第八章 相互作用的规范理论(姜)

前面对自由场的量子化,显示了场的粒子性。可以认为,粒子是场激发的量子,从而能够描述粒子的产生、湮灭、传播过程。然而,自然界中广泛存在着粒子与粒子之间的相互作用,正是这些相互作用造成了粒子的产生、湮灭以及转化现象,人们由此才得以认识粒子本身。所以,我们还必须进一步考虑场的相互作用。

现在,自然界中已知的四种基本相互作用为:电磁相互作用、强相互作用、弱相互作用、引力相互作用。电磁相互作用存在于带电粒子之间,如原子核与核外电子构成原子,原子又构成分子,分子或原子又构成大千物质世界。强相互作用存在于微观世界,如质子和中子构成原子核,夸克构成质子或中子,从而形成了各种原子的原子核。弱相互作用也存在于微观世界,如原子核的放射性β衰变是由弱作用引发的($n\to p^{+}+e^{-}+\bar{\nu}_e$)。引力相互作用存在于任何两个有质量的物体之间,支配着宇宙间大尺度天体的运动及其相互作用。

电磁相互作用基于经典麦克斯维电磁理论,经量子化称量子电动力学(QED)。强相互作用的研究起源于1935年,Yukawa的核子之间通过交换π介子形成原子核的核力理论,1973年,Gross, Wilczek和Politzer提出SU(3)色规范群下的非阿贝尔规范场论可以作为强相互作用的量子场论,从而建立了量子色动力学(QCD)。弱相互作用的研究起源于原子核β衰变,1934年,费米提出四费米弱作用理论予以解释,1956年,李政道、杨振宁发现弱作用中宇称并不守恒,1958年,费曼、Gell-Mann, Marshak和Sudarshan ~~确定~~ 提出普适费米型弱作用V-A理论,1967年,Weinberg、Salam和Glashow提出弱作用和电磁作用可以统一用SU(2)×U(1)群下的非阿贝尔规范理论来描述,他们应用定域规范不变性和对称性自发破缺机制将弱作用和电磁作用统一起来,从而建立了量子味动力学(QFD)或弱电统一理论(WE)。

描述场的相互作用的一般方法是在自由场的基础上引进相互作用拉氏密度$\mathcal{L}_I$：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I,$$

其中$\mathcal{L}_0$是参与相互作用的场的自由拉氏密度，而$\mathcal{L}$是整个相互作用系统的总拉氏密度。

$\mathcal{L}_I$一般被表示为参与相互作用的场（或其时空导数）的连乘积。这导致各个场的运动将不是彼此独立而是互相关联的。对$\mathcal{L}_I$的进一步确定依赖于对称性的考虑和限制，如相对论不变性要求$\mathcal{L}_I$应是标量，且不是时空坐标的显函数；电荷守恒要求$\mathcal{L}_I$应是整体变换下的不变量等等。当然，各种守恒律对$\mathcal{L}_I$的限制还不足以完全确定其具体形式，一般情况下，尽可能采用最简单的形式。此外，由于相互作用的理论一般不能严格求解，故往往求助于微扰论，这就要求$\mathcal{L}_I$是可重整的。（而微扰展开的高阶项总是发散的，需设法消除，这就是重整化。）

60年代由杨振宁发展起来的规范理论，要求理论具有定域规范不变性，从而在相当大的程度上确定了相互作用的形式和传递相互作用的粒子（规范场），而且已经被证明是可重整的，因而在近代相互作用描述中起了十分重要的作用。如电磁相互作用具有定域U(1)阿贝尔规范对称性，电磁场属于U(1)规范场。弱电相互作用具有SU(2)×U(1)定域非阿贝尔规范对称性，由于这一理论中定域规范对称性自发破缺，一部分玻色子获得了很大的质量，它们传递弱作用，剩余规范作用为长程无质量电磁作用。强相互作用具有定域SU(3)非阿贝尔规范对称性，规范场粒子为带色的胶子。

