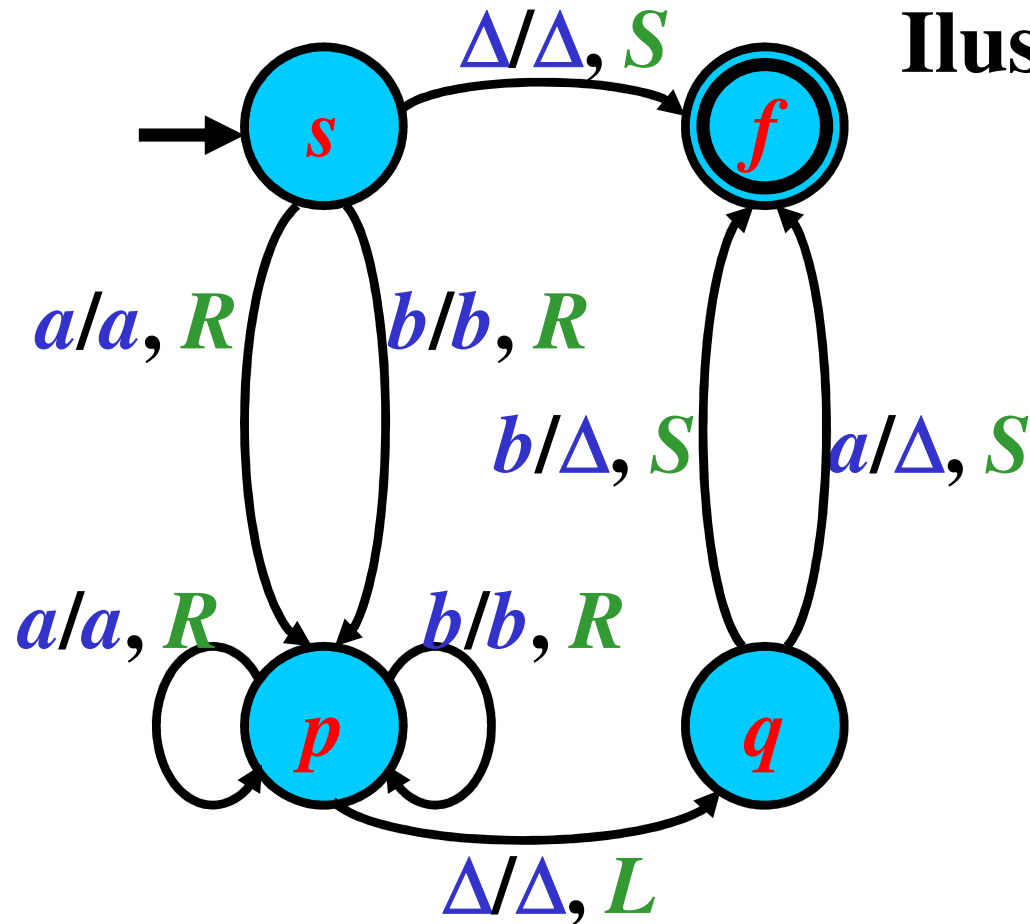
Pozn.: M smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ :

Ilustrace:



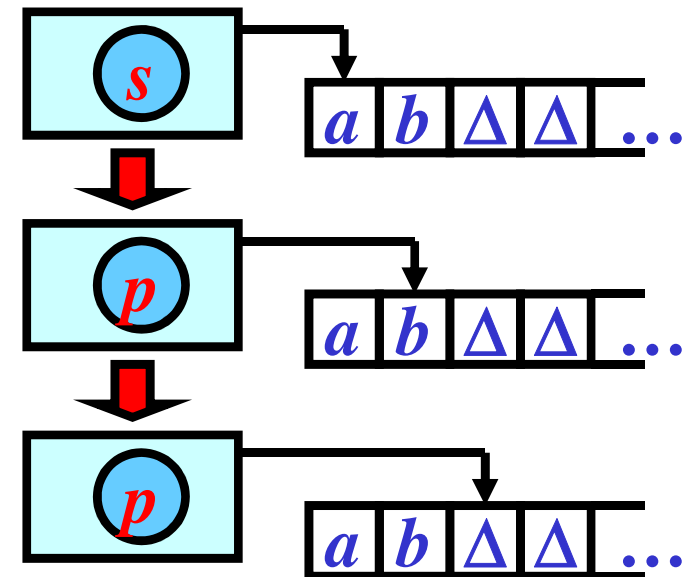
Turingův stroj: Příklad 2/2

TS M :



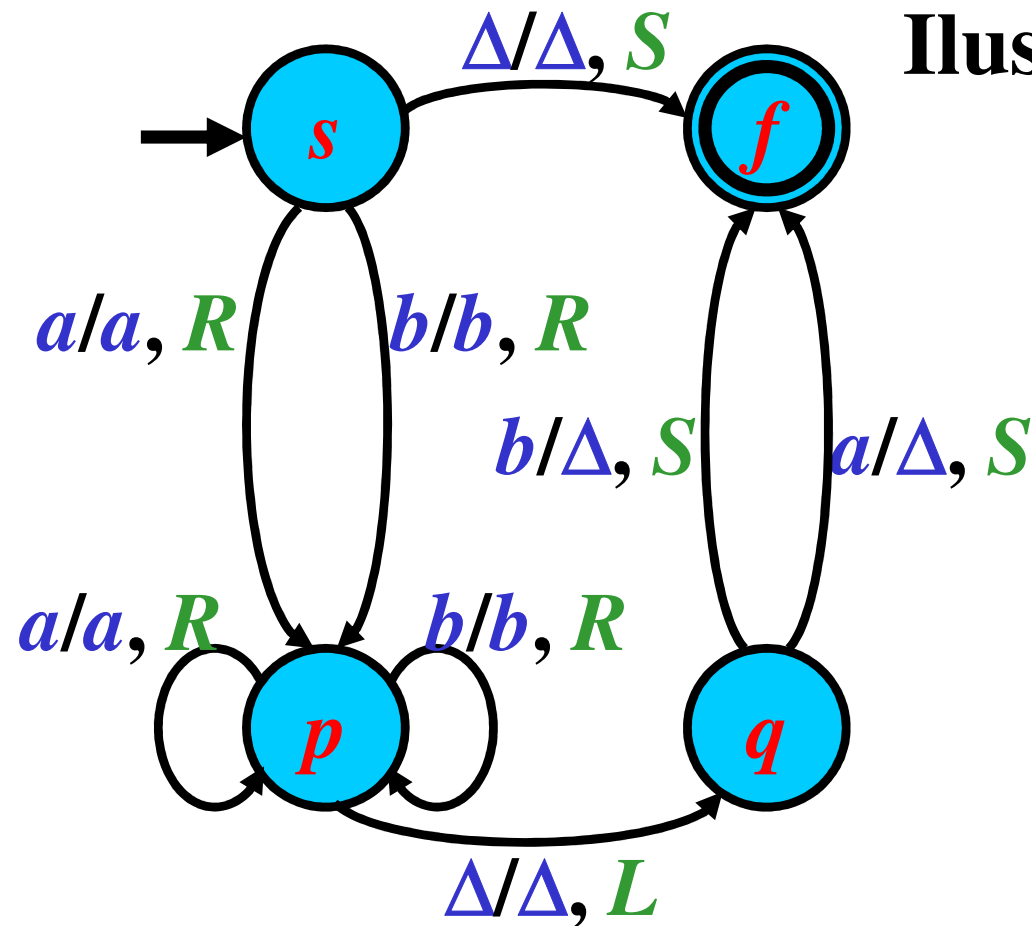
Pozn.: M smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ :

Ilustrace:



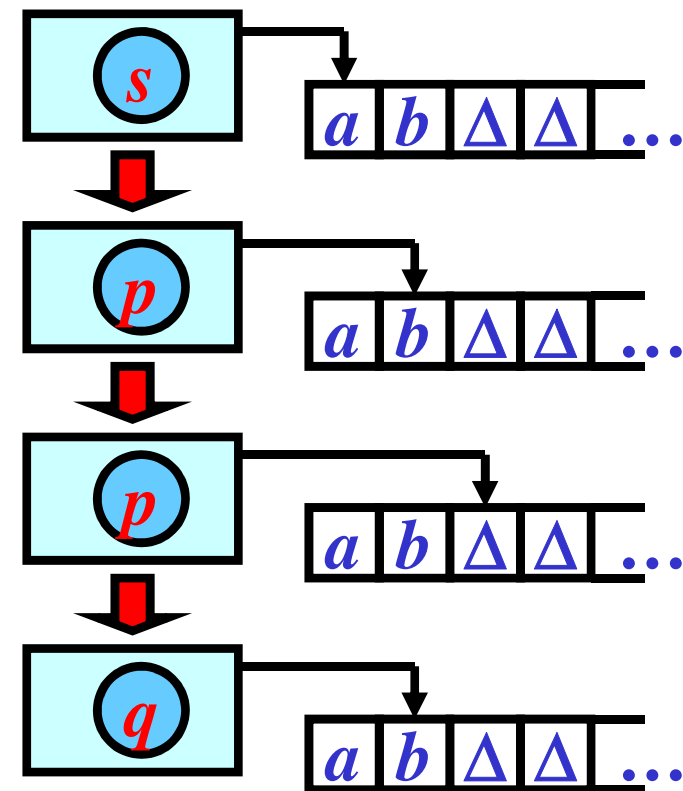
Turingův stroj: Příklad 2/2

TS M :



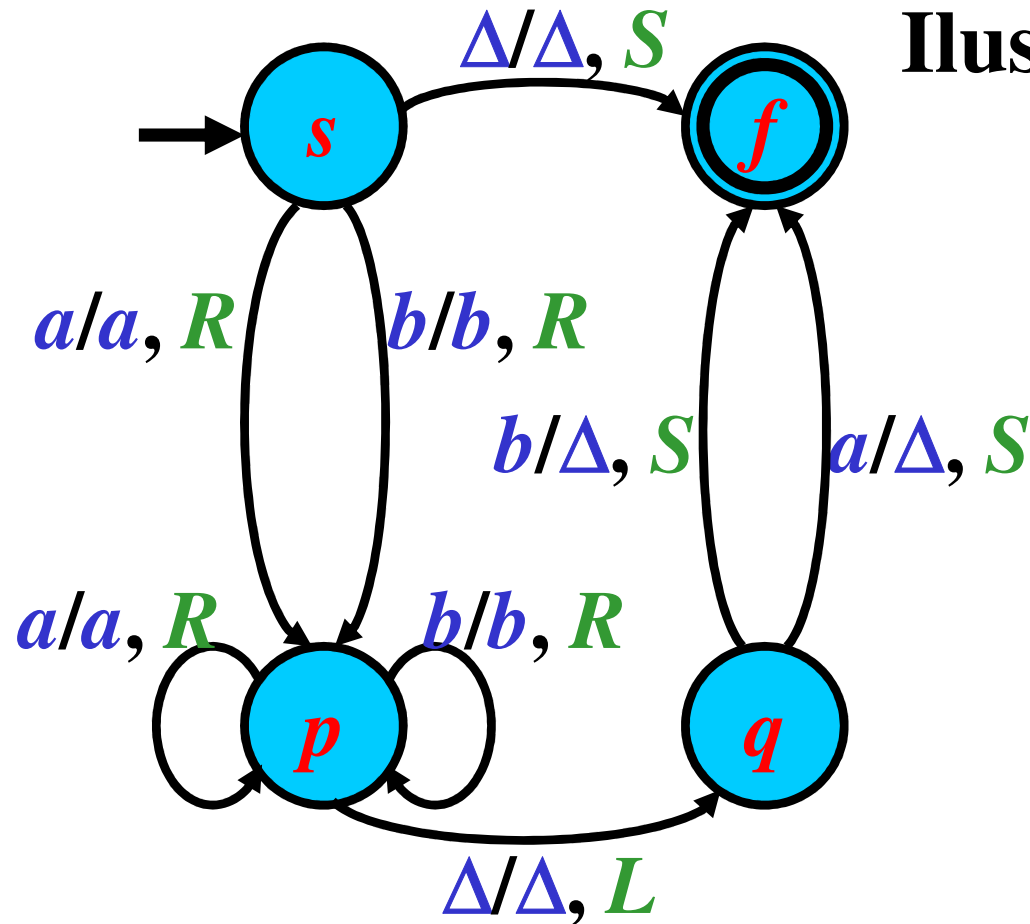
Pozn.: M smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ :

Ilustrace:



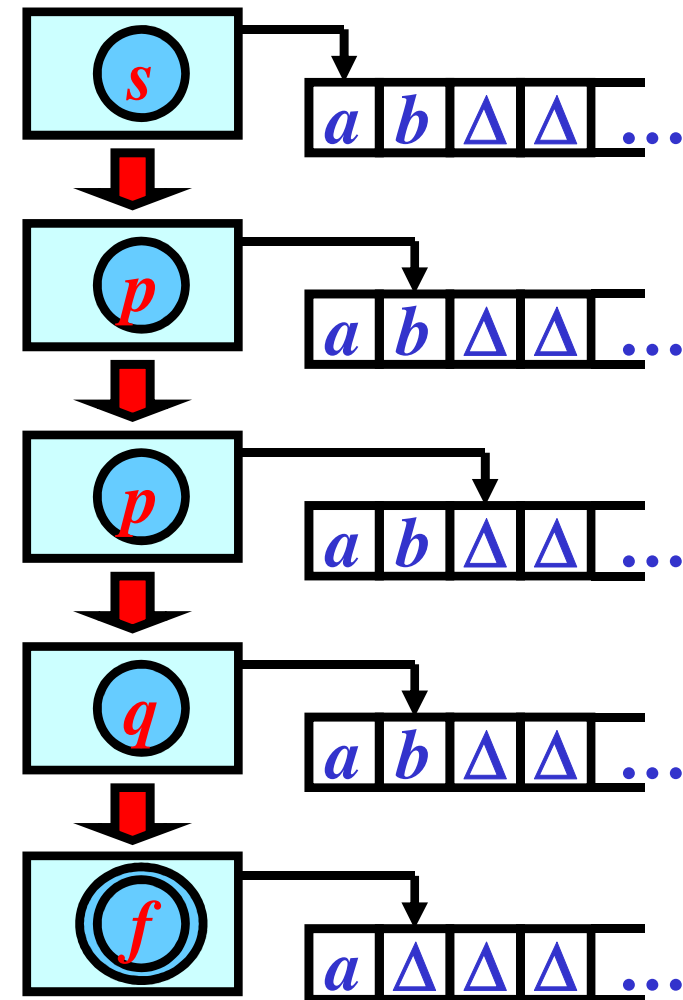
Turingův stroj: Příklad 2/2

TS M :



