Звести до канонічного вигляду рівняння кривих та побудувати їх графіки:

Приклад 3. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

◁ Матрицею квадратичної форми $F(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ є матриця $A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, а характеристичним рівнянням цієї матриці є рівняння $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$.

Власними числами є $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$. Тоді $F(x',y') = x'^2 + 9y'^2$. Нормовані власні вектори матриці A: $\bar{x}_1{}^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}), \bar{x}_2{}^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, а отже, $H = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$ і $\det H=1$. В цьому випадку орієнтація нових осей координат збігається з орієнтацією старих.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x', y':

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix},$$

тобто $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$. Тепер можемо виразити через нові змінні x', y' лінійну частину заданого рівняння:

$$-18x - 18y + 9 = -18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 18\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 9 = -18\sqrt{2}y' + 9.$$

Враховуючи вигляд квадратичної форми заданого рівняння, отримаємо: $x'^2 + 9y'^2 - 18\sqrt{2}y' + 9 = 0$. Виділимо повні квадрати у лівій його частині: $x'^2 + 9(y'^2 - \sqrt{2})^2 + 9 - 18 = 0$ або $x'^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 = 9$.

Здійснюючи паралельне перенесення початку координат в точку $O'(0,\sqrt{2})$ за формулами $x'' = x', y'' = y' - \sqrt{2}$, отримаємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1$. Щоб побудувати цю криву, повертаємо систему XOY на кут $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ і, потім, переносимо початок координат в точку $O'(0,\sqrt{2})$. Побудувавши систему $X''O'Y''$, будуємо криву (рис.19). ▷

