18. Поверхні 2-го порядку

18.1. Класифікація поверхонь і просторових кривих

Єдиною поверхнею 1-го порядку є площина.

Означення 18.1. *Геометричним образом 2-го порядку* у просторі називають множину точок простору, прямокутні координати $(x;y;z)$ яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned}} \tag{18.1}$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнюють нулю одночасно.

Поверхні обертання

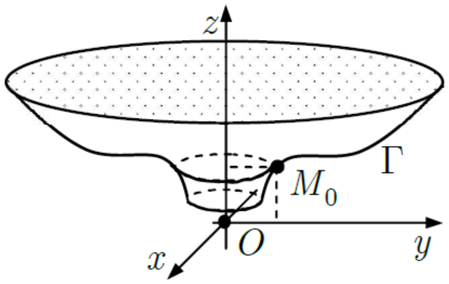

Рис. 18.3

Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить усе коло, утворене обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої — осі обертання, називають *поверхнею обертання* (рис. 18.3).

Нехай Γ — крива на площині Oyz: $z = f(y)$, $y \geq 0$. Обертаючись навколо осі Oz, крива Γ утворює поверхню обертання (рис. 18.3).

Нехай $M_0(y_0; z_0)$ — довільна точка кривої Γ. Точка M_0 пробігає коло, проекцією якого на площину Oxy є

$$x^2 + y^2 = (y_0)^2.$$

Отже,

$$z_0 = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Завдяки довільності точки M_0 на кривій Γ поверхню обертання задає рівняння

$$\boxed{z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).} \tag{18.2}$$

Запишімо рівняння поверхонь, утворених обертанням навколо осі Oz кривих 1-го та 2-го порядку, розміщених у площині Oyz:

1) прямої $az - cy = 0$;

2) еліпса $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

3) гіперболи $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

4) гіперболи $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$;

5) параболи $y^2 = 2pz$.

1) Обертанням прямої навколо осі Oz одержимо коловий конус (рис. 18.4)

$$z = \pm\frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

Оскільки криві 2)–5) симетричні щодо осі Oz (змінна y входить у рівняння лише в парному степені), тому, скориставшись формулою (18.2), знайдімо рівняння відповідних поверхонь обертання:

2) еліпсоїд обертання (рис. 18.5)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо $a = c$, одержимо рівняння сфери радіусом a;

3) однопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 18.6)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

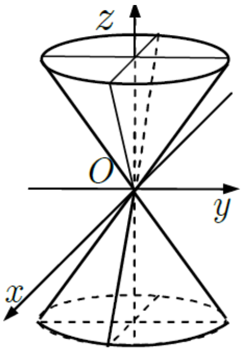

Рис. 18.4

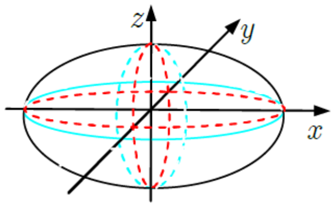

Рис. 18.5

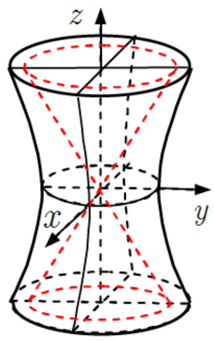

Рис. 18.6

4) двопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 18.7)

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1;$$

5) параболоїд обертання (рис. 18.8)

$$\frac{x^2+y^2}{p} = 2z.$$

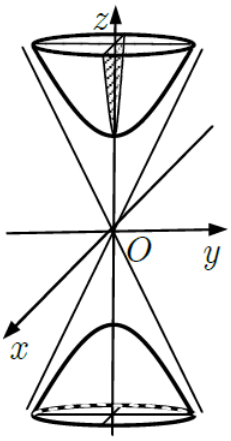

Рис. 18.7

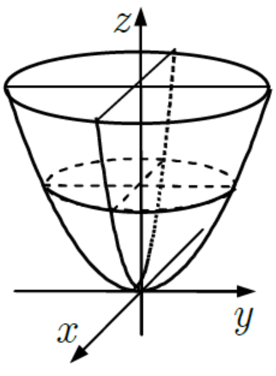

Рис. 18.8

Метод перерізів

Нехай S — деяка поверхня, задана у ПДСК. Щоб вивчити форму поверхні методом паралельних перерізів, поверхню S перетинають площинами, паралельними координатним, і визначають лінії перерізу поверхні з цими площинами.