Pozn.: M smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ :

Ilustrace:

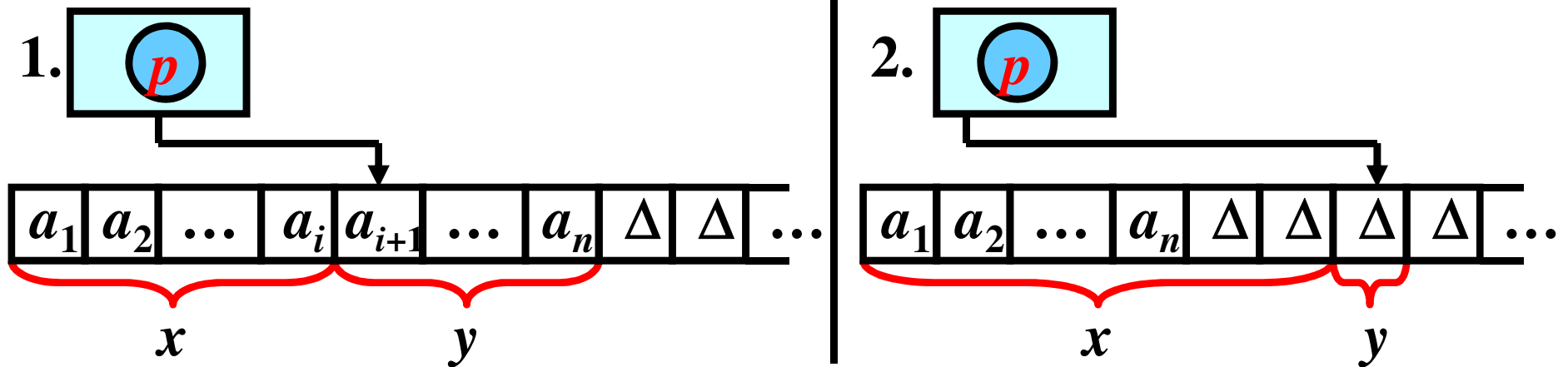


Konfigurace TS

Myšlenka: Instance popisu TS

Co vše musí být v konfiguraci popsáno?

1) Aktuální stav 2) Obsah pásky 3) Pozice hlavy



Konfigurace xpy

Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS.

Konfigurace TS M je řetězec $\chi = xpy$, kde

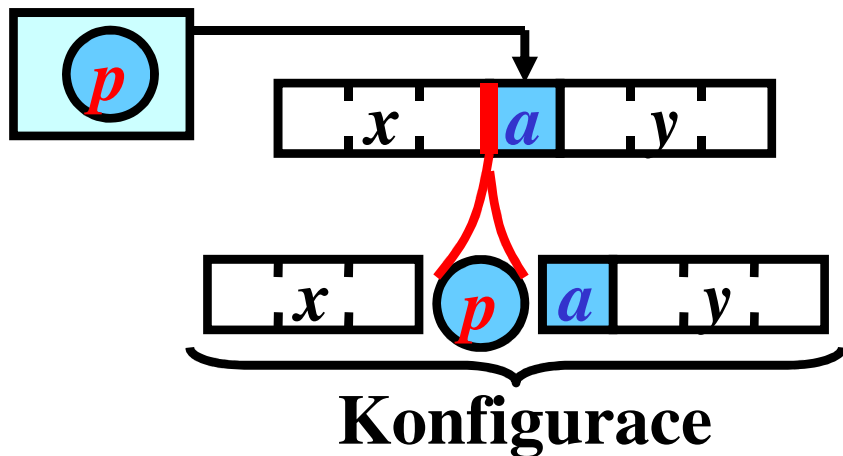
$x \in \Gamma^*$, $p \in Q$, $y \in \Gamma^*(\Gamma - \{\Delta\}) \cup \{\Delta\}$.

Stacionární přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_s \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_s \chi'$ pokud:

$$\chi = xpay, \chi' = xqby \text{ a } r: pa \rightarrow qbS \in R$$

Ilustrace:

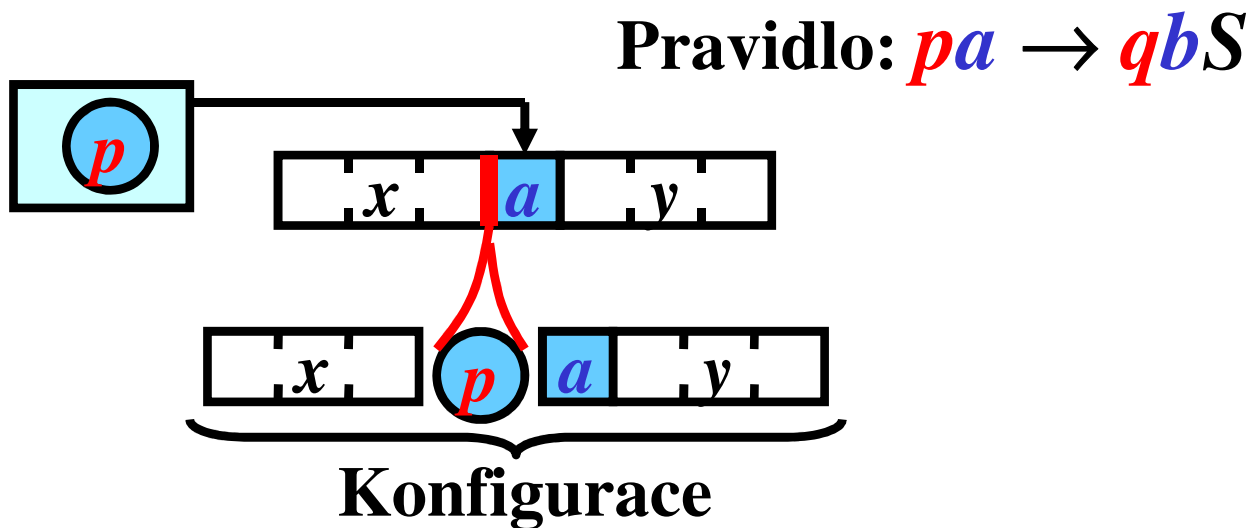


Stacionární přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_s \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_s \chi'$ pokud:

$$\chi = xpay, \chi' = xqby \text{ a } r: pa \rightarrow qbS \in R$$

Ilustrace:

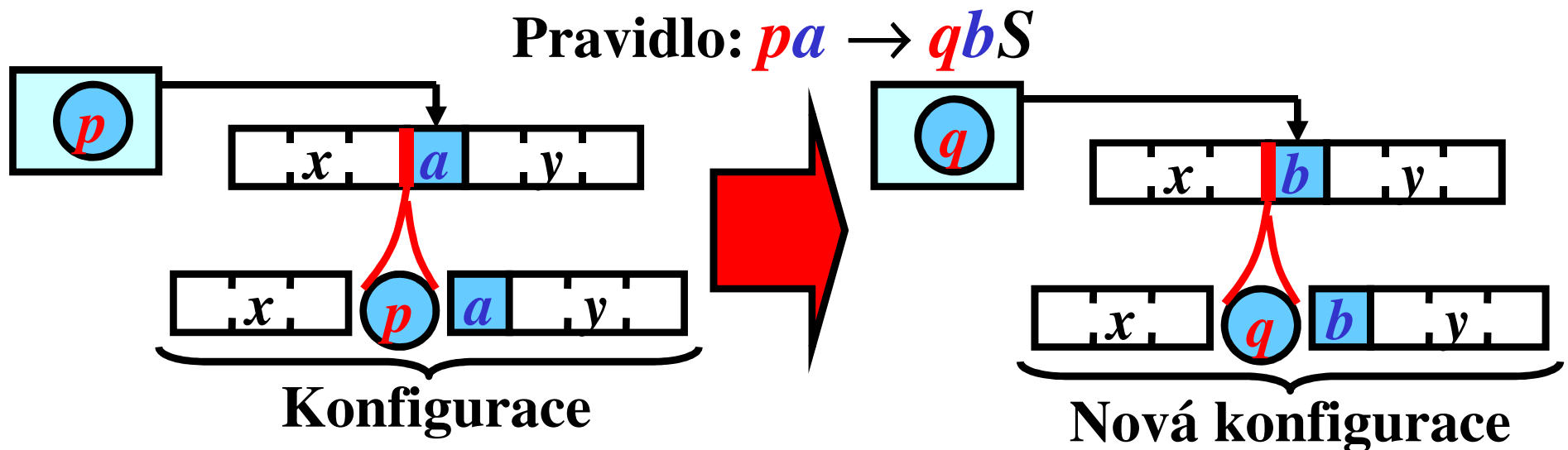


Stacionární přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_s \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_s \chi'$ pokud:

$$\chi = xpay, \chi' = xqby \text{ a } r: pa \rightarrow qbS \in R$$

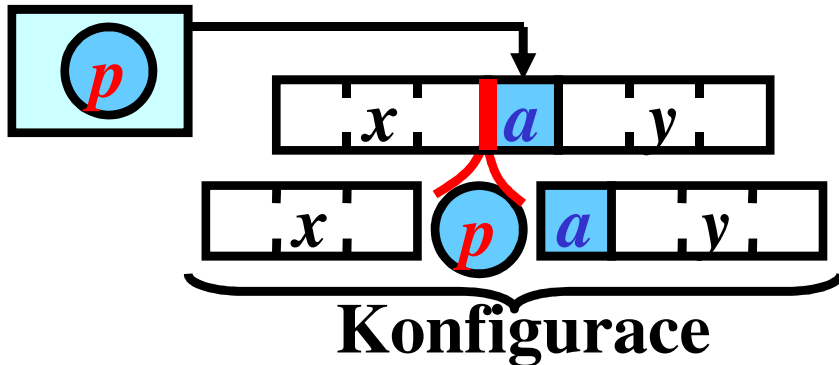
Ilustrace:



Pravý přechod

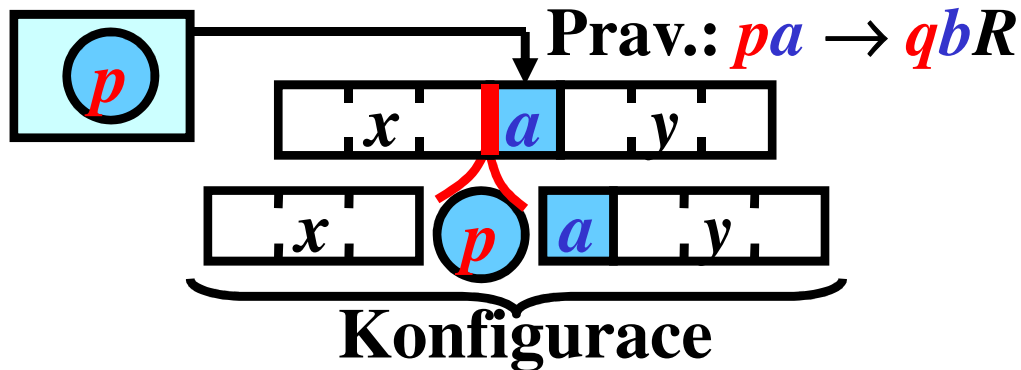
Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně:

- (1) $\chi' = x**q**y$, $y \neq \varepsilon$ nebo
- (2) $\chi' = x**q**\Delta$, $y = \varepsilon$



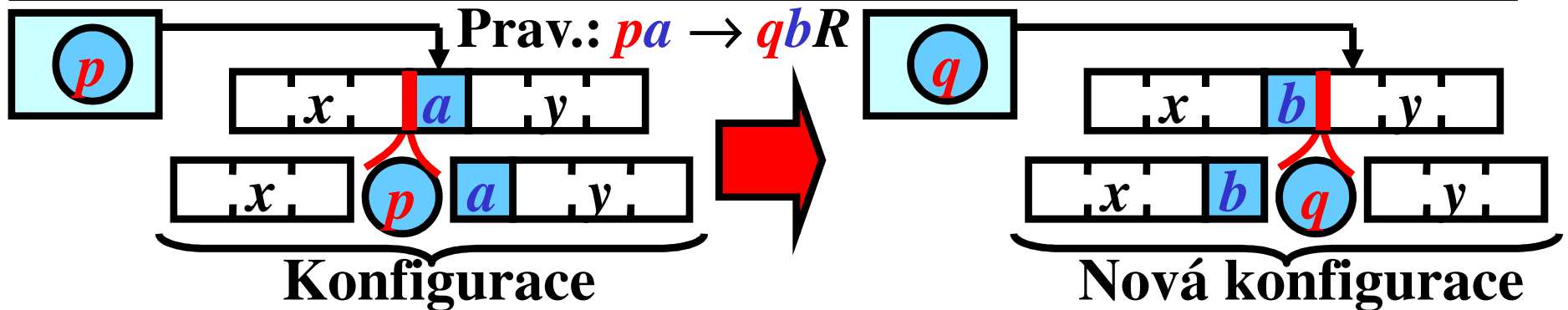
Pravý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně: (1) $\chi' = x**q**y$, $y \neq \varepsilon$ nebo (2) $\chi' = x**q**\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

