1. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 20.11.2020 über den Comajudge bis 17 Uhr

1 Problembeschreibung

1.1 Polynommultiplikation und Polynomaddition

In der Schule haben Sie Polynome kennen gelernt. Ein Polynom ist eine Funktion f, die sich in der Gestalt

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

schreiben läßt. Man nennt a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0 die *Koeffizienten* des Polynoms. Wir betrachten in dieser Aufgabe Polynome f, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. (Beachten Sie, dass dies die 0 mit einschließt.) Wir schreiben hierfür $f\in\mathbb{Z}[x]$. Desweiteren wählen wir als Definitionsbereich der Funktion f die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Hieraus ergibt sich als Wertebreich von f ebenfalls $\mathbb{C}$. Wir schreiben hierfür $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Es seien nun zwei Polynome $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ gegeben, mit

$$f = a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad \text{und} \qquad g = b_2x^2+b_1x+b_0.$$

Für das Produkt $f\cdot g$ von f und g gilt

$$f\cdot g = c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0,$$

mit

$$c_4=a_2b_2,\quad c_3=a_2b_1+a_1b_2,\quad +c_2=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2,\quad c_1=a_1b_0+a_0b_1,\quad c_0=a_0b_0.$$

(Man beachte, dass für jeden Summanden eines Koeffizienten c_k, wobei $k\in\{0,1,2,3,4\}$, die Summe der Indizes seiner Faktoren wieder k ergibt.)
Es sei nun ein weiteres Polynom $h=x^5\in\mathbb{Z}[x]$ gegeben. Dann gilt

$$h+f\cdot g = x^5+c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0.$$

Eine Teilaufgabe dieser Programmieraufgabe ist es, eine solche Summe $h+f\cdot g$ zu berechnen.

1.2 Descartes' Vorzeichenregel

Ein Polynom kann sowohl reelle, als auch komplexe Nullstellen haben. Descartes' Vorzeichenregel ermöglicht zweierlei. Erstens läßt sich durch sie eine obere Schranke C für die Zahl positiver reeller

Nullstellen eines Polynoms ermitteln. Zweitens gibt diese obere Schranke C die Zahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms bis auf ein Vielfaches von 2 genau an. Das heißt, ist die Schranke C z. B. 5, so ist die Zahl der positiven reellen Nullstellen des zugrunde liegenden Polynoms 5, 3 oder 1.

Es sei wiederum ein Polynom f gegeben. (Die Koeffizienten von f können reell sein, auch wenn wir uns in der Programmieraufgabe auf ganzzahlige Koeffizienten einschränken). Dann ist C gegeben durch die Zahl der Vorzeichenwechsel von Koeffizient zu Koeffizient. Hierbei gehen nur Koeffizienten ungleich 0 in die Berechnung ein. Wir machen dies an einem Beispiel klar. Es sei

$$f = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 6.$$

Die Folge der Koeffizienten ungleich 0 ist dann

$$+1 \qquad +4 \qquad -3 \qquad +1 \qquad -6$$

Das Vorzeichen wechselt drei mal. Damit ist die Zahl positiver reeller Nullstellen von f entweder 3 oder 1. Insbesondere ist die Zahl positiver reeller Nullstellen ungerade. Das folgende Polynom hat eine gerade Zahl positiver reeller Nullstellen, da die Zahl der Vorzeichenwechsel gerade ist.

$$g = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x.$$

2 Aufgabenstellung und Anforderungen

Schreiben Sie eine Funktion

`roots(a,b,c,d,e,f)` ,

welche mittels Descartes' Regel ermittelt, ob die Zahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms

$$h + f \cdot g$$

gerade oder ungerade ist. Hierbei seien

$$f = ax^2 + bx + c, \qquad g = dx^2 + ex + f \qquad \text{und} \qquad h = x^5.$$

Der Rückgabewert der Funktion soll, je nachdem, ob die Zahl positiver reeller Wurzeln gerade oder ungerade ist, einer der beiden folgenden Strings sein:

Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.

Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.

Beachten Sie hierbei, dass 0 als gerade Zahl gilt.

2.1 Beispielaufrufe

```
$ python3 -i PA01.py
>>> roots(1,-2,-1,2,1,2)
'Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.'
>>> roots(0,0,0,0,0,0)
'Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.'
```