# 量子场论讲义

# 第一章 量子场论的创立与发展

## 一. 量子场论的~~发展~~创立

### 1. 经典电磁场及量子化薛方的困难 ($\hbar=c=1$)

① 量子力学 (20's~30's)　　Klein-Gordon eq (20's~30's)　　Dirac (1928)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi \xrightarrow[E^2=p^2+m^2]{E\to i\frac{\partial}{\partial t},\ \vec{p}\to -i\nabla} -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=(-\nabla^2+m^2)\phi \xrightarrow{\text{开方}} i\frac{\partial}{\partial t}\psi=(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi$$

适于原子结构. 原子光谱. 化学元素性质 〈无法解释原子中光辐射,吸收〉

(高速)

设 $\phi\sim f e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

〈则 $E=\pm\sqrt{k^2+m^2}$ 负能〉

引入 $\rho=\frac{i}{2m}(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t})$

〈则 $\rho=-\frac{\omega}{m}|f|^2\leq 0$ 负几率〉

设 $\psi\sim e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

〈则 $\rho=\psi^\dagger\psi\geq 0$〉

〈E. 负能量〉

② 电磁学 $\Box A^\mu(x)=0$.

适用于电磁波传播,相对论性.

〈不反映电磁场粒子性,不能解释光子的产生和湮灭〉.

描述高速　　粒子性

### 2. 场的引入及量子化 ($A^\mu$, $\psi$解释为场,并进行量子化)

① $A^\mu$: 具有无穷多自由度(每一个频率对应一个自由度,强度由粒子数目表示).

Dirac (1927) 1°. 一个自由度$\omega$上的能量 $E=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n=0,1,2,\cdots$)

解释: 频率为$\omega$的自由度 $\begin{cases}\text{被激发到}n=1,2,\cdots\text{的态}\longrightarrow\text{频率为}\omega\text{的}1,2,\cdots\text{个光子产生}.\\ \text{激发到}n=1\text{的态消失}\longrightarrow\text{频率为}\omega\text{的}1\text{个光子湮灭}\end{cases}$

2° 真空: 所有$\omega$的自由度都取为0 ($n_{\vec{k},s}=0$), 未激发(处于基态)

3° 无穷多自由度上的能量 $E=\sum_{\vec{k},s}(n_{\vec{k},s}+\frac{1}{2})\hbar\omega$　($|\vec{k}|=\omega$)

② $\psi$: 粒子数表象(二次量子化)

Jordon, Wigner 1928　自由电子场激发态 $\longrightarrow$ 具有不同动量,自旋的电子、正电子.

泡利不相容,每态仅容1个 $\longrightarrow$ 电子.正电子产生.湮灭.

③ 一般量子场论

经典场$\phi(\vec{x},t)$定义在全空间,是连续函数; $\phi(\vec{x},t)$随时间演化,这可以描述场的运动.

玻色/费米场量子化: 空间不同点$\vec{x}$的场$\phi(\vec{x},t)$,相互独立的动力学变量,具有无穷多自由度.

引入广义动量$\pi(\vec{x},t)$.　$\begin{cases}[\phi_i(\vec{x},t),\pi_j(\vec{x}',t)]=i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\\ \dot{\phi}_i(\vec{x},t)=i[H,\phi_i(\vec{x},t)]\end{cases}$ 玻色场量子化

④ 场的量子化对对称性的要求.

时空、场做变换时，哈密顿量保持不变 ⟶ 从而不同过程的振幅之间存在关系式.

对于连续对称性变换的每个生成元，有一个守恒量 $\{E, P, L, Q, I, \cdots\}$

⑤ 量子场的含义

1° 所有场处于基态的态 ⟶ 真空.

2. 量子场被激发、消失 ⟶ 粒子产生、湮灭

3. 量子场的不同激发态 ⟶ 产生了不同状态 $(w \geq 0)$ 和数目 $(n=0,1,2,\cdots)$ 的粒子

4. 量子场激发态的改变 ⟶ 粒子间相互作用（粒子数目一般不守恒）

3. 电磁场与电子场相互作用（QED）.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

① 1946~1949. Tomonaga, Schwinger, Feynman.

微扰计算法. 费曼规则. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$，在最低阶与实验近似符合.

② 单圈及高阶修正时发散（因为动量积分上、下限扩大到无穷大时产生的）.

↓

重整化（重新定义 $m$, $e$, 将无穷大分离出来吸收进去，成为物理质量和电荷，并对应观测的 $m$, $e$）

③ 实验 $\boxed{\text{兰姆}}$（1947, Kusch. Foley 发现电子反常磁矩，Lamb 发现 H 的 $2S_{1/2}$ 与 $2P_{1/2}$ 能级分裂，精确到 $10^{-9}$）

↓

④ 1960. Bogoliubov, Parasiuk, Zimmerman.

严格证明重整化在微扰任意阶成立.

4. 质子与中子强相互作用.

① 1935. Yukawa 提出 P. n 交换 π 介子形成核内强力，$m_\pi = 100 \sim 200\,MeV$.

② 1947. Powell 发现 π（1936. Anderson 在宇宙线中发现 μ，$m_\mu = 105\,MeV$）.

$$\mathcal{L}_i = ig\bar{n}\gamma_5 P \phi_\pi + h.c$$

利用同位旋（1932. Heisenberg 引入 P. n 同位旋；1936. Cassen, Condon 引入总同位旋）

核子 N 表示为 $\psi = \begin{pmatrix}\psi_p \\ \psi_n\end{pmatrix}$，$I = \frac{1}{2}$；$\pi^+\pi^0\pi^-$ 表示为 $\pi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3\end{pmatrix}$，$I = 1$.

$$\mathcal{L}_i = ig_{\pi NN}\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi,\quad \text{其中 } \tau_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

人们发现 $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} = 14 \gg 1$，放弃微扰法.

③ 1950, S 矩阵理论，公理化理论 ⟶ 色散关系，Regge 理论 $\boxed{\text{极点}}$.

发现强子、轻子. 夸克模型，流代数.

5. $\beta$衰变(弱作用)

①1934. 费米解释中子$\beta$衰变 $n\to p+e^-+\bar{\nu}_e$，提出"四费米(弱)理论"

②1956. 李政道、杨振宁发现弱作用中宇称不守恒，1957吴健雄验证.

③1958. Feynman, Gell-Man, Marshark, Sudarshan.

确立弱流下洛伦兹变换有V−A形式 (例: $\mu^-\to e^-+\nu_\mu+\bar{\nu}_e$)

$$\mathcal{L}=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_\mu\gamma_\rho(1-\gamma_5)\mu][\bar{e}\gamma^\rho(1-\gamma_5)\nu_e]+h.c$$

其中 $GM_p^2\approx10^{-5}\sim\frac{1}{1000}\alpha$，但不可重整，无法算高阶效应.

④1967. 温伯格、萨拉姆、格拉少(WSG)提出EW理论

二. 量子场论的发展(60's以后)

1. 非阿贝尔规范理论

① 量子电动力学QED: 满足定域规范不变性，规范变换群U(1)，阿贝尔、可交换、电磁场

②1954. 杨振宁、Mills，非阿贝尔规范场论 $\begin{cases}1^\circ.\ SU(3),\ 70\text{'s 非阿贝尔、不可交换，胶子、中间玻色子}\\ 2^\circ.\ SU(2)\times U(1)\quad 1967\end{cases}$

2. 非阿贝尔规范场量子化(路径积分，泛函)

① QED(有约束条件的量子化): 拉格朗日乘子法，附加规范固定项.

通过限制物理态/采用不定度规，进行正则量子化.

②1967, Faddeev, Popov,

非阿贝尔规范理论(规范不变，协变)量子化、"路径积分量子化".

从量子作用量取极值原理 ⟶ 正则量子化

3. 对称性自发破缺

1960. Nambu，场有对称性，但场方程的解不具有之.

4. 1967. WSG提出EW统一理论 ⟶ 预言Higgs粒子(2012.7, LHC发现之, $M_H=125\,GeV$)

5. 正规化(处理发散积分)

与重整化(使微扰计算只依赖于有限物理量)

6. 量子色动力学(QCD)

①1967. e+p实验说明质子含内点结构、作用弱.

②1972. Gellmann由统计性提出色自由度.

③1973. Gross, Wilczek, Politzer 提出SU(3)对称的作用量.

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi(x)-\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu},$$

其中 $D_\mu=\partial_\mu-igT^aA^a_\mu$, $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$.

7. 标准模型 SM.
$$\begin{cases} EW: & \gamma,\ W^{\pm},\ Z^{0} \\ QCD: & g. \end{cases}$$

8. 非微扰理论方法：

色散关系、半经典近似，重整化群，算符乘积展开，求和规则，低能有效论、格点QCD.