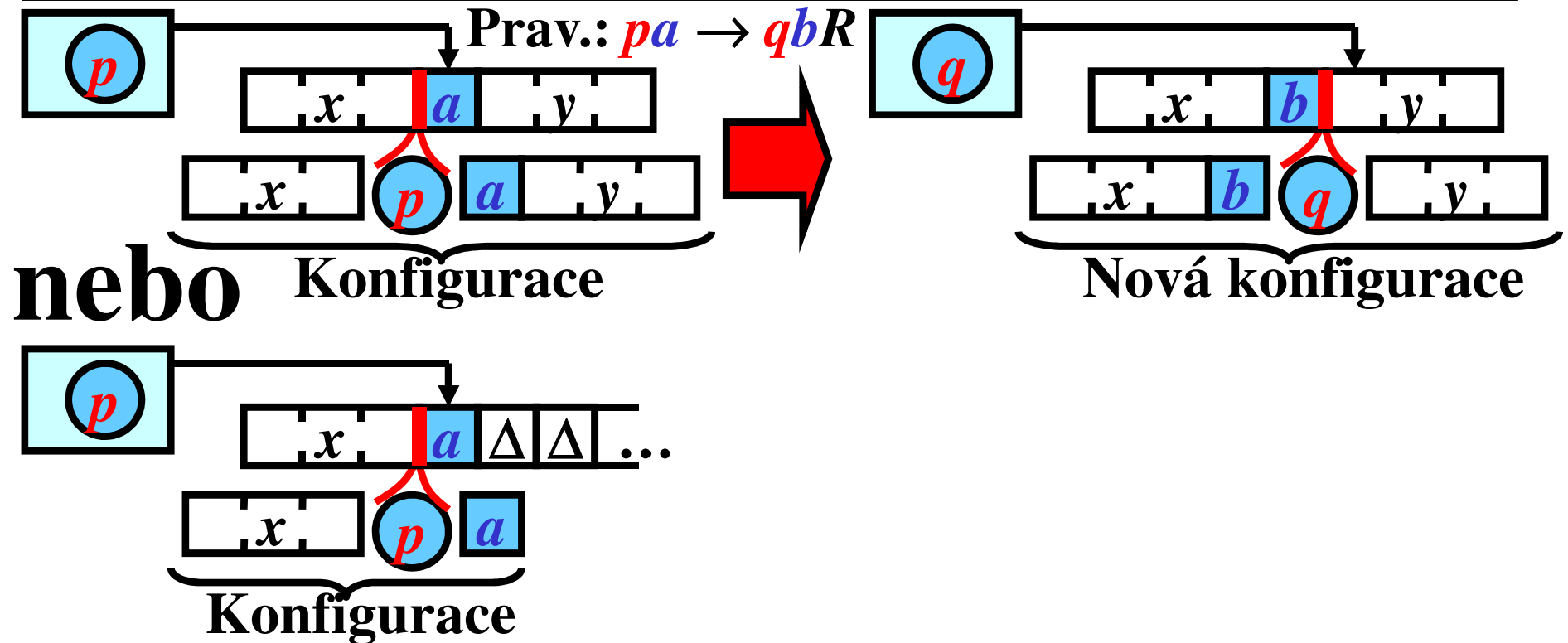
Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně: (1) $\chi' = x**q**y$, $y \neq \varepsilon$ nebo (2) $\chi' = x**q**\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

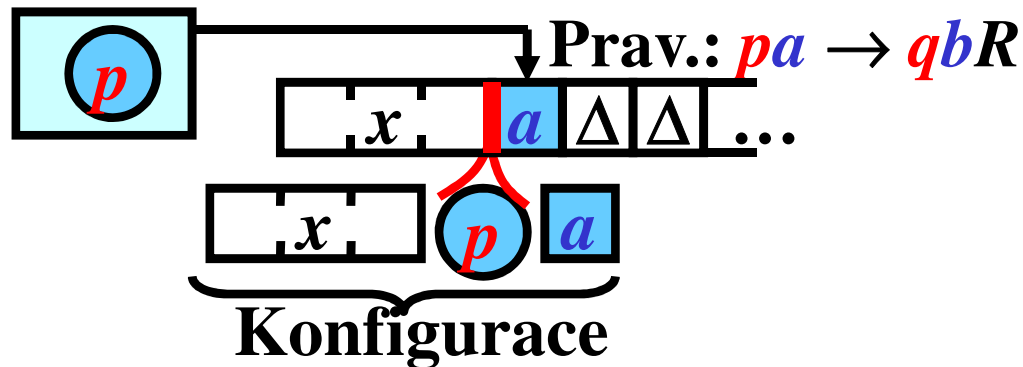
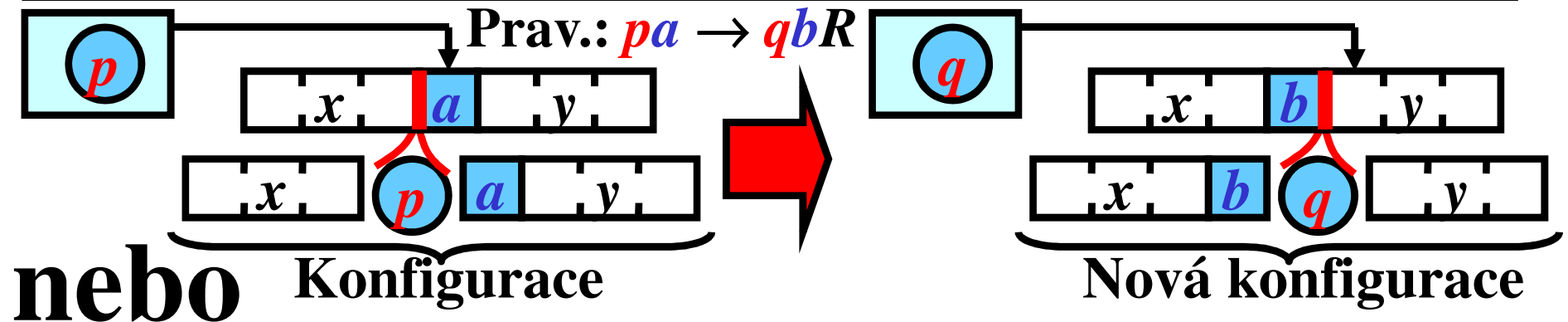
Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpa y$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně:

- (1) $\chi' = x b q y$, $y \neq \varepsilon$ nebo
- (2) $\chi' = x b q \Delta$, $y = \varepsilon$



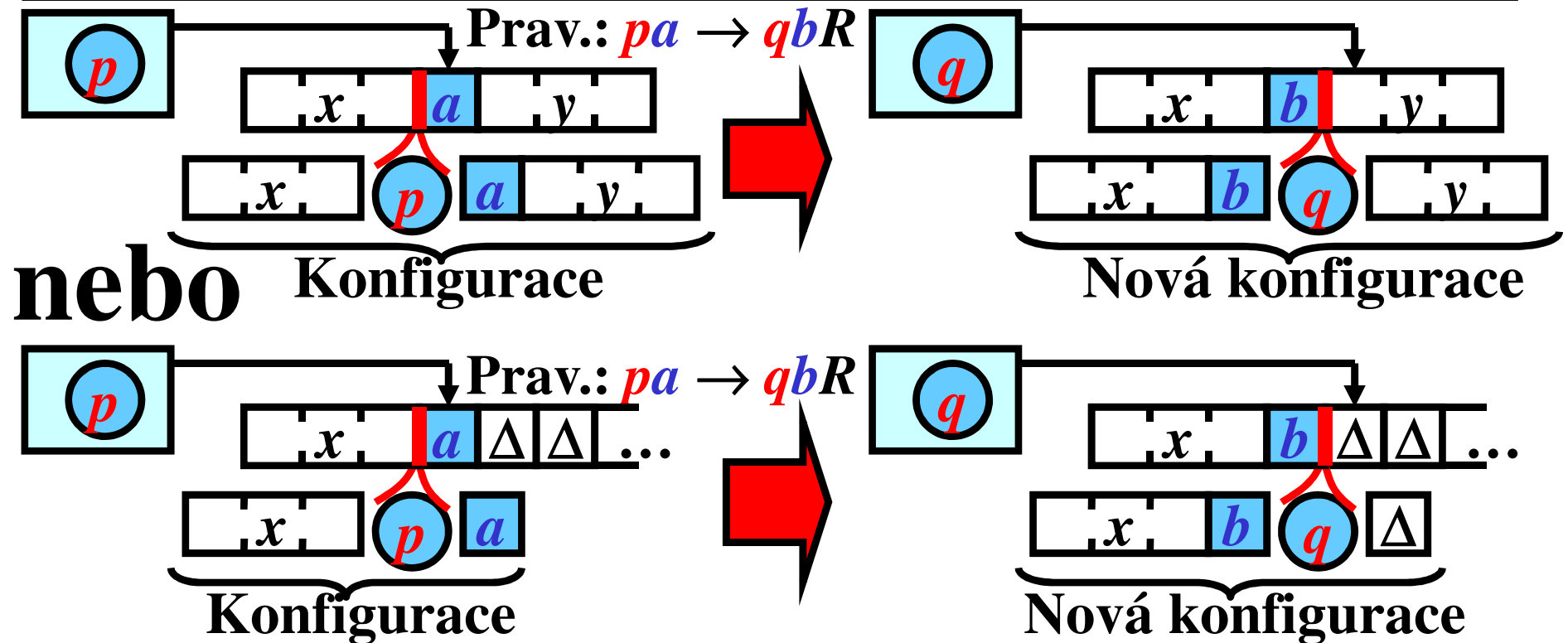
Pravý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně: (1) $\chi' = x bqy$, $y \neq \varepsilon$ nebo (2) $\chi' = x bq\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

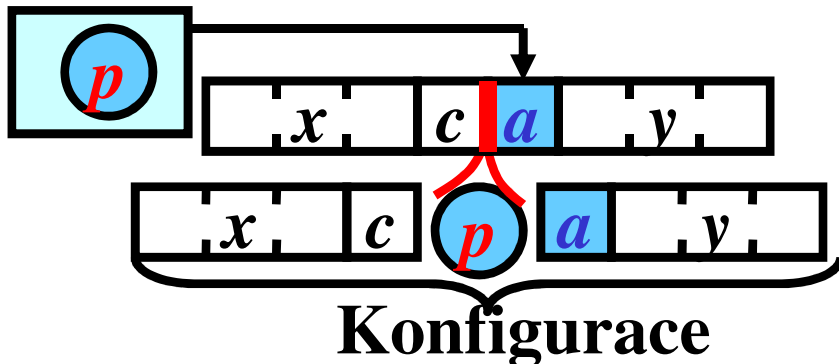
Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_R \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, $r: pa \rightarrow qbR \in R$ a současně: (1) $\chi' = x**q**y$, $y \neq \varepsilon$ nebo (2) $\chi' = x**q**\Delta$, $y = \varepsilon$



Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

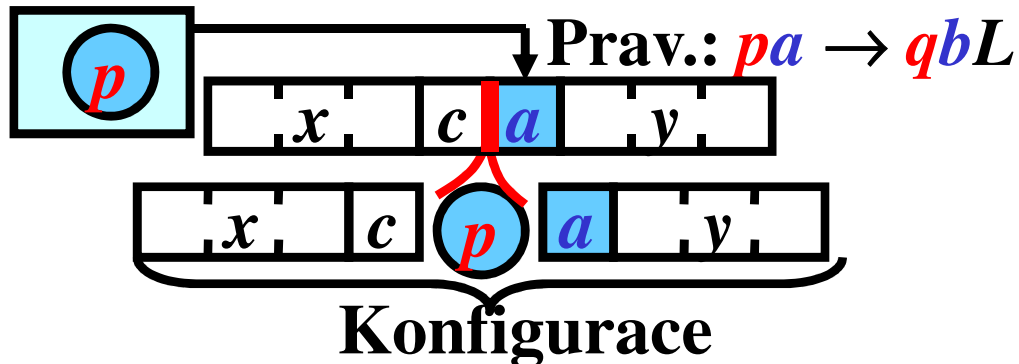
- (1) $\chi = xcpay$, $\chi' = xqcby$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $r:pa \rightarrow qbL \in R$ nebo
- (2) $\chi = xcpa$, $\chi' = xqc$, $r:pa \rightarrow q\Delta L \in R$



Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

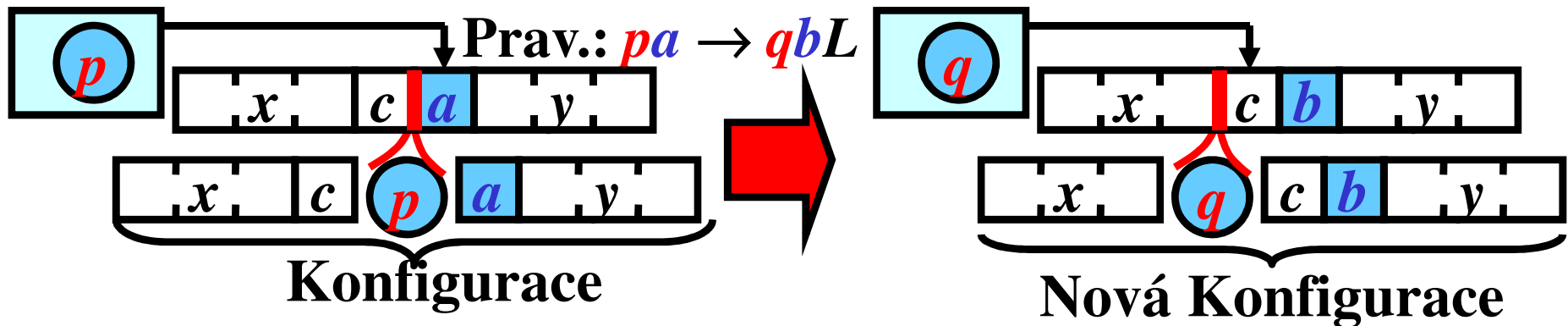
- (1) $\chi = xcpay$, $\chi' = xqcby$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $r: pa \rightarrow qbL \in R$ nebo
- (2) $\chi = xcpa$, $\chi' = xqc$, $r: pa \rightarrow q\Delta L \in R$



Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

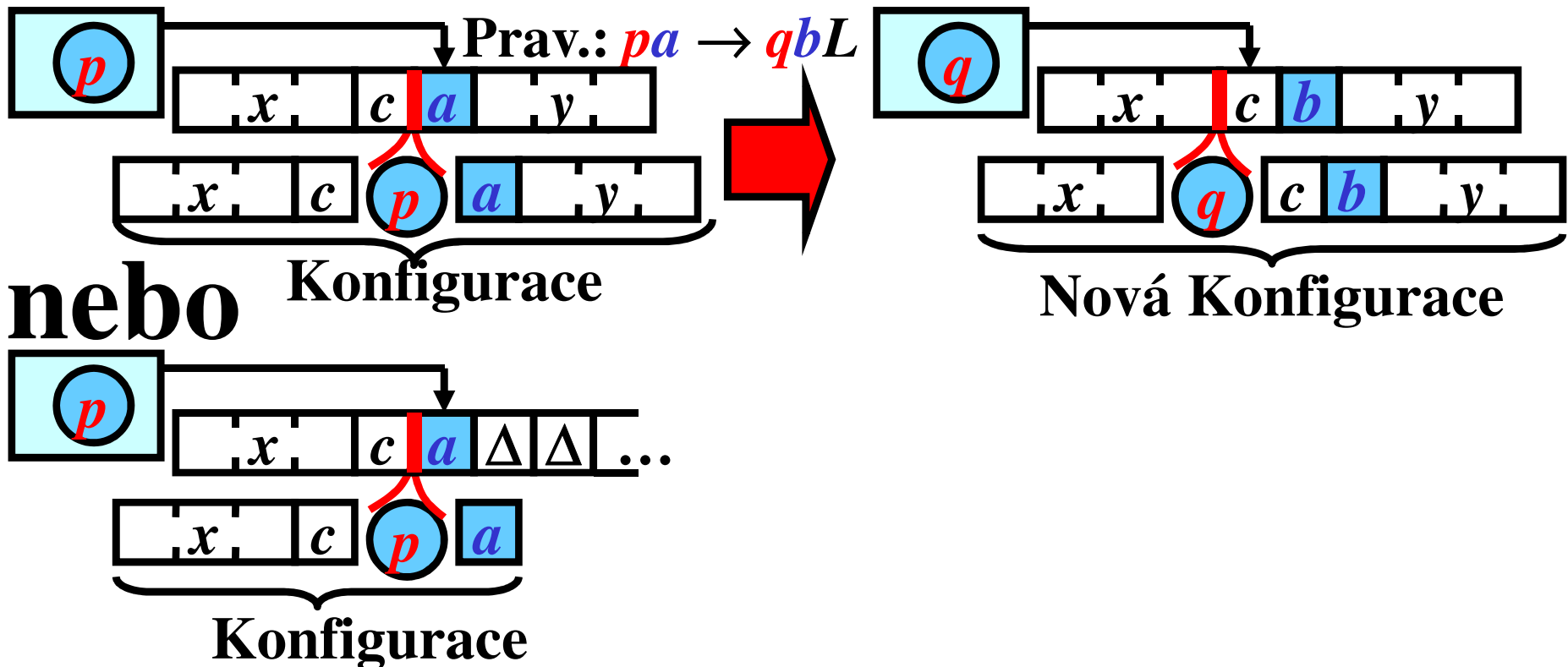
- (1) $\chi = xcpay$, $\chi' = xqcby$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $r: pa \rightarrow qbL \in R$ nebo
- (2) $\chi = xcpa$, $\chi' = xqc$, $r: pa \rightarrow q\Delta L \in R$



Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

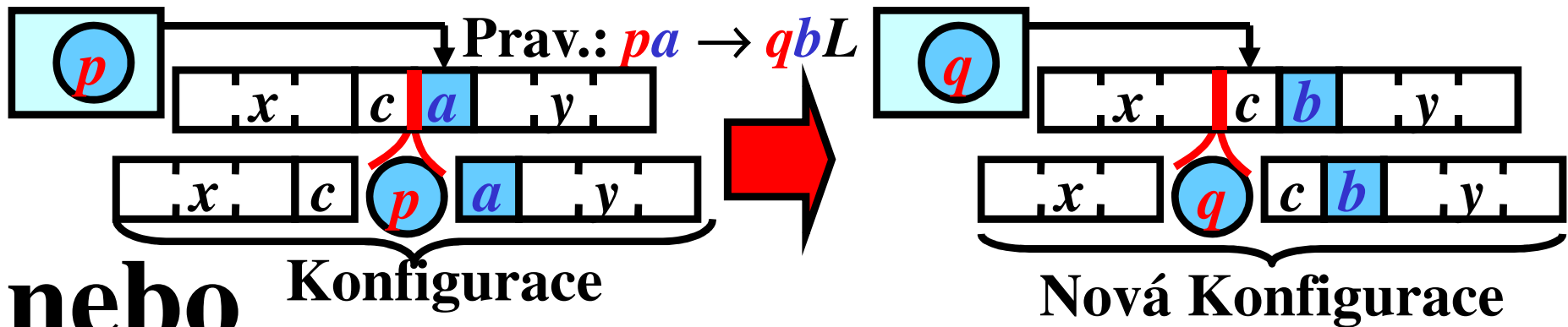
- (1) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}y$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c\textcolor{blue}{b}y$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\textcolor{blue}{b}L \in R$ nebo
- (2) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\Delta L \in R$



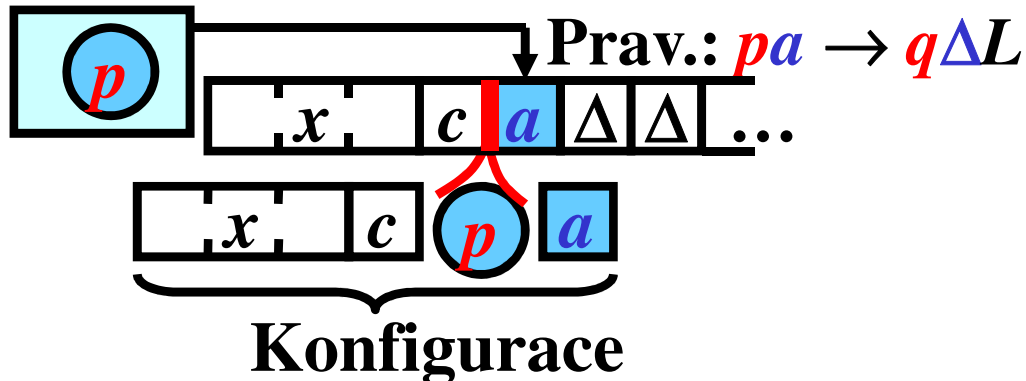
Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

- (1) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}y$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c\textcolor{blue}{b}y$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\textcolor{blue}{b}L \in R$ nebo
- (2) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\Delta L \in R$



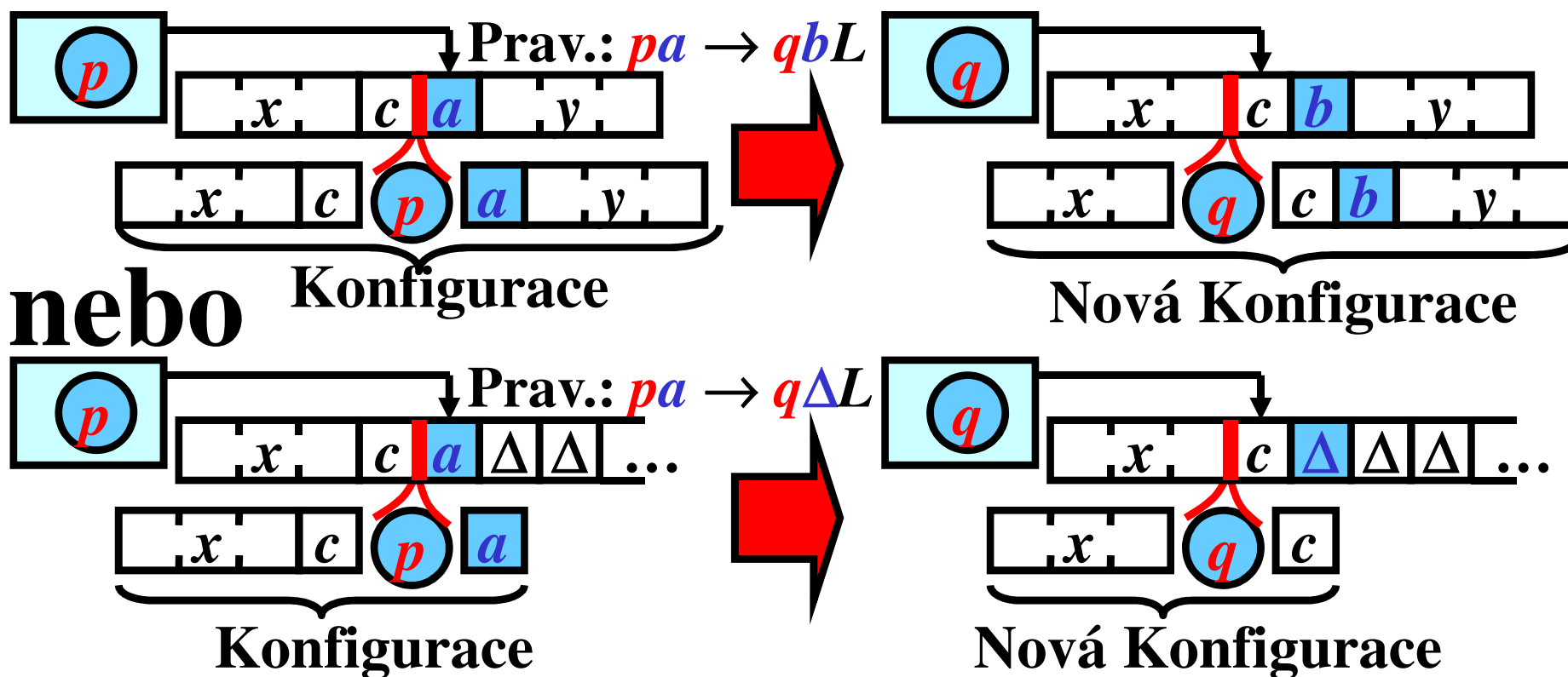
nebo



Levý přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash_L \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

- (1) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}y$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c\textcolor{blue}{b}y$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\textcolor{blue}{b}L \in R$ nebo
- (2) $\chi = xc\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a}$, $\chi' = x\textcolor{red}{q}c$, $\textcolor{red}{r}:\textcolor{red}{p}\textcolor{blue}{a} \rightarrow \textcolor{red}{q}\Delta L \in R$



Přechod

Definice: Necht' χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M . Potom M může provést *přechod* z χ do χ' použitím r , zapsáno $\chi \vdash \chi' [r]$ nebo zjednodušeně $\chi \vdash \chi'$ pokud: $\chi \vdash_X \chi' [r]$ pro nějaké $X \in \{S, R, L\}$.

Sekvence přechodů 1/2

Myšlenka: několik výpočetních kroků po sobě

Definice: Necht' χ je konfigurace. M provede *nula přechodů* z χ do χ ; zapisujeme:

$$\chi \vdash^0 \chi [\varepsilon] \text{ nebo zjednodušeně } \chi \vdash^0 \chi$$

Definice: Necht' $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ je sekvence přechodů konfigurací pro $n \geq 1$ a $\chi_{i-1} \vdash \chi_i [r_i]$, $r_i \in R$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, což znamená:

$$\chi_0 \vdash \chi_1 [r_1] \vdash \chi_2 [r_2] \vdash \dots \vdash \chi_n [r_n]$$

Pak M provede *n-přechodů* z χ_0 do χ_n ; zapisujeme:

$$\chi_0 \vdash^n \chi_n [r_1 r_2 \dots r_n] \text{ nebo zjednodušeně } \chi_0 \vdash^n \chi_n$$

Sekvence přechodů 2/2

Pokud $\chi_0 \vdash^{-n} \chi_n [\rho]$ pro nějaké $n \geq 1$, pak
 $\chi_0 \vdash^{+} \chi_n [\rho]$.

Pokud $\chi_0 \vdash^{-n} \chi_n [\rho]$ pro nějaké $n \geq 0$, pak
 $\chi_0 \vdash^{*} \chi_n [\rho]$.

Příklad: Uvažujme:

$a**p**bc \vdash aac$ [1: $**p****b** \rightarrow **q****a**S$] a

$aac \vdash ac$ [2: $**q****a** \rightarrow **r****c**R$].

