Розділ 1

Нормовані простори

1.1 Лінійні нормовані простори

1.1. Довести, що в означенні лінійного нормованого простору аксіому $\|\mathbf{x}\| = 0$ тоді й лише тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, можна замінити на аксіому: з $\|\mathbf{x}\| = 0$ слідує $\mathbf{x} = 0$

Доведення. Нам потрібно довести, що з того, що $\mathbf{x} = 0$ слідує $\|\mathbf{x}\| = 0$. Будемо від супротивного. Нехай $\mathbf{x} = 0$ та $\|\mathbf{x}\| = a \neq 0$. Тоді $\|\mathbf{0} + \mathbf{0}\| = 2\|\mathbf{0}\| = 2a = a$. Це можливо лише тоді, коли $a = 0$. $\square$

1.2 Нехай $x_n, x, y_n, y \in X (n \in \mathbb{N})$. Довести що:

1. якщо $x_n \to x$, то x_n - обмежена послідовність

   Доведення. За означенням $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \|x_n - x\| < \epsilon$. Оскільки послідовність необмежена, знайдемо таке $N > N(\epsilon)$, що $\|x_N\| > \|x\| + \epsilon + 1$. Візмемо $\epsilon = 1$. Тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > N \|x - x_n\| < 1.$, з цього випливає, що $\|x_n\| \leq \|x\| + 1$. Нехай

   $$M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\| ..., \|x_N\|, \|x\| + 1\} \tag{1.1}$$

   Максимум існує оскільки множина скінченна. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq M$. $\square$

2. Якщо $x_n \to x$ та $\lambda_n \to \lambda, \lambda_n \in \mathbb{C}$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

   Доведення. $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + x(\lambda - \lambda_n)\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + \|x\| |\lambda - \lambda_n| \to 0$. $\square$

3. якщо $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

Доведення. $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x - x_n\| \to 0$. Згідно оберненої нерівності трикутника. $\square$