§2.2 经典场系统最小作用量原理和运动方程

一. 定域场的含义

1. ~~定域场~~下面,我们将上述经典力学中的方法推广到经典场系统$\phi(\vec{x},t)$,与质点力学中的广义坐标q_i相对应的广义坐标是定域场$\phi(\vec{x},t)$。此时,标记维数的分立指标i变成了位置矢量$\vec{x}$,从而我们从有限维力学系统过渡到了无穷维场系统,拉氏量是场的泛函

(几率守恒) 实数③ 保证时空平移不变性要求①

故 ④运动方程不含高于二阶微商 $L(t)=\int d^3x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$, 定域场论要求②

⑤S具有其它对称性 $S=\int dx^0 L=\int dx^0dx^1dx^2dx^3\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$,

$[S]=[\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 dt]=ML^2T^{-1} \sim 1$ (自然单位$\hbar=c=1$)

其中$d^4x=dx^0dx^1dx^2dx^3$是四维闵氏时间的积分测度。我们假定,拉氏密度满足洛仑兹变换下的不变性,为实函数(从而满足几率守恒)。

2. 定域场方法之含义

1> 定域场满足波动方程,是$(\vec{x},t)$的连续函数,在$\vec{x}$处的改变由无限邻近点的场的性质来决定:大多数波动场(声波)在距离大于介质颗粒大小时成立。

* 对于量子场,电磁场首先是例外,不存在相应介质"以太",但方法仍适用。

* 在相对论性理论中,场在任意时空间隔正确会导致"电子自能"、"裸电荷"发散困难。但人们发展了重整化理论来绕过这一困难。

2> 微分形式的波动理论仍以被广泛接受:理论与观测相符合;另外,不存在其它可以避开微分形式的其它理论。

3>. 理论的形式~~保持~~先前在小范围内成立的普遍原理,如量子化方法。由于量子化联系H,而H会生成无穷小时间平移,故需对时间的微分,洛仑兹不变性又要求时空协变,故需对空间微分。

4> 借助于$(\vec{x},t)$的描述是洛仑兹不变的,从而期望相互作用通过时空传播的速度小于等于c,"微观因果性",~~这~~这导致描述采用场的方式。

5>. 小距离上的微粒性。目前没有具体实验证据,但对于改进后的理论,应能使我们这里的"定域场论"作为它的适当大距离上的近似。

二. 经典场的最小作用量原理.

$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$$

当 ϕ 作任意改变 $\delta\phi$ 时，

$\because$ 变分时 x 不变 $\therefore \delta\partial_\mu\phi=\partial_\mu\delta\phi$

$$\delta S=\int d^4x\,\delta\mathcal{L}=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi+\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$$

最后一项为全微分，可写为表面积分 $\oint d\sigma_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\ \underset{\text{变分时边界不变}\ \delta\phi|_\sigma}{=\!=\!=\!=}\ 0$

若假定边界上为0的任意变分 $\delta\phi$，最小作用量原理要求 $\delta S=0$，得 E-L 方程

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$$

[利用 $\delta S=\frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi+\frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$，得 $\frac{\delta S}{\delta\phi}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$]

另：若 $\mathcal{L}$ 变为 $\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu\Lambda^\mu$，其中 $\Lambda^\mu=\Lambda^\mu(\phi,\partial_\mu\phi)$，由于此时该附加项变分

$$\delta\int d^4x\,\partial_\mu\Lambda^\mu=\delta\oint d\sigma_\mu\Lambda^\mu=\oint d\sigma_\mu\left[\frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]=0$$

边界上 $\delta\phi_\sigma=\partial_\mu\delta\phi|_\sigma=\delta\partial_\mu\phi|_\sigma=0$

所以，$S'-S$ 取决于 Λ^μ 的边界条件 $\partial_\mu\Lambda^\mu$。而 S' 与 S 导致相同的运动方程。

从而 $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu\Lambda^\mu+C$ 与 $\mathcal{L}$ 对应相同的运动方程。

三. 推广到有 n 个分量 $\phi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots n)$，

$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots\phi_n(x);\partial_\mu\phi_1(x),\partial_\mu\phi_2(x),\cdots\partial_\mu\phi_n(x)).$$

$$\delta S=\int d^4x\,\mathcal{L}=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i+\overbrace{\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right]}^{=0}$$

$$\therefore\quad\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}=0\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

其中 $\phi(x)$ 可以是任意经典场系统。当将不同场的 $\mathcal{L}$ 代入上式，可得标量场、矢量场和旋量场的运动方程。

§2.3 对称性和Noether定理

对称性是物理的重要特征。由于对称性与守恒定律密切联系，因而对称性质的研究十分重要。因为系统的拉氏密度决定着系统的运动方程，所以系统具有某种对称性时其对拉氏密度也将产生某种限制，即拉氏密度须具有该对称性。例如，某系统若具有时一空平移不变性，则$\mathcal{L}$也如此，从而系统有能量-动量守恒定律。后面将涉及空间转动不变性，空间反射、时间反演对称性、手征对称性、$\boxed{\text{规范对称性}}$等。

一. 坐标和场量的对称性变换

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| [\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)] - \int d^4x \mathcal{L}(x)$$

※1 其中 $\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu + \delta x^\mu)\right| = \left|\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right| \approx 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$

※2 $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] + \underbrace{[\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)]}_{\equiv \bar{\delta}\mathcal{L}}$

其中，第二项仅由$\phi(x)$形式改变引起，引入 $\bar{\delta}\phi = \phi'(x) - \phi(x)$；$[\bar{\delta}, \partial_\mu] = 0$ 得 $\bar{\delta}(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\bar{\delta}\phi$.