Твердження 18.1. Якщо S — поверхня, задана у ПДСК рівнянням

$$F(x, y, z) = 0,$$

а $z = h$ — площина P, паралельна координатній площині Oxy, то проекція лінії перетину поверхні S із площиною P на площину Oxy має рівняння

$$\boxed{F(x, y, h) = 0.}$$

Циліндричні поверхні

Поверхню називають *циліндричною* (*циліндром*), якщо вона разом з кожною своєю точкою M містить усю пряму — *твірну* циліндричної поверхні, яка проходить через точку M паралельно заданому вектору $\overline{p}$.

Нехай Γ — деяка лінія — *напрямна циліндричної поверхні*, а $\overline{p}$ — ненульовий вектор. Поверхня, утворена прямими, які проходять через усі точки лінії Γ паралельно вектору $\overline{p}$, буде циліндричною.

Візьмімо довільну точку O і проведімо площину Oxy перпендикулярно до твірної L і пряму Oz паралельно твірній L.

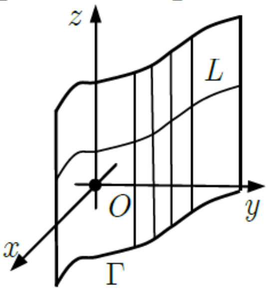

Рис. 18.9

Площина Oxy перетне циліндричну поверхню за напрямною Γ (рис. 18.9), яка має рівняння (що збігається з рівнянням циліндричної поверхні із твірною, паралельною осі Oz)

$$F(x, y) = 0.$$

Це й буде рівняння циліндричної поверхні у вибраній системі координат.

Рівняння $F(y, z) = 0$ описує циліндричну поверхню із твірною, паралельною осі Ox, а рівняння $F(x, z) = 0$ — із твірною, паралельною осі Oy.

Циліндричними поверхнями 2-го порядку із твірними, паралельними осі Oz, і напрямними — кривими 2-го порядку — є:

1) *еліптичний циліндр* (рис. 18.10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0.$$

Якщо $a = b$, то дістанемо коловий циліндр $x^2 + y^2 = a^2$;

2) *параболічний циліндр* (рис. 18.11)

$$y^2 = 2px, \ p > 0.$$

3) *гіперболічний циліндр* (рис. 18.12)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0.$$

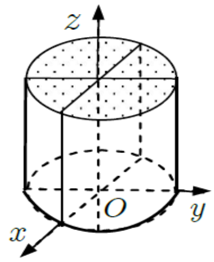

Рис. 18.10

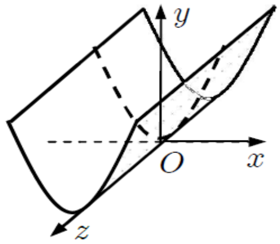

Рис. 18.11

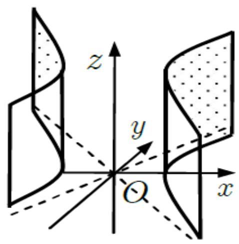

Рис. 18.12

Конічні поверхні

Поверхню, якій належить точка M_0, що разом з кожною точкою M, відмінною від M_0, містить пряму M_0M, називають *конічною поверхнею* (*конусом*).

Точку M_0 називають *вершиною конуса*, а прямі, які проходять через цю точку і належать поверхні,— її *твірними*. Конус може мати більше ніж одну вершину.

Нехай Γ — довільна крива і точка O розташована поза нею. Через кожну точку кривої Γ і точку O проведімо прямі. Поверхня, утворена всіма цими прямими, буде конічною (рис. 18.13).

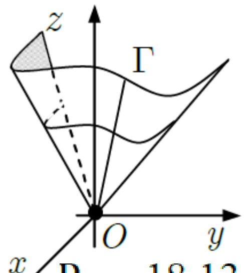

Рис. 18.13

Точка O — вершина конуса, а прямі, що проходять через неї,— твірні конуса. Криву Γ називають *напрямною*.