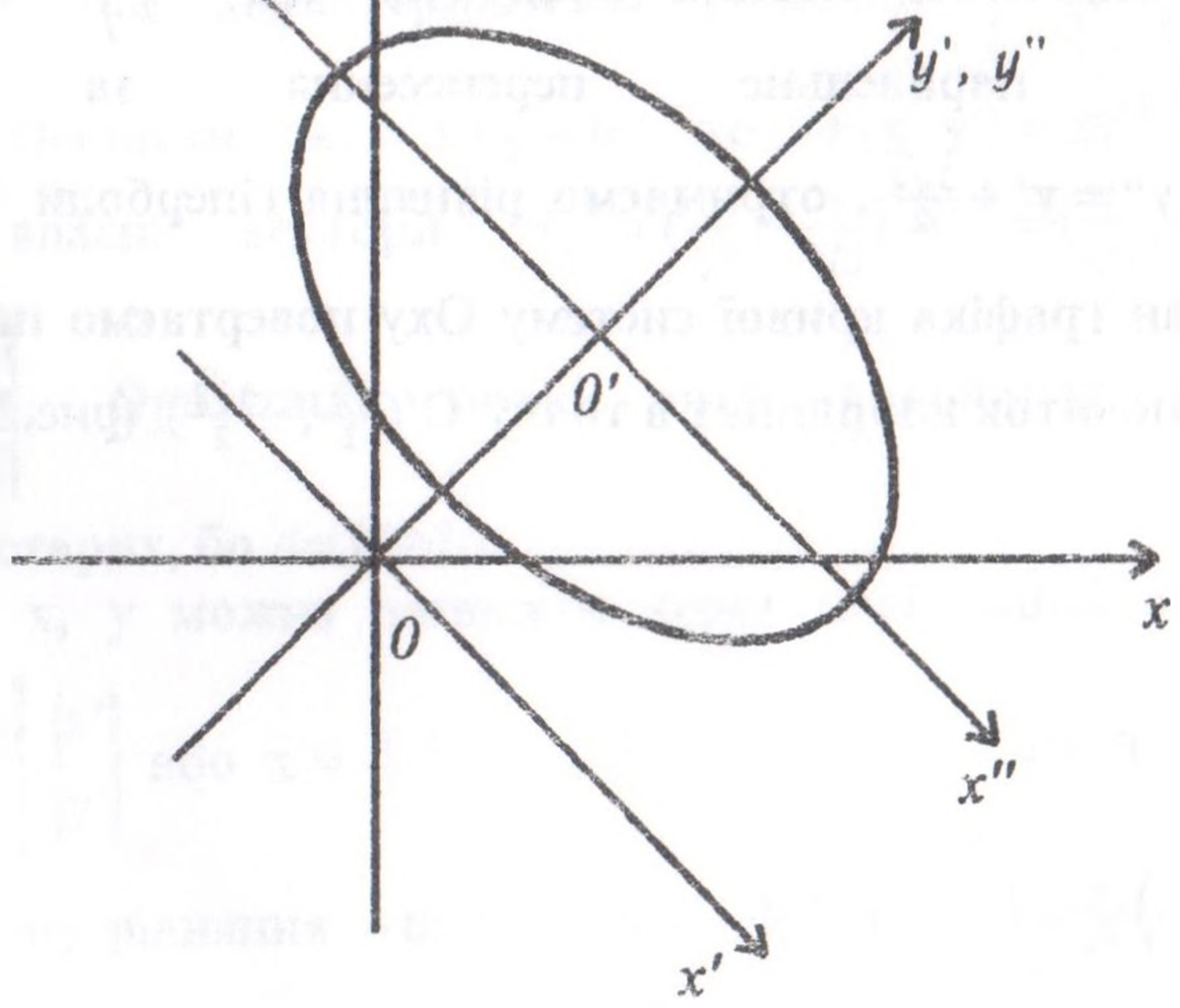

Рис. 19.

Приклад 4. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

◁ Матрицею квадратичної форми $F(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$ є матриця $A=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{Vmatrix}$, а характеристичним рівнянням цієї матриці є рівняння $\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$ або $\lambda^2-6\lambda-16=0$. Власними числами є $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$. Тоді $F(x',y')=8x'^2-2y'^2$. Нормовані власні вектори матриці A: $\bar{x}_1{}^0=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$, $\bar{x}_2{}^0=(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$, а отже, $H=\begin{Vmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{Vmatrix}$ і detH=1. В цьому випадку орієнтація нових осей збігається з орієнтацією старих.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x',y': $\begin{Vmatrix}x\\ y\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x'\\ y'\end{Vmatrix}$, тобто $x=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')$. Тепер лінійна частина заданого рівняння
$-2x-14y-13=-\sqrt2(x'-y')-7\sqrt2(x'+y')-13=-8\sqrt2x'-6\sqrt2y'-13$, а початкове рівняння набере вигляду $8x'^2-2y'^2-8\sqrt2x'-6\sqrt2y'-13=0$ або, після виділення повних квадратів $8\left(x'-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-2\left(y'+\frac{3\sqrt2}{2}\right)^2=8$. Здійснюючи паралельне перенесення за формулами $x''=x'-\frac{\sqrt2}{2}, y''=y'+\frac{3\sqrt2}{2}$, отримаємо рівняння гіперболи $\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{4}=1$. Для побудови графіка кривої систему Oxy повертаємо на кут $\alpha=45^\circ$ і переносимо початок координат в точку $O'(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{3\sqrt2}{2})$ (рис.20). ▷

