Критерій компланарності векторів

Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ дорівнює нулю, тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ компланарні:

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c} - \text{ компланарні.}}$$

Взаємна орієнтація векторів

Для будь-яких некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$:

1) якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку;

2) якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) < 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку.

11. Комплексні числа

11.1. Основні поняття

Означення 11.1. *Комплексним числом* z називають упорядковану пару $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ дійсних чисел x і y, тобто

$$\boxed{z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.}$$

Перший елемент пари x називають *дійсною частиною*, а другий елемент — *уявною частиною* комплексного числа z і позначають

$$\boxed{x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.}$$

Дії над комплексними числами

Розгляньмо два комплексні числа $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Означення 11.2. Два комплексні числа z_1 і z_2 називають *рівними*, якщо рівні їхні дійсні та уявні частини, тобто

$$\boxed{z_1 = z_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}}$$

Означення 11.3. *Сумою* двох комплексних чисел z_1 і z_2 називають комплексне число

$$\boxed{z_1 + z_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.}$$

Означення 11.4. *Добутком* двох комплексних чисел z_1 і z_2 називають комплексне число

$$\boxed{z_1 z_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}.}$$

Множину всіх комплексних чисел з означеними рівністю, додаванням та множенням називають *множиною комплексних чисел* і позначають $\mathbb{C}$.

Оскільки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то комплексні числа вигляду $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$, ототожнюють з дійсними числами і записують $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x, x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Зауваження 11.1.

1. Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$. Отже, правдиві включення*

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.}$$

2. Поняття нерівності для комплексних чисел існує лише як заперечення рівності, тобто $z_1 \neq z_2$ означає, що число z_1 не дорівнює числу z_2. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не означують, тобто множина комплексних чисел $\mathbb{C}$, на відміну від множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, *не впорядкована.*

Розгляньмо добуток дійсного числа $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ на комплексне число $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Маємо

$$\alpha z = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}.$$

* Подальше поширення числових множин розглянуто в п. 13.9.

Отже, означення лінійних дій над комплексними числами збігається з означенням дій над двовимірними арифметичними векторами (для додавання це випливає з означення).

Протилежним для комплексного числа z називають число

$$\boxed{-z \stackrel{\text{def}}{=} (-1)z = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.}$$

Під *різницею* комплексних чисел $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ розуміють комплексне число

$$\boxed{z_1 - z_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + (-1)z_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.}$$

Будь-яке комплексне число можна записати як

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Уявною одиницею називають комплексне число

$$\boxed{i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

З означення множення комплексних чисел випливає, що

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

тобто комплексне число i є розв'язком рівняння $z^2 + 1 = 0$ і $\boxed{i^2 = -1.}$

Твердження 11.1 (*властивості додавання і множення комплексних чисел*). Для будь-яких комплексних чисел z, z_1, z_2, z_3 правдиві тотожності:

① $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*комутативність додавання*);

② $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*асоціативність додавання*);

③ $z + 0 = z$ (*існування нуля*);

④ існує єдине комплексне число $(-z)$ таке, що $z + (-z) = 0$ (*існування протилежного числа*);

⑤ $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*комутативність множення*);

⑥ $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ (*асоціативність множення*);

⑦ $1 \cdot z = z$ (*існування одиниці*);

⑧ якщо $z \neq 0$, то існує єдине комплексне число z^{-1}, що $zz^{-1} = 1$ (*існування оберненого числа*);

⑨ $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (*дистрибутивність множення щодо додавання*).

Зауваження 11.2. Зміст попередніх розділів — дії над матрицями, обчислення визначників, теорія систем лінійних алгебричних рівнянь та лінійної залежності векторів — залишається правдивим, якщо елементи матриць, визначників, коефіцієнти та розв'язки СЛАР, координати векторів вважати комплексними числами.