9. 量子场论应用.

统计物理. 核物理. 宇宙学. 凝聚态

系统集体运动(服从量子力学)
相变问题(无穷维自由度)
热涨落(量子涨落)

规范场, Higgs机制
重整化群, 共形场论.

参考书.

国际、全面
① 卢里：粒子与场.
② Peskin: An introduction to quantum field theory.
③ 朗道：场论 高教.
④ 费曼：量子电动力学讲义. 高教.
⑤ 温伯格：I. II. III The Quantum Theory of Field (I. II), Supersymmetry (III)
⑥ 比约肯：相对论量子力学，相对论量子场论.
⑦ Greiner: Quantum Electrodynamics 世图

国内早 ①朱洪元：量子场论，群论及量子力学中的对称性.
粒+场 ②李政道：粒子物理与场论简引. 科学
物理+清晰 ③赵光达：量子场论.
入门 ④周邦融：量子场论. 高教
入门、全、新 ⑤黄涛：量子场论导论 北大
入门、新 ⑥姜志进：量子场论——电磁作用的阿贝尔规范理论 科学

# 第二章 经典场系统、对称性和Noether定理

## §2.1 力学系统的最小作用量原理和运动方程

描述运动与受力的关系的规律是牛顿运动定律。它直观、简单、易于应用。与此相对,在人们发展出微积分方法的同时,也发展出了变分的方法,建立在此基础上的分析力学采用了一套完全不同的逻辑体系。利用分析力学,人们可以解决复杂力学系统的运动规律。这一套方法从构造拉格朗日量出发;得出表明动力物理系统内在演化效应的作用量;利用最小作用量原理,得出欧拉-拉格朗日方程;或者通过拉氏量引入哈密顿量,利用最小作用量原理和E-L方程得出哈密顿正则方程。

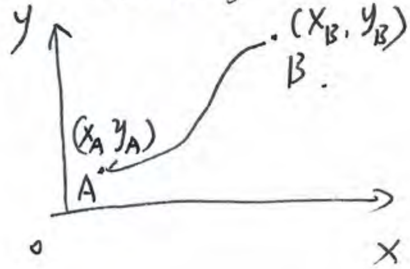
牛顿力学的优点是简单,直观,但不能用于复杂力学体系;而且,牛顿力学本身不满足高速运动系统所要求的相对论协变性;另外,通过牛顿力学,我们难于看清物理对象所满足的对称性。与此相对,分析力学恰好适于描述复杂力学体系的运动规律;而且,在相对论情形下,分析力学能够通过所构造的拉氏量的相对论协变性,保证物理规律的协变性;最后,又是通过拉氏量的对称性变换下的性质,我们能够获知物理体系具有何种对称性,以及与此对称性相关联具有何种守恒规律。

# 一. 变分法:

## 1. 著名问题

数学物理的最古老问题之一，是试图得到某个表达式的极小值。而该表达式不是依赖于某一简单的连续变量，而是依赖于一个函数。

1) 连接两个定点，的什么样的平面曲线，长度最短？ $y=?$



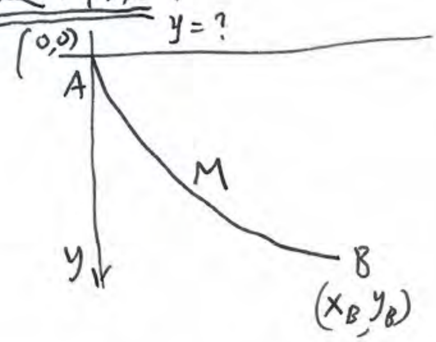

设 $y=y(x)$ 连接两点 A, B，两点间弧长

$$I=\int_{(X_A, y_A)}^{(X_B, y_B)} ds \xlongequal{ds^2=dx^2+dy^2,\ ds=\sqrt{1+y'^2}dx} \int_{(X_A, y_A)}^{(X_B, y_B)} \sqrt{1+y'^2}\,dX$$

解：$f=\sqrt{1+y'^2}$，又 E-L 中 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$，故 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$，或 $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const}$

$\therefore y=Ax+B$.

2) (1696. 贝塞尔大学，贝努利提出) 在垂直平面内给定两点 A, B. 找出路径 AMB，使得动点 M 以最短时间滑过该路径 (假设只受重力)。最速降线？ $y=?$




取 A 为原点，y 轴向下，$v=\frac{ds}{dt}$，下降总时间

$$I=\int dt=\int_A^B \frac{ds}{v}=\int_{X_A=0}^{X_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx$$

利用机械能守恒，$\frac{1}{2}mv^2=mgy$，$v=\sqrt{2gy}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{X_A=0}^{X_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

解：$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$，利用 EL，得 $\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=C$，或 $\frac{1}{y(1+y'^2)}=C^2$

令 $\frac{1}{C^2}=2a$，则 $y'=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$

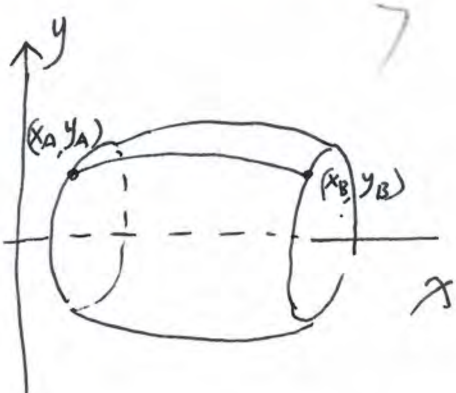
积分. $x-X_0=\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,dy$

变量变换：令 $y=a(1-\cos\theta)$，则 —或 $y'=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{dy}{dX}$

$$X-X_0=2a\int \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=a(\theta-\sin\theta)$$

$\therefore$ 最速降线为参数形式

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$




3) 通过两个给定点 $(x_A, y_A)$, $(x_B, y_B)$ 的最小回转曲面?

设曲线 $y(x)$ 绕 $x$ 轴回转得最小回转曲面。$y=$?

假定 $y_A>0$, $y_B>0$, 当 $x_A \le x \le x_B$ 时 $y(x)\ge 0$.

回转面面积

$$I = 2\pi\int_A^B y\,ds = 2\pi\int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

解: $f=y\sqrt{1+y'^2}$, (E-L)', 得 $y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = -b$ ←(指定常数).

即 $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b$.

从而 $x - x_0 = \int\frac{dy}{\sqrt{y^2/b^2-1}} = b\cosh^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)$,

$\therefore y = b\cosh\frac{x-x_0}{b}$ (当曲线在x轴上方时,须 $b>0$)

又 $y_A = b\cosh\frac{x_A-x_0}{b}$, 即 $x_0 = x_A - b\cosh^{-1}\frac{y_A}{b}$, $\therefore y = b\cosh\left[\frac{x-x_A}{b}+\cosh^{-1}\left(\frac{y_A}{b}\right)\right]$

※ 普遍问题:

已知 $y(x_A)=y_A$, $y(x_B)=y_B$, 问 $y(x)$ 是什么函数才使积分

$$I=\int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\,dx$$

取极小值? 其中 $f=f(x,y,y')$。用几何来说,要找出从 $x_A$ 到 $x_B$ 的积分路径,使得积分 $I$ 为极小。

2. 欧拉-拉格朗日方程

1) 1744. 欧拉: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$ (EL) (是上面问题中 $y$ 所满足的微分方程)

2) 物理上,若 $f$ 不显含 $x$,而只是通过 $y$ 和 $y'$ 含有 $x$,则 E-L 可化简.

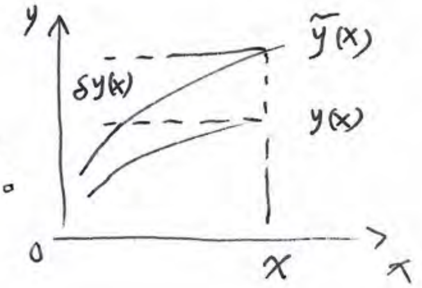
$$\because \frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right] = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

$$= -y'\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]}_{\text{若E-L满足}} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f\text{不显含}x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = 0.$$

或 $y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{Const}$ (EL)'

## 3. 变分法




1) 自变量 $x$ 之函数 $y=y(x)$ 的变分：

指与函数 $y(x)$ 有微小差别的函数 $\tilde{y}(x)$ 减去 $y(x)$ 的差函数。

$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$$

2) 导函数变分：$\delta y'(x) = \frac{d}{dx}\delta y(x)$

3). $x;\ y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x);\ y_1'(x), y_2'(x), \cdots y_n'(x)$ 的函数 $F(y_1, y_2 \cdots y_n; y_1', y_2' \cdots y_n'; x)$ 的变分：

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i$$

4) F之定积分 $I = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2 \cdots y_n; y_1', y_2' \cdots y_n'; x)\,dx$ 的变分

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\delta F\,dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i\,dx$$

※泛函，关于一类函数 $\{y(x)\}$（包含 $y(x), \tilde{y}(x), \cdots$）的函数（如上面的 $I$），称为依赖于 $y(x)$ 的泛函。

$$I = I[y(x), y'(x), x]$$

5). E-L方程.

