Приклад. Алгоритм ділення многочленів:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^3-16x^2-12x+3 & 3x^2-14x+15 \\ \underline{6x^3-28x^2+30x} & \overline{2x+4\ \text{(многочлен-частка)}} \\ -\,12x^2-42x+3 & \\ \underline{12x^2-56x+60} & \\ 14x-57\ \text{(многочлен-остача)} & \end{array}$$

Отже, можемо записати:

$6x^3-16x^2-12x+3=(3x^2-14x+15)(2x+4)+(14x-57)$.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена-частки, зручно скористатися методом, який називають *схемою Горнера.* Цей метод полягає ось у чому.

У верхньому рядку записують послідовно всі коефіцієнти многочлена-діленого. У нижньому рядку на одну позицію ліворуч від a_n записують число c. Заповнюючи нижній рядок, ураховують, що старший коефіцієнт многочлена-частки дорівнює старшому коефіцієнту многочлена-діленого, а тому під старшим коефіцієнтом многочлена-діленого записують цей самий коефіцієнт. Кожне наступне число нижнього рядка знаходять додаванням до відповідного коефіцієнта верхнього рядка добутку попереднього числа нижнього рядка і числа c. В останній позиції нижнього рядка під вільним членом многочлена-діленого дістаємо остачу. Усі числа нижнього рядка, крім числа c, є коефіцієнтами многочлена-частки.

У випадку ділення многочлена $P_n(x)$ на $(x-c)$ схема Горнера матиме такий вигляд:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
c	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}==a_{n-1}+cb_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}++cb_{n-2}$	…	$b_0=a_1+cb_1$	$R=a_0+cb_0$

Приклад. Знайти частку і остачу при діленні многочлена $6x^3-16x^2-12x+3$ на двочлен $x+2$. Складемо схему Горнера (тут $c=-2$):

	6	– 16	– 12	3
–2	6	–16 + 6 · (–2) = – 28	–12 + (–28) · (–2) = 44	3 +44 · (–2) = –85

Маємо, числа 6, –28 і 44 — шукані коефіцієнти частки. Отже, частка подається у вигляді $6x^2-28x+44$, а остача дорівнює –85.

Розглянемо теорему, яка дає змогу знаходити остачу R від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x-c$, не виконуючи самого ділення.

Теорема (Безу). **Остача від ділення многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ на двочлен $x-c$ дорівнює значенню многочлена при $x=c$, тобто $R=P_n(c)$.**

Справді виконавши ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x-c$, дістанемо (згідно з (2)) $P_n(x)=(x-c)S_{n-1}(x)+R$, де остача R — деяке число.

Вважаючи $x=c$, маємо $P_n(c)=(c-c)S_{n-1}(c)+R=0\cdot S_{n-1}(c)++R=R$. Таким чином, $R=P_n(c)$.

Приклад. Знайти остачу від ділення многочлена $2x^3+3x^2-3x+1$ на двочлен $x+2$.

Для знаходження остачі R обчислимо значення многочлена при $x=-2$:

$P_3(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-3(-2)+1=3$. Шукана остача $R=3$.

Зауваження. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $ax+b$ $(a\neq 0)$ дорівнює $P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$.

15. *Розклад многочлена в ряд Тейлора* в точці c: якщо $\deg f(x) = n$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть значення многочлена* $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$ *у точці* $x_0 = 2$.

Розв'язання. Значення многочлена $f(x)$ у точці x_0 дорівнює остачі від ділення $f(x)$ на двочлен $x - x_0$. Розділимо $f(x)$ на $x-2$ за схемою Горнера:

	3	1	0	−19	−13	−10
2	3	7	14	9	5	0

Остачею від ділення $f(x)$ на $x-2$ є останній елемент нижнього рядка. Отже, $f(2) = 0$. □

Задача 2. *Визначіть кратність кореня* $x_0 = 2$ *многочлена* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Розв'язання. Кратністю x_0 многочлена $f(x)$ є найбільший показник степеня, для якого $f(x)$ ділиться на $(x-x_0)^k$. Розділимо $f(x)$ на $x-2$ за схемою Горнера:

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0

(62)

Отже, остача від ділення $f(x)$ на $x-2$ дорівнює 0. Часткою від ділення є многочлен $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$. Тепер ділимо на $x-2$ цю частку і т.д. Ділення на $x-2$ будемо продовжувати до тих пір, поки на якомусь кроці не з'явиться ненульова остача. При цьому зручно не виписувати кожного разу нову таблицю для схеми Горнера, а дописувати знизу до таблиці (62) черговий рядок:

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0
2	1	−1	−1	−2	0	
2	1	1	−1	0		
2	1	3	5			

Таким чином, тричі ділення на $x-2$ відбулося націло, а на четвертому кроці з'явилася ненульова остача 5. Тому число 2 є для многочлена $f(x)$ коренем кратності 3. □

Задача 3. *Розкладіть многочлен* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *за степенями двочлена* $x + 1$ *і обчисліть значення його похідних у точці* -1.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $f(x)$ дорівнює 4, то його розклад за степенями двочлена $x + 1$ має вигляд

$$f(x) = a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

Із цієї рівності видно, що коефіцієнт a_0 є остачею від ділення $f(x)$ на $x+1$, а частка від ділення дорівнює $a_4(x+1)^3+a_3(x+1)^2+a_2(x+1)+a_1$. Тому a_1 є остачею від ділення на $x + 1$ цієї частки, a_2 є остачею від ділення на $x + 1$ наступної частки і т.д. Ділення на $x + 1$ виконуємо за допомогою схеми Горнера:

	1	2	−3	−4	1
−1	1	1	−4	0	1
−1	1	0	−4	4	
−1	1	−1	−3		
−1	1	−2			
−1	1				

Звідси

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

З іншого боку, розклад многочлена $f(x)$ у ряд Тейлора в точці -1 має вигляд

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4.$$

Порівнюючи ці два розклади, отримуємо:

$$f(-1) = 1,\ f'(-1) = 4,\ f''(-1) = -6,\ f'''(-1) = -12,\ f^{(4)}(-1) = 24. \square$$

Задача 4. *Для яких значень* a *многочлен* $x^5 - ax^2 - ax + 1$ *ділиться на* $(x+1)^2$*?*

Розв'язання. За допомогою схеми Горнера виконаємо двічі ділення даного многочлена на $x + 1$:

	1	0	0	$-a$	$-a$	1
−1	1	−1	1	$-a-1$	1	0
−1	1	−2	3	$-a-4$	$a+5$	

Перше ділення виконалося націло. При другому діленні остача також має дорівнювати 0. Отже, $a + 5 = 0$, звідки $a = -5$. $\square$

Задача 5. *За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД многочленів* $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x + 1$ *і* $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$.

Розв'язання. Нагадаємо, що НСД многочленів визначений із точністю до скалярного множника. Коли ми застосовуємо алгоритм Евкліда лише для знаходження НСД, то на кожному кроці нас цікавлять лише остачі від ділення. Тому для полегшення обчислень ділене і дільник у процесі обчислень можна множити/ділити на довільні скаляри. Розділимо спочатку $f(x)$ на $g(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -\ x^4 & -\ x^3 & & -\ 2x & +\ 1 & 3x^4-2x^3+x^2-9x-2 \\ \cline{7-7}
3x^5 & -\ 3x^4 & -\ 3x^3 & & -\ 6x & +\ 3 & x-1 \\
3x^5 & -\ 2x^4 & +\ x^3 & -\ 9x^2 & -\ 2x & & \\ \cline{1-6}
 & -x^4 & -\ 4x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 3 & \\
 & -3x^4 & -\ 12x^3 & +\ 27x^2 & -\ 12x & +\ 9 & \\
 & -3x^4 & +\ 2x^3 & -\ x^2 & +\ 9x & +\ 2 & \\ \cline{1-6}
 & & -14x^3 & +\ 28x^2 & -\ 21x & +\ 7 &
\end{array}
$$

Щоб уникнути дробів, ми в процесі ділення двічі множили ділене на 3. Частка при цьому змінилася, однак вона нам не потрібна. Для полегшення подальших обчислень остачу ділимо на -7. Остаточно одержуємо: $r_1(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$.

