量子场论讲义

第一章 量子场论的创立与发展

一. 量子场论的~~发展~~创立

1. 经典电磁场及量子化薛方的困难 ($\hbar = c = 1$)

① 量子力学 (20's~30's)

$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi \xrightarrow[E^2=p^2+m^2]{E\to i\frac{\partial}{\partial t},\ \vec{p}\to -i\nabla} -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (-\nabla^2+m^2)\phi \xrightarrow{\text{开方}} i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi$

Klein-Gordon eq (20's~30's)　　Dirac (1928)

适于原子结构.　(高速)
原子光谱.
化学元素性质
〈无法解释原子中光辐射,吸收〉

设 $\phi \sim f e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}$
〈则 $E = \pm\sqrt{k^2+m^2}$ 负能〉
引入 $\rho = \frac{i}{2m}(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t})$
〈则 $\rho = -\frac{\omega}{m}|f|^2 \leq 0$ 负几率〉

设 $\psi \sim e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}$
〈则 $\rho = \psi^+\psi \geq 0$〉
〈E. 负能量〉

② 电磁学 $\Box A^\mu(x) = 0$.

适用于电磁波传播、相对论性.
〈不反映电磁场粒子性,不能解释光子的产生和湮灭〉.

2. 场的引入及量子化 (A^μ, ψ 解释为场, 并进行量子化)

描述高速 ↑　粒子性 ↑

① A^μ: 具有无穷多自由度(每一个频率对应一个自由度,强度由粒子数目表示).

Dirac (1927)
1° 一个自由度 ω 上的能量 $E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

解释: 频率为 ω 的自由度 {被激发到 $n=1,2,\cdots$ 的态 → 频率为 ω 的 $1,2,\cdots$ 个光子产生.
激发到 $n=1$ 的态消失 → 频率为 ω 的1个光子湮灭 }

2° 真空: 所有 ω 的自由度都取为0 ($n_{\vec{k},s}=0$), 未激发(处于基态)

3° 无穷多自由度上的能量 $E = \sum_{\vec{k},s}(n_{\vec{k},s}+\frac{1}{2})\hbar\omega$　($|\vec{k}| = \omega$)

② ψ: 粒子数表象(二次量子化)

Jordon, Wigner 1928
自由电子场激发态 → 具有不同动量,自旋的电子、正电子.
泡利不相容,每态仅容1个 → 电子、正电子产生、湮灭.

③ 一般量子场论

经典场 $\phi(\vec{x},t)$ 定义在全空间,是连续函数; $\phi(\vec{x},t)$ 随时间演化,这可以描述场的运动.

玻色/费米场量子化: 空间不同点 $\vec{x}$ 的场 $\phi(\vec{x},t)$ 相互独立的动力学变量,具有无穷多自由度.

引入广义动量 $\pi(\vec{x},t)$.
$$\begin{cases}[\phi_i(\vec{x},t), \pi_j(\vec{x}',t)] = i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \\ \dot{\phi}_i(\vec{x},t) = i[H, \phi_i(\vec{x},t)]\end{cases}$$
玻色场量子化

④ 场的量子化对对称性的要求.

时空、场做变换时,拉格朗日量保持不变 ⟶ 从而不同过程的振幅之间存在关系式.

对于连续对称性变换的每个生成元,有一个守恒量 $\{E, P, L, Q, I, \cdots\}$

⑤ 量子场的含义

1° 所有场处于基态的态 ⟶ 真空.

2. 量子场被激发、消失 ⟶ 粒子产生、湮灭

3. 量子场的不同激发态 ⟶ 产生了不同状态 ($W \geq 0$) 和数目 ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 的粒子

4. 量子场激发态的改变 ⟶ 粒子间相互作用 (粒子数目一般不守恒)

3. 电磁场与电子场相互作用 (QED).

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

① 1946~1949. Tomonaga, Schwinger, Feynman.

微扰计算法. 费曼规则. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$, 在最低阶与实验近似符合.

② 单圈及高阶修正时,发散 (因为动量积分上、下限扩大到无穷大时产生的).

↓

重整化 (重新定义 m, e, 将无穷大分离出来吸收进去, 成为物理质量和电荷, 并对应观测的 m, e)

↓

③ 实验 $\boxed{\text{兰姆}}$ (1947, Kusch. Foley 发现电子反常磁矩, Lamb 发现 H 的 $2S_{1/2}$ 与 $2P_{1/2}$ 能级分裂, 精确 10^{-9}.