对任意选取的 $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$，函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ 使积分 $I$ 取稳定值的充分条件：$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\delta F\,dx = 0$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n}$$

边界条件 $\left.\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right|_{x_1} = \left.\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right|_{x_2} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$

## 4. 变分运算

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(\vec{x})$$

泛函微分 $\delta F[\varphi(x)] = F(\varphi + \delta\varphi) - F[\varphi] = \int d^3x \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x) \rightarrow \frac{\delta\varphi(\vec{x})}{\delta\varphi(\vec{y})} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$

① $\frac{\delta C}{\delta\varphi(x)} = 0$, $\quad \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(aF[\varphi] + bG[\varphi]\right) = a\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + b\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$.

② $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(F[\varphi]\,G[\varphi]\right) = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}G[\varphi] + F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$

④ $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F[J[\varphi]] = \int d^3y \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}\cdot\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}$

⑤ $\frac{\delta\varphi(\vec{x})}{\delta\varphi(\vec{y})} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$

# 二、力学系统的 E-L 方程

## 1. 作用量原理

考虑三维空间中 n 粒子系统。引入相互独立的广义坐标 $q_i$ $(i=1,2,\cdots N,\ N=3n)$

广义速度 $\dot{q}_i$，

$$\dot{q}_i(t)=\frac{d q_i(t)}{dt}$$

作用量.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_i(t),\dot{q}_i(t))=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_1,q_2,\cdots q_N;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N)$$

其中 $L(q_i(t),\dot{q}_i(t))$ 是 $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ 的泛函。

* 作用量原理：

连接 $t_1$ 时刻的 $q_{i1}=q_i(t_1)$ 和 $t_2$ 时刻的 $q_{i2}=q_i(t_2)$ 的所有 $q_i(t)$ 路径中.

物理路径使作用量稳定，即它是使 S 取极值的路径.

## 2. E-L 方程

假设 $q_i(t)\longrightarrow q_i'(t)=q_i(t)+\delta q_i(t)$

$$\dot{q}_i(t)\longrightarrow \dot{q}_i'(t)=\dot{q}_i(t)+\frac{d}{dt}\delta q_i(t)=\dot{q}_i(t)+\delta\dot{q}_i(t)$$

对 S 变分，

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right)+\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

对第二项为全微商，积分由上、下限决定。由于物理轨迹通常对应着路径端点固定，故而外加边界条件（端点变分为0）

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$$

则第二项为0。由最小作用量原理，物理轨迹的作用量取稳定值，变分为0

$$\boxed{\delta S=0.}$$

在对轨迹作任意变分 $\delta q_i$ 条件下，$\delta S=0$，只有变分项系数为 0，得欧拉-拉格朗日方程.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,N,\ N=3n)}$$

例：一维简谐振子，$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$

解：将 L 代入拉方.

$$\frac{\partial L}{\partial q}=-kq,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{d}{dt}(m\dot{q})=m\ddot{q},\ \text{由E-L},\ \underline{m\ddot{q}=-kq}$$

# 三、哈密顿正则方程

## 1、哈密顿正则方程从拉氏方程到

定义广义坐标$q_i$的共轭动量 $P_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

哈密顿量 $H(P_i,q_i)=P_i\dot q_i(P,q)-L(q_i,\dot q_i(P,q))$

由于 $d(P_i\dot q_i(P,q))=\dot q_i dP_i+P_j d\dot q_j=\dot q_i dP_i+P_j\frac{\partial \dot q_j}{\partial P_i}dP_i+P_j\frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i}dq_i$

$-dL(q_i,\dot q_i(P,q))=-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial P_i}dP_i$

所以 $dH(P,q)=\left[\dot q_i(P,q)+\frac{\partial \dot q_j}{\partial P_i}\left(P_j-\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\right]dP_i$

$+\left[-\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-P_j\right)\right]dq_i$

将共轭动量定义及拉方代入，得 $P_j-\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-P_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=0$.

又 $dH=\frac{\partial H}{\partial P_i}dP_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i$，与上式对比 $\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=-\dot P_i$

故

$$\boxed{\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial P_i},\quad \dot P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

例2. 一维简谐振子. $L=\frac{1}{2}m\dot q^2-\frac{1}{2}kq^2$.

解: $P=\frac{\partial L}{\partial \dot q}=m\dot q$，$H=P\dot q-L=m\dot q^2-\frac{1}{2}m\dot q^2+\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2}m\dot q^2+\frac{1}{2}kq^2$

## 2、从作用量原理到哈密顿方程

由 $H(P,q)=P_i\dot q_i(P,q)-L(q_i,\dot q_i(P,q))$，得 $L(q_i,\dot q_i(P,q))=P_i\dot q_i(P,q)-H(P,q)$

作用量 $S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_i,\dot q_i)=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(P_i\dot q_i(P,q)-H(P,q)\right)$.

作用量变分 $\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\delta P_i\,\dot q_i(P,q)+\cancel{P_j\frac{\partial \dot q_j}{\partial P_i}\delta P_i}+P_j\cancel{\frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i}}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial P_i}\delta P_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)$

$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\delta P_i\left(\dot q_i(P,q)-\frac{\partial H}{\partial P_i}\right)+\left(P_i\frac{d}{dt}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\right]$

其中，$\int_{t_1}^{t_2}dt\,P_i\frac{d}{dt}\delta q_i=\int_{t_1}^{t_2}P_i\,d\delta q_i=P_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\delta q_i\frac{dP_i}{dt}dt$

~~结合 $\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta S}{\delta P_i}\delta P_i+\frac{\delta S}{\delta q_i}\delta q_i\right)$，得~~ 结合 $\delta S=\frac{\delta S}{\delta P_i}\delta P_i+\frac{\delta S}{\delta q_i}\delta q_i$，得

$$\frac{\delta S}{\delta p_i}=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\dot{q}_i(p,q)-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right),\quad \frac{\delta S}{\delta q_i}=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

利用最小作用量原理，$\delta S=0$，需 $\frac{\delta S}{\delta p_i}=0$，$\frac{\delta S}{\delta q_i}=0$.

$$\therefore \boxed{\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}}\qquad (i=1,2,\cdots N,\ N=3n)$$

5. 泊松括号.

考虑广义坐标 $q$ 和共轭动量空间中的任一物理量 $f(t,q,p)$.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}\overset{H}{=\!=}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}$$

其中，引入泊松括号. $\{f,H\}=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$

若 $f(t,p,q)$ 不显含时间且它与 $H$ 的泊松括号为 $\{f,H\}=0$，则

$\frac{df}{dt}=0$. $f$ 为系统的守恒量（运动常数）。

对经典泊松括号作替换.

$$\{A,B\}\longrightarrow\frac{i}{\hbar}[A,B]=\frac{i}{\hbar}(AB-BA).$$

则可得量子力学的正则量子化。

例如：$\{q_i,p_i\}\overset{=-\delta_{ij}}{\longrightarrow}\frac{i}{\hbar}[q_i p_j]=-\delta_{ij}$. 得 $[q_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}$, $q_i\ p_j$ 不可对易。

# §2.2 经典场系统最小作用量原理和运动方程

## 一. 定域场的含义

1. ~~定域场~~下面,我们将上述经典力学中的方法推广到经典场系统 $\phi(\vec{x},t)$,与质点力学中的广义坐标 $q_i$ 相对应的广义坐标是定域场 $\phi(\vec{x},t)$。此时,标记维数的分立指标 $i$ 变成了位置矢量 $\vec{x}$,从而我们从有限维力学系统过渡到了无穷维场系统,拉氏量是场的泛函。

(几率守恒) 实数③ 保证时空平移不变性要求①

④运动方程不含高于二阶微商

$$L(t)=\int d^3x\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)),$$

定域场论要求②

⑤ S具有其它对称性

$$S=\int dx^0 L=\int dx^0dx^1dx^2dx^3\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)),$$

$[S]=[\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2dt]=ML^2T^{-1}\sim 1$(自然单位有 $\hbar=c=1$)

其中 $d^4x=dx^0dx^1dx^2dx^3$ 是四维闵氏时间的积分测度。我们假定,拉氏密度满足洛仑兹变换下的不变性,为实函数(从而满足几率守恒)。

## 2. 定域场方法之含义

1> 定域场满足波动方程,是 $(\vec{x},t)$ 的连续函数,在 $\vec{x}$ 处的改变由无限邻近点的场的性质来决定:大多数波动场(声波)在距离大于介质颗粒大小时成立。

