1 Початкові поняття

1.За означенням $x < y$ означає, що $x \leq y$ та $x \neq y$. Довести, що у частково впорядкованій множині не існує елементу x такого, що $x < x$ та що з $x < y$ та $y < z$ слідує $x < z$.

Доведення. Нехай існує такий елемент, що $x < x$. За означенням, має виконуватись $x \neq x$. Це є якраз таки протиріччям у найївній теорії множин, такого не може бути в ZFC. Протиріччя.

Друга частина.

З постановки задачі слідує, що $x \neq y$ та $y \neq z$ та $x \leq y$ та $y \leq z$. Хотілось би скористатися транзитивністю, але поки що з тих нерівностей не слідує, що $x \neq z$. Нехай $x = z$, тоді $x < y < x$. З цього слідує, що $x < x$. Вже було доведено, що це неможливо. Протиріччя. □

2.Нехай бінарне відношення $<$ визначене як у вправі 1 та за визначенням $x \leq y$ означає, що $x < y$ або $x = y$. Показати, що відношення $\leq$ є частковим порядком.

Доведення. Оскільки $x \equiv x$, то з цього слідує рефлексивність.

З того, що $x < y$ та $y < x$ слідує антисиметричність за означенням цього відношення та протиріччям, що $x \neq x$ неможливе. Нехай $x < y$ та $y < z$. Нехай $y = z$. Тоді маємо $x < y = z$, тобто $x < z$. Якщо $x = y$, то знову ж слідує, що $x < z$. □

3. Довести наступну розширену властивість антисиметричності: якщо $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_0$, то $x_0 = x_1 = ... = x_{n-1}$.

Доведення. Індукція. $n = 1$. Рефлексивніть. Доведно. Нехай це доведено для $n - 1$. Тоді маємо з транзитивності $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-2} \leq x_0$, отже, $x_0 = x_1 = ... = x_{n-2}$. $x_0 \leq x_{n-1} \leq x_0$. Отже, $x_0 \leq x_{n-1}$ та $x_{n-1} \leq x_0$. Отже, $x_0 = x_n$. Транзитивність рівності. Доведено. □

5. Нехай $\leq$ - частковий порядок на A та B - підмножина множини A. Для $a, b \in B$ покладемо $a \leq_B b$, якщо $a \leq b$. Довести, що відношення $\leq_B$ буде частковим порядком на B.