↓

④ 1960. Bogoliubov, Parasiuk, Zimmerman.

严格证明重整化在微扰任意阶成立.

4. 质子与中子强相互作用.

① 1935. Yukawa 提出 P. n 交换 π 介子形成核内强力, $m_\pi = 100 \sim 200\,MeV$.

② 1947. Powell 发现 π (1936. Anderson 在宇宙线中发现 μ, $m_\mu = 105\,MeV$).

$$\mathcal{L}_i = ig\bar{n}\gamma_5 P\phi_\pi + h.c$$

利用同位旋 (1932. Heisenberg 引入 P. n 同位旋; 1936. Cassen, Condon 引入总同位旋)

核子 N 表示为 $\psi = \begin{pmatrix}\psi_p \\ \psi_n\end{pmatrix}$, $I = \frac{1}{2}$; $\pi^+\pi^0\pi^-$ 表示为 $\pi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3\end{pmatrix}$, $I = 1$.

$$\mathcal{L}_i = ig_{\pi NN}\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi,\quad 其中\ \tau_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

人们发现 $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} = 14 \gg 1$, 放弃微扰法.

③ 1950, S 矩阵理论, 公理化理论 ⟶ 色散关系, Regge 理论 $\boxed{\text{极点}}$,

发现强子、轻子. 夸克模型, 流代数.

5. β衰变(弱作用)

①1934. 费米解释中子β衰变 $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$，提出"四费米(弱)理论"

②1956. 李政道、杨振宁发现弱作用中宇称不守恒，1957吴健雄验证.

③1958. Feynman, Gell-Man, Marshark, Sudarshan.

确立弱流下洛伦兹变换有V−A形式 (例: $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$)

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma_\rho (1-\gamma_5) \mu][\bar{e} \gamma^\rho (1-\gamma_5) \nu_e] + h.c$$

其中 $GM_p^2 \approx 10^{-5} \sim \frac{1}{1000}\alpha$，但不可重整，无法算高阶效应.

④1967. 温伯格、萨拉姆、格拉少(WSG)提出EW理论

二. 量子场论的发展(60's以后)

1. 非阿贝尔规范理论

① 量子电动力学QED: 满足定域规范不变性，规范变换群U(1)，阿贝尔、可交换、电磁场

② 1954. 杨振宁、Mills，非阿贝尔规范场论 $\begin{cases} 1^\circ.\ SU(3), & \text{70's 非阿贝尔、不可交换，胶子、中间玻色子} \\ 2^\circ.\ SU(2)\times U(1) & 1967 \end{cases}$

2. 非阿贝尔规范场量子化(路径积分，泛函)

① QED(有约束条件的量子化): 拉格朗日乘子法，附加规范固定项.

通过限制物理态/采用不定度规，进行正则量子化.

②1967, Faddeev, Popov,

非阿贝尔规范理论(规范不变、协变)量子化、"路径积分量子化".

从量子作用量取极值原理 ⟶ 正则量子化

3. 对称性自发破缺

1960. Nambu，场有对称性，但场方程的解不具有之.

4. 1967. WSG提出EW统一理论 ⟶ 预言Higgs粒子(2012.7, LHC发现之, $M_H = 125\,GeV$)

5. 正规化(处理发散积分)

与重整化(使微扰计算只依赖于有限物理量)

6. 量子色动力学(QCD)

①1967. e+p实验说明质子内含点结构、作用弱.

②1972. Gellmann由统计性提出色自由度.

③1973. Gross, Wilczek, Politzer 提出SU(3)对称的作用量.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu},$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A^a_\mu$, $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$.

7. 标准模型 SM. $\begin{cases} EW: \gamma, W^{\pm}, Z^{0} \\ QCD: g. \end{cases}$

8. 非微扰理论方法:

色散关系、半经典近似，重整化群，算符乘积展开，求和规则，低能有效论、格点QCD.

9. 量子场论应用.

统计物理. 核物理. 宇宙学. 凝聚态

系统集体运动(服从量子力学)

相变问题(无穷维自由度)

热涨落(量子涨落)

规范场, Higgs机制

重整化群, 共形场论.

参考书.

国际、全面 ① 卢里：粒子与场.

② Peskin: An introduction to quantum field theory.

③ 朗道：场论 高教.

④ 费曼：量子电动力学讲义. 高教.

⑤ 温伯格：I. II. III The Quantum Theory of Field (I. II); Supersymmetry (III)

⑥ 比约肯：相对论量子力学，相对论量子场论.