* 对于量子场,电磁场首先是例外,不存在相应介质"以太",但方法仍适用。

* 在相对论性理论中,场在任意时空间隔正确会导致"电子自能"、"裸电荷"发散困难。但人们发展了重整化理论来绕过这一困难。

2> 微分形式的波动理论得以被广泛接受:理论与观测相符合;另外,不存在其它可以避开微分形式的其它理论。

3>. 理论的形式~~保持~~先前在小范围内成立的普遍原理,如量子化方法。由于量子化联系 $H$,而 $H$ 会生成无穷小时间平移,故需对时间的微分,洛仑兹不变性又要求时空协变,故需对空间微分。

4> 借助于 $(\vec{x},t)$ 的描述是洛仑兹不变的,从而期望相互作用通过时空传播的速度小于等于 $C$,"微观因果性",~~这导~~这导致描述采用场的方式。

5>. 小距离上的微粒性。目前没有具体实验证据,但对于改进后的理论,应能使我们这里的"定域场论"作为它的适当大距离上的近似。

## 二. 经典场的最小作用量原理.

$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$$

当$\phi$作任意改变$\delta\phi$时,

$\because$ 变分时$x$不变 $\therefore \delta\partial_\mu\phi=\partial_\mu\delta\phi$

$$\delta S=\int d^4x\,\delta\mathcal{L}=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi+\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$$

最后一项为全微分,可写为表面积分 $\oint d\sigma_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\xlongequal[\text{变分时边界不变}\delta\phi|_\sigma]{}0$

若假定边界上为0的任意变分$\delta\phi$,最小作用量原理要求$\delta S=0$,得E-L方程

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$$

[利用 $\delta S=\frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi+\frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$, 得 $\frac{\delta S}{\delta\phi}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$ ]

另:若$\mathcal{L}$变为$\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu\Lambda^\mu$,其中$\Lambda^\mu=\Lambda^\mu(\phi,\partial_\mu\phi)$,由于此时该附加项变分

$$\delta\int d^4x\,\partial_\mu\Lambda^\mu=\delta\oint d\sigma_\mu\Lambda^\mu=\oint d\sigma_\mu\left[\frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]=0$$

边界上 $\delta\phi_\sigma=\partial_\mu\delta\phi|_\sigma=\delta\partial_\mu\phi|_\sigma=0$

所以,$S'-S$取决于$\Lambda^\mu$的边界条件$\partial_\mu\Lambda^\mu$。而$S'$与$S$导致相同的运动方程。

从而 $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu\Lambda^\mu+C$ 与$\mathcal{L}$对应相同的运动方程。

## 三. 推广到有$n$个分量$\phi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots n)$,

$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots\phi_n(x);\partial_\mu\phi_1(x),\partial_\mu\phi_2(x),\cdots\partial_\mu\phi_n(x)).$$

$$\delta S=\int d^4x\,\mathcal{L}=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i+\overbrace{\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right]}^{=0}$$

$$\therefore\quad\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}=0\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

其中$\phi(x)$可以是任意经典场系统。当将不同场的$\mathcal{L}$代入上式,可得标量场、矢量场和旋量场的运动方程。

# §2.3 对称性和Noether定理

对称性是物理的重要特征。由于对称性与守恒定律密切联系，因而对称性质的研究十分重要。因为系统的拉氏密度决定着系统的运动方程，所以系统具有某种对称性时其对拉氏密度也将产生某种限制，即拉氏密度须具有该对称性。例如，某系统若具有时一空平移不变性，则$\mathcal{L}$也如此，从而系统有能量-动量守恒定律。后面将涉及空间转动不变性，空间反射、时间反演对称性、手征对称性、规范对称性等。

一. 坐标和场量的对称性变换

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

$$\delta S = \int d^4x'\,\mathcal{L}'(x') - \int d^4x\,\mathcal{L}(x) = \int d^4x \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| [\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)] - \int d^4x\,\mathcal{L}(x)$$

※1 其中 $\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu + \delta x^\mu)\right| = \left|\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right| \approx 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$

※2 $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] + \underbrace{[\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)]}_{\equiv \bar\delta\mathcal{L}}$

其中，第二项仅由$\phi(x)$形式改变引起，引入 $\bar\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$；$[\bar\delta, \partial_\mu] = 0$ 得 $\bar\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\bar\delta\phi$.

$$\bar\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta(\partial_\mu\phi)$$

而第一项仅由惯性系间无穷小变换引起，$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$，$\mathcal{L}'(x')$在$x$处泰勒展开

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x) + \cdots \xrightarrow[\phi'(x)\text{按}\phi(x)\text{展开的1阶小与}\delta x^\mu\text{合并为2阶小；并入}O((\delta x)^2)]{\text{其中}\mathcal{L}'(x)\text{含有}\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x)} \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(x) + O((\delta x)^2)$$

$$\therefore \delta\mathcal{L}(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \bar\delta\mathcal{L} + O((\delta x)^2)$$

$$= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta(\partial_\mu\phi)\right]$$

由※2可知。

$$\bar\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \overset{※2}{=} \delta\mathcal{L} - [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] = \delta\mathcal{L} - \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x)$$

故$\bar\delta$对任意函数$f$的改变为 $\bar\delta f = \delta f - \delta x^\mu \partial_\mu f$

将※1和※2代入作用量变分，记 $d^4x\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = d^4x(1 + \partial_\mu\delta x^\mu) \equiv d^4x' \overset{记为}{=} d^4x + \delta(d^4x)$

$$\delta S = \int [d^4x + \delta(d^4x)][\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}(x)] - \int d^4x\,\mathcal{L}(x)$$

$$\delta S=\int[d^4x+\delta(d^4x)][\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}]-\int d^4x\,\mathcal{L}=\int\delta(d^4x)\mathcal{L}+\int d^4x\,\delta\mathcal{L}$$

$$=\int d^4x(\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}+\int d^4x\left\{\delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta(\partial_\mu\phi)\right]\right\}$$

$$=\int d^4x\left\{\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\bar\delta\phi+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta\phi\right]\right\}$$

欧方 $=0$

$$=\int d^4x\left\{\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar\delta\phi\right]\right\}$$

利用 $\bar\delta\phi=\delta\phi-\delta x^\mu\partial_\mu\phi$

$\therefore\ \delta S=\int d^4x\,\partial_\mu\left[\left(\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right)\delta x^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$ S在 $x$, $\phi$ 均变化时之变分!

---

二. 连续变换对称性.

1.守恒流. 由于上述变换 $\delta x^\mu$ 和 $\delta\phi$ 是对称性变换，它们可用一整体变换参数 $\delta\theta^a$ 表达 不一

$$\begin{cases}x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu,\\ \phi(x)\to\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x)\end{cases}\qquad 其中\begin{cases}\delta x^\mu=\dfrac{\delta x^\mu}{\delta\theta^a}\delta\theta^a\\ \delta\phi(x)=\dfrac{\delta\phi}{\delta\theta^a}\delta\theta^a\end{cases}$$

代入 $\delta S$, 得.

$$\delta S=\int d^4x\,\partial_\mu\left[\left(\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right)\frac{\delta x^\rho}{\delta\theta^a}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\theta^a}\right]\delta\theta^a$$

若作用量对于上述变换 $\delta x^\mu$, $\delta\phi$ 不变, 即对于所有 $\delta\theta^a$ 都有 $\delta S=0$, 则有流守恒

$$\partial_\mu j^\mu_a=0,$$

其中流密度为

$$j^\mu_a=-\left[\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right]\frac{\delta x^\rho}{\delta\theta^a}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\partial\theta^a}$$

使能-动量密度 $\geq 0$

2.守恒荷.

对守恒流公式积分, 空间无穷大, 时间 $T_1\sim T_2$,

$$\int_{T_1}^{T_2}dx^0\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,\partial_\mu j^\mu_a=\int_{T}^{T_2}dx^0\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a+\int_{T}^{T_2}dx^0\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,\partial_i j^i_a=0$$

假设 $\phi(x)$ 在 $\infty$ 处足够快趋于 0, 则 $\int d^3x\,\partial_i j^i_a=\int d\sigma\,j^{i=0}_a=0$, 从而

$$\int_{T_1}^{T_2}dx^0\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a=0.$$

定义荷 $Q_a(x^0)=\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a(x^0,\vec{x})$, 则

$$Q_a(T_2)-Q_a(T_1)=0,\ 或\ \frac{dQ_a}{dt}=0.$$

即 $Q_a$ 是与时间无关的守恒荷。故在整体对称变换下, $\delta S$ 导致守恒流 $j^\mu_a$ 和守恒荷 $Q_a$。

3. Noether定理:

若物理系统作用量在某种连续变换下具有不变性，则一定存在一个与此变换相应的守恒流 $j_a^\mu$，满足 $\partial_\mu j_a^\mu = 0$。

4. 整体规范变换.