$$\bar{\delta}\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}(\partial_\mu\phi)$$

而第一项仅由惯性系间无穷小变换引起，$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$，$\mathcal{L}'(x')$在$x$处泰勒展开

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x) + \cdots \xrightarrow[\phi'(x)\text{按}\phi(x)\text{展开的1阶小与}\delta x^\mu\text{合并为2阶小；并入}O((\delta x)^2)]{\text{其中}\mathcal{L}'(x)\text{含有}\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x)} \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(x) + O((\delta x)^2)$$

$$\therefore \delta\mathcal{L}(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \bar{\delta}\mathcal{L} + O((\delta x)^2)$$

$$= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}(\partial_\mu\phi)\right]$$

由※2可知。

$$\bar{\delta}\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \overset{※2}{=} \delta\mathcal{L} - [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] = \delta\mathcal{L} - \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x)$$

故$\bar{\delta}$对任意函数f的改变为 $\bar{\delta}f = \delta f - \delta x^\mu \partial_\mu f$

将※1和※2代入作用量变分，记 $d^4x\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = d^4x(1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \equiv d^4x' \overset{\text{记为}}{=} d^4x + \delta(d^4x)$

$$\delta S = \int [d^4x + \delta(d^4x)][\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}(x)] - \int d^4x \mathcal{L}(x)$$

$$\delta S=\int[d^4x+\delta(d^4x)][\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}]-\int d^4x\,\mathcal{L}=\int\delta(d^4x)\mathcal{L}+\int d^4x\,\delta\mathcal{L}$$

$$=\int d^4x(\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}+\int d^4x\left\{\delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}(\partial_\mu\phi)\right]\right\}$$

$$=\int d^4x\left\{\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})+\underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]}_{\text{欧方}=0}\bar{\delta}\phi+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi\right]\right\}$$

$$=\int d^4x\left\{\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi\right]\right\}$$

利用 $\bar{\delta}\phi=\delta\phi-\delta x^\mu\partial_\mu\phi$

$$\therefore\ \delta S=\int d^4x\,\partial_\mu\left[\left(\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right)\delta x^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$$

S在x, ϕ均变化时之变分!

二. 连续变换对称性.

1.守恒流. 由于上述变换δx^μ和$\delta\phi$是对称性变换，它们可用一整体变换参数$\delta\theta^a$表达.

$$\begin{cases}x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu,\\ \phi(x)\to\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x)\end{cases}\qquad 其中\begin{cases}\delta x^\mu=\dfrac{\delta x^\mu}{\delta\theta^a}\delta\theta^a\\ \delta\phi(x)=\dfrac{\delta\phi}{\delta\theta^a}\delta\theta^a\end{cases}$$

代入δS,得.

$$\delta S=\int d^4x\,\partial_\mu\left[\left(\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right)\frac{\delta x^\rho}{\delta\theta^a}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\theta^a}\right]\delta\theta^a$$

若作用量对于上述变换δx^μ, $\delta\phi$不变, 即对于所有$\delta\theta^a$都有$\delta S=0$, 则有流守恒

$$\partial_\mu j^\mu_a=0,$$

其中流密度为

$$j^\mu_a=-\left[\mathcal{L}g^\mu_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi\right]\frac{\delta x^\rho}{\delta\theta^a}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\partial\theta^a}$$

使能-动量密度≥0

2.守恒荷.

对守恒流公式积分,空间无穷大,时间$T_1\sim T_2$,

$$\int_{T_1}^{T_2}dx^0\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,\partial_\mu j^\mu_a=\int_{T_1}^{T_2}dx^0\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a+\int_{T_1}^{T_2}dx^0\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,\partial_i j^i_a=0$$

假设$\phi(x)$在∞处足够快趋于0, 则 $\int d^3x\,\partial_i j^i_a=\int d\sigma\,\overset{=0}{j^i_a}=0$, 从而

$$\int_{T_1}^{T_2}dx^0\frac{\partial}{\partial x^0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a=0.$$

定义荷 $Q_a(x^0)=\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,j^0_a(x^0,\vec{x})$, 则

$$Q_a(T_2)-Q_a(T_1)=0,\quad 或\quad \frac{dQ_a}{dt}=0.$$

即Q_a是与时间无关的守恒荷。故在整体对称变换下, δS导致守恒流j^μ_a和守恒荷Q_a。

3. Noether定理：

若物理系统作用量在某种连续变换下具有不变性，则一定存在一个与此变换相应的守恒流 j^μ_a，满足 $\partial_\mu j^\mu_a=0$。

4. 整体规范变换.

若坐标 x 不变，仅复标量场 $\phi(x)$ 变换 $\phi(x)\to\phi'(x)=e^{i\theta}\phi(x)$.

则 $\delta\phi(x)\to i\delta\theta\phi(x)$，

$$\delta S=\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\right]\delta\theta.$$

$$j^\mu=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\theta}$$

$$=-i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi(x)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*(x)\right]$$

$\to$ j^μ 表明粒子数守恒。
ej^μ 为电荷-电流密度
ej^0 为电荷 eQ.

※ j^μ_a 不唯一.

$$\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu\Lambda^\mu$$

$$j^\mu_a\longrightarrow j'^\mu_a=j^\mu_a+\partial_\nu t^{\nu\mu}_a\quad(t^{\nu\mu}_a=-t^{\mu\nu}_a)$$

$$Q_a\longrightarrow Q'_a=Q_a$$

※ 整体规范对称性如：

同位旋、正反粒子、手征对称性.（但大部分为近似对称性）.