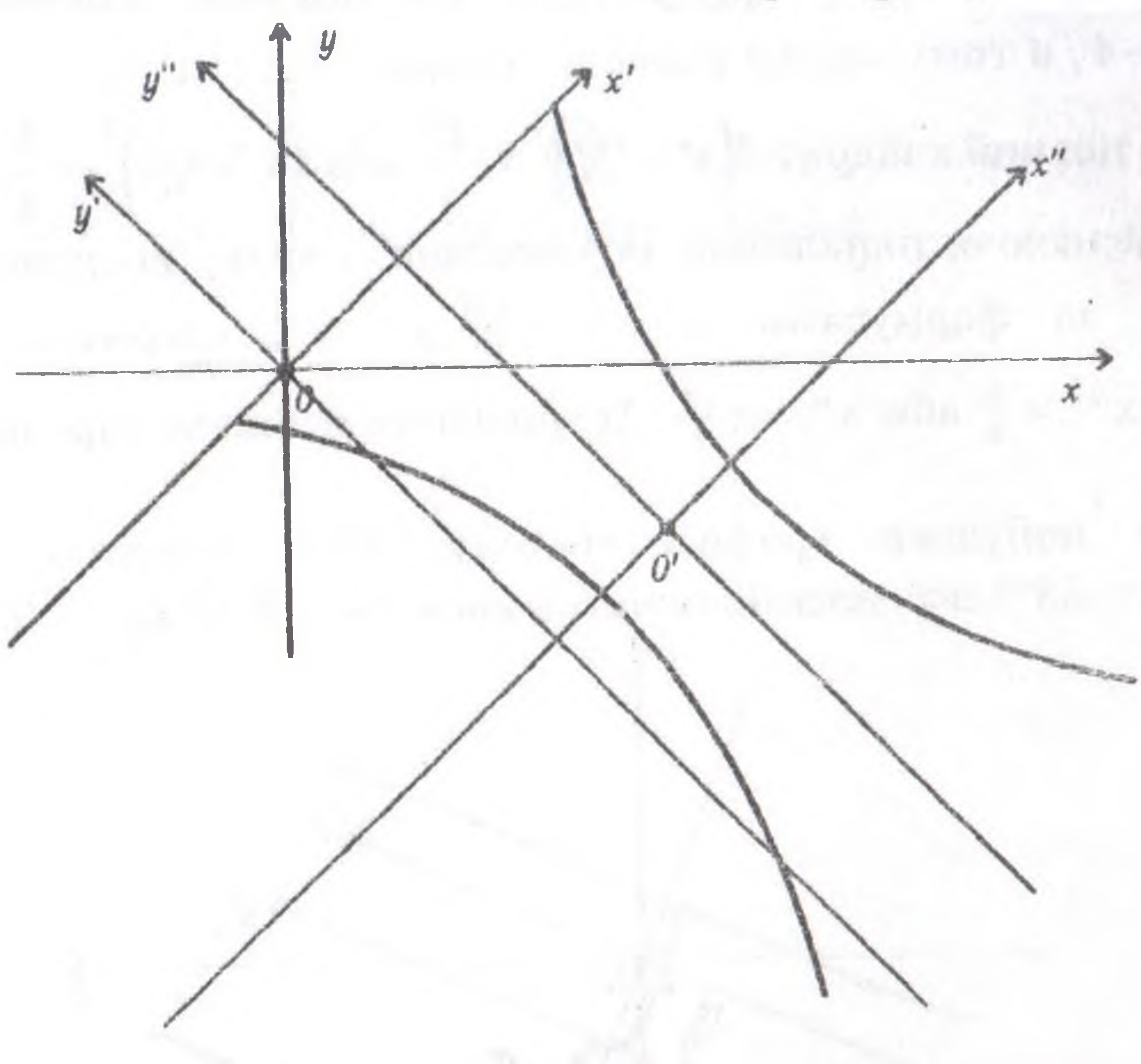

Рис. 20.

Приклад 5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

◁ Для квадратичної форми $F(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ матриця $A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$ має характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 5\lambda = 0$. Оскільки $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$, то $F(x', y') = 5x'^2$. Знаходимо нормовані власні вектори $\overline{x}_1^{\,0} = (\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}), \overline{x}_2^{\,0} = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$, звідки $H = \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Vmatrix}$. Орієнтація нових осей координат збігається з орієнтацією старих, бо detH=1.

Змінні x, y можна записати через нові змінні x', y', і, отже $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix}$ або $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$. Тепер виразимо лінійну частину рівняння $-6x + 3y - 4 = -\frac{6}{\sqrt{5}}(2x' + y') + \frac{3}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') - 4 =$ $= -3\sqrt{5}x' - 4$, а тому задане рівняння набирає вигляд $5x'^2 - 3\sqrt{5}x' - 4 = 0$. Виділимо повний квадрат $5\left(x' - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{25}{4}$ або $\left(x' - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Здійснюючи паралельне перенесення початку координат в точку $O'(\frac{3\sqrt{5}}{10}, 0)$ за формулами $x'' = x' - \frac{3\sqrt{5}}{10}, y'' = y'$, одержимо канонічне рівняння $x''^2 = \frac{5}{4}$ або $x'' = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Це рівняння визначає пару паралельних прямих.