Аналогічно ділимо $g(x)$ на $r_1(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\ 2x^3 & +\ x^2 & -\ 9x & -\ 2 & 2x^3-4x^2+3x-1 \\ \cline{6-6}
6x^4 & -\ 4x^3 & +\ 2x^2 & -\ 18x & -\ 4 & 3x+4 \\
6x^4 & -\ 12x^3 & +\ 9x^2 & -\ 3x & & \\ \cline{1-5}
 & 8x^3 & -\ 7x^2 & -\ 15x & -\ 4 & \\
 & 8x^3 & -\ 16x^2 & +\ 12x & -\ 4 & \\ \cline{1-5}
 & & 9x^2 & -\ 27x & &
\end{array}
$$

Після ділення отриманої остачі на 9 маємо: $r_2(x) = x^2 - 3x$. Далі ділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 4x^2 & +\ 3x & -\ 1 & x^2-3x \\ \cline{5-5}
2x^3 & -\ 6x^2 & & & 2x+2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & +\ 3x & -\ 1 & \\
 & 2x^2 & -\ 6x & & \\ \cline{1-4}
 & & 9x & -\ 1 &
\end{array}
$$

Отже, $r_3(x) = x^2 - 3x$. Нарешті, ділимо $r_2(x)$ на $r_3(x)$:

$$
\begin{array}{rrl|l}
x^2 & - & 3x & 9x - 1 \\
9x^2 & - & 27x & \overline{x - 26/9} \\
9x^2 & - & x & \\
\hline
 & & -26x & \\
 & & -26x + 26/9 & \\
\hline
 & & 26/9 &
\end{array}
$$

Таким чином, r_4 є константою. Зрозуміло, що r_4 є останньою ненульовою остачею. Тому НСД$(f(x), g(x)) = 1$. □

Задача 6. *За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ і $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ і його лінійне зображення $d(x) = u(x)f(x) + v(x)f(x)$.*

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі, для знаходження лінійного зображення НСД нам будуть потрібні не тільки остачі від ділення, які з'являються в процесі роботи алгоритму Евкліда, а й частки. Тому множити/ділити в процесі обчислень ділене і дільник на довільні скаляри вже не можна.

Застосовуючи алгоритм Евкліда, одержуємо такий ланцюжок рівностей:

$$
\begin{gathered}
f(x) = (x-1)g(x) + x^2 = (x-1)g(x) + r_1(x), \\
g(x) = (3x-2)r_1(x) + (x-1) = (3x-2)r_1(x) + r_2(x), \\
r_1(x) = (x+1)r_2(x) + 1 = (x+1)r_2(x) + r_3(x), \\
r_2(x) = (1-x)r_3(x),
\end{gathered}
$$

де $r_1(x) = x^2$, $r_2(x) = x - 1$, $r_3(x) = 1$. Отже, НСД$(f(x), g(x)) = 1$.

Рухаючись отриманими нерівностями знизу вгору, можемо написати:

$$
\begin{gathered}
1 = r_3(x) = r_1(x) - (x+1)r_2(x) = \\
= r_1(x) - (x+1)\big(g(x) - (3x-2)r_1(x)\big) = \\
= -(x+1)g(x) + (3x^2 + x - 1)r_1(x) = \\
= -(x+1)g(x) + (3x^2 + x - 1)\big(f(x) - (x-1)g(x)\big) = \\
= (3x^2 + x - 1)f(x) + (-3x^3 + 2x^2 + x - 2)g(x).
\end{gathered}
$$

Таким чином,

$$
\text{НСД}(f(x), g(x)) = 1 = (3x^2 + x - 1)f(x) + (-3x^3 + 2x^2 + x - 2)g(x). \square
$$