若坐标 $x$ 不变，仅复标量场 $\phi(x)$ 变换 $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x)$.

则 $\delta\phi(x) \to i\delta\theta\phi(x)$,

$$\delta S = \int d^4x\, \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\theta} \right] \delta\theta .$$

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\theta}$$

$$= -i\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^*(x) \right] \to \begin{cases} j^\mu \text{表明粒子数守恒。} \\ ej^\mu \text{为电荷-电流密度} \\ ej^0 \text{为电荷 } eQ. \end{cases}$$

※ $j_a^\mu$ 不唯一.

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu$$

$$j_a^\mu \longrightarrow j_a'^\mu = j_a^\mu + \partial_\nu t_a^{\nu\mu} \quad (t_a^{\nu\mu} = -t_a^{\mu\nu})$$

$$Q_a \longrightarrow Q_a' = Q_a$$

※ 整体规范对称性如:

同位旋、正反粒子、手征对称性.（但大部分为近似对称性）.

# 第3章 定域场的Lorentz变换性质

# 第三章 定域场的Lorentz变换性质

## §3.1 Lorentz变换和Lorentz群

### 一. 群论基础.

1. 群: 满足下列运算的集合G。 $G=\{a \mid a\text{满足的条件}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

1)封闭性: $\forall a,b\in G$, $a\cdot b\in G$.

2)结合性: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$, $\forall a,b,c\in G$.

3)单位元: 存在G中的一个元素e, 对所有$a\in G$, 有 $e\cdot a=a\cdot e=a$.

4)逆元: $\forall a\in G$, 存在一个逆元素$a^{-1}\in G$, 使得$a\cdot a^{-1}=a^{-1}a=e$.

[或 $\forall a\in G$, $\exists a^{-1}\in G$, 使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$ ]

例: 平庸群 $\{e\}$.

两元素群: $\{1,-1\}$ (运算为乘).

整数加群: 无限群, 运算为加, 单位元0.

子群→ 实数加群: 同上

正实数乘群: 无限, 运算为乘, 单位元1.

两矩阵乘群 $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$.

四阶乘群 $\{1,i,-1,-i\}$

$n\times n$维非奇异实阵乘群"一般线性群$GL(n,R)$"

$m\times n$矩阵加群: 单位元$(0)_{m\times n}$

2. 子群:

设G为一群, $H\subseteq G$, 若H也构成一个群, 则称H为G的子群. 平庸子群 $\{e\}$、$\{G\}$; 真子群, 还含有非平庸子群

3. 陪集:

设G为群, H为G的子群。H将在G中诱导出等价关系, 从而将G划分成一些等价类. 这些等价类的集合叫G关于H的陪集, 记为G/H.

4. 叶:

群G中凡能连续地变到的元素的集合称为一个叶, 单连通群就是叶数为1的群.

5. 李群:

单连通连续群G, 它的元素可用m个群参数一一对应地描写, 且群元素的连续性与群参数的连续性互相对应, 从而群元素乘法可通过群参数$\alpha,\beta,\gamma$的函数体现

$$g(\alpha)\, g(\beta)=g(\gamma) \longleftrightarrow \gamma=F(\alpha,\beta)$$

若单位元素对应参数为0, $g(\alpha)^{-1}=g(\alpha')$, 则群乘法要求.

① $F(0,0)=0$, $F(\alpha,0)=F(0,\alpha)=\alpha$; ② $F(\alpha,\alpha')=F(\alpha',\alpha)=0$;

③ $F(\alpha,F(\beta,\gamma))=F(F(\alpha,\beta),\gamma)$.

当$F(\alpha,\beta)$对于$\alpha$、$\beta$是连续可微函数时, 称G为一个李群.

# 6. 李群的无穷小算符/生成元.

## 1) 李群一般生成元:

① 设李群一个元素 $g(\alpha)$, $\alpha$ 为 $n$ 个参数的集合, $g(\alpha=0)$ 为单位元素。若 $\alpha$ 很小.

$$g(\alpha)=g(0)+\alpha^i\frac{\partial g}{\partial\alpha^i}\Big|_{\alpha^i=0}+\cdots$$

则 $X_i=\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{\alpha=0}$ 称为群的无穷小算子或生成元。有时引入 $I_i=-iX_i$

② 若群参数 $\beta$ 不是很小, 取一个足够大正整数 $n$, 使 $\alpha^i=\frac{1}{n}\beta^i$ 足够小,

则 $g(\alpha)=g(\frac{1}{n}\beta)$

$$\therefore g(\beta)=(g(\alpha))^n=\left(g(\tfrac{1}{n}\beta)\right)^n\approx\left(g(0)+\tfrac{1}{n}\beta^iX_i\right)^n$$

$n\to\infty$ 时. $g(\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(0)+\frac{1}{n}\beta^iX_i\right)^n=e^{\beta^iX_i}=e^{i\beta^iI_i}$

## 2) $n$ 维欧氏空间中坐标变换引起的函数 $\psi(x)$ 的变换。

$x_\mu\xrightarrow{R}x'_\mu=f_\mu(x,\alpha)$, $(\mu=1,2,\cdots,n)$; $x'=f(x,\alpha)$ 构成变换李群 $G$。

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

此时 $\psi(x)\to\psi'(x)=P_R\psi(x')$ 为 $n$ 维空间中任一函数的变换。

为 $R$ 逆元素之参数

*因为空间同一点,函数值不变,故.

$P_R\psi(x')=\psi(x)=\psi(R^{-1}x')$, 或 $P_R\psi(x)=\psi(R^{-1}x)=\psi(f_\mu(x,\bar\alpha))$

可证, 对无穷小变换, $\bar\alpha_k=-\alpha_k$ $\qquad f_\mu(x,\bar\alpha)\Big|_{\bar\alpha=0}=x_\mu.$

$$\therefore P_R\psi(x)=\psi(f(x,\bar\alpha))\Big|_{\bar\alpha=0}+\sum_{k=1}^{r}\bar\alpha_k\frac{\partial\psi(f(x,\bar\alpha))}{\partial\bar\alpha_k}\Big|_{\bar\alpha=0}$$

$$=\psi(x)-\sum_{k=1}^{r}\bar\alpha_k\left[\sum_\mu\frac{\partial\psi(f_\mu(x,\bar\alpha))}{\partial f_\mu(x,\bar\alpha)}\frac{\partial f_\mu(x,\bar\alpha)}{\partial\bar\alpha_k}\right]\Big|_{\bar\alpha=0}$$

$$=\psi(x)-\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial f_\mu(x,\alpha)}{\partial\alpha_k}\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}$$

引入 $r$ 个无穷小算符

$$\boxed{Z_k=-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial f_\mu(x,\alpha)}{\partial\alpha_k}\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\quad \text{无穷小算符}}$$

则. $P_R\psi(x)=\psi(x)+\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_kZ_k\psi(x)$, $\qquad P_R=1+\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_kZ_k$ 投影算符

例: $x'=\alpha_1x+\alpha_2=f(x,\alpha)=f(x,\alpha_1,\alpha_2)$. 求 $Z_k$ $\qquad(r=2,\ n=1)$

参数个数

解: 当 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$ 时为恒等变换. 故在 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$ 附近展开.

令 $u_1\equiv\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha_1}\Big|_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}}=x$; $u_2\equiv\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha_2}\Big|_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}}=1$.

$\therefore Z_1=-u_1\frac{\partial}{\partial x}=-x\frac{\partial}{\partial x}$, $\quad Z_2=-u_2\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}$. $\qquad[Z_1,Z_2]=Z_1Z_2-Z_2Z_1=\cdots=Z_2$

例. 二维转动群 $SO(2)$.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta = f_1(x,y,\theta) \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta = f_2(x,y,\theta) \end{cases} \qquad (r=1,\ n=2).$$

解: $$Z_k = Z = -\sum_{m=1}^{2} \frac{\partial f_m(x,y,\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$$= -(-x\sin\theta - y\cos\theta)\big|_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial x} - (x\cos\theta - y\sin\theta)\big|_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

令 $Z_k = -iJ_z$, 则 $J_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

例. $$\begin{cases} x_1' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = f^1(x_1,x_2,\alpha) \\ x_2' = \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 = f^2(x_1,x_2,\alpha) \end{cases} \qquad (r=4,\ n=2)$$

解: 单位元 $\alpha_1=\alpha_4=1$, $\alpha_2=\alpha_3=0$, 在此处展开

$$u_1^1 \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha=0} = x_1, \qquad u_1^2 \equiv \frac{\partial f^2}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha=0} = 0$$

$u_2^1 = x_2$, $u_2^2 = 0$, $u_3^1 = 0$, $u_3^2 = x_1$, $u_4^1 = 0$, $u_4^2 = x_2$.