Для побудови графіка систему XOY повертаємо на кут $\alpha = -\mathrm{arctg}2 = -65°$ і переносимо початок координат в точку O′ (рис.21). ▷

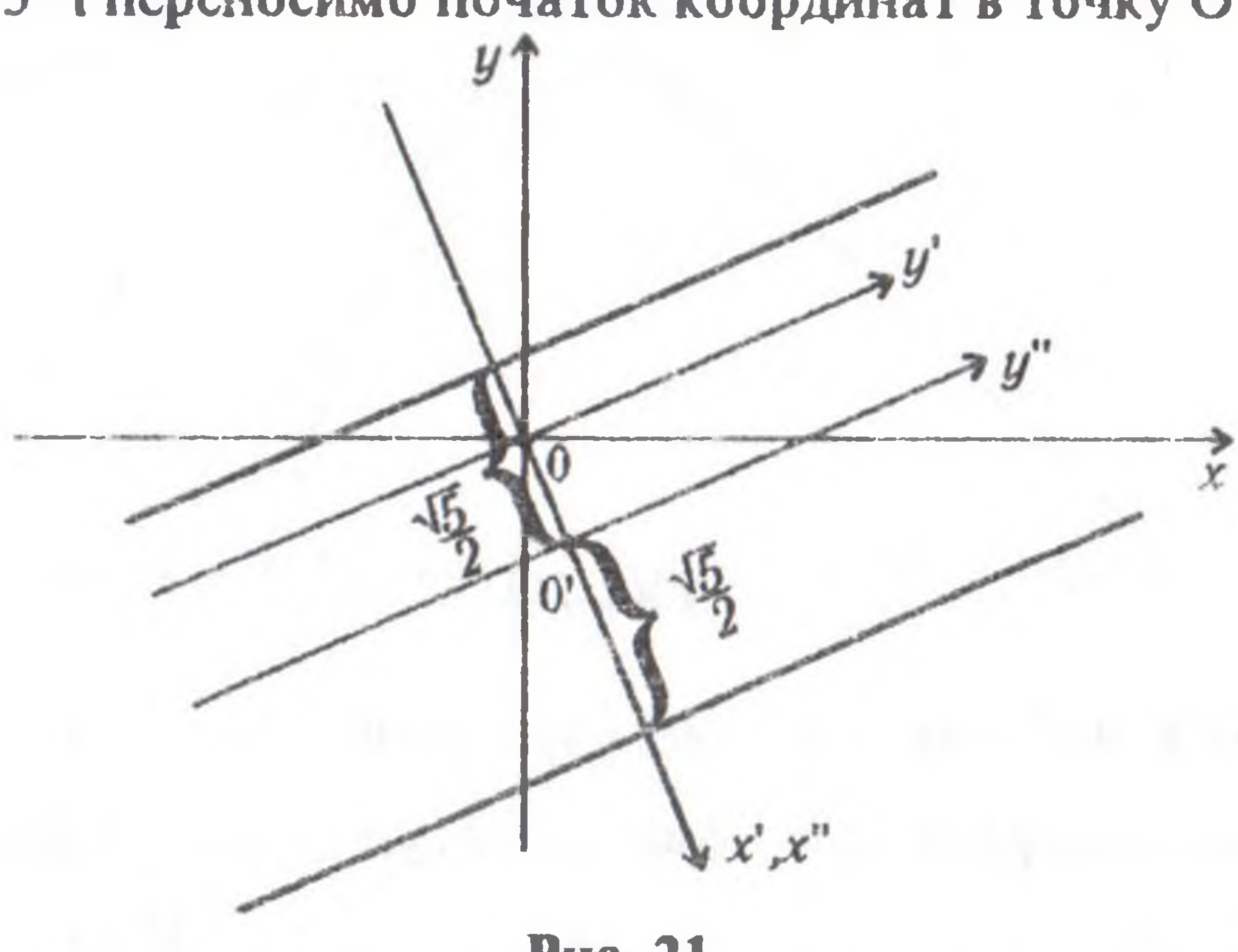

Рис. 21.