11.2. Алгебрична форма комплексного числа

Означення 11.5. *Алгебричною формою* комплексного числа $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ називають вираз

$$\boxed{z = x + iy,}$$

де $x = \operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа x; $y = \operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа z; i — уявна одиниця, причому

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Дії над комплексними числами в алгебричній формі

Розгляньмо комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$.

З означень дій над комплексними числами і алгебричної форми комплексного числа випливає, що:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 = z_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases} \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}}$$

Зауваження 11.3. Арифметичні дії над комплексними числами можна проводити як з алгебричними виразами, враховуючи, що $i^2 = -1$.

Піднесення комплексного числа z до натурального степеня n розглядають як множення числа z на себе n разів:

$$\boxed{z^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}.}$$

Ділення комплексних чисел

Комплексне число $x - iy$ називають *спряженим* до числа $z = x + iy$ і позначають

$$\boxed{\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy.}$$

Маємо

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) + 0i = x^2+y^2 \in \mathbb{R},$$
$$z\overline{z} \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0.$$

Для будь-якого комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ існує *обернене*. Справді, помножуючи рівність

$$z^{-1}z = 1$$

на $\overline{z}$, дістаємо

$$z^{-1}z\overline{z} = \overline{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Під *часткою комплексних чисел* $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ розуміють комплексне число

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \overset{\text{def}}{=} z_1\left(z_2\right)^{-1} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Приклад 11.1. Знайдімо суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = -1 + 2i$.

❍ Ураховуючи формули для дій над комплексними числами в алгебричній формі і зауваження 11.3, маємо:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-1+2i) = 1 + 5i;$$
$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (-1+2i) = 3 + i;$$
$$z_1z_2 = (2+3i)(-1+2i) = \underbrace{-2 - 3i + 4i + 6i^2}_{\text{ураховуємо, що } i^2=-1} =$$
$$= -2 + i - 6 = -8 + i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{2+3i}{-1+2i}}_{\substack{\text{домножуємо чисельник і знаменник}\\ \text{дробу на спряжене число до знаменника}}} = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1)^2+(2)^2} =$$
$$= \frac{-2-3i-4i-6i^2}{1+4} = \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i. \bullet$$

11.3. Геометричне зображення комплексних чисел

Комплексне число $z = x + iy$ зображують на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (рис. 11.1, 11.2).

Існує взаємно однозначна відповідність між комплексними числами $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, і точками площини Oxy. При цьому:

площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають *комплексною площиною*;

вісь абсцис називають *дійсною віссю* (на ній лежать дійсні числа $z = x$);
вісь ординат називають *уявною віссю* (на ній лежать уявні числа $z = iy$).

Якщо число z зображують точкою $(x;y)$, то числа $\overline{z}, -z$ і $-\overline{z}$ зображують відповідно точками $(x;-y), (-x;-y)$ і $(-x;y)$ (рис. 11.3).

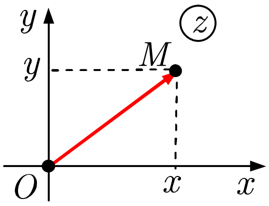

Рис. 11.1

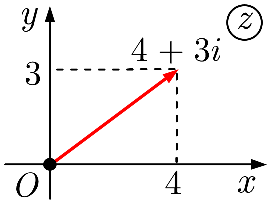

Рис. 11.2

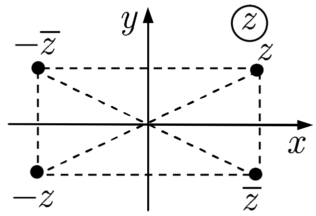

Рис. 11.3

Додаванню та відніманню комплексних чисел відповідає додавання та віднімання відповідних їм радіусів-векторів (рис. 11.4).