一、经典的电磁相互作用

为简单，考虑轻子与电磁场之间的相互作用。在古典物理和量子物理之间存在着对应原理，利用$\boxed{\text{对应关系}}$，可以将古典电磁理论移植到量子理论中。

1. 旋量场与电磁场相互作用

古典自由粒子：　$H=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$

带电粒子在电磁场中：$H=e\phi+\sqrt{(\vec{p}-e\vec{A})^2+m^2}$

假设上面的变换由如下变换生成，
$$\begin{cases} H\to H'=H-e\phi, \\ \vec{p}\to\vec{p}'=\vec{p}-e\vec{A} \end{cases}$$
则合并为 $\boxed{p_\mu\to p_\mu'=p_\mu-eA_\mu}$

1) 从自由粒子哈密顿量获得在电磁场中运动的带电粒子的哈密顿量时 "最小电磁耦合"

$$p_\mu\longrightarrow p_\mu'=p_\mu-eA_\mu. \qquad (p_\mu=i\partial_\mu)$$

2) 从自由粒子波动方程获得在电磁场中运动的带电粒子的波动方程

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0 \\ \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} (i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=e\gamma^\mu A_\mu\psi(x) \\ \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)=-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \end{cases}}$$

2. 标量场与电磁场相互作用

1). $p_\mu\longrightarrow p_\mu'=p_\mu-eA_\mu$ 　　$(\because i\partial_\mu'=i\partial_\mu-eA_\mu,\ \therefore \boxed{\partial_\mu'=\partial_\mu+ieA_\mu})$

2).
$$\begin{cases} (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(x)=0 \\ (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi^*(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} (\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi(x)+m^2\phi=0 \\ (\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^*(x)+m^2\phi^*(x)=0 \end{cases}}$$

*. 上述方程描述了带电粒子在电磁场中如何运动，表现了电磁场对粒子的作用

*. 并不能描述带电粒子对电磁场的作用.

*. 为了描述带电粒子与电磁场之间的相互作用，我们需要考虑.
对自由带电粒子和自由电磁场的拉氏密度同时做变换.

二. 量子化的电磁相互作用.

我们从对称性出发，来看对称性对于~~对~~自由场和相互作用场的限制.

1. 自由场的整体规范不变性.

1) 各种自由场的拉氏密度.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\ \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\ \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{cases}$$

2) 整体规范变换.

上述自由场在规范变换下，自由拉氏密度均保持不变。θ 不依赖于 x。

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = e^{+i\theta}\phi \\ \phi^* \to \phi'^* = \phi^* e^{-i\theta} \end{cases} \quad \mathcal{L}_\phi \to \mathcal{L}_\phi' = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi = \mathcal{L}_\phi$$

$$\begin{cases} \psi \to \psi' = e^{+i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\theta} \end{cases} \quad \mathcal{L}_\psi \to \mathcal{L}_\psi' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_\psi$$

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \quad \mathcal{L}_A \to \mathcal{L}_A' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu' \partial^\mu A'^\nu - \partial_\mu A_\nu' \partial^\nu A'^\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) = \mathcal{L}_A$$

3). 守恒流. 守恒荷.

上述结论表明，自由场拉氏密度在整体规范变换下保持不变。

由Nother定理知，存在相应的守恒定律.

~~对 ϕ, A^μ : $j^\mu = 0$, $Q = 0$.~~

$$j^\mu = -i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\phi_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a^*}\phi_a^*\right)$$

$$Q = \int j^0 d^3x = -i\int\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}\phi_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a^*}\phi_a^*\right) d^3x$$

对实ϕ, A^μ : 由于 $\phi^* = \phi$, $A_\mu^* = A_\mu$, $j^\mu = 0$, $Q = 0$.