$\therefore Z_1 \equiv -\sum_{j=1}^{2} u_1^j \frac{\partial}{\partial x_j} = -x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2} = -x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$, $Z_2 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$, $Z_3 = -x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Z_4 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$,

$\therefore [Z_1, Z_2] = +Z_2$, $[Z_1, Z_3] = -Z_3$, $[Z_2, Z_3] = -Z_4 + Z_1$,

$[Z_3, Z_4] = -Z_3$, $[Z_1, Z_4] = 0$; $[Z_2, Z_4] = -Z_2$

例. 三维转动群 $SO(3)$.

$$x_i \xrightarrow{\text{无穷小时}} x_i' = \sum R_{ij} x_j = \sum_j (\delta_{ij} + \alpha_{ij}) x_j \qquad \alpha_{jk} = -\alpha_{kj}$$

解: 由正交性 $\sum_i R_{ij}R_{ik} = \sum_i R_{ji}R_{ki} = \delta_{jk} = \delta_{ij}\delta_{ik} + \alpha_{ij}\delta_{ik} + \alpha_{ik}\delta_{ij} + O(\alpha^2)$ $\therefore$

$\therefore \alpha_{ij}$ 仅有3个参数 $(r=3)$.

$$Z_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k'}{\partial \alpha_{ij}}\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_k} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\left[\sum_m(\delta_{km}+\alpha_{km})\right]}{\partial \alpha_{ij}}\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= -\sum_{k,m}\left[\frac{\partial \alpha_{km}}{\partial \alpha_{ij}}\right] x_m\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_k} = -\sum_{k,m}(\delta_{ki}\delta_{mj}x_m - \delta_{im}\delta_{kj}x_m)\big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= x_i\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

引入 $Z_1 = Z_{23}$, $Z_2 = Z_{31}$, $Z_3 = Z_{12}$, $Z_k = -iJ_k$ $(k=1,2,3)$.

则 $J_1 = \frac{1}{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$; $J_2 = \frac{1}{i}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$; $J_3 = \frac{1}{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$

$$[J_j, J_k] = i\,\varepsilon_{jkl}J_l.$$

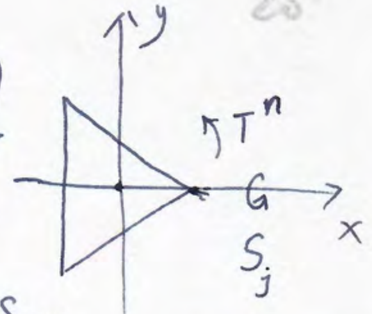
20'

群

~~$D_N$ ($D^N$) 正N角形对称群~~:
~~(或N边形对称群)~~

正N边形对称群 $D_N$

群元素 $\left\{ \begin{array}{l} T^n \mid T^N = E, \quad 1 \le n \le N \\ S_j \mid S_j^2 = E, \quad 0 \le j \le N-1 \\ \vdots \end{array} \right\}$




群乘法: $T^N = S_j^2 = E, \quad T^m S_j = S_{j+m}$

$T^m = S_{j+m} S_j = S_j S_{j-m}, \quad S_j T^m = S_{j-m}$.

j和m mod N

(j mod N 表示把取值相差N的两个j看成相同。即 $S_{j+N} = S_j$)

四阶反演群 $V_4$: $V_4 = \{e, \underset{空间反演}{\sigma}, \underset{时间反演}{\tau}, \underset{时空全反演}{\rho}\}$

群乘法:

| | e | σ | τ | ρ |
|---|---|---|---|---|
| e | e | σ | τ | ρ |
| σ | σ | e | ρ | τ |
| τ | τ | ρ | e | σ |
| ρ | ρ | τ | σ | e |

二阶反演群 $V_2 = \{e, \sigma\}$.

由R生成的循环群 $C_N$: $R(\hat{n}, \omega)$ 表绕 $\hat{n}$ 方向转动 $\omega$ 的变换。取 $R \equiv R(\hat{n}, \frac{2\pi}{N})$.

$C_N = \{E, R, R^2, \cdots, R^{N-1}\}$. N阶循环群, 阿贝尔群.

由 $S_N$ 生成的循环群 $\bar{C}_N$: $S_N = \sigma C_N = C_N \sigma$, N次转动空间反演. $C_2 \underset{同构}{\approx} V_2$

$\bar{C}_N = \{E, S_N, S_N^2, \cdots\}$ $\left\{ \begin{array}{l} 阶数N, \quad 当N是偶数. \\ 阶数2N, \quad 当N是奇数. \end{array} \right.$

20''

$g_k$与$g_j$互为共轭关系.

群 $G=\{g_1, g_2, \cdots g_n\}$.　　类: $\{g_k \mid g_k = a g_j a^{-1}, a\in G\}$

子群. $g_1=\{1, b_1, b_2, \cdots\}$.

陪集: $a\notin g_1$, $a\in G$, $\begin{cases} \text{左陪集 } ag_1=\{a, ab_1, ab_2, \cdots\} \\ \text{右陪集 } g_1 a=\{a, b_1 a, b_2 a, \cdots\}. \end{cases}$

共轭子群: $a g_1 a^{-1}=\{a1a^{-1}, ab_1a^{-1}, ab_2a^{-1}, \cdots\}$

不变子群: 若 $\forall a$, $ag_1a^{-1}=g_1$, 称 $g_1=ag_1a^{-1}$ 为不变子群/正规子群(含类)。

商群: $\left\{ \underbrace{\underset{\text{子群/单位元素}}{\{g_1\}}, \{ag_1\}, \underset{\text{左陪集/商群元素}}{\{acg_1\}} \cdots}_{\text{商群 } g/g_1} \right\}$

$\vdots$

$\underset{\text{共轭子群}}{\{ag_1a^{-1}\}}$, $\underset{\text{共轭子群}}{\{cg_1a^{-1}\}}$

群:

SU(N)群: 所有N×N 幺模 ($\det U=1$), 幺正 ($U^\dagger U=1$) 矩阵U的集合, 满足群四条件。 $g=N^2-1$

O(N)群: 所有N×N 实 ($R^*=R$), 正交 ($R^TR=1$) 矩阵R的集合, …。 $(\det R=\pm 1)$.

SO(N)群: 所有N×N 幺模 ($\det R=1$), 实 ($R^*=R$), 正交 ($R^TR=1$) 矩阵R的集合, …

独立参数 $g=\frac{N(N-1)}{2}$

## 二. 洛伦兹变换：

1.间隔。任意两个物理事件之间的四维间隔是不同惯性系之间的不变量。

$$\boxed{S^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^{0\,2} - |\vec{x}|^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

其中：$x^\mu = (t, +\vec{x})$，$x_\mu = (t, -\vec{x})$，

$\equiv (x^0, +x^1, +x^2, +x^3)$ $\quad \equiv (x_0, +x_1, +x_2, +x_3)$

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$，

$$\longrightarrow \begin{cases} x^0 = x_0 = t,\ x^i = -x_i. \\ g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = g^\nu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho. \end{cases}$$

2.洛伦兹变换：

联系 $x'^\mu$ 和 $x^\mu$ 的线性变换 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu = a^\mu{}_0 x^0 + a^\mu{}_1 x^1 + a^\mu{}_2 x^2 + a^\mu{}_3 x^3$

称为洛氏变换，若 $\boxed{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$（间隔不变性） $\qquad a^T g a = g$

$g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = g_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma$，即 $\boxed{g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \tilde{a}_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} a^\nu{}_\sigma}$

## 三. 洛氏群.

① 取行列式，$\det a = \pm 1$.

② $g_{00} = 1 = g_{\mu\nu} a^\mu{}_0 a^\nu{}_0 = (a^0{}_0)^2 - (a^i{}_0)^2$，得

$|a^0{}_0| \geq 1$，$\therefore a^0{}_0 \geq 1$ 或 $a^0{}_0 \leq -1$.

$\Longrightarrow$

| | $\det a = 1$ | $\det a = -1$ |
|---|---|---|
| $a^0{}_0 \geq 1$ | I 固有顺时 $L_+^\uparrow$ | σ 非固有顺时 $L_-^\uparrow$ |
| $a^0{}_0 \leq -1$ | ρ 固有非顺时 $L_+^\downarrow$ | τ 非固有非顺时 $L_-^\downarrow$ |

1.洛群.