Нехай задано ПДСК, початок якої збігається з вершиною конуса O, і параметричні рівняння напрямної:

$$\begin{cases} x = f(u), \\ y = g(u), \\ z = h(u), u \in U. \end{cases}$$

Твірна, що проходить через довільну точку $M(x; y; z)$ на конусі, перегинає напрямну в точці $P(f(u); g(u); h(u))$, де u — відповідне значення параметра. Вектори $\overline{OM}$ та $\overline{OP}$ колінеарні, і тому існує таке число v, що

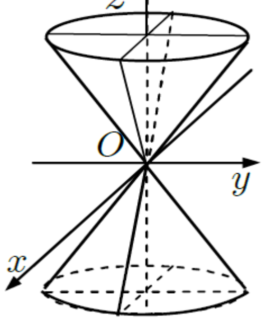

Рис. 18.14

$$\overline{OM} = v\overline{OP} \Leftrightarrow \begin{cases} x = vf(u), \\ y = vg(u), \\ z = vh(u), u \in U. \end{cases}$$

Можна переконатись, що точка, яка не лежить на конусі, ці параметричні рівняння не справджує.

Конічною поверхнею 2-го порядку буде *еліптичний конус* (рис. 18.14)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.}$$

Коли $a = b$, то матимемо *коловий конус*.

18.3. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a\geq b\geq c>0.} \tag{18.2}$$

Рівняння (18.2) називають *канонічним рівнянням* еліпсоїда, а систему координат — *канонічною системою*.

1. Еліпсоїд не проходить через початок координат канонічної системи координат, бо координати точки $O(0;0;0)$ не справджують рівняння (18.2).

2. Кожну вісь координат еліпсоїд перетинає у двох точках, симетричних щодо початку координат:

$$A_{1,2}(\pm a;0;0), B_{1,2}(0;\pm b;0); C_{1,2}(0;0;\pm c).$$

Точки перетину еліпсоїда з осями координат називають *вершинами еліпсоїда*, відрізки A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 — *осями еліпсоїда*, а числа a, b та c — півосями еліпсоїда. Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають *тривісним*. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то ми дістаємо *еліпсоїд обертання*. Якщо, нарешті, $a=b=c$, то поверхня є *сферою* з центром у початку координат.

3. Оскільки змінні x, y, z у рівняння еліпсоїда входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. З рівняння еліпсоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq a,\ |y|\leq b,\ |z|\leq c.$$

5. Обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі Ox (рис.18.16) одержимо еліпсоїд обертання

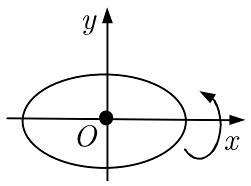

Рис. 18.16

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

а з нього — стисканням вздовж осі Oz з коефіцієнтом $\frac{c}{b}\leq 1$ — еліпсоїд загального вигляду (рис. 18.17).

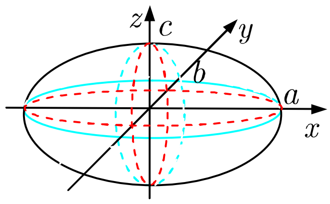

Рис. 18.17

6. Вивчімо форму еліпсоїда методом паралельних перерізів. Якщо еліпсоїд з рівнянням (18.2) перетнути площиною $z=h$, паралельною площині Oxy, то проекція перерізу на площину Oxy матиме рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

Можливі три випадки:

а) $-c < h < c$. У цьому разі в перерізах дістаємо еліпси з центрами на осі Oz. Справді, проекції цих ліній на площину Oxy мають рівняння

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

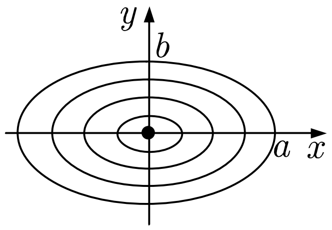

Рис. 18.18

Оскільки $1-\frac{h^2}{c^2}>0$, то це рівняння визначає еліпси (рис. 18.18) з півосями:

$$a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

б) $h=\pm c$. У цьому разі рівняння проекції перерізу на площину Oxy набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Еліпс вироджується в точку $O(0;0)$.

в) $\left|h\right|>c$. У цьому разі в перерізі дістаємо порожню множину, бо площина $z=h$ при $\left|h\right|>c$ не має з еліпсоїдом спільних точок.

Перерізи, паралельні іншим координатним площинам, такі самі.