对复标场：

$$\begin{cases} j^\mu = -i(\partial^\mu \phi^* \phi - \partial^\mu \phi \phi^*) \\ Q = -i\int(\dot{\phi}^* \phi - \dot{\phi}\phi^*) d^3x \end{cases}$$

对旋量场：

$$\begin{cases} j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \\ Q = \int \psi^\dagger \psi d^3x \end{cases}$$

* 上述整体规范变换，可以选择任意的规范，只会引起相因子的变化，但是不会产生任何物理的结果

* 但是场量中 ψ, A_μ 均是时空 x 的函数，

对位于不同时空点的场分别进行不同的规范变换时，

它们之间的相对相因子也可以任意选择，这也不会产生任何物理结果。因此，规范变换本质上是定域的。

2. 相互作用场的定域规范不变性

引入依赖于时空坐标x的定域规范变换($\partial_\mu\theta(x)\neq 0$)，自由拉氏密度变化吗?

1) 定域规范变换

① $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu\theta(x)) - \partial_\nu(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$

故定域规范变换下，$\mathcal{L}_A$是不变的。

② 困难
$\begin{cases}\phi \longrightarrow \phi' = e^{+i\theta(x)}\phi \\ \phi^* \longrightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-i\theta(x)}\end{cases}$，相应$\begin{cases}\partial_\mu\phi \longrightarrow \partial_\mu\phi' = \partial_\mu(e^{+i\theta(x)}\phi) \\ \partial_\mu\phi^* \longrightarrow \partial_\mu\phi'^* = \partial_\mu(\phi^* e^{-i\theta(x)})\end{cases}$

$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$

~~$\longrightarrow \mathcal{L}'_\phi = \partial_\mu(e^{-i\theta(x)}\phi)\partial^\mu(\phi$~~

$\longrightarrow \mathcal{L}'_\phi = \partial_\mu(\phi^* e^{-i\theta(x)})\partial^\mu(e^{+i\theta(x)}\phi) - m^2\phi^* e^{-i\theta(x)} e^{+i\theta(x)}\phi \neq \mathcal{L}_\phi$

同理，
$\begin{cases}\psi \rightarrow \psi' = e^{+i\theta(x)}\psi \\ \bar\psi \rightarrow \bar\psi' = \psi e^{-i\theta(x)}\end{cases}$，相应 $\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{+i\theta(x)}\psi)$.

$\mathcal{L}_\psi = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$

$\longrightarrow \mathcal{L}'_\psi = \psi e^{-i\theta(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(e^{+i\theta(x)}\psi) \neq \mathcal{L}_\psi$.

故定域规范变换下，$\mathcal{L}_\phi$、$\mathcal{L}_\psi$不是不变的。

但是，规范不变性是自然界的普遍规律，它意味着大自然内在的规律是不依赖于人类认识的角度而改变的。这就表明，我们所构造的拉氏密度出了问题，需要修改。

③ 构造协变导数.

受带电粒子在电磁场中运动时，"最小电磁耦合"方法的启发，

$$P_\mu \longrightarrow P'_\mu = P_\mu - eA_\mu.$$

利用$P_\mu = i\partial_\mu$，有$i\partial_\mu \longrightarrow i\partial'_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$，我们引入"协变导数"

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x),$$

则自由拉氏密度变为
$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \\ \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{cases}$$

④定域规范变换下，协变导数的拉氏密度变换为 · $A'_\mu = (A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta)$

⟨1⟩
$$\begin{cases} \phi \to \phi' = e^{+i\theta(x)}\phi(x) \\ \phi^* \to \phi'^* = \phi^* e^{-i\theta(x)} \end{cases},$$

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = (\partial_\mu + ieA'_\mu)(e^{+i\theta(x)}\phi(x))$$
$$= e^{+i\theta}(+i\partial_\mu\theta + \partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\theta)\phi = e^{+i\theta}D_\mu\phi$$
$$(D_\mu\phi)^* \to D'^*_\mu\phi'^* = (\partial_\mu - ieA'_\mu)(\phi^*(x)e^{-i\theta(x)})$$
$$= (-i\partial_\mu\theta + \partial_\mu - ieA_\mu + i\partial_\mu\theta)\phi^* e^{-i\theta(x)} = (D_\mu\phi)^* e^{-i\theta(x)}$$

则 $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$
$$\to \mathcal{L}'_\phi = (D'_\mu\phi')^* D'^\mu\phi' - m^2\phi'^*\phi'$$
$$= (D_\mu\phi)^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} D^\mu\phi - m^2\phi^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)}\phi.$$
$$= (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi = \mathcal{L}_\phi.$$
即 $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$ 定域规范不变.