* 四个区域不连通。

* $I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in L_+^\uparrow$，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \in L_-^\uparrow$

$\tau = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in L_-^\downarrow$，$\rho = \sigma\tau = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in L_+^\downarrow$

* $L_+^\uparrow$ 构成群，称固有L群/正L群，记为 $SO(3,1)$ 群。其它三个为 $L_+^\uparrow$ 的陪集

$V_4 = \{I, \sigma, \tau, \rho\}$ 也构成群，称四阶反演群

$L_+^\uparrow, L_-^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\downarrow$ 全体构成"全L群"，$V_4$ 和 $SO(3,1)$ 为其子群.

* $V_4$ 与 $SO(3,1)$ 相乘可得四个区域所有元素.

2. 沿某一方向(x轴)的L变换(boost). $\beta=\frac{v}{c}=v$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-\beta^2)^{-1/2} & -\beta(1-\beta^2)^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\beta(1-\beta)^{-\frac{1}{2}} & (1-\beta)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{cases} x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

引入 $\cosh y=(1-\beta^2)^{-1/2}$, $\sinh y=\beta(1-\beta^2)^{-1/2}$. $\tanh y=\beta$.

$$a=\begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y & 0 & 0 \\ -\sinh y & \cosh y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det a=\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$

$a^0{}_0=\cosh y=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\geq 1$.

$\therefore$ 属于 $L_+^\uparrow$.

3. 三维空间转动.

$x'^0=x^0$, $x'^i=a^i{}_j x^j$ $(i,j=1,2,3)$

$\det a=\det(a^i{}_j)=1$, $\because a^0{}_0\geq 1$

$\therefore$ 属于 $L_+^\uparrow$.

SO(3)群 $\det a=1$

# 四. 洛群代数($L_+^\uparrow$)

$L_+^\uparrow$ 可以归结为上面的所有平动(空间与时间坐标间变换)和转动之和。

$\underbrace{\text{所有平动}}_{v_i\,3个}$　$\underbrace{\text{转动}}_{\theta_i\,3个}$

故正L变由6参数描写。

1. 无穷小 $L_+^\uparrow$ 变换.

$a^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu+\delta w^\mu{}_\nu$. 其 $\delta^\mu{}_\nu$ 为单位矩阵, $\delta w^\mu{}_\nu$ 为无穷小群参数

对于洛群. $g_{\rho\sigma}=g_{\mu\nu}a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma$, 上式代入这里.

$$g_{\rho\sigma}=g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho+\delta w^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma+\delta w^\nu{}_\sigma)=g_{\rho\sigma}+g_{\rho\nu}\delta w^\nu{}_\sigma+g_{\mu\sigma}\delta w^\mu{}_\rho$$
$$=\delta w_{\rho\sigma}+\delta w_{\sigma\rho}+g_{\rho\sigma}$$

$\therefore \delta w_{\rho\sigma}+\delta w_{\sigma\rho}=0$ 反对称(6分量)

记 $\delta w_{ij}\equiv-\varepsilon_{ijk}\theta_k$, 为空间转动3参数角度

$\delta w_{0i}\equiv\beta_i$ 为空间平动3速度参数.

2. 无穷小 $L_+^\uparrow$ 变换生成元算符.

1) $x^\mu\longrightarrow x'^\mu=\sum_\mu(\delta^\mu{}_\nu+\delta w^\mu{}_\nu)x^\nu$

无穷小生成元算符

$Z_{\mu\nu}=+x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$　引入 $L_{\mu\nu}=+iZ_{\mu\nu}$.

$\boxed{L_{\mu\nu}=i(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu),}$ 与 $\delta w_{\mu\nu}$ 相应.

2) 另一方面. $\delta x^\mu=x'^\mu-x^\mu=(\delta w^{\mu\rho}x_\rho)=\sum_{\rho\sigma}\delta w^{\rho\sigma}Z_{\rho\sigma}x^\mu=-\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}x^\mu$

$=\delta w^{\mu\rho}x_\rho\partial_\sigma x^\sigma$

$=\frac{1}{2}\delta w$

? $\frac{i}{2}w^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}x^\mu$

3. $L_+^\uparrow$ 代数。 $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$

可证下列对易关系.

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}.$$

4. 包含自旋时。 $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$ $S_{\mu\nu}$ 反对称张量.

$L_+^\uparrow$ 代数
$$\begin{cases} \text{其中 } S_{\mu\nu} \text{ 与 } L_{\mu\nu} \text{ 代数相同,} \\ [S_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = 0. \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \end{cases}$$

* $M_{\mu\nu}$ 独立生成元有6个：其中 $M_{ij}$ 有3个.
$$\begin{cases} J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}. \quad \underline{\text{3个空间转动生成元}} \\ [J_i, J_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \end{cases}$$

$M_{0i}$ 有3个
$$\begin{cases} K_i \equiv M_{0i} \quad \underline{\text{3个平动生成元}} \\ [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \end{cases}$$

五. 庞加莱变换.

1. 物理规律时空平移不变.

考虑坐标 $x^\mu$ 的无穷小时空平移变换

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu,$$

可证: $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu = -i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu$,

其中 $P_\rho = i\partial_\rho = i\frac{\partial}{\partial x^\rho}$. 为能-动量算符.

2. 庞加莱变换(由洛变加时空平移构成共10个独立参数, 10个生成元 $M_{\mu\nu}, P_\rho$)

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\nu$$

庞氏代换
$$\begin{cases} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \\ [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] = -ig_{\mu\rho}P_\nu + ig_{\nu\rho}P_\mu \end{cases}$$

## §3.2 定域场的变换性质

经典力学中，我们用广义坐标$q_i$和广义速度$\dot{q}_i$来构造系统的拉格朗日量。在量子场论中，该如何构造拉格朗日量呢？类似于经典力学中需要广义坐标$q_i$，广义速度$\dot{q}_i$，在量子场论中，我们需要定域场$\phi(\vec{x},t)$，及其一阶偏导$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(\vec{x},t)$来构造拉格朗日量。

狭义相对论要求，经典场作用量必须有庞加莱不变性（即时空旋转不变性和时空平移不变性）。因此，相应的拉氏密度必须具有庞加莱不变性，这对构造拉氏量提出了很强的限制。（$I=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$）

因此，讨论各种类型定域场在洛伦兹变换下的性质就十分必要了。物理上，按照在洛伦兹变换下的性质，定域场可以分为标量场、矢量场、旋量场。本节将依次讨论这些场。

# 一. 标量场 $\phi(x)$.

1. 定义：在洛伦兹变换相联系的两个惯性系中，若满足下列性质，

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x)$$

则称 $\phi(x)$ 为标量场。

注①标量：$m$, $p$, $T$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
标量粒子：Higgs粒子，$f_0(980)$，胶子
若 $\vec{x}\to\vec{x}'=-\vec{x}$ 时，$f(x)\to f(x')=f(x)$

② 若 $\vec{x}\to\vec{x}'=-\vec{x}$ 时，$f(x)\to f(x')=-f(x)$，则 $f(x)$ 为赝标量：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$，π介子，$\eta_c$ 介子.

2. 标量场变换性质.

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x).$$
$$\delta\phi(x) = [\phi'(x') - \phi'(x)] + [\phi'(x) - \phi(x)] \equiv [\phi'(x') - \phi'(x)] + \bar{\delta}\phi$$，其中 $\bar{\delta}\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x)$

3. 无穷小变换时，

$$x^\mu \to x'^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + \delta w^\mu{}_\nu) x^\nu = x^\mu + \delta x^\mu.$$
$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \delta w^\mu{}_\nu x^\nu = \delta w^{\mu\nu} x_\nu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$
$$\delta\phi(x) = [\phi'(x') - \phi'(x)] + \bar{\delta}\phi = [\phi'(x+\delta x) - \phi'(x)] + \bar{\delta}\phi$$
$$= \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x) + \bar{\delta}\phi = 0$$

$$\therefore \bar{\delta}\phi = -\delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x) + \delta\phi(x) = -\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi$$
$$= -\frac{i}{2}\delta w^{\mu\nu}\, i\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\phi = \boxed{-\frac{i}{2}\delta w^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi}$$

引入 $L_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$，$\boxed{\therefore \bar{\delta}\phi = -\frac{i}{2}\delta w^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi}$

∴ 标量场的自旋 $S=0$，轨道角动量 $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L_{jk}$.

4. 有限变换时.

对无穷小变换：$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \bar{\delta}\phi = \left(1 - \frac{i}{2}\delta w^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\right)\phi$.