⑦ Greiner: Quantum Electrodynamics 世图

国内早 ① 朱洪元：量子场论，群论及量子力学中的对称性.

粒+场 ② 李政道：粒子物理与场论简引. 科学

物理+清晰 ③ 赵光达：量子场论.

入门 ④ 周邦融：量子场论. 高教

入门、全、新 ⑤ 黄涛：量子场论导论 北大

入门、新 ⑥ 姜志进：量子场论—电磁作用的阿贝尔规范理论 科学

第二章 经典场系统、对称性和Noether定理

§2.1 力学系统的最小作用量原理和运动方程

描述运动与受力的关系的规律是牛顿运动定律。它直观、简单、易于应用。与此相对，在人们发展出微积分方法的同时，也发展出了变分的方法，建立在此基础上的分析力学采用了一套完全不同的逻辑体系。利用分析力学，人们可以解决复杂力学系统的运动规律。这一套方法从构造拉格朗日量出发；得出表明动力物理系统内在演化效应的作用量；利用最小作用量原理，得出欧拉-拉格朗日方程；或者通过拉氏量引入哈密顿量，利用最小作用量原理和E-L方程得出哈密顿正则方程。

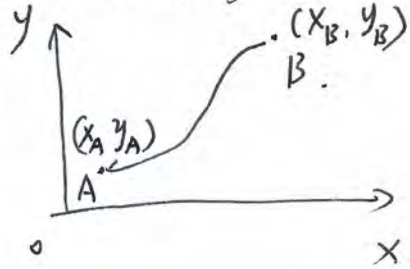
牛顿力学的优点是简单、直观，但不能用于复杂力学体系；而且，牛顿力学本身难满足高速运动系统所要求的相对论协变性；另外，通过牛顿力学，我们难于看清物理对象所满足的对称性。与此相对，分析力学恰好适于描述复杂力学体系的运动规律；而且，在相对论情形下，分析力学能够通过所构造的拉氏量的相对论协变性，保证物理规律的协变性；最后，又是通过拉氏量的对称性变换下的性质，我们能够获知物理体系具有何种对称性，以及与此对称性相关联具有何种守恒规律。

一. 变分法：

1. 著名问题

数学物理的最古老问题之一，是试图得到某个表达式的极小值。而该表达式不是依赖于某一简单的连续变量，而是依赖于一个函数。

1) 连接两个定点，的什么样的平面曲线，**长度最短**？ $y=?$



设 $y=y(x)$ 连接两点 A，B，两点间弧长

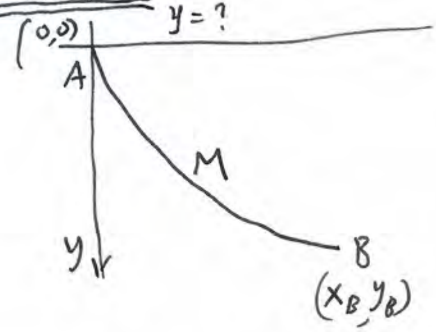
$ds^2=dx^2+dy^2$，$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$I=\int_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} ds = \int_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

解：$f=\sqrt{1+y'^2}$，又 E-L 中 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$，故 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$，或 $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=const$

∴ $y=Ax+B$.

2) (1696. 贝塞尔大学，贝努利提出) 在垂直平面内给定两点 A，B. 找出路径 AMB，使得动点 M 以最短时间滑过该路径（假设只受重力）。**最速降线**？ $y=?$



取 A 为原点，y 轴向下，$v=\frac{ds}{dt}$，下降总时间

$$I=\int dt=\int_A^B\frac{ds}{v}=\int_{x_A=0}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx$$

利用机械能守恒，$\frac{1}{2}mv^2=mgy$，$v=\sqrt{2gy}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A=0}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

解：$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$，利用EL'，得 $\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=C$，或 $\frac{1}{y(1+y'^2)}=C^2$

令 $\frac{1}{C^2}=2a$，则 $y'=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$

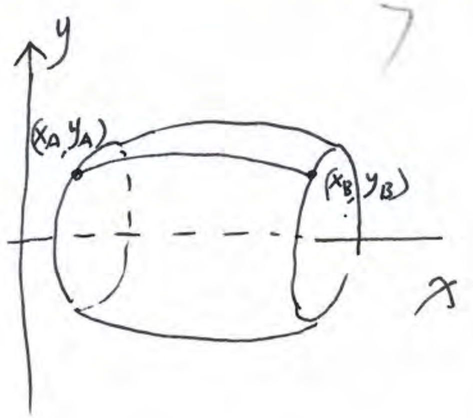
积分. $x-x_0=\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,dy$

变量变换：令 $y=a(1-\cos\theta)$，则 — 或 $y'=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{dy}{dx}$

$$x-x_0=2a\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=a(\theta-\sin\theta)$$

∴最速降线为参数形式

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$



3) 通过两个给定点 (x_A, y_A), (x_B, y_B) 的最小迴转曲面?