⟨2⟩
$$\begin{cases} \psi \to \psi' = e^{+i\theta(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)} \end{cases},$$
$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = e^{i\theta(x)}D_\mu\psi.$$

则 $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$
$$\to \mathcal{L}'_\psi = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu\psi' - \bar{\psi}' m\psi'$$
$$= \bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}\, i\gamma^\mu e^{i\theta(x)} D_\mu\psi - \bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)} m\, e^{i\theta(x)}\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_\psi$$
即 $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ 定域规范变换下也不变！

⟨3⟩ $F_{\mu\nu} \equiv D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)A_\nu - (\partial_\nu + ieA_\nu)A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$

$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$

$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \partial'_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu\theta) - \partial_\nu(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$

则 $\mathcal{L}_A \to \mathcal{L}'_A = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_A$. 即 $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 定域规范不变

2) 满足定域规范不变的拉氏密度

① ϕ 与 A_μ 相互作用.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi+I} + \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_I$$

其中 $\begin{cases} \mathcal{L}_\phi = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi. \\ \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_I = ieA^\mu(\partial_\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2A^2\phi^*\phi \end{cases}$

标量场 ϕ、ϕ^* 通过电磁场 A_μ 而相互作用。因此,定域规范不变导致标量场相互作用时必存在电磁场

② ψ 与 A_μ 相互作用

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\psi+I} + \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_I$$

其中 $\begin{cases} \mathcal{L}_\psi = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_I = -e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{cases}$

旋量场 ψ、$\bar\psi$ 通过电磁场 A_μ 而相互作用。定域规范不变导致旋量场相互作用时必存在电磁场

☆ 综上,相互作用 $\mathcal{L}_I$ 的出现及形式,是在假设场之拉氏密度在定域规范变换下具有不变性得到的,因此,对称性决定了相互作用。

★ 由 $\mathcal{L}_I$ 可知,两粒子间不能直接产生电磁作用,二者之间只能通过规范场—光子来传递作用。所以,定域规范不变性的本质在于产生了传递相互作用的规范场。

☆ 而粒子间的相互作用只能通过媒介—规范场来实现,不存在超距作用。

☆ 电磁作用中,规范变换 $e^{i\theta(x)}$ 构成 $U(1)$ 群,

$$U(1) = e^{i\theta(x)}$$

称为电磁作用规范变换群,该群元素彼此对易,是阿贝尔群,称电磁作用是 $U(1)$ 规范或阿贝尔理论。

★ 对弱电统一作用:规范变换构成 $SU(2)\times U(1)$ 群,非阿贝尔理论.

对强相互作用:规范变换构成 $SU(3)$ 群,非阿贝尔理论.

注: $\{U = e^{-iT^a\theta^a}\}$ $SU(3)$.

3. 相互作用场的运动方程

将相互作用场拉氏密度 $\mathcal{L}$ 代入拉氏方程 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} = 0$，

1). 标量场 ϕ 的电磁作用运动方程.

$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$，$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$，$\mathcal{L}_I = ieA^\mu(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi) + e^2 A^2 \phi^* \phi$

① $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2\phi - ie\partial_\mu \phi A^\mu + e^2 A^2 \phi$，$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu(\partial^\mu \phi + ie\phi A^\mu)$，联立得

$$\boxed{\begin{cases} (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi + m^2\phi = 0 \\ (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^* + m^2\phi^* = 0 \end{cases}}$$

取复共轭

② $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = ie(\partial^\nu \phi^* \phi - \phi^* \partial^\nu \phi) + 2e^2 A^\nu \phi^* \phi$，

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right)$$

$$= \partial_\mu(-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu)$$

联立得

$$\boxed{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = ie(\phi^* \partial^\nu \phi - \partial^\nu \phi^* \phi) - 2e^2 A^\nu \phi^* \phi}$$

2) 旋量场 ψ 的电磁作用运动方程

$\mathcal{L}_\psi = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$，$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，$\mathcal{L}_I = -e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu$.