对有限变换 $w^{\mu\nu}$，引入 $\frac{1}{n}w^{\mu\nu}$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}w^{\mu\nu}$ 也成为无穷小变换。

有限变换 $w^{\mu\nu}$ 可以看作无穷小变换对定域场作用了 $n$ 次。

$$\phi'(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{i}{2}\frac{w^{\mu\nu}}{n}L_{\mu\nu}\right)^n \phi(x) = e^{-\frac{i}{2}w^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}\phi(x).$$

因此，标量场又可以定义为，在洛伦兹变换下按照，

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-\frac{i}{2}w^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}\phi(x)$$

变换的定域场。

# 二. 矢量场、张量场

1. 定义：在洛变下，若满足

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = a_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$ 则称 $A_\mu(x)$ 为矢量场.

注：矢量 $\begin{cases} \text{极矢量：若 } \vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x} \text{ 时，} \begin{cases} \vec{A}_\parallel \to \vec{A}'_\parallel = \vec{A}_\parallel \\ \vec{A}_\perp \to \vec{A}'_\perp = -\vec{A}_\perp \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \vec{A}\text{为极矢量} \\ \text{eg} \begin{cases} \vec{F}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{P}, \\ \rho\text{介子}, J/\psi\text{介子}. \end{cases} \end{cases} \\ \text{轴矢量：若 } \vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x} \text{ 时 } \begin{cases} \vec{A}_\parallel \to \vec{A}'_\parallel = -\vec{A}_\parallel \\ \vec{A}_\perp \to \vec{A}'_\perp = \vec{A}_\perp \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \vec{A}\text{为轴矢量} \\ \text{eg} \begin{cases} \text{力矩}\vec{M}, \text{角动量}\vec{L}, \text{自旋}\vec{S} \\ a(1235), \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

2. 矢量场变换性质.

考虑无穷小变换.

$$x^\mu \to x'^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + \delta w^\mu{}_\nu) x^\nu = x^\mu + \delta x^\mu.$$

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \delta w^\mu{}_\nu x^\nu = \delta w^{\mu\nu} x_\nu$$

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \delta w_\mu{}^\nu x_\nu$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x) = (\delta_\mu{}^\nu + \delta w_\mu{}^\nu) A_\nu(x) = A_\mu(x) + \delta w_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$

$$\delta A_\mu(x) = A'_\mu(x') - A_\mu(x) = \delta x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x) + \bar{\delta} A_\mu(x),\ \text{其中 } \bar{\delta} A_\mu(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x)$$

$$\therefore \bar{\delta} A_\mu(x) = -\delta x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x) + \delta A_\mu(x) = -\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} \cdot i\left(x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\rho}\right) A_\mu(x) + \delta w_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$

$$\text{又 } \delta w_\mu{}^\nu = \frac{1}{2}(\delta w_\mu{}^\nu - \delta w^\nu{}_\mu) = -\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} i(g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma - g_{\sigma\mu} g^\nu{}_\rho)$$

$$\therefore \bar{\delta} A_\mu(x) = -\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} i(g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma - g_{\sigma\mu} g^\nu{}_\rho) A_\nu(x) - \frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) A_\mu(x)$$

引入 $(S_{\rho\sigma})^\nu{}_\mu \equiv i(g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma - g_{\sigma\mu} g^\nu{}_\rho)$ 自旋 $s=1$，$L_{\rho\sigma} \equiv i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho)$，$M_{\rho\sigma} \equiv L_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}$

则 $\boxed{\bar{\delta} A_\mu(x) = -\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} A_\mu(x)}$

3. 有限变换.

无穷小时，$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \bar{\delta} A_\mu(x) = \left(1 - \frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right) A_\mu(x).$

有限变换 $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{i}{2}\frac{w^{\rho\sigma}}{n} M_{\rho\sigma}\right)^n A_\mu(x) = e^{-\frac{i}{2} w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}} A_\mu(x)$

4. 洛伦兹不变量.

1) $A_\mu A^\mu$ 是 LT 标量：$A_\mu A^\mu \to a_\mu{}^\nu a^\mu{}_\rho A_\nu(x) A^\rho(x) = g^\nu{}_\rho A_\nu(x) A^\rho(x) = A_\nu(x) A^\nu(x)$. 不变

2) $\partial_\mu \phi$ 是 LT 矢量，$\partial_\mu \partial_\nu \phi$ 是 LT 张量：$\partial_\mu \phi(x) \to \partial'_\mu \phi'(x') = a_\mu{}^\nu \partial_\nu \phi(x)$

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \to \partial'_\mu \partial'_\nu \phi'(x') = a_\mu{}^\rho a_\nu{}^\sigma \partial_\rho \partial_\sigma \phi(x)$$

$\boxed{\bar{\delta}(\partial_\mu \partial_\nu \phi) = -\frac{i}{2}\delta w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}(\partial_\mu \partial_\nu \phi)}$.

综上，标量不带洛伦兹指标，如 $\phi^n(x)$，$A_\mu A^\mu$，$\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)$，$x^\mu \partial_\mu \phi(x)$，$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x)$，

矢量带1个洛伦兹指标，如 $A_\mu(x)$，$\partial_\mu \phi(x)$，

张量带2个洛伦兹指标，如 $\partial_\mu \partial_\nu \phi(x)$，$\partial_\mu A_\nu(x)$，

5. 按空间反射变换下的性质.

1) 标量

对 $\vec{x}\to\vec{x}'=-\vec{x}$ 时 $\begin{cases}\text{标量 } \phi(x)\to\phi'(x')=\phi(x) & \text{自旋} S=0\text{，宇称，} P= \\ \text{赝标量 } \phi(x)\to\phi'(x')=-\phi(x) & \text{自旋} S=0\text{，宇称，} P=-1 \text{ 不行}\end{cases}$

2) 矢量

对 $\vec{x}\to\vec{x}'=-\vec{x}$ 时 $\begin{cases}\text{矢量 } A^\mu(x)\to A'^\mu(x')=(A^0,-\vec{A}) & \text{自旋} S=1\text{，宇称} P=+1\text{，P偶} \\ \text{轴矢量 } A^\mu(x)=(A^0,\vec{A})\longrightarrow A'^\mu(x')=(-A^0,\vec{A}) & \text{自旋} S=1\text{，宇称，} P=\end{cases}$

（其中 $A^\mu(x)=(A^0,\vec{A})$）

## 三. 旋量场 $\psi(x)$

旋量场不能由洛伦兹指标来确定，而需要从洛伦兹的旋量表示给出。形式上引入 $\psi(x)\longrightarrow\psi'(x')=S\psi(x)$. 定义旋量场。一般，称满足 Dirac 方程的定域场 $\psi$ 称为旋量场。由 Dirac 方程的相对论协变性可以确定旋量场的洛伦兹变换矩阵 $S$ 的性质。见 §3.4 节。

## 四. 时空平移变换.

狭义相对论要求，经典场作用量满足庞加莱不变性。前面已讨论了洛伦兹变换的不变性，下面讨论时空平移变换。考虑无穷小时空平移变换

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+\varepsilon^\mu$$

定域场 $f(x)\to f'(x')=f(x)$ "$f$ 在原坐标 $\underset{\text{系}x}{}$ 的值 $=f'$ 在新坐标 $\underset{\text{系}x'}{}$ 的值"

$$f(x)\to f'(x')=f(x)+\delta f(x)$$

$$\therefore \delta f(x)=[f'(x')-f'(x)]+[f'(x)-f(x)]\equiv f'(x')-f'(x)+\bar{\delta}f(x)=0.$$

$$\therefore \bar{\delta}f(x)\equiv-[f'(x')-f'(x)]=-f'(x^\mu+\varepsilon^\mu)+f'(x^\mu)=-\epsilon^\mu\partial_\mu f(x)$$

引入 $P_\mu=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}=i\partial_\mu$,

$$\boxed{\bar{\delta}f(x)\equiv f'(x)-f(x)=-\epsilon^\mu\partial_\mu f(x)=i\varepsilon^\mu P_\mu f(x)}$$

## 五. 洛伦兹不变量.

1. $\phi(x)$ 构成的洛变不变量：

$\phi^n(x)$, $\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)$, $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, （但 $x^\mu\partial_\mu\phi(x)$ 尽管为 LT 不变量，但不是平移不变）

2. $A_\mu(x)$ 构成的洛不变量.

$A_\mu(x)A^\mu(x)$, $\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x)$, $\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x)$, $\partial^\mu A_\mu(x)$, …

3. 二阶张量 $B_{\mu\nu}$ 构成的洛不变量.

$B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x)$, $\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\rho B^{\mu\nu}(x)$, $\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\mu B^{\rho\nu}(x)$, …

由上，可构造洛不变的拉氏密度 $\mathcal{L}$。