Potom, $abc \vdash^{-2} ac$ [1 2],

$abc \vdash^{+} ac$ [1 2],

$abc \vdash^{*} ac$ [1 2]

TS jako model pro přijímání jazyků

Myšlenka: M přijímá řetězec w , pokud provede sekvenci přechodů ze stavu s do koncového stavu

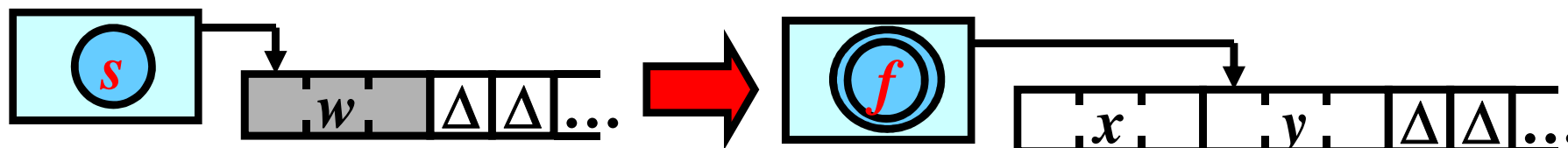
Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS.

Jazyk přijímaný TS M , $L(M)$, je definován:

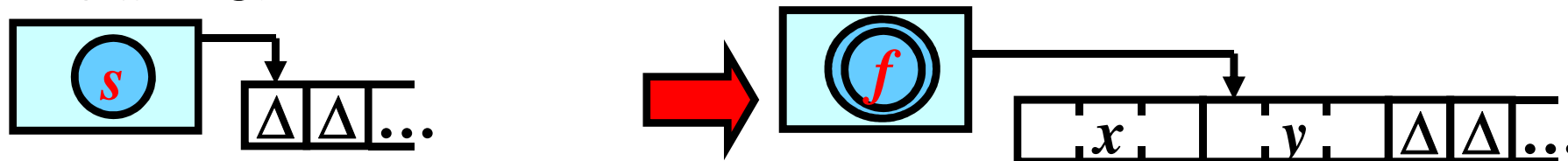
$$L(M) = \{w: w \in \Sigma^*, sw \vdash^* xfy; x, y \in \Gamma^*, f \in F\} \cup \{\varepsilon: s\Delta \vdash^* xfy; x, y \in \Gamma^*, f \in F\}$$

Ilustrace:

- Pro $w \neq \varepsilon$:

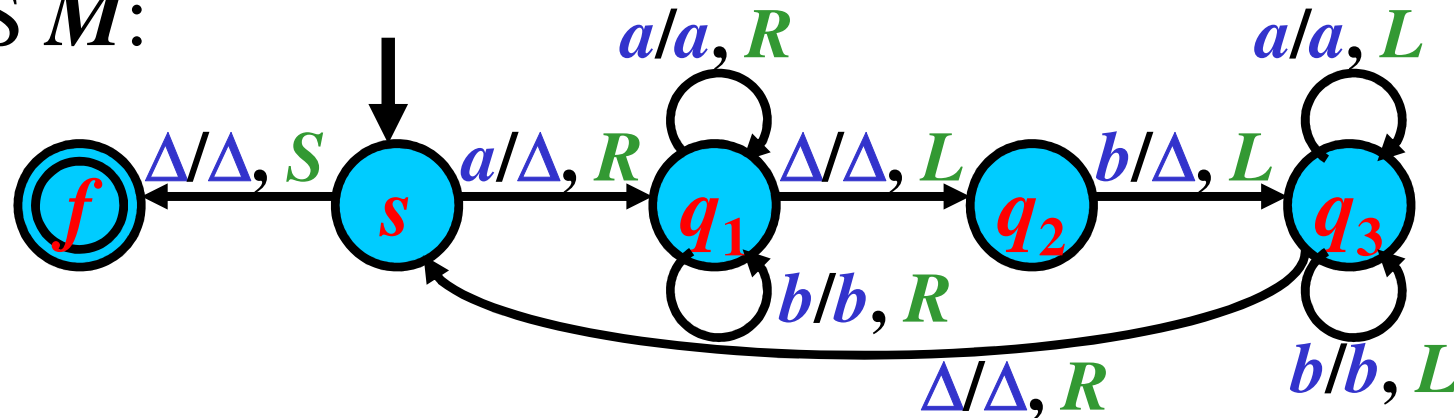


- Pro $w = \varepsilon$:



TS jako model pro přijímání jazyků: Příklad

TS M :



$saabb \vdash \Delta q_1 abb \vdash \Delta a q_1 bb \vdash \Delta ab q_1 b \vdash \Delta abb q_1 \Delta \vdash \Delta ab q_2 b$
 $\vdash \Delta a q_3 b \vdash \Delta q_3 ab \vdash q_3 \Delta ab \vdash \Delta sab \vdash \Delta \Delta q_1 b$
 $\vdash \Delta \Delta b q_1 \Delta \vdash \Delta \Delta q_2 b \vdash \Delta q_3 \Delta \vdash \Delta \Delta s \Delta \vdash \Delta \Delta f \Delta$

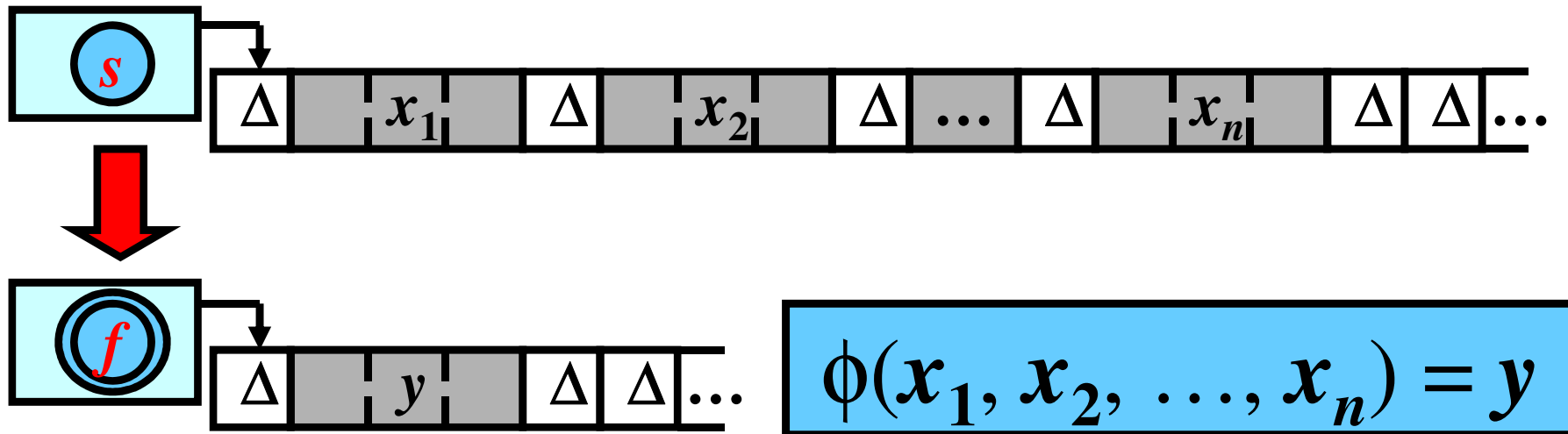
Celkově: $aabb \in L(M)$

Pozn.: $L(M) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

TS jako výpočetní model

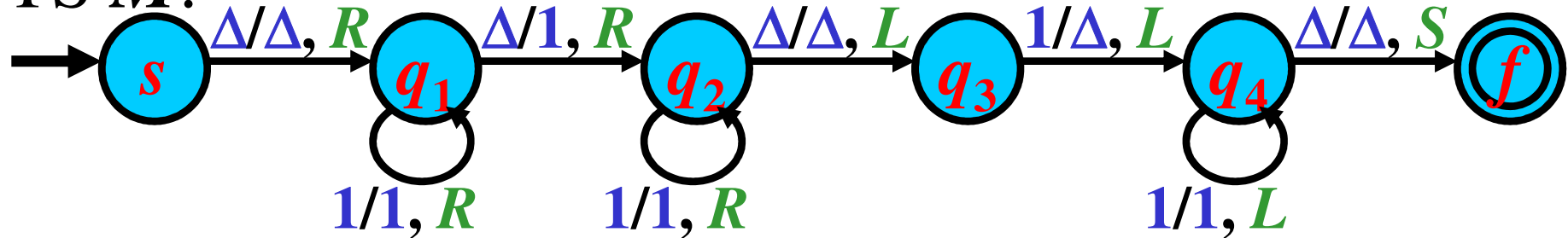
Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS. TS M vyčísluje n -ární funkci ϕ následujícím způsobem:
 $s\Delta x_1\Delta x_2\ldots\Delta x_n \vdash^* f\Delta y$, kde $f \in F$ právě tehdy, když $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$.

Illustrace:



TS jako výpočetní model: Příklad

TS M :



$s\Delta 11\Delta 11 \vdash \Delta q_1 11 \Delta 11 \vdash \Delta 1 q_1 1\Delta 11 \vdash \Delta 11 q_1 \Delta 11 \vdash \Delta 111 q_2 11$
 $\vdash \Delta 1111 q_2 1 \vdash \Delta 11111 q_2 \Delta \vdash \Delta 1111 q_3 1 \vdash \Delta 111 q_4 1$
 $\vdash \Delta 11 q_4 11 \vdash \Delta 1 q_4 111 \vdash \Delta q_4 1111 \vdash q_4 \Delta 1111$
 $\vdash f \Delta 1111$

Celkově: $\phi(11, 11) = 1111$

Pozn.: $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, kde

- $x_1 = 1^a$ reprezentuje přirozené číslo a
- $x_2 = 1^b$ reprezentuje přirozené číslo b

Deterministický TS (DTS)

Myšlenka: Deterministický TS může provést z každé konfigurace maximálně jeden přechod

Definice: Necht' $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS. M je *deterministický TS*, pokud pro každé pravidlo tvaru $pa \rightarrow qbt \in R$ platí, že množina $R - \{pa \rightarrow qbt\}$ neobsahuje žádné pravidlo s levou stranou pa .

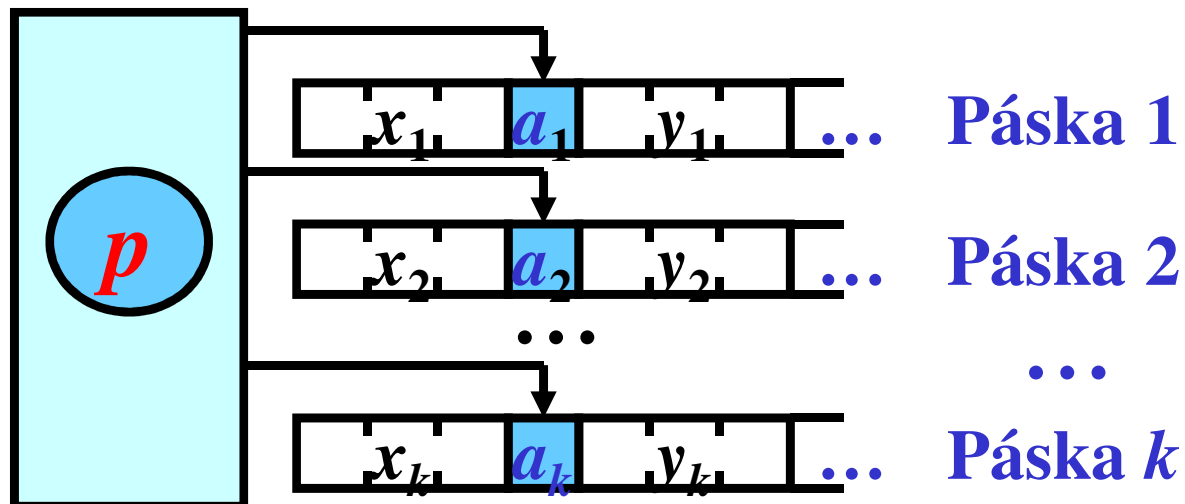
Tvrzení: Pro každý TS M existuje ekvivalentní DTS M_d .

Důkaz: Viz str. 634 v knize [Meduna: Automata and Languages]

k -páskový Turingův stroj

Myšlenka: Turingův stroj s „ k “ páskami

Ilustrace:



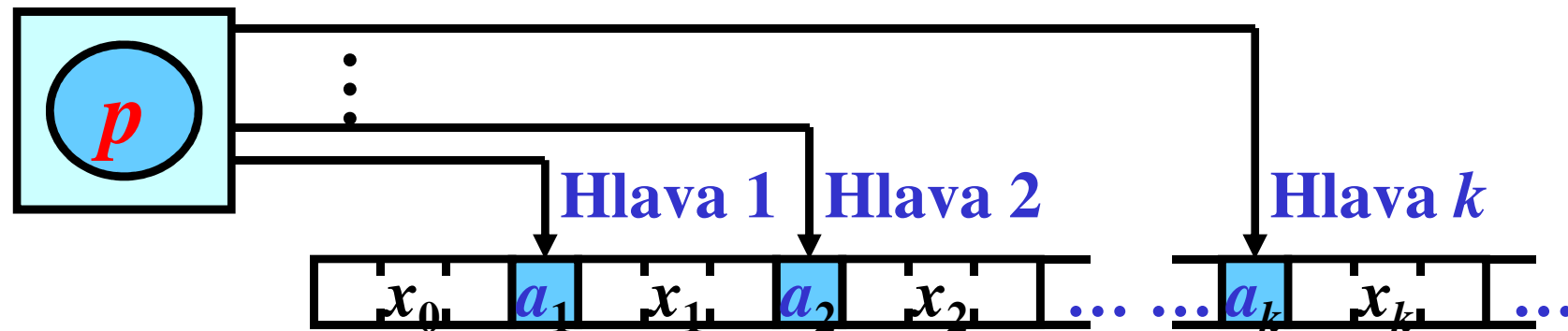
Tvrzení: Pro každý k -páskový TS M_p existuje ekvivalentní TS M .