① $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\psi} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\gamma^\mu\psi A_\mu$，$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar\psi)} = 0$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} & i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\psi = 0 \\ \text{或}\quad & (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = +e\gamma^\mu A_\mu \psi \end{aligned}}$$

② $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -e\bar\psi\gamma^\nu\psi$，$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu(-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu)$

$$\therefore \boxed{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = e\bar\psi\gamma^\nu\psi}$$

* 上述方程形式上与经典带电粒子在电磁场中的运动方程相同，但含义不同.
* 经典时，电磁场只对带电粒子产生相互作用；
  量子化后，不仅如此，带电粒子也会对电磁场产生相互作用.
* 从而在定域规范不变性要求的电磁相互作用，完整地描述了带电粒子与电磁场之间的相互作用.

4. 库仑规范下相互作用场的量子化.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j - \frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

(库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\ A_0=0$)

上式含有时间导数 $\dot{\psi}$、$\dot{A}_\mu$，故相互作用系统正则坐标为 ψ、$\vec{A}$，相应正则动量为

$$\pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^+, \qquad \pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^i} = -\dot{A}_i = \dot{A}^i$$

则 $H=\int\mathcal{H}\,d^3x$,

$$\mathcal{H} = \pi_i\dot{A}^i + i\psi^+\dot{\psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_\psi + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_I,\ 其中 \begin{cases}\mathcal{H}_\psi = \psi^+(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi \\ \mathcal{H}_A = \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}}\cdot\dot{\vec{A}} + \nabla A^i\cdot\nabla A^i) \\ \mathcal{H}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu\end{cases}$$

量子化后.

$$\begin{cases}\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi^+_\beta(\vec{x}',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ [A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)] = i(\delta^{ij} - \frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2})\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\end{cases}$$

正则运动方程

$$\begin{cases}\dot{\psi} = i[H,\psi] \\ \dot{\psi}^+ = i[H,\psi^+]\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{A}^i = i[H,A^i] \\ \ddot{A}^i = i[H,\dot{A}^i]\end{cases}$$

5. 洛伦兹规范下相互作用场的量子化.

洛伦兹规范下 $\partial^\mu A_\mu=0$, $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}\dot{A}_\nu\dot{A}^\nu + \frac{1}{2}\nabla A_\nu\cdot\nabla A^\nu$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\dot{A}_\nu\dot{A}^\nu + \frac{1}{2}\nabla A_\nu\cdot\nabla A^\nu - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

上式含有时间导数 $\dot{\psi}$、$\dot{A}_\mu$，故相互作用系统正则坐标为 ψ, A_μ，相应正则动量为

$$\pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^+, \quad \pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu$$

则 $H=\int\mathcal{H}\,d^3x$

$$\mathcal{H} = \pi^\mu\dot{A}_\mu + i\psi^+\dot{\psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_\psi + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_I,\ 其中 \begin{cases}\mathcal{H}_\psi = \psi^+(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi \\ \cancel{\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}(\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu} \\ \mathcal{H}_A = -\frac{1}{2}(\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu + \nabla A_\mu\cdot\nabla A^\mu) \\ \mathcal{H}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu\end{cases}$$

量子化后，洛伦兹条件为

$$\langle\phi|\partial^\mu A_\mu(x)|\phi\rangle = 0$$

量子化条件 $\begin{cases}\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi^+_\beta(\vec{x}',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \\ [A_\mu(\vec{x},t),\dot{A}_\nu(\vec{x}',t)] = -ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\end{cases}$

正则运动方程

$$\begin{cases}\dot{\psi} = i[H,\psi] \\ \dot{\psi}^+ = i[H,\psi^+]\end{cases}, \quad \begin{cases}\dot{A}_\mu = i[H,A_\mu] \\ \ddot{A}_\mu = i[H,\dot{A}_\mu]\end{cases}, \quad \begin{cases}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = -e\gamma^\mu A_\mu\psi \\ \partial_\nu\partial^\nu A_\mu = \Box A_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\end{cases}$$