Зауваження 18.1. Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

задає лише одну точку $O(0;0;0)$, а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

— порожню множину (ще кажуть «уявний еліпсоїд»).

18.4. Гіперболоїди

Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0.} \tag{18.4}$$

Систему координат, у якій однопорожнинний гіперболоїд має рівняння (18.4), називають *канонічною системою*.

1. Однопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат, бо координати точки $O(0;0;0)$ не справджують рівняння (18.4).

2. Однопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Ox у вершинах — точках $A_{1,2}(\pm a;0;0)$, а вісь Oy — у точках $B_{1,2}(0;\pm b;0)$. Вісь Oz однопорожнинний гіперболоїд не перетинає. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2 називають *дійсними осями* однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називають *півосями* однопорожнинного гіперболоїда.

3. Рівняння поверхні містить змінні x, y, z у парних степенях, тому однопорожнинний гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. З рівняння однопорожнинного гіперболоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1.$$

5. Обертанням гіперболи

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

навколо осі Oz (рис. 18.19) одержимо однопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\dfrac{b}{a}$ — однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 18.20).

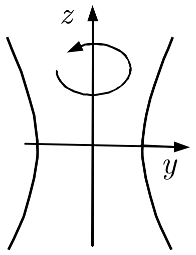

Рис. 18.19

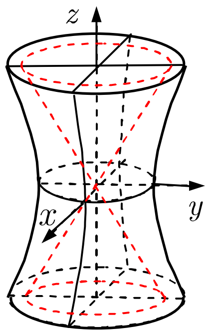

Рис. 18.20

6. Вивчімо форму поверхні однопорожнинного гіперболоїда методом перерізів. Якщо перетнути поверхню площиною $z=h$, паралельною площині Oxy, то проекція перерізу на площину Oxy має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

За будь-якого значення h це рівняння еліпса (рис. 18.21) з півосями:

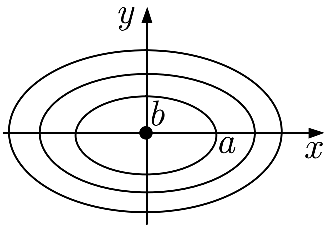

Рис. 18.21

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}, \quad b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}.$$

Якщо $h = 0$, матимемо горловий еліпс однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо поверхню перетнути площиною $x = h$, яка паралельна площині Oyz, то проекція перерізу на площину Oyz має рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Можливі три випадки:

а) $|h| < a$. У цьому разі $1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$, тому проекції перерізів на площину Oyz є гіперболами з уявною віссю Oz (рис. 18.22, I).

б) $h = \pm a$. У цьому разі проекції перерізів збігаються. Їхнє рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

означає дві прямі, які перетинаються в початку координат (рис. 18.22, II).

в) $|h| > a$. У цьому разі $1 - \frac{h^2}{a^2} < 0$, тому в перерізі матимемо гіперболи, для яких вісь Oy є уявною віссю (рис. 18.22, III).

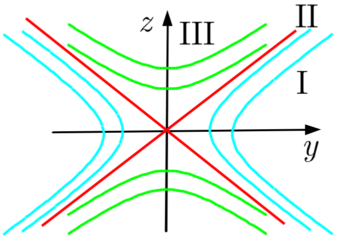

Рис. 18.22

Те саме матимемо в разі перерізання поверхні площинами $y = h$.

7. Асимптотичною поверхнею для однопорожнинного гіперболоїда є еліптичний конус (однопорожнинний гіперболоїд розташований ззовні конуса)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c > 0.$$

Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, a, b, c > 0.} \tag{18.5}$$

Систему координат, у якій двопорожнинний гіперболоїд має рівняння (18.5), називають *канонічною системою*.

1. Двопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат.

2. Двопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Oz у двох точках — вершинах — $C_{1,2}(0;0;\pm c)$. Осі Ox та Oy не перетинають поверхню. Відрізок C_1C_2 називають *дійсною віссю*. Числа a, b та c називають *півосями* двопорожнинного гіперболоїда.

3. Двопорожнинний гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. Двопорожнинний гіперболоїд міститься всередині асимптотичного конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c > 0$$

і за межами смуги $\left|z\right| \geq c$.