Důkaz: Viz str. 662 v knize [Meduna: Automata and Languages]

k -hlavý Turingův stroj

Myšlenka: Turingův stroj s „ k “ hlavami

Ilustrace:



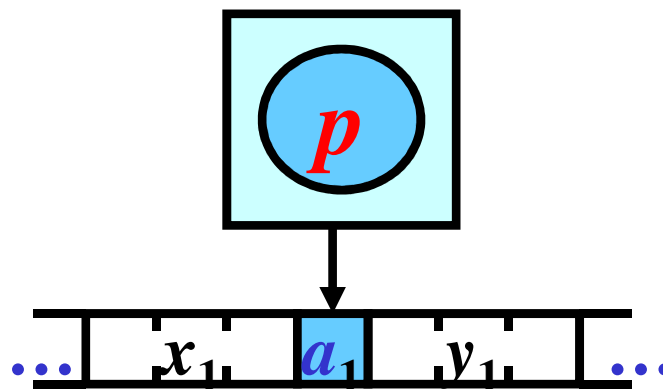
Tvrzení: Pro každý k -hlavý TS M_h existuje ekvivalentní TS M .

Důkaz: Viz str. 667 v knize [Meduna: Automata and Languages]

TS s oboustranně nekonečnou páskou

Myšlenka: Turingův stroj s páskou, která je nekonečná směrem doleva i doprava

Ilustrace:



Tvrzení: Pro každý TS s oboustranně nekonečnou páskou M_o existuje ekvivalentní TS M .

Důkaz: Viz str. 673 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Zakódování Turingova stroje

Myšlenka: Popis Turingova stroje pomocí řetězce obsahující nuly a jedničky

- Předpokládejme, že TS M má tvar $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, q_0, \{q_1\})$, kde: $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$, $\Gamma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ tak, že: $a_0 = \Delta$
- Necht' δ je zobrazení z $(Q \cup \Gamma \cup \{S, L, R\})$ do $\{0, 1\}^*$,

definováno:

$$\begin{aligned} \delta(S) &= 01, \delta(L) = 001, \delta(R) = 0001, \\ \delta(q_i) &= 0^{i+1}1 \text{ pro všechna } i = 0, 1, \dots, m, \\ \delta(a_i) &= 0^{i+1}1 \text{ pro všechna } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Pro každé $r: pa \rightarrow qbt \in R$ definujeme:

$$\delta(r) = \delta(p)\delta(a)\delta(q)\delta(b)\delta(t)1$$

- Necht' $R = \{r_0, r_1, \dots, r_k\}$. Potom

$$\delta(M) = 111\delta(r_0)\delta(r_1)\dots\delta(r_k)1 \text{ je zakódování TS } M$$

Zakódování Turingova stroje: Příklad

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, q_0, \{q_1\})$, kde

$Q = \{q_0, q_1\}$; $\Sigma = \{a_1, a_2\}$; $\Gamma = \{\Delta, a_1, a_2\}$;

$R = \{1: q_0 a_1 \rightarrow q_0 a_2 R, 2: q_0 a_2 \rightarrow q_0 a_1 R, 3: q_0 \Delta \rightarrow q_1 \Delta S\}$

Určeme: Zakódování TS M , $\delta(M)$.

$\delta(S) = 01$, $\delta(L) = 001$, $\delta(R) = 0001$,

$\delta(q_0) = 01$, $\delta(q_1) = 001$,

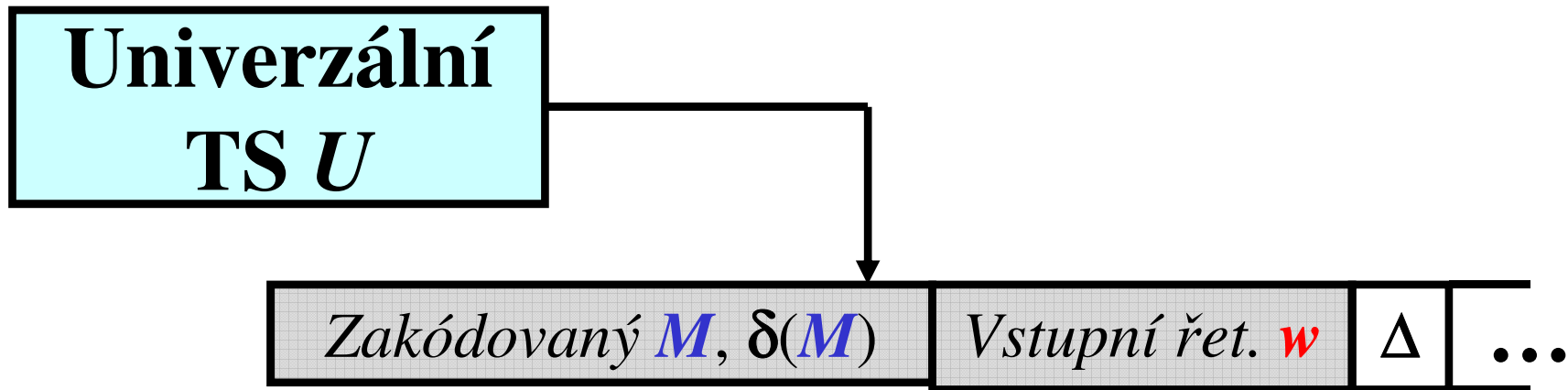
$\delta(\Delta) = 01$, $\delta(a_1) = 001$, $\delta(a_2) = 0001$.

$$\begin{aligned}
 \delta(M) &= 111\delta(1)\delta(2)\delta(3)1 \\
 &= 111\delta(q_0)\delta(a_1)\delta(q_0)\delta(a_2)\delta(R)1 \\
 &\quad \delta(q_0)\delta(a_2)\delta(q_0)\delta(a_1)\delta(R)1 \\
 &\quad \delta(q_0)\delta(\Delta)\delta(q_1)\delta(\Delta)\delta(S)11 \\
 &= 1110100101000100011 \\
 &\quad 0100010100100011 \\
 &\quad 0101001010111
 \end{aligned}$$

Univerzální Turingův stroj

Myšlenka: Univerzální TS může odsimulovat libovolný DTS

Ilustrace:



Pozn.: Univerzální TS přečte zakódování TS M a vstupní řetězec w na pásce a pak odsimuluje přechody, které by prováděl TS M se vstupním řetězcem w .

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{ \delta(M) : M \text{ je DTS, } \delta(M) \in L(M) \}$$

Ilustrace:

TS M

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

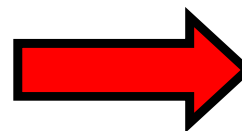
Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{ \delta(M) : M \text{ je DTS, } \delta(M) \in L(M) \}$$

Ilustrace:

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots1$

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

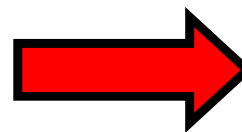
Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{ \delta(M) : M \text{ je DTS, } \delta(M) \in L(M) \}$$

Ilustrace:

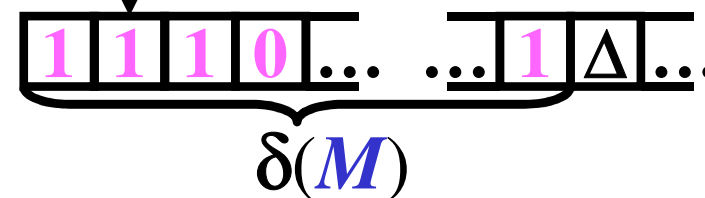
TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots 1$



TS M



Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

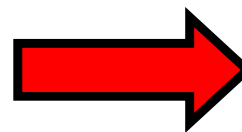
Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{ \delta(M) : M \text{ je DTS, } \delta(M) \in L(M) \}$$

Ilustrace:

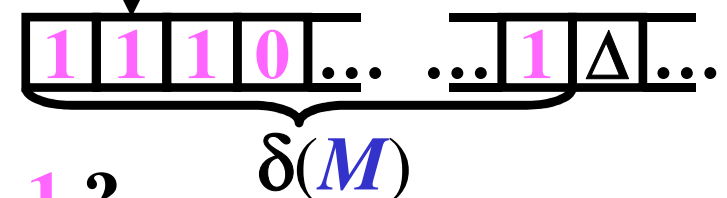
TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110...1$



TS M



- Přijímá TS M řetězec $\delta(M) = 1110...1$?

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

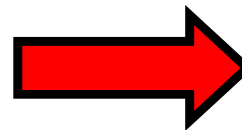
Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

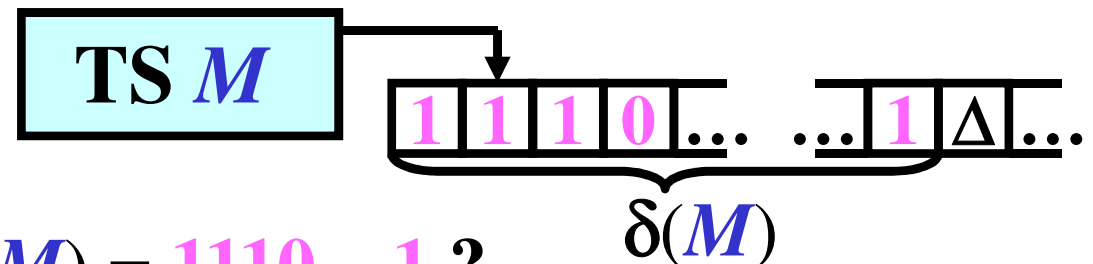
$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{ \delta(M) : M \text{ je DTS, } \delta(M) \in L(M) \}$$

Illustrace:

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots1$



- Přijímá TS M řetězec $\delta(M) = 1110\dots1$?

ANO

$\delta(M) \in L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

NE

$\delta(M) \notin L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

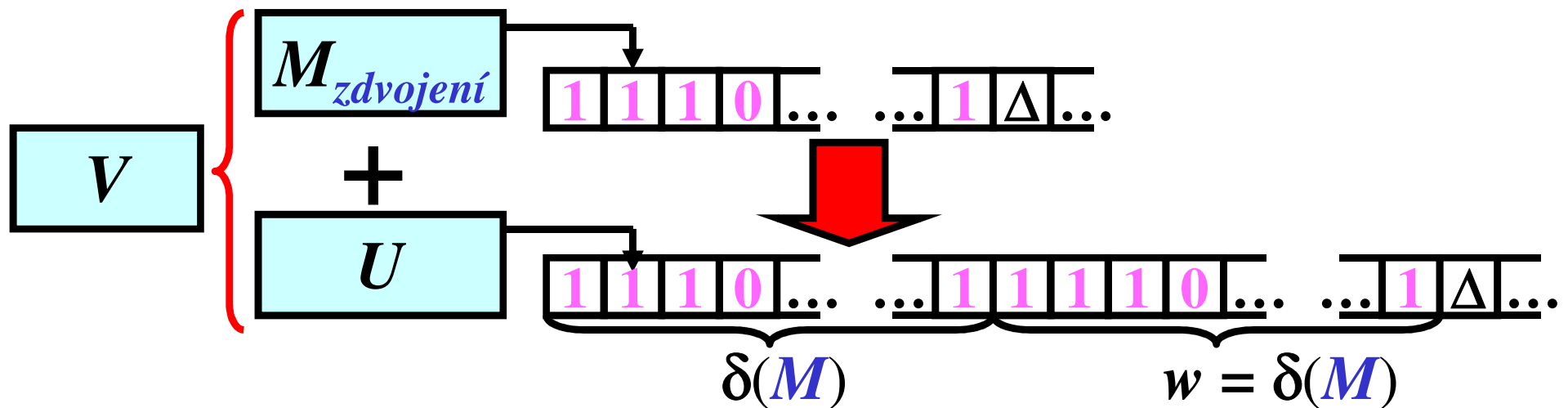
Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 2/2

Tvrzení: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je přijímán nějakým TS.

Důkaz (myšlenka):

- Sestrojíme DTS V , který:
 - 1) Zdvojí vstupní řetězec na pásce $w = \delta(M)$ na $\delta(M)\delta(M)$
 - 2) Odsimuluje činnost univerzálního TS U .
- Potom, $L(V) = L_{\text{PřijmeSámSebe}}$, tedy tvrzení platí.

Ilustrace:



Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M

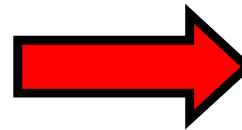
Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots1$

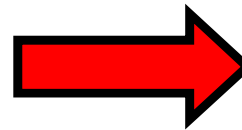
Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

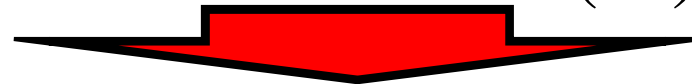
Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots 1$



TS M

$\underbrace{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots}_{\delta(M)} \ \dots \ 1 \ \Delta \ \dots$

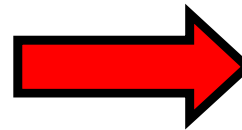
Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

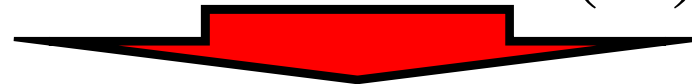
Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots 1$



TS M

$\underbrace{1\ 1\ 1\ 0\ \dots}_{\delta(M)} \dots \underbrace{1\ \Delta\ \dots}$

- Přijímá TS M řetězec $\delta(M) = 1110\dots 1$?