设曲线 $y(x)$ 绕 x 轴迴转得最小迴转曲面。$y=$?

假定 $y_A>0$, $y_B>0$, 当 $x_A \le x \le x_B$ 时 $y(x) \ge 0$.

迴转面面积

$$I = 2\pi \int_A^B y\,ds = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+y'}\,dx.$$

解: $f = y\sqrt{1+y'^2}$, (E-L)', 得 $y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} - f = -b$ ← (指定常数).

$$\text{即}\quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b.$$

$$\text{从而}\quad x - x_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2/b^2 - 1}} = b\cosh^{-1}\left(\frac{y}{b}\right),$$

$$\therefore\ y = b\cosh\frac{x-x_0}{b}$$ (当曲线在 x 轴上方时, 须 $b>0$)

又 $y_A = b\cosh\dfrac{x_A - x_0}{b}$, 即 $x_0 = x_A - b\cosh^{-1}\dfrac{y_A}{b}$, $\therefore\ y = b\cosh\left[\dfrac{x-x_A}{b} + \cosh^{-1}\left(\dfrac{y_A}{b}\right)\right]$

※ 普遍问题:

已知 $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$, 问 $y(x)$ 是什么函数才使积分

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\,dx$$

取极小值? 其中 $f = f(x,y,y')$。用几何来说, 要找出从 x_A 到 x_B 的积分路径, 使得积分 I 为极小。

2. 欧拉-拉格朗日方程

1) 1744. 欧拉: $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$ (EL) (是上面问题中 y 所满足的微分方程)

2) 物理上, 若 f 不显含 x, 而只是通过 y 和 y' 含有 x, 则 E-L 可化简.

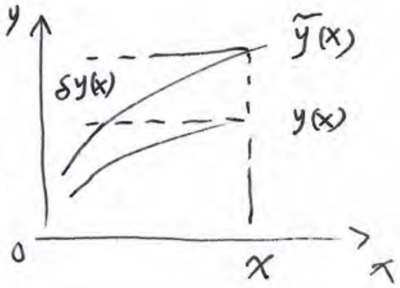
$$\because\ \frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

$$= -y'\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]}_{\text{若E-L满足}} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f\text{不显含}x}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = 0.$$

或 $y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{Const}$ (EL)'

3. 变分法



1) 自变量 x 之函数 $y=y(x)$ 的变分：

指与函数 $y(x)$ 有微小差别的函数 $\tilde{y}(x)$ 减去 $y(x)$ 的函数。

$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$$

2) 导函数变分：$\delta y'(x) = \frac{d}{dx}\delta y(x)$

3). x; $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$; $y_1'(x), y_2'(x), \cdots y_n'(x)$ 的函数 $F(y_1, y_2 \cdots y_n; y_1', y_2' \cdots y_n'; x)$ 的变分：

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i$$

4) F之定积分 $I = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2 \cdots y_n; y_1', y_2' \cdots y_n'; x)\,dx$ 的变分

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F\, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i\, dx$$

※泛函，关于一类函数 $\{y(x)\}$ (包含 $y(x)$, $\tilde{y}(x)$, …) 的函数（如上面的 I），称为依赖于 $y(x)$ 的泛函。

$$I = I[y(x), y'(x), x]$$

5) E-L方程

对任意选取的 $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$，函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ 使积分 I 取稳定值的充分条件：

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F\, dx = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n}$$

边界条件

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right|_{x_1} = \left.\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right|_{x_2} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

4. 变分运算

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(\vec{x})$$

泛函微分 $\delta F[\varphi(x)] = F(\varphi + \delta\varphi) - F[\varphi] = \int d^3x \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x) \rightarrow \frac{\delta\varphi(\vec{x})}{\delta\varphi(\vec{y})} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$

① $\frac{\delta C}{\delta\varphi(x)} = 0$, $\quad \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(aF[\varphi] + bG[\varphi]\right) = a\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + b\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$.

