8. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 22.01.2021 über den Comajudge bis 17 Uhr

Bitte beachten Sie: Die Herausgabe oder der Austausch von Code (auch von Teilen) zu den Programmieraufgaben führt für *alle* Beteiligten zum *sofortigen Scheinverlust.* Die Programmieraufgaben müssen von allen Teilnehmenden alleine bearbeitet werden. Auch Programme aus dem Internet dürfen nicht einfach kopiert werden.

1 Matrizen

Eine Matrix $A=(a_{i,j})\in R^{m\times r}$ besteht aus m Zeilen und r Spalten rechteckig angeordneter Einträge $a_{i,j}\in R$ (*Koeffizienten*), die einer algebraischen Struktur $(R,\oplus,\odot)$ entstammen. Gewöhnlicherweise ist R ein Körper, etwa der Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ der reellen bzw. komplexen Zahlen mit herkömmlicher Addition und Multiplikation. Es können jedoch auch allgemeinere Strukturen (etwa Ringe) zugrundeliegen, sofern diese eine adäquate Form der Addition und Multiplikation gestatten.
Für zwei Matrizen $A\in R^{m\times r}$ und $B\in R^{r\times n}$ ist das Matrixprodukt $A\odot B=C=(c_{i,j})\in R^{m\times n}$ definiert durch

$$c_{i,j}:=a_{i,1}\odot b_{1,j}\oplus\ldots\oplus a_{i,r}\odot b_{r,j}\in R\ .$$

Über den reellen Zahlen $R=(\mathbb{R},+,\cdot)$ gilt beispielsweise $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{r}a_{i,k}b_{k,j}$.

2 Problembeschreibung

In dieser Aufgabe soll das Matrixprodukt $A\odot B$ bezüglich einer Min-Plus-Algebra berechnet werden. Dieses ist dem gewöhnlichen Matrixprodukt (über $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$) prinzipiell sehr ähnlich, es wird lediglich $+$ durch min und $\cdot$ durch $+$ ersetzt:
Für Matrizen $A\in\mathbb{Z}^{m\times r}$ und $B\in\mathbb{Z}^{r\times n}$ ergibt sich der Eintrag $c_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j von $C=A\odot B$ mit *dieser* Addition und Multiplikation also durch

$$c_{i,j} \;=\; \min_{k\in\{1,\ldots,r\}}\{a_{i,k}+b_{k,j}\}\ .$$

3 Beispiele

Durch diese Festlegung erhalten wir beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

und insbesondere liefert die Berechnung des Eintrags in Zeile 1 und Spalte 3 dann

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}=\min\{4+9,3+1\}=\min\{13,4\}=4.$$

4 Aufgabenstellung und Anforderungen

Schreiben Sie die beiden Funktionen `multiply(A,B)` und `power(A,m)`, welche für korrekte Eingaben, d.h. ganzzahlige Matrizen A und B mit zueinander *passender* Größe, das oben beschriebene Matrixprodukt $A \odot B$ bzw. die m-te Potenz $A^m = \underbrace{A \odot \cdots \odot A}_{m \text{ Faktoren}}$ von A mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ berechnet.

4.1 Eingabe

Alle Matrizen der Eingabe werden jeweils als String übergeben. Dabei stehen die Zeilen der Matrizen hintereinander und sind jeweils durch ein Komma und ein Leerzeichen voneinander getrennt. Die ganzzahligen Einträge einer Zeile sind jeweils durch Leerzeichen getrennt, siehe Beispielaufrufe.

4.2 Ausgabe

Die Funktionen `multiply(A,B)` und `power(A,m)` geben die jeweils berechnete Matrix in der unter 4.1 Eingabe erwähnten Form als String zurück.

4.3 Beispielaufrufe

```
>>> A = '4 3, 1 7'
>>> B = '2 5 9, 8 6 1'
>>> multiply(A,B)
'6 9 4, 3 6 8'
>>> power(A,3)
'8 7, 5 8'
```

Hinweis: Es ist über die üblichen `python`-Befehle hinaus kein zusätzliches Modul zu importieren. Zusätzliche Module wie z.B. `numpy` können vom Comajudge in der Regel nicht importiert werden und führen daher zu Fehlern.