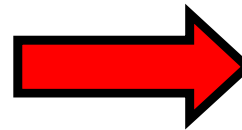
Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M



Zakódování TS M :
 $\delta(M) = 1110\dots 1$



TS M

$\underbrace{1\ 1\ 1\ 0\ \dots}_{\delta(M)} \dots \underbrace{\dots\ 1\ \Delta\ \dots}_{\delta(M)}$

- Přijímá TS M řetězec $\delta(M) = 1110\dots 1$?

ANO

$\delta(M) \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$

NE

$\delta(M) \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 2/3

Tvrzení: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ není přijímán žádným TS.

Důkaz (sporem):

- Předpokládejme, že $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ je přijímán nějakým TS.

Uvažujme následující nekonečnou tabulku:

| | M_i | $m_i = \delta(M_i)$ | $\text{PřijmeSámSebe}(M_i)$ |
|----------------|----------|------------------------|-----------------------------|
| Všchny TS ↓ | M_1 | 111001001001101 | Ano |
| | M_2 | 11101010111100101 | Ne |
| | M_3 | 1110010001010001001001 | Ano |
| | \vdots | \vdots | \vdots |

Pozn.:

- $\text{PřijmeSámSebe}(M_i) = \text{Ano}$, pokud $m_i \in L(M_i)$
 Ne , pokud $m_i \notin L(M_i)$.

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$


Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ne}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ne}$ implikuje

$\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$
spor



Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ne}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$
 - spor**
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ano}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ne}$ implikuje

$\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$
spor

- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ano}$ implikuje
- $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$
spor

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\mathbf{m}_i : \mathbf{m}_i \notin L(\mathbf{M}_i), i = 1, \dots\}$
- Necht' $L(\mathbf{M}_k) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ne}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$
 - spor**
- $\text{PřijmeSámSebe}(\mathbf{M}_k) = \mathbf{Ano}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \in L(\mathbf{M}_k)$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje
 - $\mathbf{m}_k \notin L(\mathbf{M}_k)$
 - spor**
- $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ není tedy přijímán žádným TS \mathbf{M}_k

Rozhodnutelné jazyky

Myšlenka: Rozhodnutelné jazyky jsou přijímány TS, které vždy zastaví

Definice: Necht' L je jazyk. Pokud existuje DTS M , který vždy zastaví a pro který platí $L = L(M)$, potom L je *rozhodnutelný jazyk*.

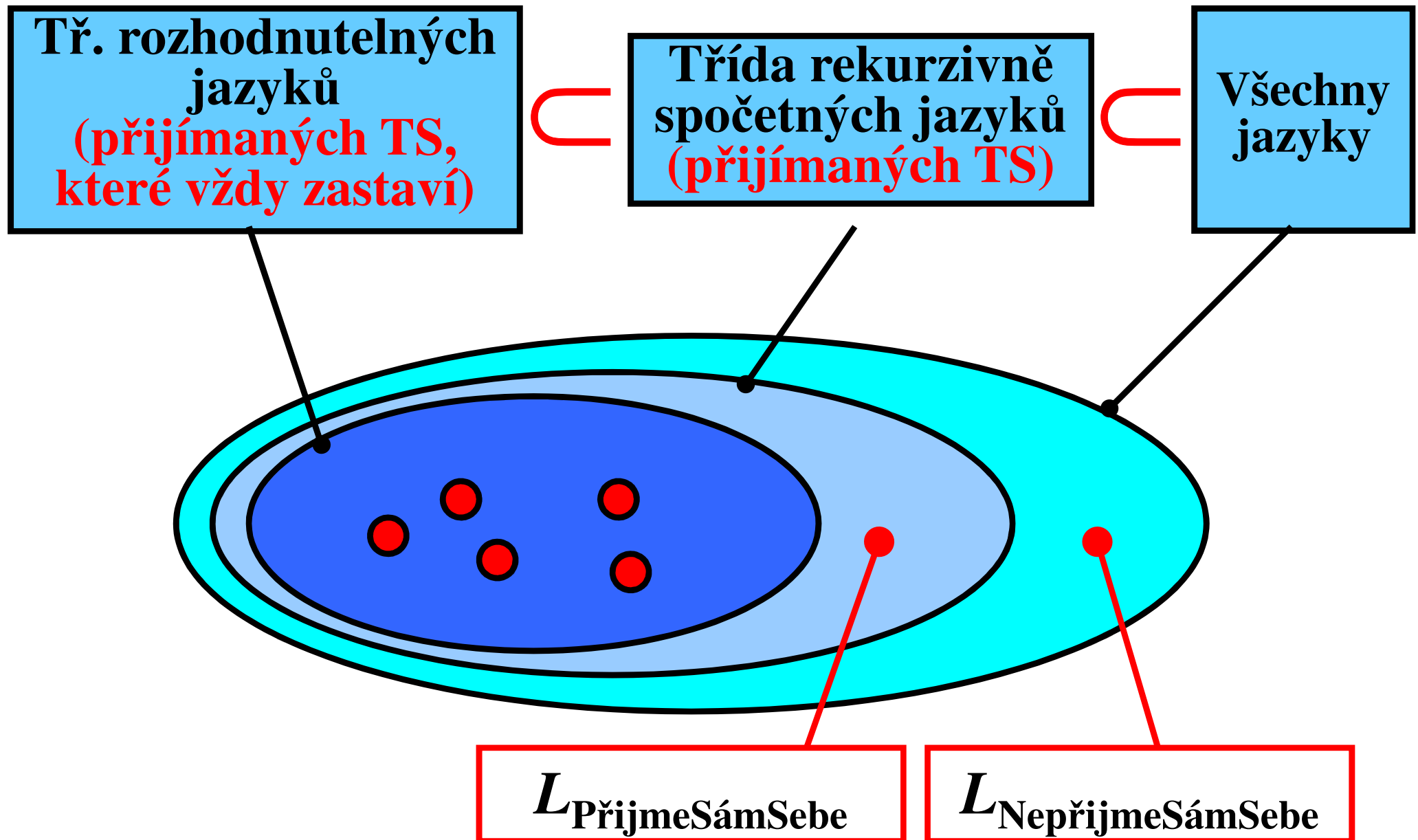
Tvrzení: Třída rozhodnutelných jazyků je uzavřena vůči doplňku.

Důkaz: Viz str. 693 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Třída rekurzivně spočetných jazyků není uzavřena vůči doplňku.

Důkaz: Viz jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

Další hierarchie jazyků



Obecné gramatiky: Definice

Myšlenka: Zobecnění BKG

Definice: *Obecná gramatika* (OG) je čtveřice $G = (N, T, P, S)$, kde

- N je abeceda *neterminálů*
- T je abeceda *terminálů*, přičemž $N \cap T = \emptyset$
- P je konečná množina *pravidel* tvaru $x \rightarrow y$,
kde $x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$, $y \in (N \cup T)^*$
- $S \in N$ je *počáteční neterminál*

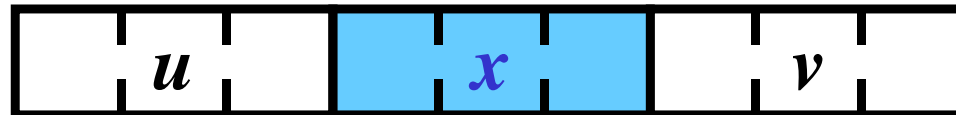
Matematická poznámka k pravidlům:

- Čistě matematicky, P je konečná relace z $(N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ do $(N \cup T)^*$
- Místo relačního zápisu $(x, y) \in P$ zapisujeme pravidla $x \rightarrow y \in P$

Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

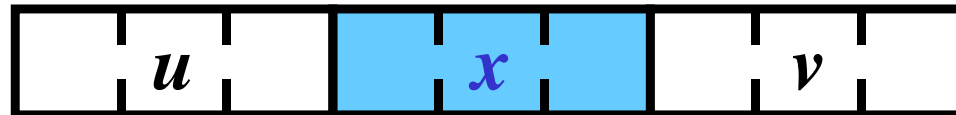
Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je NG. Necht' $u, v \in (N \cup T)^*$ a $p: x \rightarrow y \in P$. Potom, uxv přímo derivuje uyv za použití p v G , zapsáno $uxv \Rightarrow uyv [p]$ nebo zjednodušeně $uxv \Rightarrow uyv$.



Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je NG. Necht' $u, v \in (N \cup T)^*$ a $p: x \rightarrow y \in P$. Potom, uxv přímo derivuje uyv za použití p v G , zapsáno $uxv \Rightarrow uyv [p]$ nebo zjednodušeně $uxv \Rightarrow uyv$.



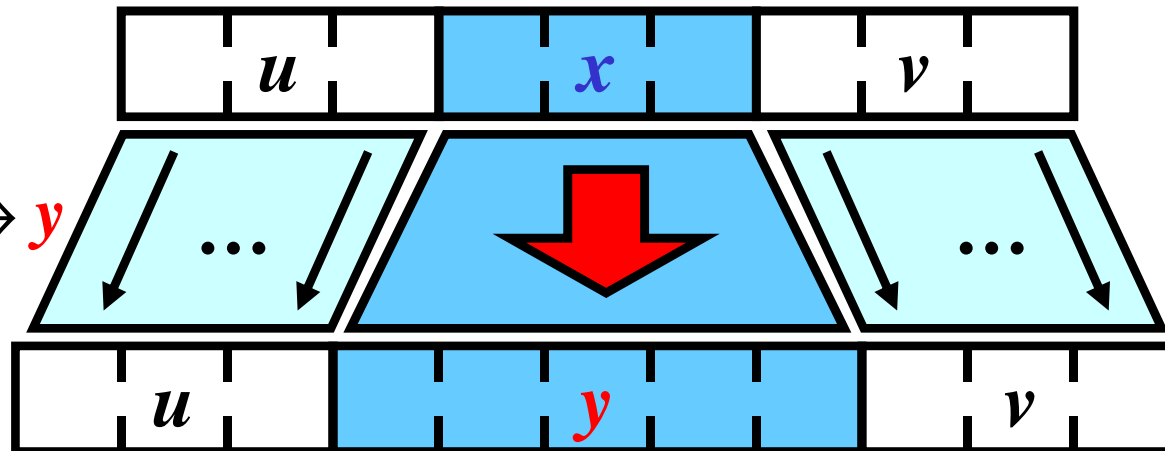
Pravidlo: $x \rightarrow y$

Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je NG. Necht' $u, v \in (N \cup T)^*$ a $p: x \rightarrow y \in P$. Potom, uxv přímo derivuje uyv za použití p v G , zapsáno $uxv \Rightarrow uyv [p]$ nebo zjednodušeně $uxv \Rightarrow uyv$.

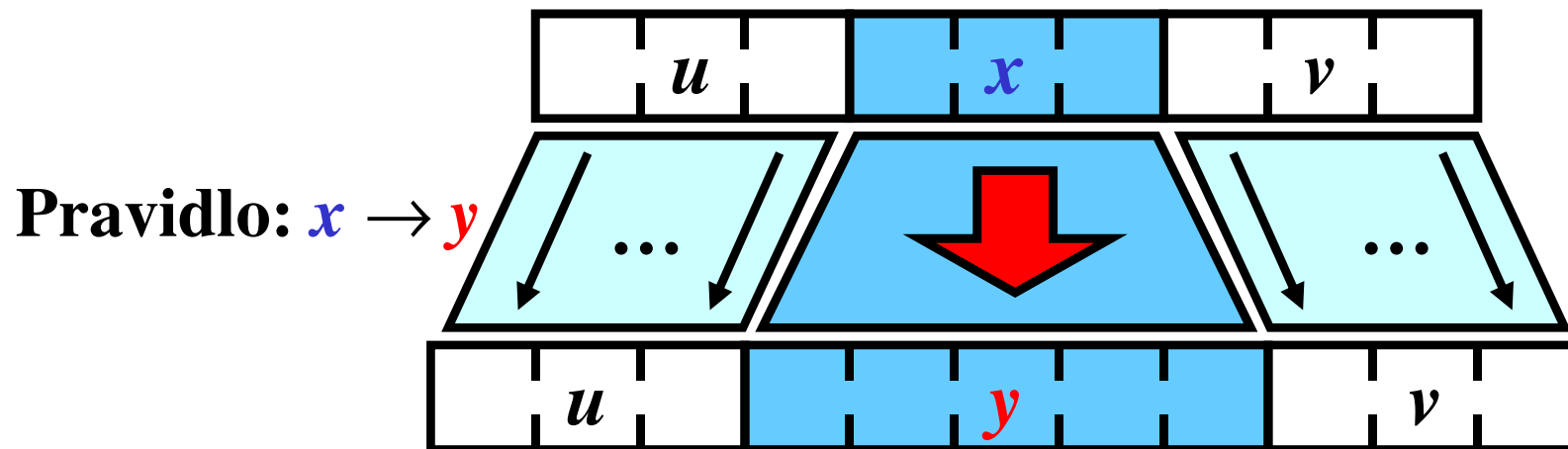
Pravidlo: $x \rightarrow y$



Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je NG. Necht' $u, v \in (N \cup T)^*$ a $p: x \rightarrow y \in P$. Potom, uxv přímo derivuje uyv za použití p v G , zapsáno $uxv \Rightarrow uyv [p]$ nebo zjednodušeně $uxv \Rightarrow uyv$.



Pozn.: \Rightarrow^n , \Rightarrow^+ , \Rightarrow^* a $L(G)$ je definováno stejně jako u bezkontextových gramatik.