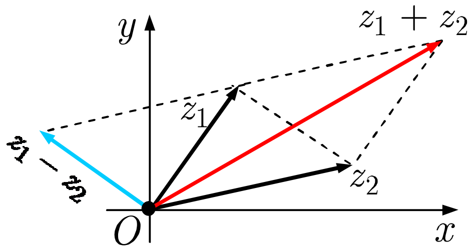

Рис. 11.4

11.4. Полярна система координат

Нехай на площині задано точку O, яку називають *полюсом*, одиничний вектор $\overline{i}$, орієнтацію (проти годинникової стрілки). Промінь Op, який орієнтований вектором $\overline{i}$, називають *полярною віссю* (рис. 11.5).

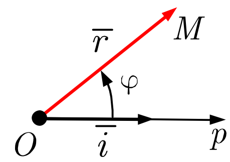

Рис. 11.5

Положення точки M, відмінної від полюса O, на площині задають довжиною її радіуса-вектора $\rho = \left|\overline{r}\right|$ і кутом φ між полярною віссю і променем OM. Кут φ вважають додатним, якщо його відраховують від полярної осі проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, якщо його відраховують за годинниковою стрілкою.

Полярними координатами точки M називають упорядковану пару чисел

$$\boxed{(\rho, \varphi)}$$

і записують $M(\rho;\varphi)$. Координату $\rho > 0$ називають *полярним радіусом*, координату φ — *полярним кутом*. Для полюса — точки $O : \rho = 0$, а полярний кут можна брати довільний.

Полярні координати однозначно визначають точку на площині, а кожній точці площини відповідає нескінченна кількість пар ρ та φ. У цих парах ρ те саме, а полярні кути φ відрізняються один від одного на число, кратне 2π, тобто

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,$$

де φ_0 справджує умову

$$-\pi < \varphi_0 \le \pi.$$

Його називають *головним значенням* полярного кута (інколи беруть $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$).

Якщо скористатися головним значенням полярного кута, то відповідність між упорядкованими парами дійсних чисел $(\rho; \varphi_0)$ і точками площини буде взаємно однозначною (крім точки 0, де $\rho = 0$, а φ_0 — довільний).

Нехай на площині задано полярну систему координат. Прямокутні декартові координати x, y називають *узгодженими* з полярними координатами ρ, φ (рис. 11.6), якщо:

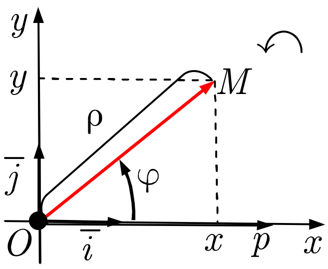

Рис. 11.6

1) базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ задає вибрану орієнтацію площини;
2) полюс O є початком координат ПДСК;
3) промінь Op є додатною піввіссю осі абсцис.

Якщо x, y — прямокутні координати, узгоджені з полярними координатами ρ, φ, то декартові координати виражаються через полярні співвідношеннями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}} \qquad (11.1)$$

а полярні через декартові — співвідношеннями:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}}$$

Зауважмо, що

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2.}$$

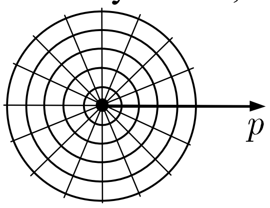

Рис. 11.7

Координатними лініями в полярній системі координат є кола з центром у полюсі і радіусом R, що мають рівняння $\rho = R$, та промені, які виходять з полюса і мають рівняння $\varphi = \alpha$ (рис. 11.7).

11.5. Тригонометрична форма комплексних чисел

Розгляньмо комплексне число $z \neq 0$, яке зображує точка $M \neq O$ із полярними координатами (ρ, φ).