③ $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(F[\varphi]\,G[\varphi]\right) = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}G[\varphi] + F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$

④ $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} F[\eta[\varphi]] = \int d^3y \frac{\delta F[\eta]}{\delta\eta(y)} \cdot \frac{\delta\eta(y)}{\delta\varphi(x)}$

⑤ $\frac{\delta\varphi(\vec{x})}{\delta\varphi(\vec{y})} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$

二、力学系统的E-L方程

1. 作用量原理

考虑三维空间中n粒子系统。引入相互独立的广义坐标 q_i $(i=1,2,\cdots N, N=3n)$

广义速度 $\dot{q}_i$,

$$\dot{q}_i(t)=\frac{dq_i(t)}{dt}.$$

作用量.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_i(t),\dot{q}_i(t))=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_1,q_2,\cdots q_N;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N)$$

其中 $L(q_i(t),\dot{q}_i(t))$ 是 $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ 的泛函。

*作用量原理:

连接 t_1 时刻的 $q_{i1}=q_i(t_1)$ 和 t_2 时刻的 $q_{i2}=q_i(t_2)$ 的所有 $q_i(t)$ 路径中.

物理路径使作用量取稳定,即它是使S取极值的路径.

2. E-L方程

假设 $q_i(t)\longrightarrow q_i'(t)=q_i(t)+\delta q_i(t)$

$$\dot{q}_i(t)\longrightarrow\dot{q}_i'(t)=\dot{q}_i(t)+\frac{d}{dt}\delta q_i(t)=\dot{q}_i(t)+\delta\dot{q}_i(t)$$

对S变分,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\right)+\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

对第二项为全微商,积分由上、下限决定。由于物理轨迹通常对应着路径端点固定,故而外加边界条件(端点变分为0)

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$$

则第二项为0。由最小作用量原理,物理轨迹的作用量取稳定值,变分为0

$$\boxed{\delta S=0.}$$

在对轨迹作任意变分 δq_i 条件下, $\delta S=0$, 只有变分项系数为0,得欧拉-拉格朗日方程.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0,\quad(i=1,2,\cdots,N,\ N=3n)}$$

例:一维简谐振子, $L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$

解:将L代入拉方.

$$\frac{\partial L}{\partial q}=-kq,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\frac{d}{dt}(m\dot{q})=m\ddot{q},\ \text{由E-L},\ \underline{m\ddot{q}=-kq}$$

3. 哈密顿正则方程

定义广义坐标q_i的共轭动量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

哈密顿量 $H(p_i,q_i) = p_i \dot{q}_i(p,q) - L(q_i, \dot{q}_i(p,q))$

由于 $d(p_i\dot{q}_i(p,q)) = \dot{q}_i dp_i + p_j d\dot{q}_j = \dot{q}_i dp_i + \underline{p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}} dp_i + \underline{p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}} dq_i$

$-dL(q_i,\dot{q}_i(p,q)) = -\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}}dq_i - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}}dp_i$

所以 $dH(p,q) = \left[\dot{q}_i(p,q) + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]dp_i$

$+ \left[-\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - p_j\right)\right]dq_i$

将共轭动量定义及拉方代入,得 $p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0$.

又 $dH = \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i$,与上式对比 $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i$

故

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

例2. 一维简谐振子. $L=\frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2$.

解: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$, $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} kq^2 = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} kq^2$

4. 从作用量原理到哈密顿方程

由$H(p,q) = p_i\dot{q}_i(p,q) - L(q_i,\dot{q}_i(p,q))$,得 $L(q_i,\dot{q}_i(p,q)) = p_i\dot{q}_i(p,q) - H(p,q)$

作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i,\dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2}dt\left(p_i\dot{q}_i(p,q) - H(p,q)\right)$.

作用量变分 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta p_i\, \dot{q}_i(p,q) + \cancel{p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\delta p_i} + p_j \cancel{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}}\delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)$

$= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\delta p_i\left(\dot{q}_i(p,q) - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \left(p_i \frac{d}{dt}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\right]$

其中, $\int_{t_1}^{t_2} dt\; p_i \frac{d}{dt}\delta q_i = \int_{t_1}^{t_2} p_i\, d\delta q_i = p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{dp_i}{dt}dt$

~~结合 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\delta S}{\delta p_i}\delta p_i + \frac{\delta S}{\delta q_i}\delta q_i\right)$, 得~~ 结合 $\delta S = \frac{\delta S}{\delta p_i}\delta p_i + \frac{\delta S}{\delta q_i}\delta q_i$,得