Obecná gramatika: Příklad

$G = (N, T, P, S)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a\}$

$P = \{$ 1: $S \rightarrow ASB$, 2: $S \rightarrow a$,
3: $Aa \rightarrow aaA$, 4: $AB \rightarrow \varepsilon$ $\}$

$S \Rightarrow a$ [2]

$S \Rightarrow \underline{A}SB$ [1] $\Rightarrow \underline{A}aB$ [2] $\Rightarrow aa\underline{AB}$ [3] $\Rightarrow aa$ [4]

$S \Rightarrow \underline{A}SB$ [1] $\Rightarrow AA\underline{S}BB$ [1] $\Rightarrow AA\underline{A}BB$ [2] \Rightarrow
 $\underline{A}aaABB$ [3] $\Rightarrow aa\underline{A}aABB$ [3] \Rightarrow
 $aaaa\underline{A}ABB$ [3] $\Rightarrow aaaa\underline{AB}$ [4] $\Rightarrow aaaa$ [4]
 \vdots

Pozn.: $L(G) = \{a^{2^n} : n \geq 0\}$

Rekurzivně spočetné jazyky

Definice: Necht' L je jazyk. L je *rekurzivně spočetný jazyk*, pokud existuje Turingův stroj M takový, pro který platí: $L = L(M)$.

Tvrzení: Pro každou NG G existuje TS M , pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 714 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý TS M , existuje NG G , pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 715 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Fundamentální modely pro rekurzivně spočetné jazyky jsou:

1) **Obecné gramatiky**

2) **Turingovy stroje**

Kontextová gramatika (KG)

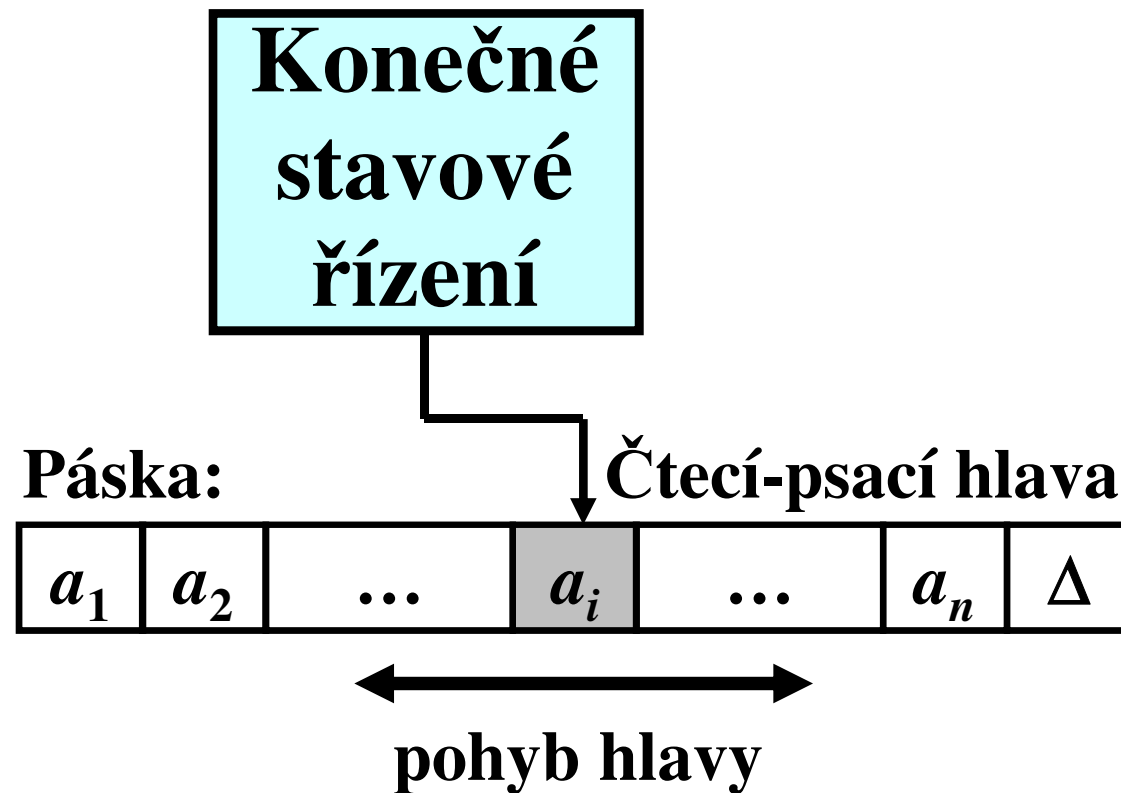
Myšlenka: Omezení OG

Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je obecná gramatika. G je *kontextová gramatika* (KG), pokud každé pravidlo $x \rightarrow y \in P$ splňuje podmínku: $|x| \leq |y|$.

Pozn.: $\Rightarrow, \Rightarrow^n, \Rightarrow^+, \Rightarrow^*$ a $L(G)$ je definováno stejně jako u obecných gramatik.

Lineárně ohraničené automaty

Myšlenka: Turingův stroj s omezenou páskou na délku vstupního řetězce

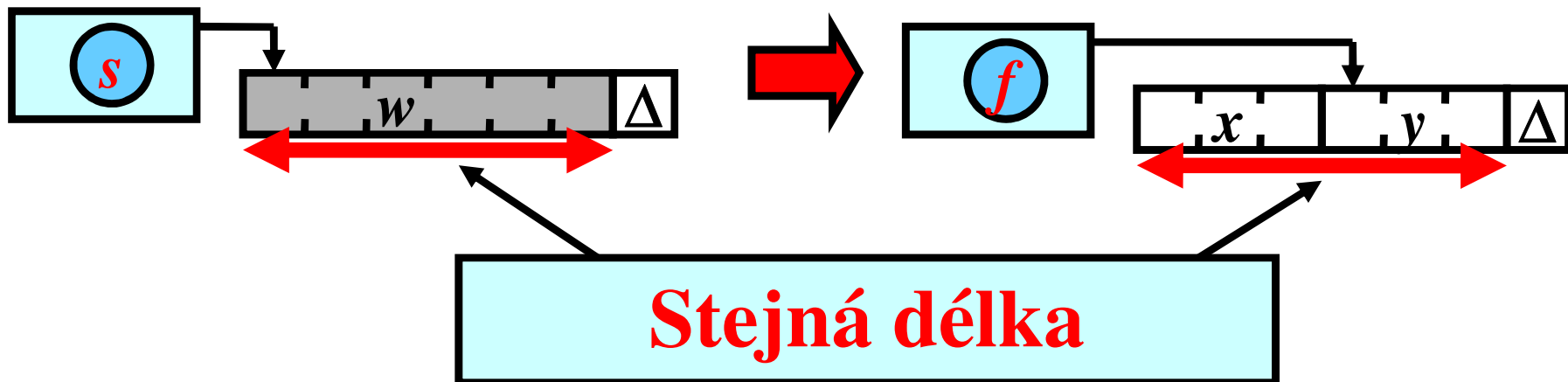


Lineárně ohraničené automaty: Definice

Myšlenka: Se vstupním řetězcem w je páska omezena na pouze $|w|$ políček

Definice: *Lineárně ohraničený automat (LOA) je TS, který nemůže žádným pravidlem prodloužit pásku.*

Ilustrace:



Kontextové jazyky

Definice: Necht' L je jazyk. L je *kontextový jazyk*, pokud existuje lineárně ohraničený automat M takový, pro který platí: $L = L(M)$.

Tvrzení: Pro každou KG G existuje LOA M , pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 732 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý LOA M , existuje KG G , pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 734 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Fundamentální modely pro kontextové jazyky jsou:

- 1) **Kontextové gramatiky**
- 2) **Lineárně ohraničené automaty**

Pravé lineární gramatiky: Definice

Myšlenka: BKG, ve které má každé pravidlo na pravé straně pouze řetězec terminálů následovaný max. jedním neterminálem

Definice: Necht' $G = (N, T, P, S)$ je BKG. G je *pravá lineární gramatika* (PLG), pokud každé pravidlo $A \rightarrow x \in P$ splňuje: $x \in T^* \cup T^*N$.

Příklad:

$G = (N, T, P, S)$, kde $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$

$P = \{1: S \rightarrow aS, 2: S \rightarrow aA, 3: A \rightarrow bA, 4: A \rightarrow b\}$

- $S \Rightarrow a\underline{A}$ [2] $\Rightarrow ab$ [4]
- $S \Rightarrow a\underline{S}$ [1] $\Rightarrow aa\underline{A}$ [2] $\Rightarrow aab$ [4]
- $S \Rightarrow a\underline{A}$ [2] $\Rightarrow ab\underline{A}$ [3] $\Rightarrow abb$ [4]
- ⋮

Pozn.: $L(G) = \{a^m b^n : m, n \geq 1\}$

Gramatiky pro regulární jazyky

Tvrzení: Pro každou PLG G existuje KA M , pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 575 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý KA M existuje PLG G , pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 583 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Gramatiky pro regulární jazyky jsou
Pravé lineární gramatiky

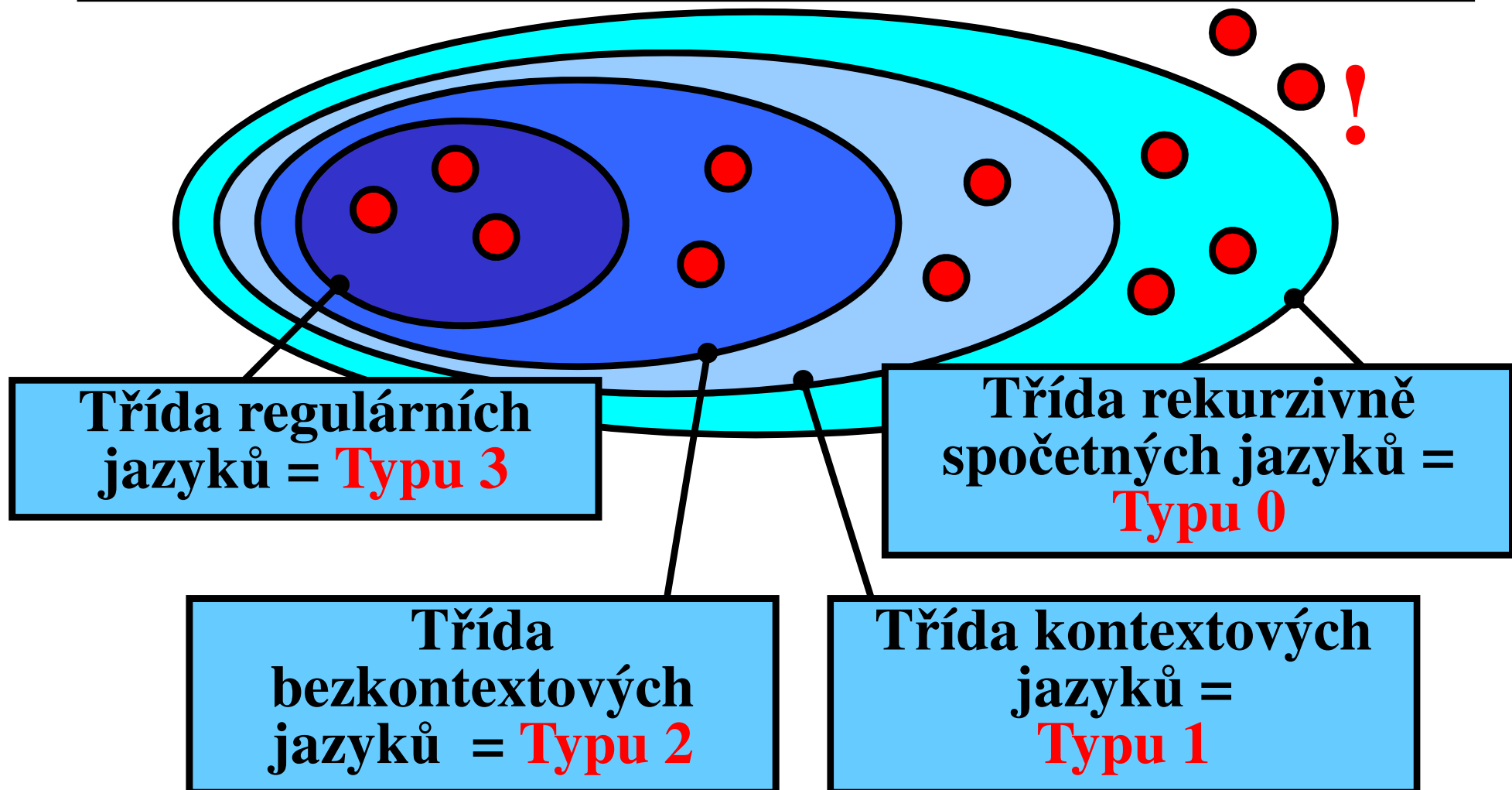
Gramatiky: Shrnutí

| Zobecňování ↑ | Jazyky | Gramatiky | Tvar pravidel $x \rightarrow y$ | ↓ Specializování |
|---------------|---------------------|----------------|---|------------------|
| | Rekurzivně spočetné | Obecné | $x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ $y \in (N \cup T)^*$ | |
| | Kontextové | Kontextové | $x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ $y \in (N \cup T)^*, x \leq y $ | |
| | Bezkontextové | Bezkontextové | $x \in N$ $y \in (N \cup T)^*$ | |
| | Regulární | Pravé lineární | $x \in N$ $y \in T^* \cup T^* N$ | |

Automaty: Shrnutí

| Zobecňování ↑ | Jazyky | Přijímací model | Specializování ↓ |
|-------------------------|--------------------------------|--|----------------------------|
| | Rekurzivně spočetné | Turingův stroj | |
| | Kontextové | Lineárně ohraničený automat | |
| | Bezkontextové | Zásobníkový automat | |
| | Regulární | Konečný automat | |

Chomského hierarchie



Typ 3 \subset Typ 2 \subset Typ 1 \subset Typ 0