Означення 11.6. Полярний радіус ρ називають *модулем* комплексного числа z і позначають

$$\boxed{|z| \stackrel{\text{def}}{=} \rho = \sqrt{x^2 + y^2},}$$

полярний кут φ називають *аргументом комплексного числа* z і позначають

$$\boxed{\operatorname{Arg} z \stackrel{\text{def}}{=} \varphi.}$$

Головним значенням аргументу комплексного числа $z \neq 0$ називають число

$$\boxed{\arg z = \varphi_0 \in (-\pi; \pi].}$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.}$$

Зауваження 11.4.
1. Поняття модуля комплексного числа узгоджене з поняттям модуля дійсного числа:

$$|x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|.$$

2. $\boxed{z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.}$

3. Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений (тобто можна брати будь-який), а модуль дорівнює нулю.
4. Головне значення аргумента можна знайти за формулою

$$\boxed{\arg z = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y > 0. \end{cases}}$$

Нехай точка, що зображує комплексне число $z = x + iy$, має полярні координати $(\rho; \varphi)$. Тоді, враховуючи співвідношення (11.1), маємо

$$z = x + iy = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi, \rho \geq 0.$$

Означення 11.7. *Тригонометричною формою* комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

де $\rho = |z|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

Приклад 11.2. Зобразімо числа $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ на комплексній площині і запишімо їх у тригонометричній формі.

❍ Маємо

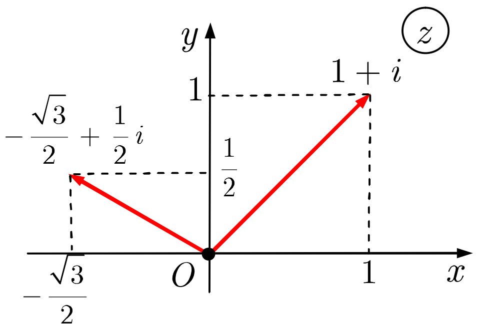

Рис. 11.8

$$x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1, y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1;$$

$$x_2 = \operatorname{Re} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y_2 = \operatorname{Im} z_2 = \frac{1}{2}.$$

Число z_1 зображує точка $(1;1)$, а число z_2 — точка $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (або відповідні радіуси вектори) (рис. 11.8).

Знаходимо модулі чисел z_1 і z_2:

$$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Знаходимо аргументи чисел z_1 і z_2, ураховуючи, що число z_1 розташоване у 1-й чверті, а число z_2 — у 2-й чверті:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2} = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Записуємо числа у тригонометричній формі:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}. \bullet$$

Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Розгляньмо комплексні числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

З означень дій над комплексними числами і тригонометричної форми комплексного числа випливає, що:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 = z_2 &\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}}$$

► Доведімо формулу множення:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$ ◄

Наслідком формули множення комплексних чисел є формула піднесення комплексного числа до натурального степеня, яку називають *муавровою формулою*

$$z^n = \left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (11.2)$$

► Доведімо формулу Муавра методом математичної індукції.

Очевидно, що формула правдива для $n = 0$ та $n = 1$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^0 = 1 = \rho^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1;$$
$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Припустімо, що вона правдива для $n = k \in \mathbb{N}$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

і при цьому припущенні доведімо її для $n = k + 1$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k+1} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k =$$
$$= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin k\varphi + i(\sin\varphi\cos k\varphi + \cos\varphi\sin k\varphi)) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Згідно із принципом математичної індукції формула Муавра правдива для будь-якого натурального n. ◄

Приклад 11.3. Знайдімо $z_1 z_2, \dfrac{z_1}{z_2}, (z_1)^{10}$ для комплексних чисел

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ та } z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}.$$

❍ Маємо:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \\
&= \sqrt{2}\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(z_1)^{10} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\
&= 32\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 32i. \bullet
\end{aligned}
$$

Корінь з комплексного числа

Комплексне число w називають *коренем* n*-го степеня* з комплексного числа, якщо

$$w^n = z, \quad w = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}.$$

Для будь-якого $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень. Справді, підставляючи

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

у формулу (11.2), дістаємо

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

З рівності комплексних чисел випливає рівність їхніх модулів, а аргументи чисел відрізняються на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отже, маємо співвідношення:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \tag{11.3}$$

Отже, модулі всіх коренів n-го степеня із z однакові, а аргументи відрізняються на $\frac{2\pi k}{n}$. Точки на комплексній площині, що відповідають різним значенням кореня n-го степеня з комплексного числа $z \neq 0$, розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці $w = 0$ (рис. 11.9).