5. Обертанням гіперболи

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

навколо осі Oz (рис. 18.23) одержимо двопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\dfrac{b}{a}$ — двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 18.24).

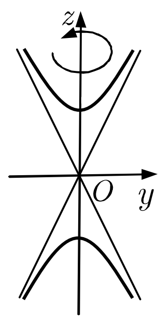

Рис. 18.23

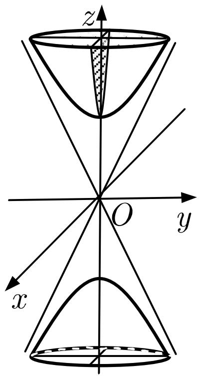

Рис. 18.24

18.5. Параболоїди

Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, a,b>0.} \qquad (18.6)$$

Систему координат, у якій еліптичний параболоїд має рівняння (18.6), називають *канонічною системою*.

1. Еліптичний параболоїд проходить через початок ПДСК.

2. Еліптичний параболоїд має з осями координат лише одну спільну точку — вершину — точку $O(0;0;0)$.

3. Оскільки рівняння (18.6) містить змінні x,y у парних степенях, то еліптичний параболоїд симетричний щодо площин Oxz та Oyz. Поверхня не симетрична щодо площини Oxy. Звідси випливає, що еліптичний параболоїд симетричний щодо координатної осі Oz і не симетричний щодо осей Ox та Oy і початку координат.

4. З рівняння (18.6) випливає, що для всіх точок поверхні $z\ge 0$, причому $z=0$ тоді й лише тоді, коли точка збігається з початком координат. Отже, всі точки еліптичного параболоїда, крім початку координат, розміщені по один бік від площини Oxy.

5. Обертанням параболи $2a^2z=y^2$ навколо осі Oz (рис. 18.25) одержимо параболоїд обертання

$$2z=\frac{x^2+y^2}{a^2},$$

а з нього — стисканням вздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — еліптичний параболоїд загального вигляду (рис. 18.26).

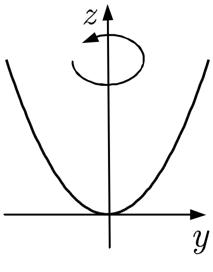

Рис. 18.25

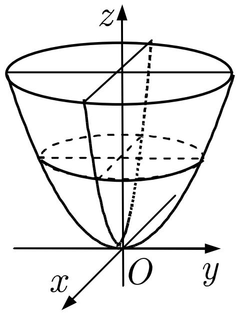

Рис. 18.26

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0.} \tag{18.7}$$

Систему координат, у якій гіперболічний параболоїд має рівняння (18.7), називають *канонічною системою*.

1. Гіперболічний параболоїд проходить через початок канонічної системи координат.

2. Гіперболічний параболоїд перетинає осі канонічної системи координат у єдиній точці — на початку координат.

3. Гіперболічний параболоїд симетричний щодо площин Oxz та Oyz і не симетричний щодо площини Oxy. Звідси поверхня симетрична щодо осі Oz і не симетрична щодо осей Ox та Oy і початку координат.

4. Перерізанням поверхні площинами $z = h$ одержимо гіперболи (рис. 18.27, I)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2} = 1, h > 0,$$

спряжені до них гіперболи (рис. 18.27, III)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} = -1, h < 0,$$

та пару перетинних прямих — асимптот гіпербол (рис. 18.27, II)

$$y = \pm\frac{b}{a}x, h = 0.$$

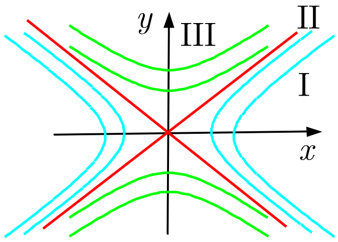

Рис. 18.27

Перерізанням поверхні площинами $y = h$ одержимо параболи (рис. 18.28)

$$x^2 = 2a^2\left(z + \frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Перерізанням поверхні площинами $x = h$ одержимо параболи (рис. 18.29).

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right).$$

Гіперболічний параболоїд зображено на рис. 18.30.

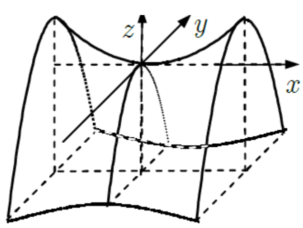

Рис. 18.30