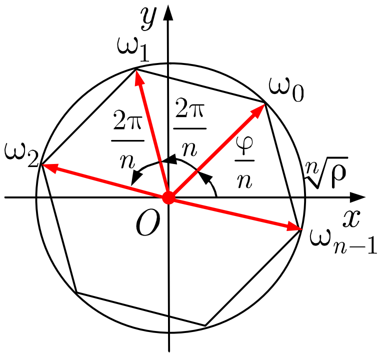

Рис. 11.9

Надаючи у співвідношенні (11.3) числу k значень $0, 1, 2, \ldots, n-1$, одержимо n різних комплексних чисел

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, n-1}.}$$

Приклад 11.4. Знайдімо всі значення $\sqrt[5]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$ і побудуймо їх на комплексній площині.

❍ Ураховуючи результат прикладу 11.2, маємо

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}.$$

Тоді

$$\omega_k = \sqrt[5]{z} = \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right), k = \overline{0, 4};$$

$$\omega_0 = \cos\frac{5\pi}{30} + i\sin\frac{5\pi}{30}; \quad \omega_1 = \cos\frac{17\pi}{30} + i\sin\frac{17\pi}{30};$$

$$\omega_2 = \cos\frac{29\pi}{30} + i\sin\frac{29\pi}{30}; \; \omega_3 = \cos\frac{41\pi}{30} + i\sin\frac{41\pi}{30};$$

$$\omega_4 = \cos\frac{53\pi}{30} + i\sin\frac{53\pi}{30}.$$

Зображуємо значення $\sqrt[5]{z}$ (рис. 11.10) — усі вони розташовані на колі радіусом 1 і променях

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{30}, \varphi_1 = \frac{17\pi}{30}, \varphi_2 = \frac{29\pi}{30}, \varphi_3 = \frac{41\pi}{30}, \varphi_4 = \frac{53\pi}{30}. \; ●$$

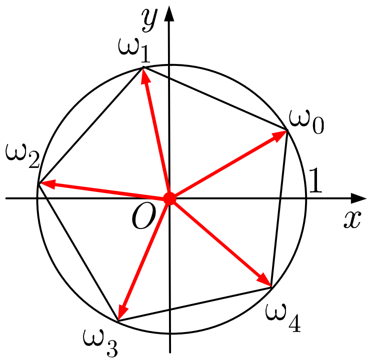

Рис. 11.10

Важливий випадок добування кореня n-го степеня з одиниці. З рівності

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

випливає, що

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}.}$$

На комплексній площині корені n-го степеня з одиниці розташовані на колі одиничного радіуса і поділяють його на n рівних дуг; однією з точок поділу є число 1. Тобто «недійсні» корені n-го степеня з одиниці розташовані симетрично щодо дійсної осі — попарно спряжені.

11.6. Комплексні числа в показниковій формі*

Ейлерова формула, що встановлює зв'язок між показниковою і тригонометричними функціями,

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in \mathbb{R},}$$

дає змогу записувати комплексні числа ще й у показниковій формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Якщо покласти в ейлеровій формулі $\varphi = \pi$, то дістанемо цікаву рівність

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$$

яка містить 5 визначних сталих $0, 1, \pi, e, i$ і символізує єдність усієї математики.

Означення 11.8. *Показниковою формою* комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho e^{i\varphi},}$$

де $\rho = |z|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

Подамо формули для дій з комплексними числами $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ в показниковій формі:

$$\boxed{\begin{aligned}
&z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};\\
&z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};\\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};\\
&z_1^n = \rho_1^n e^{in\varphi_1}, n \in \mathbb{N};\\
&\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1 e^{i\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}}}, k = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}}$$

* Приклад застосування подано в п. 12.9.